

C.N.E.A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº	AÑO
3	1981

00.81.04

CNEA-NT 7 /81

CAB-NT 4/81

REPUBLICA ARGENTINA
COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
Dependiente de la Presidencia de la Nación
CENTRO ATOMICO BARILOCHE

MODELACION DE PROBLEMAS DE FLUJO VISCOSO, PLANO
E INCOMPRESIBLE CON TERMINO DE INERCIA OMITIDO.

EL PROGRAMA BIARMON1

Sergio Pissanetzky

Buenos Aires

1981

RESUMEN

Se presenta el programa BIARMON1, que es capaz de resolver la ecuación diferencial parcial cuasi-biarmónica, de cuarto orden, en dos dimensiones. El método empleado es el de Galerkin sobre una aproximación con elementos finitos. Los elementos son triángulos trinodales no-conformes, con tres incógnitas nodales por cada nodo.

La ecuación cuasi-biarmónica gobierna varios fenómenos, por ejemplo el flujo plano de fluidos viscosos incompresibles, la deformación mecánica de placas con espesor finito y la elasticidad plana. En este trabajo describimos el uso del programa para fluidos viscosos incompresibles con flujo plano, en casos en que el término de fuerzas de inercia presente en la ecuación de Navier-Stokes pueda ser omitido, ya sea por ser el flujo muy lento (creeping) o por no sufrir aceleraciones las partículas del fluido.

El programa acepta que la viscosidad sea función de las coordenadas. Como datos de entrada deben proveerse, además, la descripción de la red de elementos finitos y las condiciones de borde. Como salida, el programa imprime los resultados, y opcionalmente, un gráfico de líneas de nivel de la función corriente o de cualquiera de las dos componentes de la velocidad, a elección del usuario.

ABSTRACT

We present the program BIARMON1, which solves the fourth order partial differential quasi-biharmonic equation, in two dimensions. The program uses the Galerkin method in a Finite Element approximation space. The elements are non-conforming triangles, with three nodes each and three nodal unknowns per node.

There are several physical phenomena governed by the quasi-biharmonic equation. Examples are the plane flow of viscous, incompressible fluids, the bending of plates with a finite thickness, and plane elasticity. Here we report the use of the program for the plane flow of viscous, incompressible fluids, in cases where the inertia terms of the Navier-Stokes equation can be omitted, either because the flow is slow (creeping) or just because the fluid particles are not accelerated.

The program accepts that the viscosity be a function of the coordinates. In addition, as input data, the user must provide a description of the mesh and the boundary conditions. As the output, the program will print the results and, optionally, a plott of the stream function or of either component of the velocity, at the user's choice.

1. ECUACIONES TERMOHIDRAULICAS DEL FLUJO DE CREEPING

La ecuación dinámica fundamental para el flujo de fluidos viscosos incompresibles es la ecuación de Navier-Stokes /1/:

$$\frac{Dv_i}{Dt} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_i = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \vec{f} \quad (1)$$

donde $\vec{v}(x, y, z, t)$ es la velocidad del fluido, $p(x, y, z, t)$ su presión, ρ la densidad constante, $\eta(x, y, z, t)$ la viscosidad, y \vec{f} una fuerza volumétrica por unidad de volumen del fluido que es comunmente el peso, pero que puede incluir otras fuerzas también. $D\vec{v}/Dt$ es la aceleración sustancial de las partículas del fluido. El flujo se llama creeping cuando los términos de inercia $D\vec{v}/Dt$ pueden ser despreciados frente a las fuerzas de viscosidad. Esta situación se produce para flujos lentos, y también para flujos tales que las partículas del fluido circulan con movimiento rectilíneo uniforme (o "casi" rectilíneo uniforme) y no experimentan aceleraciones. La ecuación de Navier Stokes para flujo de creeping es:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + f_i = 0 \quad (2)$$

y es lineal, lo cual hace mucho más sencilla su resolución numérica. Nótese que, para mayor generalidad, hemos evitado hacer la suposición usual de que η sea constante.

Cuando el fluido es incompresible, la ecuación de continuidad toma una forma sencilla:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3)$$

Finalmente, el sistema de 5 ecuaciones con las 5 incógnitas \vec{v} , p , T , donde $T(x,y,z,t)$ es la temperatura del fluido, se completa con la ecuación de transferencia térmica en la que omitimos el término de disipación viscosa, generalmente pequeño /1/:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T = \frac{1}{\rho c_p} \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (4)$$

donde k es la conductividad térmica y c_p es el calor específico a presión constante, y k puede, en general, ser función de las coordenadas y del tiempo.

Las ecuaciones (2) y (3) pueden resolverse por separado, hallando \vec{v} y p . Este tratamiento es válido para problemas desacoplados en que la distribución de temperaturas en el fluido no afecta su movimiento, y excluye explícitamente los casos de convección libre, aunque la misma sea muy lenta. Una vez hallado \vec{v} , se lo reemplaza en la ecuación (4), la que se convierte en lineal y puede resolverse numéricamente. Finalmente, conocida T , se hallan los flujos calóricos en las superficies que confinan al fluido:

$$\vec{q} = -k \nabla T \quad (5)$$

Es importante discutir aquí las razones por las que hemos evitado suponer que n y k sean constantes. Nuestro interés fundamental es poder resolver problemas de transferencia de calor en flujo estacionario laminar. Pero la transferencia ocurre cuando hay diferencias de temperatura entre distintos puntos del fluido, y n y k dependen fuertemente de la

temperatura. Por el momento, limitándonos a casos estacionarios, vamos a suponer que η y k son funciones conocidas de las coordenadas, pero no constantes, calculadas a partir de una distribución conocida de temperatura. De esta manera, el problema dinámico representado por la ecuación (2) está desacoplado del térmico, y puede resolverse separadamente. Tal proceder nos permitirá, por una parte, tratar directamente los casos más sencillos en que η y k puedan suponerse constantes, por no haber grandes variaciones de temperatura, y por otra parte deja la puerta abierta para tratar problemas acoplados cuando fuera necesario, de la siguiente manera: suponer η y k conocidos (por ejemplo constantes), resolver (2) obteniendo \vec{v} , con \vec{v} conocido resolver (4) obteniendo T , con T conocido calcular nuevos valores de η y k , usarlos en (2), obtener una nueva \vec{v} , usarla en (4), obtener una nueva T , y así continuar iterando hasta que las funciones \vec{v} , T , η y k no cambien más. No está garantizada la convergencia de este proceso, pero si converge lo hace hacia la solución correcta, y en la práctica generalmente converge.

Consideraciones muy parecidas pueden hacerse en relación con el término $(\vec{v} \cdot \nabla)v_i$ de la ecuación (1), que representa la aceleración sustancial de las partículas de fluido en casos estacionarios. Este término ha sido despreciado para obtener la ecuación (2). Pero también se puede suponer que es conocido, e incluirlo dentro del término \vec{f}/ρ , obteniéndose la misma ecuación (2). Cuando la ecuación (2) escrita de esta manera se resuelve, se obtiene \vec{v} , y se puede calcular $(\vec{v} \cdot \nabla)v_i$. Con este valor del término de aceleración se

calcula una nueva \vec{f} , que se vuelve a usar en la ecuación (2), etc. De nuevo, la convergencia de este proceso iterativo no está garantizada, pero en la práctica se sabe que converge hacia la solución correcta cuando $(\vec{v} \cdot \nabla)v_i$ no es demasiado grande /2/.

2. CREEPING PLANO

Ahora consideramos el caso en que el flujo, además de ser creeping, es plano. La velocidad es paralela en todas partes a un plano x, y , y tanto la velocidad como la presión, la temperatura y las fuerzas volumétricas \vec{f} son funciones sólo de x, y .

Para flujo incompresible plano, la ecuación de continuidad (3) toma la forma:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

Como es bien sabido, en este caso se puede introducir la función corriente ψ , definida de tal modo que:

$$v_x = - \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

La ecuación (6) queda así idénticamente satisfecha. Reemplazando las (7) en las (2) y separando las dos ecuaciones para las componentes x e y , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[-2\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right] &= -f_x \\
 -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] &= -f_y
 \end{aligned} \tag{8}$$

Derivando la primera respecto de y , la segunda respecto de x , y restando, eliminamos p , y obtenemos la ecuación cuasi-biarmónica (9), que es lineal y contiene ψ como única incógnita, pero que es de cuarto orden:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \tag{9}$$

Cuando η es constante, la ecuación (9) se reduce a la bien conocida ecuación biarmónica:

$$\eta \nabla^4 \psi = -\frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \tag{9a}$$

Las condiciones de borde para la ecuación biarmónica o para la cuasi-biarmónica son:

$$\begin{aligned}
 \psi &= \text{dato} \\
 \frac{\partial \psi}{\partial n} &= \text{dato}
 \end{aligned} \tag{10}$$

sobre una superficie S cerrada que rodea el volumen V en que se resuelve el problema, donde n es la normal a la superficie. En nuestro caso plano, S es en realidad una línea cerrada que rodea la región de interés.

Una vez resuelta la ecuación cuasi-biarmónica, y obtenido ψ , pueden calcularse las componentes de la velocidad

usando las (7). La presión $p(x,y)$ puede obtenerse integrando la ec.(2) a lo largo de una línea ℓ que va desde un punto x_0, y_0 , donde la presión es p_0 , hasta el punto x,y . Para ello escribimos la (2):

$$dp \equiv \nabla p \cdot d\vec{\ell} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\ell_i \quad (11)$$

e integrando:

$$p(x,y) = p_0 + \int_{x_0, y_0}^{x,y} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\ell_i \quad (12)$$

Una vez resuelto el problema dinámico, que hemos considerado desacoplado del térmico, se conoce $\vec{v}(x,y)$, y se puede resolver el problema térmico por medio de la forma estacionaria bidimensional de la ec.(4):

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\rho c_p} \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (13)$$

requiriendo como datos de borde los valores de T o de $\partial T / \partial n$ sobre toda la frontera. La ecuación (13) es una ecuación de difusión.

3. PROPIEDADES DE LA FUNCION CORRIENTE

Las propiedades de la función corriente ψ definida por las ecuaciones (7) son importantes en la práctica para determinar las condiciones de borde para la ecuación biarmónica

(9). Brevemente, pasaremos revista a esas propiedades. En flujo estacionario, las líneas de corriente son líneas tan gentes a la velocidad en todos sus puntos, definidas en con secuencia por:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad (14)$$

En el caso plano que nos interesa, la definición se reduce a $v_y dx - v_x dy = 0$, y usando (7) nos queda:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \equiv d\psi = 0 \quad (15)$$

Este resultado muestra que $\psi = \text{constante}$ es la ecuación de una línea de corriente. Cuando existe un cuerpo sólido fijo dentro del fluido, el borde sólido es una línea de corriente, y por lo tanto debemos imponer:

$$\psi = \text{constante} \quad (16)$$

a lo largo del borde sólido. Este resultado concuerda con la exigencia $\vec{v}=0$ que se impone como condición de borde para la ecuación de Navier-Stokes (1), pues la anulación de tanto la componente tangencial como la normal de la velocidad sobre un borde sólido implican $\psi = \text{constante}$ y además $\partial\psi/\partial n = 0$ sobre el borde sólido.

Si trazamos una línea entre dos puntos A y B en el pla no, podemos calcular el caudal (volumen/unidad de tiempo) que atraviesa dicha línea de la siguiente manera:

$$V = \int_A^B (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\ell \quad (17)$$

donde \vec{n} es la normal a la línea. Si $d\vec{\ell}$ tiene componentes (dx, dy) , las de $\vec{n}d\ell$ son $(-dy, dx)$, y usando (7):

$$V = \int_A^B \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A \quad (18)$$

Este resultado muestra que el caudal que fluye entre dos líneas de corriente dadas es constante e igual a la diferencia de los valores de ψ correspondientes a las dos líneas de corriente. Cuando el flujo se desarrolla entre dos cuerpos fijos, al borde de uno de los cuales se asigna el valor constante ψ_A de la función corriente, y al borde del otro, el valor ψ_B , la diferencia $\psi_B - \psi_A$ debe ser por lo tanto igual al caudal que fluye entre ambos cuerpos.

4. ELEMENTOS FINITOS

Nuestra tarea es, ahora, resolver la ecuación cuasi-biarmónica (9), que escribimos de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left(\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} = 0 \quad (19)$$

recordando que f_x , f_y son funciones conocidas y que $\eta(x, y)$ es la viscosidad dinámica. Si en la ecuación (19) reemplazamos la solución exacta ψ y hacemos los cálculos indicados, el

resultado será exactamente 0. Pero ψ no se conoce, y lo vamos a aproximar por medio de otra función $\bar{\psi}$, expresada como una suma de otras funciones sencillas $N_i(x,y)$ multiplicadas por coeficientes constantes ψ_i a ser determinados:

$$\bar{\psi} = N_i \psi_i \quad (20)$$

donde usamos el convenio de suma sobre índices repetidos, omitiendo el símbolo \sum_i . Las funciones N_i , sencillas y conocidas, constituyen el espacio finito de funciones en el que trataremos de encontrar la mejor aproximación posible $\bar{\psi}$ a la solución ψ de la ecuación (19). Las funciones N_i pueden ser elegidas de muchas maneras diferentes, pero en el método de Elementos Finitos, esas funciones se eligen, precisamente, como los elementos finitos, también llamadas funciones interpolantes o funciones de forma, de la siguiente manera:

a) El recinto de interés se aproxima por medio de una red de elementos finitos, que consiste en un conjunto de figuras geométricas sencillas, llamadas también elementos finitos. En dos dimensiones, estas figuras son triángulos o cuadriláteros.

b) Se asigna un conjunto de nodos. Lo más sencillo es colocar nodos en todos los vértices de los elementos, pero puede haber nodos también en los lados o dentro de los elementos. Sea N la cantidad total de nodos.

c) A cada nodo i se asigna una función interpolante N_i , que es distinta de cero solamente en los elementos que tienen el nodo i como uno de sus nodos, y que dentro de esos

elementos es un polinomio sencillo en x, y . La elección más sencilla es usar polinomios lineales y exigir que N_i tome el valor 1 en el nodo i y decaiga linealmente hasta anularse sobre todos los lados opuestos de los elementos. Pero otras elecciones son también posibles, por ejemplo para resolver la ecuación cuasi-biarmónica usaremos polinomios de tercer grado definidos sobre una red de triángulos con nodos solamente en los vértices, pero además asignaremos tres funciones interpolantes a cada nodo i .

d) Una consideración importante para elegir las N_i es el grado de continuidad que se requiere de la función $\bar{\psi}$ y sus derivadas respecto de x e y . Cuando se eligen N_i lineales, $\bar{\psi}$ resulta una función continua con derivadas primeras acotadas pero discontinuas (continuidad C^0). Eso es satisfactorio para aproximar la solución de una ecuación diferencial de segundo orden /3/, como por ejemplo la ecuación de Laplace. Pero para una ecuación de cuarto orden, como la cuasi-biarmónica, se requiere que $\bar{\psi}$ y sus derivadas primeras sean continuas, mientras que sus derivadas segundas pueden ser discontinuas pero acotadas (continuidad C^1). Esto se logra usando polinomios cúbicos para las N_i e imponiendo ciertas condiciones en las fronteras entre elementos: si la continuidad de las derivadas primeras se logra exactamente, los elementos se llaman conformes, pero si se logra sólo aproximadamente, se llaman nó conformes. En este trabajo usaremos elementos no conformes, los que en la práctica dan resultados numéricos mejores que los conformes /3/.

5. EL METODO DE GALERKIN

Para determinar la solución aproximada $\bar{\psi}$ de la ecuación (20), debemos determinar los coeficientes ψ_i , llamados valores nodales pues están asociados con los nodos de la red. Si en la ecuación (19) reemplazamos $\bar{\psi}$ en lugar de ψ y hacemos los cálculos, no vamos a obtener 0 exacto sino una cierta función $\epsilon(x,y)$ que representa el error de la solución $\bar{\psi}$. El método de Galerkin consiste en hacer mínima esta función de error $\epsilon(x,y)$ exigiéndole que sea ortogonal a todo el espacio aproximante, o sea a todas las funciones N_i , y determinar de esta manera los coeficientes ψ_i , o sea:

$$\int_V N_i \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\eta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\eta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} \right) + 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\eta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \right] dV = 0 \quad (21)$$

Para mayor generalidad continuaremos refiriéndonos al "volumen V rodeado por una superficie S" en que se resuelve el problema. Como nuestro problema es plano, las integrales de volumen se calculan sobre una "tajada" de espesor unitario, y las de superficie sobre el borde lateral de la tajada.

Si en la ecuación (21) reemplazamos $\bar{\psi}$ dada por la ecuación (20), los coeficientes ψ_i saldrán fuera de las integrales. Las integrales contendrán sólo funciones conocidas y podrán ser calculadas, obteniéndose un sistema de ecuaciones lineales con las ψ_i como incógnitas. Pero antes debemos transformar las integrales de la ecuación (21) mediante integración por partes, ya que no se pueden calcular las derivadas cuartas de $\bar{\psi}$, cuyas derivadas segundas ya son disconti-

nuas. Tomando un término típico del integrando, y haciendo una integración por partes, tenemos:

$$\int_V N_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} \right) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left[N_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} \right) \right] dV - \int_V \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} \right) dV \quad (22)$$

$$= \oint_S N_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} \right) n_x dS - \int_V \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} \right) dV$$

donde hemos usado una fórmula bien conocida para transformar la integral de volumen en una integral de superficie y n_x es la componente x de la normal saliente a S . Las funciones N_i se eligen de tal manera que sus valores y los de sus derivadas primeras se anulen sobre S , por lo que la integral de superficie en (22) se anula. Integrando nuevamente por partes:

$$\int_V N_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} \right) dV = - \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \eta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} \right\} dV + \int_V \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \eta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} dV \quad (23)$$

$$= - \oint_S \frac{\partial N_i}{\partial x} \eta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} n_x dV + \int_V \eta \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} dV$$

y la integral de superficie nuevamente se anula.

De la misma forma podríamos haber probado que:

$$\int_V N_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} \right) dV = \int_V \eta \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} dV \quad (24)$$

$$\int_V N_i \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\eta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} \right) dV = \int_V \eta \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} dV \quad (25)$$

$$\int_V N_i \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\eta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} \right) dV = \int_V \eta \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} dV \quad (26)$$

$$\int_V N_i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\eta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x \partial y} \right) dV = \int_V \eta \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x \partial y} dV \quad (27)$$

Los términos restantes de la ecuación (21) se pueden calcular directamente y dan origen a un vector columna de componentes b_i :

$$b_i = \int_V N_i \left(- \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) dV \quad (28)$$

donde hemos usado los signos apropiados para escribir $+b_i$ en el segundo miembro de (21).

Reemplazando las ecuaciones (23)-(28) en la (21) obtenemos el siguiente resultado, que es idéntico al obtenido por Atkinson /4/ a partir de una formulación variacional del mismo problema:

$$\int_V \eta \left(4 \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} \right) dV = b_i \quad (29)$$

Finalmente, para obtener el sistema de ecuaciones lineales con las ψ_i como incógnitas, reemplazamos $\bar{\psi}$ en la (29) por $N_j \psi_j$, según lo da la ecuación (20); el resultado es:

$$A_{ij}\psi_j = b_i \quad (30)$$

donde:

$$A_{ij} = \int_V \left(4 \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \right) dV \quad (31)$$

La matriz A_{ij} es simétrica y puede calcularse numéricamente pues las N_i son conocidas y sus derivadas segundas acotadas e integrables. Recordemos que esto último se logra exigiendo que la aproximación $\bar{\psi}$ sea continua y tenga derivadas primeras continuas, de lo contrario no podríamos integrar las derivadas segundas.

El sistema (30) tiene tantas ecuaciones como funciones N_i se usaron en la aproximación (20) o en la condición de Galerkin (21), y consta por lo tanto de tantas ecuaciones como incógnitas hay en el problema. Su solución determina los coeficientes ψ_i de la aproximación (20).

6. EL PROGRAMA BIARMON1

El programa BIARMON1 resuelve la ecuación cuasi-biarmónica (9) sometida a las condiciones de borde (10). Para ello calcula la matriz A_{ij} y el vector b_i realizando todas las integraciones indicadas en las ecuaciones (31) y (28), y luego resuelve el sistema lineal (30). Los procedimientos utilizados para el cálculo de las derivadas necesarias, y para el cálculo de las integrales por cuadratura numérica se describen en /5/. El ensamblaje de la matriz A_{ij} a partir de inte

grales calculadas separadamente sobre cada elemento finito, y la resolución del sistema (30), se hacen empleando técnicas de matrices ralas /6/. Para generar la red de elementos finitos se emplea el programa KUBIK /7/. La graficación de los resultados se hace empleando el paquete GRAFEF y los procedimientos para evaluación rápida de una función polihédrica /8/.

El programa trabaja sobre una red compuesta por triángulos trinodales nód-conformes. Las funciones interpolantes N_i para dichos triángulos están dadas en la página 187 de /3/, y son polinomios de tercer grado en dos variables. Hay tres funciones interpolantes asociadas a cada nodo de la red. También hay tres incógnitas nodales asociadas a cada nodo, en correspondencia biunívoca cada incógnita con cada función interpolante. Las funciones interpolantes son complicadas debido el hecho que se las define de tal manera que las incógnitas nodales asociadas a cada nodo sean precisamente, y en ese orden los valores nodales de:

$$\begin{aligned} \psi \\ v_x &\equiv -\partial\psi/\partial y \\ v_y &\equiv \partial\psi/\partial x \end{aligned} \quad (32)$$

en ese nodo. Esto significa que, aunque el problema se resuelve sólo para ψ mediante la ecuación (9), se obtiene como solución los valores de ψ , v_x y v_y en cada nodo. Esta es una característica muy conveniente del programa BIARMON1, que evita tener que usar las ecuaciones (7) para obtener la velocidad.

7. LAS CONDICIONES DE BORDE

Las condiciones de borde (10) se imponen en el programa asignando valores a las incógnitas nodales correspondientes sobre el borde del recinto de solución. Las incógnitas con valores asignados dejan de ser incógnitas en el sentido correcto de la palabra, y se llaman incógnitas o variables de Dirichlet. Para poder asignar las condiciones de borde en forma correcta es muy importante tener en cuenta las consideraciones siguientes.

A lo largo de un lado de un triángulo, las funciones interpolantes, y por lo tanto la función buscada $\bar{\psi}$, son polinomios cúbicos en la coordenada de línea correspondiente a ese lado. Un polinomio de tercer grado contiene 4 constantes y queda por lo tanto determinado cuando se dan 4 y sólo 4 condiciones. Estas 4 condiciones son, exactamente, los valores de ψ y de su derivada tangencial en los dos nodos que definen el lado. Por lo tanto, la exigencia de dar ψ en todo el contorno del recinto de interés, equivale a dar los valores nodales de ψ y de sus derivadas tangenciales en todos los nodos del perímetro. Como además las ecuaciones (10) exigen dar como dato las derivadas normales en todo el perímetro, y como además dar la derivada normal y la tangencial equivale a dar $\partial\psi/\partial x$ y $\partial\psi/\partial y$, o sea v_x y v_y , resulta que hay que dar como dato los valores nodales de ψ , v_x y v_y en todos los nodos del perímetro del recinto de interés. Esta conclusión de carácter general lleva a expresar las siguientes consideraciones para casos particulares:

- En todos los nodos del borde de un cuerpo sólido fijo debe imponerse $\psi = \text{constante}$, $v_x = v_y = 0$.
- Cuando hay varios cuerpos fijos, se asignan a sus bordes valores constantes de ψ que respeten el resultado expresado por la ecuación (18). Si el caudal que fluye entre dos cuerpos dados no se conoce, no debe imponerse la condición $\psi = \text{constante}$ sobre uno de ellos, sino sólo $v_x = v_y = 0$, dejando el valor constante de ψ como una incógnita del problema a ser determinado por el programa.
- En las bocas de entrada y salida de fluido al recinto de interés deben darse los valores de v_x y v_y en todos los nodos, y también los de ψ calculados de tal manera que sea respetada la ecuación (18).
- Cuando existe un plano de simetría que divide el recinto de interés en dos partes que son, ellas, las condiciones de borde y la solución, imágenes especulares unas de otras, se puede resolver el problema en sólo medio recinto, con considerable economía de esfuerzo computacional. El plano de simetría es forzosamente una línea de corriente, y debe imponerse sobre él la anulación de la velocidad normal, no así de la tangencial, y la constancia de ψ . Es interesante notar aquí que subsisten como incógnitas sobre el plano de simetría los valores nodales de la derivada tangencial de ψ , por lo que habría que escribir ecuaciones para ellos con funciones N_i , cuyos valores y/o derivadas no se anulen sobre el plano de simetría, y no todas las integrales de superficie en las ecuaciones (22) y (23), por ejemplo, se anularían si tuvieran que calcularse sobre el plano de simetría. Pero dichas integrales en realidad no necesitan ser calcu-

ladas, porque si pensamos en el problema sobre el recinto total como la suma de los problemas sobre cada medio recinto, al recorrer el perímetro de cada medio recinto el plano de simetría resultaría recorrido en sentidos opuestos y las integrales resultantes se cancelarían al sumar los dos semi-problemas.

8. PREPARACION DE DATOS PARA EL PROGRAMA BIARMON1.

Los datos para el programa BIARMON1 constan de dos conjuntos de tarjetas, a los que nos referiremos como "Datos de la red" y "Datos de Dirichlet", en el mismo orden en que van en el programa.

Datos de la red: Este conjunto de datos consta de varias tarjetas en formato normalizado, todas ellas excepto la primera perforadas por la subrutina LEERED del programa generador de redes KUBIK /7/. La primera tarjeta, a ser perforada por el usuario, lleva en las columnas 1 y 2 el número 02, en las columnas 3 a 76 el nombre de la red (asignado arbitrariamente por el usuario), y en las columnas 77 a 80 el número NT que indica la cantidad de tarjetas que siguen en el conjunto "datos de la red".

Siguen NT tarjetas, que ya vienen perforadas por el programa KUBIK. Estas tarjetas están numeradas de 1 a NT en las columnas 1 a 4, y en las restantes columnas contienen la descripción de la red de triángulos trinodales en que se desea resolver el problema, que consiste de varios vectores reales y enteros, perforados los enteros en formato

A2 y los reales en formato A4.

El programa BIARMON1 verifica la cantidad y la numeración de las tarjetas, y emite un mensaje y para si se detecta un error.

Datos de Dirichlet: Este conjunto de datos consta de varias tarjetas, que deben ser perforadas por el usuario.

La primera tarjeta contiene, en formato (4I5), los números:

KANT, IGRAF, NC, NPH

donde:

KANT es la cantidad de tarjetas con datos de Dirichlet que siguen después de la primera tarjeta.

IGRAF indica si el usuario desea o no un gráfico de los resultados. Cuando IGRAF=0 no se obtiene gráfico. Cuando IGRAF=1, 2 ó 3, se obtiene un gráfico de las líneas de nivel de ψ , v_x ó v_y , respectivamente.

NC y NPH se dan sólo cuando se pide el gráfico. NC es la cantidad de líneas de nivel a representar (rango 2 a 35) y NPH es el ancho que tendrá el gráfico medido en caracteres de la impresora (máximo 132).

Después de la primera tarjeta, siguen KANT tarjetas con los datos de Dirichlet, en formato (F10.0, I1,23I3). Para prepararlas, el usuario debe primero anotar todas las condiciones de borde del problema que desea resolver en forma de la siguiente tabla:

NUMERO DEL NODO	VALOR DE ψ	VALOR DE v_x	VALOR DE v_y

Notar que no necesariamente se dan los tres valores en cada nodo. Por ejemplo, sobre un plano de simetría paralelo al eje x se dá solamente $\psi = \text{constante}$ y $v_y = 0$.

A continuación, el usuario debe tener en cuenta que las tres incógnitas nodales asociadas a cada nodo están numeradas como sigue:

ψ es la incógnita número 1,

$v_x \equiv -\partial\psi/\partial y$ es la incógnita número 2,

$v_y \equiv \partial\psi/\partial x$ es la incógnita número 3,

y preparar la siguiente tabla:

VALOR QUE SE IMPONE A LA INCOGNITA	INCOGNITA NUMERO	NODOS EN QUE SE IMPONE ESE VALOR A ESA INCOGNITA (MAXIMO 23 NODOS EN CADA REGLON)

Finalmente, esta tabla es la que debe perforarse en KANT tarjetas en formato (F10.0, I1, 23I3), a razón de una línea de la tabla por tarjeta.

9. UN EJEMPLO.

Como ejemplo de uso del programa BRIAMON1 hemos resuelto el problema del flujo de creeping de un fluido viscoso en la sección de entrada entre dos planos semiinfinitos separados por una distancia $2b$, ver la Figura 1. El fluido entra con $v_x=1$, $v_y=0$ y al cabo de una distancia a alcanza la distribución de velocidades asintótica (aproximadamente) dada por:

$$v_x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{b} - 1 \right)^2 \quad (33)$$

$$v_y = 0 \quad (34)$$

Como el caudal es $V=2b$, imponemos $\psi=0$ en el borde superior y $\psi=2b$ en el borde inferior. En estos dos bordes también imponemos $v_x=v_y=0$. En el borde izquierdo imponemos $v_x=1$, $v_y=0$, y para que se satisfagan las ecuaciones (7) imponemos $\psi=2b-y$. En el borde derecho imponemos la función ψ siguiente, obtenida reemplazando la primera de las ecuaciones (7) en la (33) e integrando:

$$\psi = 2b + \frac{y^3}{2b^2} - \frac{3y^2}{2b} \quad (35)$$

En resumen, las condiciones de borde son:

Borde inferior: $\psi = 2b$, $v_x=v_y=0$.

Borde superior: $\psi = 0$, $v_x=v_y=0$.

Borde izquierdo: $\psi = 2b-y$, $v_x=1$, $v_y=0$.

Borde derecho: $\psi = 2b + \frac{y^3}{2b^2} - \frac{3y^2}{2b}$, $v_x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{b} - 1 \right)^2$, $v_y=0$

El recinto de interés para el caso $a=2$, $b=1$, ha sido discretizado por medio de la red de 32 triángulos trinodales que se muestra en la Figura 2. Esta red tiene 25 nodos, y habiendo 3 incógnitas asociadas con cada nodo, hay en total 75 incógnitas. Las condiciones de borde deben ser impuestas en los nodos que están sobre los bordes. Para ello debemos decidir primero si vamos a considerar los nodos 1 y 5 como pertenecientes al borde izquierdo, o al inferior y superior respectivamente. Si consideramos los nodos 1 y 5 como

pertenecientes al borde izquierdo, tendremos que imponer $v_x=1$, en ambos, y eso hará que v_x no sea nulo sobre los segmentos 1-6 y 5-10, sino que sea decreciente de 1 a 0 a lo largo de ambos segmentos (pues en 6 y 10 impondremos $v_x=0$). Si, por otra parte consideramos que los nodos 1 y 6 pertenecen al borde inferior y al superior, respectivamente, tendremos que imponer $v_x=0$ en ambos. Como $v_x \equiv -\partial\psi/\partial y$, eso hará que ψ no sea igual a $2b-y$ sobre los segmentos 1-2 y 4-5, que pertenecen al borde izquierdo en que pretendemos que sea $\psi=2b-y$. La tarea del analista numérico consiste en determinar cual de los dos casos representa mejor la realidad que él quiere modelar. Suponiendo que elegimos el primer caso y consideramos los nodos 1 y 5 como pertenecientes al borde izquierdo, obtenemos la tabla de condiciones de borde Tabla 1, en que los valores de ψ y v_x han sido calculados teniendo en cuenta las coordenadas de los nodos correspondientes.

Finalmente, a partir de la Tabla 1 se prepara la Tabla 2 de datos de Dirichlet, que consta de 12 tarjetas a ser perforadas en formato (F10.0,I1,23I3).

Con los datos preparados como se indica en la sección anterior, el programa fue ejecutado en la IBM-360/44 del Centro Atómico Bariloche. La ejecución lleva unos 2 minutos, más algo más de 3 minutos para compilar y editar (el programa tiene varias fases). Los resultados, que se muestran en la Tabla 3, están en muy buen acuerdo con los obtenidos por otros autores para este problema /3, pág.319/. La leve asimetría que se observa en los resultados se debe a la discretización, que no es simétrica respecto al eje medio entre los planos y por lo tanto define una dirección preferencial.

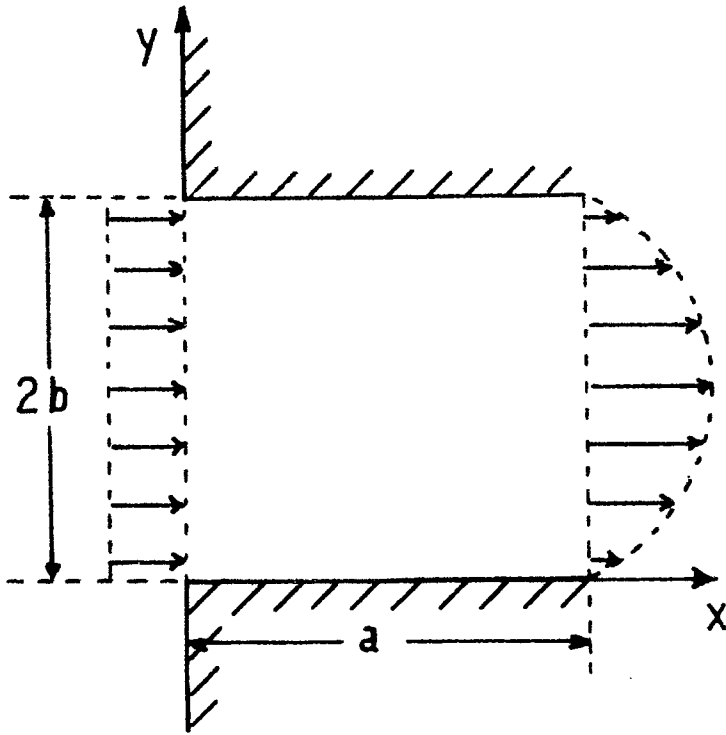


FIGURA 1

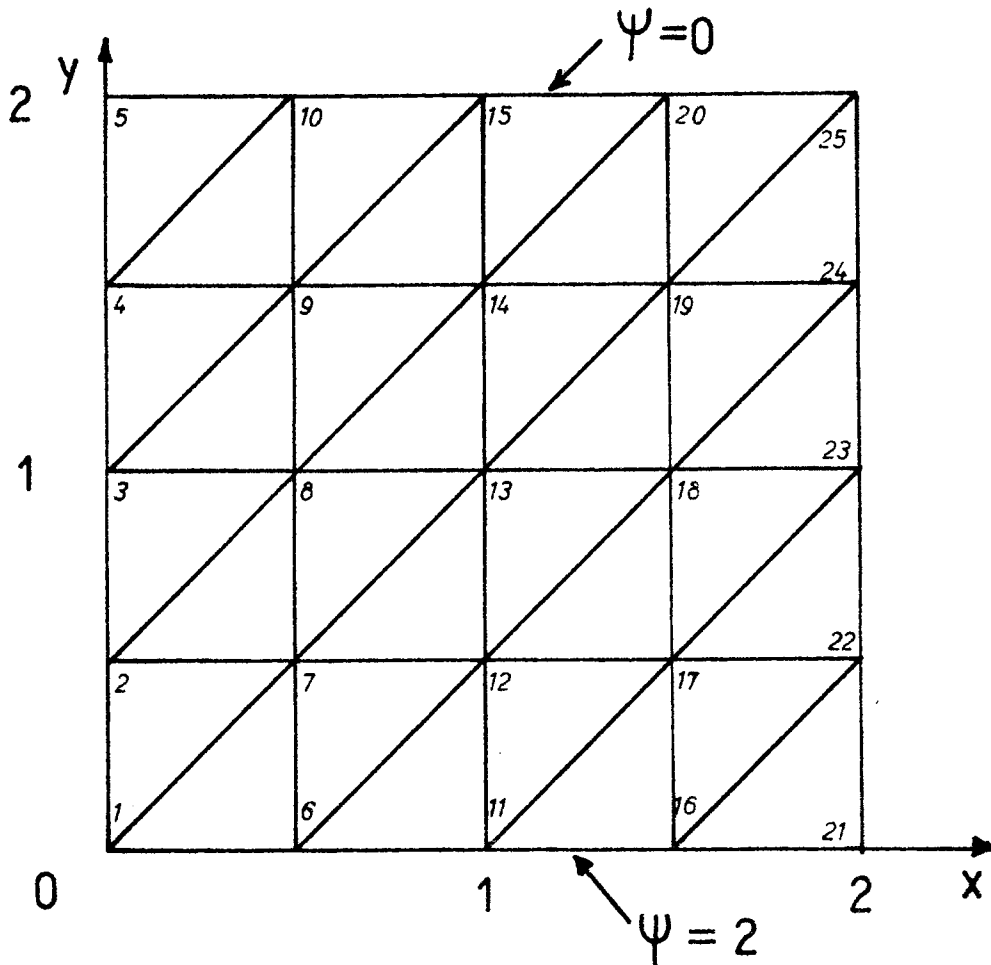


FIGURA 2

TABLA 1

Condiciones en los bordes

Nodo	ψ	$v_x = -\partial\psi/\partial y$	$v_y = \partial\psi/\partial x$
1	2.	1.	0.
6	2.	0.	0.
11	2.	0.	0.
16	2.	0.	0.
21	2.	0.	0.
5	0.	1.	0.
10	0.	0.	0.
15	0.	0.	0.
20	0.	0.	0.
25	0.	0.	0.
2	1.5	1.	0.
3	1.	1.	0.
4	0.5	1.	0.
22	27/16	9/8	0.
23	1.	3/2	0.
24	5/16	9/8	0.

TABLA 2

Datos de Dirichlet

Valor	Incógnita	Nodos
2.	1	1 6 11 16 21
0.	1	5 10 15 20 25
1.5	1	2
1.	1	3 23
0.5	1	4
1.6875	1	22
0.3125	1	24
1.	2	1 2 3 4 5
0.	2	6 11 16 21 10 15 20 25
1.125	2	22 24
1.5	2	23
0.	3	1 2 3 4 5 6 10 11 15 16 20 21 22 23 24 25

TABLA 3

Resultados

Nodo	ψ	v_x	v_y
1	2.0	1.0	0.0
2	1.5	1.0	0.0
3	1.0	1.0	0.0
4	0.5	1.0	0.0
5	0.0	1.0	0.0
6	2.0	0.0	0.0
7	1.618	1.123	0.205
8	0.998	1.298	0.015
9	0.374	1.163	-0.191
10	0.0	0.0	0.0
11	2.0	0.0	0.0
12	1.678	1.145	0.086
13	0.997	1.456	0.014
14	0.317	1.137	-0.014
15	0.0	0.0	0.0
16	2.0	0.0	0.0
17	1.691	1.127	0.027
18	1.002	1.496	0.026
19	0.314	1.131	0.028
20	0.0	0.0	0.0
21	2.0	0.0	0.0
22	1.688	1.125	0.0
23	1.0	1.5	0.0
24	0.313	1.125	0.0
25	0.0	0.0	0.0

10. REFERENCIAS

1. L.D.Landau, E.M.Lifshitz "Fluid Mechanics", Pergamon Press, Oxford, 1959.
2. D.K.Gartling, E.B.Becker, "Finite element analysis of viscous incompressible fluid flow", Comp.Meth.in Appl.Mech. and Engn.8, 51-60 (1976).
3. O.C.Zienkiewicz, "The Finite Element method in Engineering Science", McGraw-Hill, London, 1971.
4. B.Atkinson, M.P.Brocklebank, C.C.M.Card and J.M.Smith, "Low Reynolds number developing flows". A.I.Ch.E.J.15, 548-553 (1969).
5. S.Pissanetzky, "Numerical quadrature in the finite element method", CAB-NT 3/81 y CNEA-NT /81.
6. S.Pissanetzky, "Operaciones con matrices ralas". Informe invitado a la Reunión sobre Computación y Sistemas, Universidad del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil, 1980. A ser publicado por la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires.
7. S.Pissanetzky, "KUBIK: an automatic three-dimensional finite element mesh generator", International Journal for Numerical Methods in Engineering. En prensa (1980).
8. S.Pissanetzky, F.G.Basombrío, "Efficient calculation of numerical values of a polyhedral function", International Journal for Numerical Method sin Engineering. En prensa (1980).