

**Zur Massenbestimmung an geladenen Teilchen  
in kernphotographischen Emulsionen  
mittels der Methode der variablen Zellen.**

B. ROEDERER (\*)

*Max-Planck-Institut für Physik - Göttingen*

(ricevuto il 16 Maggio 1955)

**Summary.** — The method of constant sagitta using the cell-size tables calculated by FAY, GOTTSTEIN and HAIN<sup>(1)</sup> was applied for scattering measurements on 10 identified flat protons and 12  $\pi$ -mesons in the region of short ranges ( $0 \div 5000 \mu\text{m}$ ). Applying usual noise elimination methods, a systematic deviation from the theoretically expected values of  $D_0$  was observed in the case of protons. Diverse sources for noise or systematic errors were investigated. Distortion was found to be insignificant. The falsifications of the results yielded by: i) the error in reading the cell length, ii) the wrong alignment of the track parallel to the stage movement, although significant, are not sufficient to explain fully the systematic deviation. It is found, however, that the usual way of working out second differences for the double cell size from those measured in the basic cells is not unrestrictedly applicable for the constant sagitta method because adjoining cells are frequently not of equal size. It is suggested, that noise elimination on short tracks (up to  $\sim 5 \text{ mm}$ ) should either be done between two different cell schemes, i.e. by measuring each particle twice, e.g. once in the  $\pi_{0.5}$  scheme and once in the  $P_{0.5}$  scheme; or by applying appropriate corrections in the conventional noise-elimination method. The magnitude of these corrections will then depend on the alignment and length of the track, the mass of the particle and the scheme used. By measuring each particle in two different schemes, we obtain a very good accordance with the values expected by the formula

$$D_0 = 0.5 (M_{\text{scheme}}/M_{\text{particle}})^{0.43}$$

without any correction to the scattering constant assumed by FAY *et al.*. The calculated noise-level is shown to increase rapidly for double and quadruple cell-size.

(\*) Comisión Nacional de la Energía Atómica, Buenos Aires.

(1) H. FAY, K. GOTTSTEIN and K. HAIN: *Suppl. Nuovo Cimento*, **11**, 234 (1954).

## 1. - Einleitung.

Verschiedene Autoren haben sich in letzter Zeit bemüht, die sogenannte Streumeßmethode zur Energie- und Massenbestimmung von geladenen Teilchen in kernphotographischen Emulsionen zu vervollkommen. Bei den Messungen an den Spuren von in der Schicht zur Ruhe gekommenen Teilchen ist neuerdings häufig die Methode der variablen Zellengröße angewandt worden. Dabei wurden meist die von <sup>(2,3)</sup> anhand halbempirischer Beziehungen zwischen Energie, Reichweite und Streuwinkel berechneten «Zellenschemata» verwendet. In diesen Schemata wurde jedoch die Abhängigkeit der Streukonstante von Zellengröße und Energie nicht berücksichtigt; die unechte Streuung wurde als konstant vorausgesetzt.

FAY *et al.* <sup>(1)</sup> haben eine Reihe von Schemata berechnet, bei denen die vorhergenannte Abhängigkeit mit in Betracht gezogen wurde. Diese Schemata wurden für drei verschiedene Massen ( $\pi$  und  $\tau$  Mesonen und Protonen) aufgestellt und sollen für das zugehörige Teilchen einen Mittelwert für die Beträge der 2. Differenzen  $\bar{D}=0,5 \mu\text{m}$  ergeben. Auf ein Teilchen angewandt, dessen Masse  $M_j$  nicht mit der des Schemas übereinstimmt, wird die Beziehung

$$(1) \quad \bar{D}_j(\mu) = 0.5 \left( \frac{M_j}{M_{\pi,\tau,p}} \right)^{-0.43}$$

vorgeschlagen, die allerdings nur soweit strenge Gültigkeit hat, wie für die beiden Teilchen mit den Massen  $M_j$  und  $M_{\pi,\tau,p}$  gleiche Werte für die Streukonstante und den Exponenten in der Energie-Reichweite-Beziehung gelten.

Wie stellten uns die Aufgabe, die von FAY *et al.* ausgerechneten Schemata und die Gültigkeit der Beziehung (1) anhand von Teilchen bekannter Massen experimentell zu prüfen. Außerdem sollte bestimmt werden, welches der drei Schemata das jeweils vorteilhafteste ist, um ein möglichst großes Verhältnis von gemessener zu unechter Streuung und einen möglichst kleinen statistischen Fehler zu erhalten.

Zu diesem Zweck wurde eine Anzahl von Spuren ausgewählt, an denen die Eichmessungen durchgeführt wurden. Besondere Aufmerksamkeit wurde darauf geworfen, daß erstens die Spuren möglichst horizontal verliefen; zweitens sie sich möglichst entfernt vom Emulsionsrand befanden und drittens ihre Länge mindestens  $5000 \mu\text{m}$  betrug. Diese Bedingungen erfüllten 12  $\pi$ -Mesonen und 10 Protonen, erstere durch ihre Zerfallsprodukte und letztere anhand der

<sup>(2)</sup> C. DILWORTH, S. J. GOLDSACK und L. HIRSCHBERG: *Nuovo Cimento*, **11**, 113 (1954).

<sup>(3)</sup> D. LAL, YASH PAL and B. PETERS: *Proc. Ind. Acad. Sci.*, **38**, 277 (1953).

durchgeführten Streumessungen identifizierbar. Die Ilford G5 Emulsionen stammen aus einem in der Sardinienexpedition 1953 exponierten Block. Die Messungen wurden am Leitz-Koordinatenkomparator durchgeführt, unter Verwendung der Objektiv-Okular-Kombination  $100 \times 15$ . Die Zellen wurden direkt an der Präzisionsskala des Tisches abgelesen; die Koordinaten der Spur wurden durch eine Okularskala (1 Teilstrich =  $1,085 \mu\text{m}$ ) bestimmt, dazu wurde visuell über mehrere Körner gemittelt. (Die Messungen wurden ausschließlich von der Verfasserin durchgeführt.)

## 2. - Meßergebnisse.

Abb. 1 zeigt die Verteilung der  $\bar{D}_1$  von Protonen und  $\pi$ -Mesonen für jedes der drei Schemata. Die einzelnen  $\bar{D}_1$  sind die Mittelwerte der Beträge der gemessenen 2. Differenzen  $D_i$  für jede Spur; dabei wurden alle Werte  $D_i$  eliminiert, die größer als  $4\bar{D}_1$  ausfielen. Jeder  $\bar{D}_1$  Wert wurde mit einer relativen

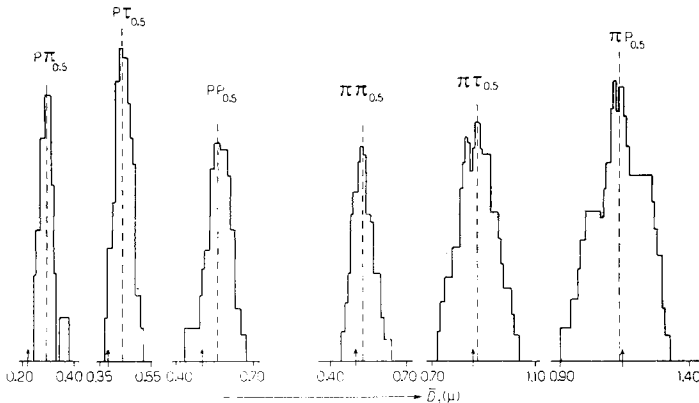


Abb. 1. - Verteilung der Mittelwerte der 2. Differenzen aus einfacher Zellengröße für 10 Protonen und 12  $\pi$ -Mesonen, mit  $P_{0.5}$ ,  $\tau_{0.5}$  und  $\pi_{0.5}$  Schemata vermessen. Jedem Meßwert entspricht eine Fläche gleicher Größe, deren Breite jeweils proportional zur statistischen Schwankung gewählt wurde. Die Mittelwerte der Verteilungen sind punktiert eingezeichnet; die nach Formel (1) zu erwartenden Werte der echten Streuung durch einen Pfeil gekennzeichnet.

statistischen Schwankung von  $0.76/\sqrt{N}$  behaftet, wo  $N$  die Anzahl der unabhängigen Zellen bedeutet, die zur Bestimmung von  $\bar{D}_1$  verwendet wurden. Es zeigt sich eine Verschiebung der Verteilung gegen höhere Werte, wofür zunächst der Einfluß einer unechten Streuung verantwortlich zu machen ist. Setzt man voraus, daß diese unechte Streuung ausschließlich von der Tischbewegung, der Körnerverteilung und dem Ablesefehler herrührt, so kann sie nach der üblichen Methode eliminiert werden, indem man außer dem  $\bar{D}_1$  auch

den entsprechenden Wert  $\bar{D}_2$  für die doppelte Zellengröße bestimmt und für die echte Streuung  $\bar{D}_0$  den Ausdruck ansetzt:

$$(2) \quad \bar{D}_0^2 = \frac{\bar{D}_1^2 - \bar{D}_2^2 (s_1/s_2)^a}{s_1^2 - s_2^2 (s_1/s_2)^a}.$$

Dabei wurde vorausgesetzt, daß die Abhängigkeit der unechten Streuung  $n$  von der Zellengröße  $s$  folgendermaßen lautet:

$$(3) \quad n^2 = n_0^2 s^a,$$

wobei  $a \approx 2/3$  für den Koordinatenkomparator (4).

Ferner wurde der Einfachheit halber zunächst der Umstand vernachlässigt, daß benachbarte Zellen in den Schemata i.a. nicht gleich groß sind. D.h., die  $D_2$  wurden aus den Meßwerten berechnet, indem zwei aufeinanderfolgende 1. Differenzen addiert und daraus die 2. Differenzen gebildet wurden. In Tabelle I sind die  $\bar{D}_0$  Werte angegeben, gemittelt über alle Spuren einer Teilchensorte. Für die relative statistische Schwankung des  $\bar{D}_0$  einer jeden Spur wurde der Wert  $1.35/\sqrt{N_1}$  angenommen, wobei  $N_1$  die Zahl der Zellen ist. Der Faktor 1.35 ergibt sich aus (2), wenn man für  $\bar{D}_1$  und  $\bar{D}_2$  unabhängige, relative Schwankungen von  $0.76/\sqrt{N_1}$  und  $0.76/\sqrt{N_2}$  zugrunde legt. Für die relative Schwankung des Mittelwertes der  $\bar{D}_0$  von allen Spuren ergibt sich  $1.35/\sqrt{N_{\text{ges}}}$  ( $N_{\text{ges}}$  = Gesamtzahl der Zellen aller Spuren.) Bei einem Vergleich mit den mittleren Fehlerquadraten  $\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^n (\bar{D}_0 - \bar{D}_{0i})^2 / n(n-1)$  ( $n$ : Zahl der Spuren), zeigt sich, daß

TABELLE I.

	P-P <sub>0.5</sub>	P-τ <sub>0.5</sub>	P-π <sub>0.5</sub>	π-P <sub>0.5</sub>	π-τ <sub>0.5</sub>	π-π <sub>0.5</sub>
Theor. Wert	0.500	0.379	0.220	1.138	0.860	0.500
$\bar{D}_0$ (μm)	0.550 ± ±0.025	0.402 ± ±0.017	0.248 ± ±0.009	1.107 ± ±0.047	0.812 ± ±0.032	0.502 ± ±0.016
$\bar{\delta}_0/\sqrt{2}$ (μm)	0.584 ± ±0.027	0.448 ± ±0.019	0.271 ± ±0.010	1.153 ± ±0.050	0.851 ± ±0.034	0.526 ± ±0.018

Mittelwerte der echten Streuung eliminiert zwischen einfacher und doppelter Zellengröße. Zweite Differenzen:  $\bar{D}_0$ ; dritte Differenzen:  $\bar{\delta}_0$ .

P-P<sub>0.5</sub> bedeutet Protonenspur mit P<sub>0.5</sub> Schema vermessen

P-τ<sub>0.5</sub> bedeutet Protonenspur mit τ<sub>0.5</sub> Schema vermessen, usw.

(4) K. GOTTSTEIN: *Nuovo Cimento*, **12**, 619 (1954).

die relativen Schwankungen im Mittel um  $10 \div 25\%$  überschätzt sind. Dieser Effekt kann daher rühren, daß bei der Berechnung des Faktors 1.35 die Korrelation zwischen  $\bar{D}_1$  und  $\bar{D}_2$  nicht berücksichtigt wurde.

Zum Vergleich sind in Tab. I die theoretischen Werte angegeben, die nach Formel (1) zu erwarten sind.

In Tab. Ia ist die unechte Streuung  $n = \sqrt{D_1^2 - D_0^2}$  mit der relativen statistischen Schwankung  $\varepsilon = (\bar{D}_1^2/n^2) \cdot (1.55/\sqrt{N_{ges}})$  angegeben.

TABELLE Ia.

P-P <sub>0,5</sub>	P-τ <sub>0,5</sub>	P-π <sub>0,5</sub>	π-P <sub>0,5</sub>	π-τ <sub>0,5</sub>	π-π <sub>0,5</sub>
0.12 ± 0.14	0.18 ± 0.05	0.16 ± 0.02	0.23 ± 0.30	0.33 ± 0.10	0.17 ± 0.06
Uechte Streuung der Protonen und π-Mesonen, jeweils mit P <sub>0,5</sub> , τ <sub>0,5</sub> und π <sub>0,5</sub> Schema vermessen.					

Es zeigt sich zunächst bei den π-Mesonen eine Übereinstimmung mit den theoretischen Werten für alle Schemata. Bei den Protonen jedoch tritt eine systematische Abweichung von  $6 \div 13\%$  auf, die außerhalb der Fehlergrenzen liegt. In Abb. 2 sind die Verteilungen der  $\bar{D}_e$  für Protonen wiedergegeben. Die drei als Deuteronen oder Tritonen hierdurch identifizierbaren Spuren sind schraffiert eingezeichnet.

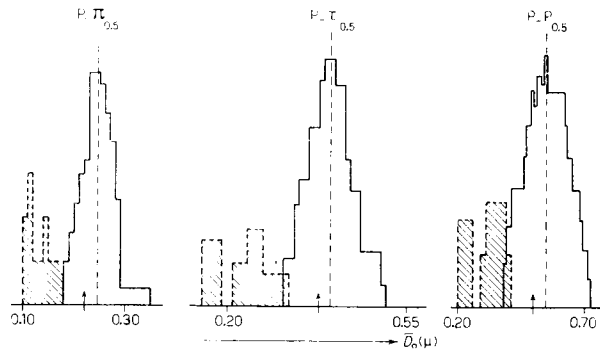


Abb. 2. — Verteilung der Werte  $\bar{D}_0$  der echten Streuung für Protonen mit π<sub>0,5</sub>, τ<sub>0,5</sub> und P<sub>0,5</sub> Schemata gemessen. Die Pfeile stellen die nach Gl. (1) zu erwartenden Werte dar. Drei Deuteronen oder Tritonen sind schraffiert eingezeichnet.

### 3. — Diskussion möglicher Fehlerquellen.

3.1. — *Verzerrung.* — Es besteht nun die Aufgabe, diese systematischen Abweichungen zu deuten. Es ist unwahrscheinlich, daß der bei der Berechnung der Schemata verwendete Wert der Streukonstante, der sich aus der Molière-

sehen Theorie ergibt, für Protonen um  $5 \div 10\%$  zu niedrig ist, zumal die gleichen Schemata, auf  $\pi$ -Mesonen angewendet, keine merklichen Abweichungen liefern. Vielmehr könnte man eine zusätzliche unechte Streuung vermuten, die durch das übliche Verfahren nicht miteliniert wird, und u.a. von Schema und «Signal» (echte Streuung) abhängt.

Als erstes wurde untersucht, wie groß die Beiträge der Emulsionsverzerrung zur unechten Streuung waren. Dazu wurden die dritten Differenzen  $\delta_0$  gebildet, wodurch bekanntlich die C-förmigen Verzerrungen eliminiert werden können. Die aus einfacher und doppelter Zellengröße gewonnenen Mittelwerte voneinander unabhängiger dritter Differenzen wurde durch  $\sqrt{2}$  geteilt, um einen Vergleich mit  $\bar{D}_0$  zu ermöglichen. Die Resultate sind ebenfalls in Tab. I angegeben. Man erkennt, daß die C-förmigen Verzerrungen keine wesentliche Rolle spielen. Die aus dritten Differenzen errechneten Werte von  $D_0$  sind systematisch größer als die der zweiten. Dieser Effekt, wenn auch innerhalb der statistischen Schwankungen, wurde gelegentlich auch von anderen Autoren<sup>(5)</sup> beobachtet, und ist auf das Abschneideverfahren zurückzuführen.

3'2. - *Der Größenunterschied benachbarter Zellen.* - Es wurde versucht, die Ursache der Abweichungen zunächst in der Art und Weise zu finden, wie die Messungen durchgeführt und ausgewertet wurden. Zwei Möglichkeiten bieten sich unmittelbar:

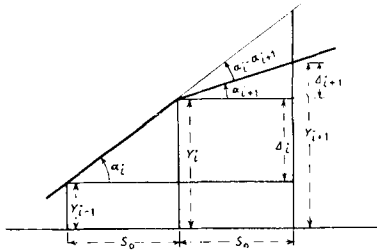


Abb. 3.

Erstens kann eine unechte Streuung dadurch entstehen, daß die tatsächlich benutzten Zellengrößen nicht mit den vorgeschriebenen identisch sind, sondern wegen der Einstellgenauigkeit um diese Werte streuen; zweitens muß bei der Berechnung der zweiten Differenzen die Tatsache be-

rücksichtigt werden, daß zwei aufeinanderfolgende Zellen meistens verschiedene Länge haben, besonders bei kleinen Reichweiten.

Der Einfluß des Einstellfehlers kann folgendermaßen abgeschätzt werden: Zunächst betrachten wir eine konstante Zellengröße  $s_0$ . Unter der Voraussetzung, daß die wirklich am Mikroskopisch eingestellte Zellenlänge mit einer quadratischen Abweichung  $\sigma$  um  $s_0$  streut, geht aus Abb. 3 hervor, daß dadurch die ersten Differenzen  $\Delta_i$  mit einer Streuung  $\sigma(\Delta_i) \cong \sigma \cdot \alpha_i$  behaftet sind. In den zweiten Differenzen  $D_i$  wirkt sich also die Einstellgenauigkeit mit einer quadratischen Abweichung  $\sigma(D_i) = \sigma \cdot \sqrt{\alpha_i^2 + \alpha_{i+1}^2} = \sigma \cdot \sqrt{2\bar{\alpha}_i^2 + D_i^2/2s_0^2}$  ( $\bar{\alpha}_i = (\alpha_i + \alpha_{i+1})/2$  mittlere Neigung der Spur bei den Zellen  $i$  und  $i+1$ ) aus.

(5) M. DI CORATO, D. HIRSCHBERG and B. LOCATELLI: *Suppl. Nuovo Cimento*, 12, 381 (1954).

Nimmt man an, daß die Neigung der Spur über hinreichend viele Zellen nahezu konstant ist, und nähert man die Verteilung der 2. Differenzen durch eine Gaußverteilung der Breite  $\sigma = \overline{D}\sqrt{\pi/2}$  an, erhält man für den Beitrag des Einstellfehlers zur unechten Streuung:

$$n_E^2 = \frac{4}{\pi} \sigma^2 \overline{\alpha^2} + \frac{\sigma^2 \overline{D}^2}{2s_0^2}$$

wobei  $\overline{\alpha^2}$  die mittlere quadratische Neigung der Spur ist. Für eine variable Zellenlänge steht in 2. Summand  $\overline{1/s^2}$ .

Der erste Summand verbindet den Einstellfehler mit dem Ausrichtfehler ( $\alpha = 0$  bedeutet, daß die Spur der Tischbewegung parallel ausgerichtet ist), der 2. Summand beschreibt den Einfluß des Einstellfehlers auf die Verteilung der 2. Differenzen.  $\sigma$  wurde experimentell bestimmt und ist von der Größenordnung  $1 \mu\text{m}$ . Die Größenordnung der beiden Summanden ist für Protonen etwa  $(0.05 \mu\text{m})^2$  und  $(0.02 \mu\text{m})^2$ . Der zweite Summand ist deshalb zu vernachlässigen. Der erste Summand wächst bei der rechnerischen Verdopplung der Zellengröße, fällt deshalb

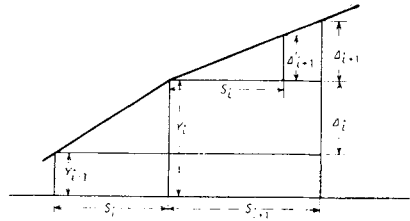


Abb. 4.

bei der Eliminierung der unechten Streuung nach (2) nicht heraus. Zu  $\sigma$  können aber außer dem experimentellen Einstellfehler auch systematische Fehler beitragen, die von dem Schema abhängen, wie z.B. die Aufrundung der Zellengrößen auf ganzzahlige Werte. Die Größenordnung dieser Beiträge zur unechten Streuung dürfte aber auch kaum den Wert  $0.05 \mu\text{m}$  überschreiten, sodaß der Einstell- und Ausrichtfehler höchstens mit insgesamt  $n = 0.07 \div 0.08 \mu\text{m}$  beisteuern kann.

Zur Berücksichtigung der Unterschiedlichkeit zweier benachbarter Zellen, sei anhand von Abb. 4 gezeigt, daß die 2. Differenzen in besserer Näherung durch  $D'_i = \Delta'_{i+1} - \Delta_i = \Delta_i(s_i/s_{i+1}) - \Delta_i$  gegeben sind. Die in üblicher Weise errechneten 2. Differenzen  $D_i$  wären also zu korrigieren:  $D'_i = D_i - \Delta_{i+1} \cdot ((s_{i+1} - s_i)/s_{i+1})$ . Hieraus erkennt man sofort, daß diese Korrektur erstens relativ umso mehr ins Gewicht fällt, je kleiner  $D$  ist; zweitens umso größer ist, je schlechter ausgerichtet die Spur ist (große  $\Delta_{i+1}$ ); drittens für jedes Schema mit zunehmender Reichweite abnimmt; und viertens für das  $P_{0.5}$  Schema größer als für das  $\tau_{0.5}$  Schema und für dieses wiederum größer als für das  $\pi_{0.5}$  Schema ist. Außerdem fällt sie für doppelte Zellengröße wesentlich größer aus, als für einfache. Ihre Vernachlässigung kann also zu einer unechten Streuung führen, die nicht nach (2) eliminiert wird. Die Einführung dieser Korrektur ist mit langwierigen Rechnungen verbunden. Sie wurde deshalb nur

angewendet für die ersten 1000  $\mu\text{m}$  von Protonenspuren, die mit dem Protonen-Schema vermessen worden waren. Es ergaben sich folgende Mittelwerte:

	$\bar{D}_1(\mu\text{m})$	$\bar{D}_2/\sqrt{8}(\mu\text{m})$
ohne Korrektur	$0.651 \pm 0.030$	$0.558 \pm 0.038$
mit Korrektur	$0.628 \pm 0.029$	$0.540 \pm 0.037$

Wenn diese Korrektur auch ziemlich wesentlich im Fall einer größeren Statistik sein dürfte, so reicht sie hier nicht aus, um den Effekt quantitativ zu erklären. Außerdem sollte diese umständliche Korrektur auf jeden Fall umgangen werden, weil sie die Methode erheblich komplizieren würde.

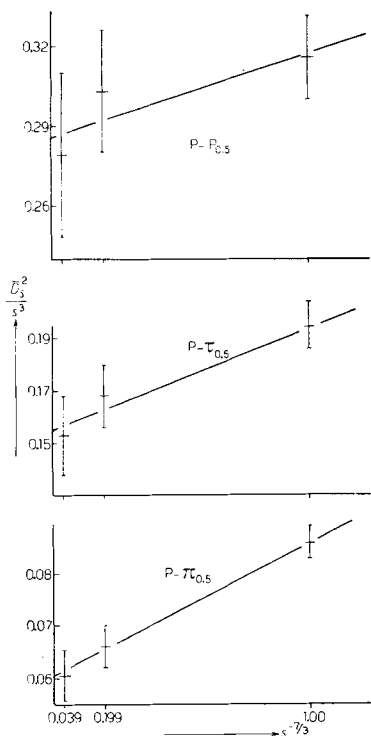


Abb. 5. - Zur graphischen Bestimmung der echten ( $D_0$ ) und unechten ( $n_0$ ) Streuung für Protonen aus einfacher ( $s^{-7/3}=1$ ), doppelter ( $s^{-7/3}=0,199$ ) und vierfacher ( $s^{-7/3}=0,039$ ) Zellengröße, unter Annahme der Gültigkeit der Relation  $\bar{D}_s^2/s^3 = D_0^2 + n_0^2 s^{-7/3}$ .

3.3. - *Das Verfahren zur Eliminierung von unechter Streuung.* - Es sollen nun im Folgenden die möglichen Quellen eines systematischen Fehlers in der Eliminierung der unechten Streuung nach (2) untersucht werden. Zu diesem Zweck wurden zunächst für die Protonenspuren die 2. Differenzen bei vierfacher Zellengröße  $D_4$  bestimmt und aus den Mittelwerten der  $D_1$ ,  $D_2$  und  $D_4$  über alle Spuren die unechte Streuung graphisch eliminiert. Trägt man  $\bar{D}_s^2/s^3$  als Funktion von  $s^{-7/3}$  auf (Abb. 5), so sollen die Werte wegen  $\bar{D}_s^2/s^3 = \bar{D}_0^2 + n_0^2 s^{-7/3}$  auf einer Geraden liegen. Die in Abb. 5 angegebenen Schwankungen ( $0.76/\sqrt{N}$ , wobei  $N$  die Gesamtzahl der unabhängigen Zellen ist) stellen obere Grenzen dar, da die Korrelation zwischen  $D_1$ ,  $D_2$  und  $D_4$  nicht berücksichtigt wurde. Man erhält für  $D_0$  und  $n_0$  die Werte der Tab. II.

Eine systematische Abweichung bleibt also weitherhin erhalten. Anhand der Abb. 5 ist es auch nicht möglich zu entscheiden, ob der Ausdruck (3) mit  $a = 2/3$  die Abhängigkeit der unechten Streuung von der Zellengröße annähernd richtig darstellt. (Dann müßten die 3 Punkte jeweils auf einer Geraden liegen.) Im Falle des  $\pi$ -Schemas trifft dies sicher zu; im  $\tau$ - und P-Schema könnte man für  $a$  Werte von 1.5 bzw.  $2 \div 2.5$  ansetzen, um die expe-



rimentellen  $D_0$  näher an die theoretischen Werte zu rücken. Diese Werte für  $a$  sind jedoch überraschend groß, zumal sich der Einfluß, jedenfalls der  $U$ -förmigen Verzerrungen (die im Quadrat der unechten Streuung mit  $\sim s^4$  eingehen) bereits als unwesentlich herausgestellt hat.

TABELLE II.

	P-P <sub>0.5</sub>	P-τ <sub>0.5</sub>	P-π <sub>0.5</sub>
$D_0$ (μm)	0.534 ± 0.015	0.396 ± 0.010	0.246 ± 0.008
$n_0$ (μm)	0.18 ± 0.04	0.20 ± 0.02	0.16 ± 0.01

Werte der echten ( $D_0$ ) und unechten ( $n_0$ ) Streuung für Protonen, graphisch aus Abb. 5 ermittelt.

Auf eine weitere Ursache für die systematischen Abweichungen deutet das häufige Auftreten von Spuren, bei denen  $\bar{D}_0 > \bar{D}_1$ . Dieser Effekt tritt je nach Schema in bis zu 50% aller Spuren auf, sowohl bei Protonen als auch bei π-Mesonen. Für diese Spuren ist  $\bar{D}_1^2 - (D_2^2/8) = n_0^2(1 - 2^{a-3}) < 0$ ;  $a \approx 2/3$ . Berechnung der unechten Streuung  $n_0$  ergibt also imaginäre Werte. In den Fällen, in denen das Quadrat der unechten Streuung klein ist gegenüber  $\bar{D}_1^2$  sind Spuren mit « imaginärer unechter Streuung » auch theoretisch zu erwarten, wenn man die Schwankungen der  $\bar{D}_1$  und  $\bar{D}_2$  berücksichtigt. Für den Prozentsatz der Spuren mit imaginärem  $n_0$  (bei denen also  $\bar{D}_1 - \bar{D}_2/\sqrt{8} < 0$  ist) gilt:

$$(4) \quad W_{\text{max}} (\%) = 100 \left[ 1 - \Phi \left( \frac{\bar{D}_1 - \bar{D}_2/\sqrt{8}}{\sqrt{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \right) \right],$$

$\sigma_1$  und  $\sigma_2$  sind die statistischen Schwankungen von  $\bar{D}_1$  und  $\bar{D}_2/\sqrt{8}$ .  $\Phi$  ist das Gaußsche Fehlerintegral. Tab. III zeigt trotz des großen Fehlers in der Bestimmung von  $W$  (> 100%), daß das Experiment erheblich mehr Spuren mit imaginärer unechter Streuung zu liefern scheint, als allein durch statistische Schwankungen zu erwarten ist. Es sieht also aus, als ob bei jenen Spuren tatsächlich  $\bar{D}_1 < (\bar{D}_2/\sqrt{8})$  ist. Dies deutet auf eine zusätzliche unechte Streuung in der doppelten Zellengröße, die nicht durch (2) eliminiert wird.

TABELLE III.

	P-P <sub>0.5</sub>	P-τ <sub>0.5</sub>	P-π <sub>0.5</sub>	π-P <sub>0.5</sub>	π-τ <sub>0.5</sub>	π-π <sub>0.5</sub>
$W$ berechnet (%)	33	4	0	34	6	8
$W$ experimentell (%)	40	20	10	58	25	42

Prozentsatz der Spuren mit imaginärer unechter Streuung. «  $W$  berechnet » bedeuten die unter Anwendung der Formel (4) berechneten Prozentsätze, «  $W$  experimentell » die tatsächlich gefundenen.

Das Vorhergehende läßt vermuten, daß die Ursache für die systematischen Abweichungen der gemessenen Werte von  $D_0$  von den theoretischen in der vereinfachten « Verdoppelung » der Zellengröße zu suchen ist. Diese « Verdop-

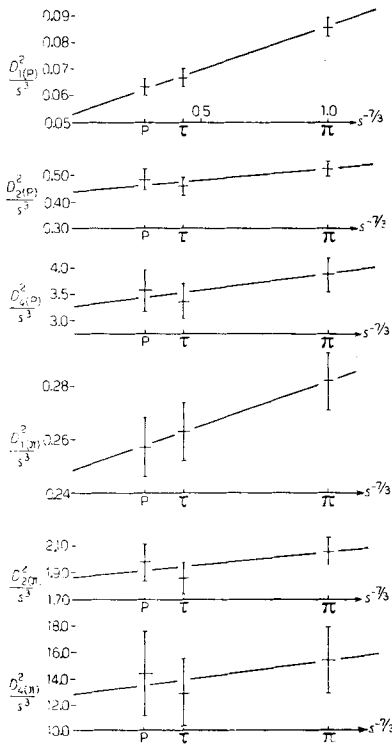


Abb. 6. - Zur graphischen Bestimmung der echten Streuung für das  $\pi_{0.5}$ -Schema und der unechten Streuung für einfache doppelte und vierfache Zellengröße bei Protonen und  $\pi$ -Mesonen.  $\left[ s_{\pi}^{-7/3} = 1; s_{\tau 0.5}^{-7/3} = 0.435; s_{\rho 0.5}^{-7/3} = 0.286 \right]$ .

Auf Grund der Tatsache, daß die Zellengrößen verschiedener Schemata bei gleicher Reichweite in einem bis auf 2÷3% genau konstantem Verhältnis stehen ( $s_p/s_\pi = 1.43, s_\rho/s_\pi = 1.71$ ), wurde nun versucht, die unechte Streuung zwischen den verschiedenen Schemata zu eliminieren. Es soll nämlich für alle Schemata gelten:

$$D_1^2 = D_{01}^2 s^3 + n_1^2 s^{\frac{3}{2}}$$

$$D_2^2 = D_{02}^2 s^3 + n_2^2 s^{\frac{3}{2}}$$

$$D_4^2 = D_{04}^2 s^3 + n_4^2 s^{\frac{3}{2}}$$

pelung », die lediglich aus dem Zusammenfügen je zweier benachbarter Zellen  $s_i$  und  $s_{i+1}$  zu einer neuen « doppelten » Zelle besteht, führt im Falle variabler Zellengrößen nicht zu  $2s_i$ , sondern zu einer größeren Zelle  $2s_i(1 + \varepsilon_i)$ , wobei  $\varepsilon_i = (s_{i+1} - s_i)/2s_i$ . Schon allein dies bewirkt, daß der Anteil der echten Streuung in  $\bar{D}_2$  um einen Faktor  $1 + (3/2)\bar{\varepsilon}_i$  zu groß ausfällt. Diese Korrektur ist zwar gering (2÷5% je nach Schema und Reichweite), größer ist aber eine damit verbundene, geometrische Korrektur für die zweiten Differenzen für doppelte Zellengröße  $D_{2i} = (\Delta_{i+3} + \Delta_{i+2}) - (\Delta_{i+1} + \Delta_i)$ . Deren Ausdruck sollte demnach lauten:

$$(5) \quad D'_{2i} = (\Delta_{i+3} \frac{s_{i+2}}{s_{i+3}} + \Delta_{i+2}) \frac{s_i}{s_{i+2}} - (\Delta_{i+1} \frac{s_i}{s_{i+1}} + \Delta_i).$$

(Die Ableitung verläuft ähnlich wie in § 3.2).

Durch eine Verdoppelung der Zellengröße im üblichen Sinn tritt eine zusätzliche unechte Streuung auf, die nicht durch Gl. (2) zu eliminieren ist. Die in § 2 angenommene Abhängigkeit der unechten Streuung  $n^2 = n_0^2 s^{\frac{3}{2}}$  ist bei Zellenverdoppelung und Vervielfachung nicht mehr gültig.

$s$  ist hier jeweils das Verhältnis  $s_\tau/s_\pi$ ,  $s_p/s_\pi$  (also  $s = 1$  für das  $\pi$ -Schema). Außerdem soll  $D_{01} = D_{02}/\sqrt{8} = D_{04}/\sqrt{64}$  die echte Streuung im  $\pi$ -Mesonen Schema darstellen.  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_4$  sind die unechten Streuungen bei einfacher, doppelter und vierfacher Zellengröße, für die aber nach dem vorher Gesagten:  $n_1^2 \neq n_2^2/2^2 \neq n_4^2/4^2$  zu erwarten ist. In Abb. 6 wurde für Protonen und  $\pi$ -Mesonen  $D_1^2/s^3$ ,  $D_2^2/s^3$  und  $D_4^2/s^3$  als Funktion von  $s^{-(7/3)}$  aufgetragen. Man erhält daraus graphisch die Werte der Tab. IV.

TABELLE IV.

	$D_{01}$	$D_{02}$	$D_{02}/\sqrt{8}$	$D_{04}$	$D_{01}/\sqrt{64}$
Protonen	$0.230 \pm 0.008$	$0.662 \pm 0.030$	$0.234 \pm 0.010$	$1.81 \pm 0.08$	$0.227 \pm 0.012$
$\pi$ -Mesonen	$0.498 \pm 0.011$	$1.367 \pm 0.043$	$0.484 \pm 0.015$	$3.58 \pm 0.04$	$0.45 \pm 0.06$

FORSETZUNG TABELLE IV.

	$n_1$	$n_2$	$n_2/2^{\frac{1}{2}}$	$n_4$	$n_4/4^{\frac{1}{2}}$
Protonen	$0.18 \pm 0.02$	$0.30 \pm 0.06$	$0.24 \pm 0.05$	$0.77 \pm 0.15$	$0.49 \pm 0.09$
$\pi$ -Mesonen	$0.18 \pm 0.01$	$0.44 \pm 0.13$	$0.35 \pm 0.10$	$1.6 \pm 1.2$	$1.0 \pm 0.8$

Echte ( $D_0$ ) und unechte Streuung ( $n$ ) der Protonen und  $\pi$ -Mesonen für einfache, doppelte und vierfache Zellengröße, auf  $\pi_{0.5}$ -Schema reduziert, wie man sie graphisch aus Abb. 6 ermittelt.

Es ist zu erkennen, daß eine gute Übereinstimmung der Werte der echten Streuung bei einfacher, doppelter und vierfacher Zellengröße vorhanden ist. Bei der unechten Streuung hingegen sieht man sofort, daß sie bei Verdoppelung und Vervielfachung nicht nach dem Gesetz  $n_0^2/s^3$  geht, sondern bei jedem Fall verschiedenen Werte für  $n_0$  aufweist. Der Prozentsatz der Spuren mit « imaginärer » unechter Streuung ist jetzt geringer. Es handelt sich in diesem Fall um Spuren, bei denen  $D_\pi - D_p/\sqrt{5.0} < 0$  ist. Bei der Elimination der unechten Streuung zwischen Protonen- und  $\pi$ -Mesonen Schema erhält man:

$$W_{\text{exp}} = \begin{cases} 10\% \text{ für Protonenspuren} \\ 25\% \text{ für } \pi\text{-Mesonen.} \end{cases}$$

Bei den Protonen ist die Abweichung vom Sollwert geringfügig größer als der statistische Fehler: ( $0.230 \pm 0.008 \mu\text{m}$  anstatt  $0.220 \mu\text{m}$ ). Infolge der ver-

schiedenen, in § 3·2 besprochenen Beiträge zur unechten Streuung, ist dies aber nicht unerwartet.

Die Werte der unechten Streuung in einfacher, doppelter und vierfacher Zellengröße für  $\pi$ -Mesonen stimmen innerhalb der großen Fehlergrenzen mit den genauer bestimmbareren Werten für Protonen überein.

Zum Schluß sei noch das aus den oben beschriebenen Messungen bestimmte Verhältnis  $D_1/n_1$  (gemessene Streuung zu unechter Streuung) für die drei Schemata und für Protonen und  $\pi$ -Mesonen gegeben. (Tab. V).

TABELLE V.

	P-P <sub>0.5</sub>	P- $\tau_{0.5}$	P- $\pi_{0.5}$	$\pi$ -P <sub>0.5</sub>	$\pi$ - $\tau_{0.5}$	$\pi$ - $\pi_{0.5}$
$D_1/n_1$	2.6	2.2	1.6	5.2	4.3	2.9

Verhältnis der  $D$  für einfache Zellen (Signal) zu unechter Streuung für Protonen und  $\pi$ -Mesonen für die Schemata P<sub>0.5</sub>,  $\tau_{0.5}$  und  $\pi_{0.5}$ .

#### 4. – Schlußfolgerungen.

Aus dem Vorhergehenden ergeben sich einige Schlußfolgerungen für die zweckmäßige und korrekte Anwendung der Streumeßmethode mit variabler Zellengröße, für nicht sehr lange Spuren (bis etwa 5 mm) von Teilchen mit Massen oberhalb der  $\pi$ -Mesonenmasse.

a) Wenn man darauf Wert legt, daß die Größenordnung der systematischen Fehler 5% nicht übersteigt, ist es ratsam, in dem Verfahren zur Eliminierung der unechten Streuung die Unterschiede in der Länge benachbarter Zellen zu berücksichtigen.

b) In diesem Falle empfiehlt es sich, die unechte Streuung aus den Werten der  $D$  für zwei verschiedene Schemata zu eliminieren. Das setzt allerdings voraus, daß man eine Spur zweimal unabhängig vermessen muß, z.B. im  $\pi$ -Mesonen, und im Protonenschema (Tabelle IX und VI bei FAY *et al.* (loc. cit)). Die echte Streuung  $\bar{D}_0$  ergibt sich für diesen Fall aus der Formel

$$\bar{D}_0 = \sqrt{\frac{\bar{D}_P^2 - \bar{D}_\pi^2(1,71)^a}{5,0 - (1,71)^a}}$$

Man kann das doppelte Vermessen jeder Spur auch vermeiden, indem man nach wie vor nach dem bisher üblichen Verfahren die Eliminierung der unechten Streuung aus einfacher und durch Zusammenfügen je zweier benach-

barter Zellen entstandener « doppelter » Zellengröße durchführt, und den bei dieser « Verdopplung » gemachten Fehler durch eine Korrektur nach Formel (5) ausgleicht. Die Größe dieser Korrektur wird von der Ausrichtung der Spur, ihrer Länge, vom verwendeten Schema und der Masse des Teilchens abhängen.

c) Wenn es nicht auf allzu große Genauigkeit ankommt, — z.B. bei kurzen Spuren —, genügt es, die Spur mit dem  $P_{0.5}$  Schema zu vermessen und die unechte Streuung  $n_1$  ( $= 0.181 \pm 0.020 \mu\text{m}$ ) direkt von dem gemessenen  $D_1$  quadratisch abzuziehen. Der Wert 0.18 scheint ziemlich unabhängig von dem Beobachter zu sein, und daher vom Instrument und von der Emulsion abzuhängen.

\* \* \*

Den Herren Dr. K. GOTTSTEIN, H. M. MAYER und Dr. J. ROEDERER bin ich für wertvolle Diskussion und Hinweise zu aufrichtigem Dank verpflichtet. Ebenso möchte ich den Herren Prof. W. HEISENBERG und K. WIRTZ für die freundliche Aufnahme im Max-Planck-Institut für Physik Dank sagen. Die vorstehende Arbeit wurde im Rahmen eines Stipendiums der Comisión Nacional de la Energía Atómica gemacht; auch ihr möchte ich auf diesem Wege meinen herzlichsten Dank aussprechen.

#### RIASSUNTO (\*)

Il metodo della saetta costante con l'impiego delle tabelle per le dimensioni della cella calcolate da FAY, GOTTSTEIN e HAIN (1) è stato applicato a misure di scattering di 10 protoni con tracce piane identificati e 12 mesoni  $\pi$  nella regione dei percorsi brevi ( $0 \div 5000 \mu\text{m}$ ). Applicando metodi usuali per l'eliminazione del disturbo, una deviazione sistematica dai valori teoricamente aspettati è stata osservata nel caso dei protoni. Sono state esaminate diverse cause di disturbo o di errori sistematici. La distorsione è risultata insignificante. Le alterazioni dei risultati causate da: 1) l'errore nella lettura della lunghezza della cella, 2) il difettoso allineamento della traccia rispetto alla direzione del moto del tavolino del microscopio, per quanto significanti non bastano a spiegare completamente la differenza sistematica. Si trova, tuttavia, che il metodo usuale seguito per calcolare le differenze seconde per la dimensione della cella doppia da quelle misurate nella cella standard non è applicabile senza restrizioni al metodo della saetta costante, perchè celle adiacenti spesso non sono uguali. Si propone di eliminare il disturbo sui percorsi brevi (fino a  $\sim 5 \text{ mm}$ )

(\*) Traduzione a cura della Redazione.

o con differenti schemi di celle, cioè misurando ogni particella due volte, o apportando opportune correzioni al metodo convenzionale per l'eliminazione del disturbo. La grandezza di tali correzioni dipenderà dall'allineamento e la lunghezza della traccia, dalla massa della particella e dallo schema seguito. Misurando ogni particella in due schemi differenti, si ottiene un ottimo accordo coi valori forniti dalla formula

$$D_0 = 0,5(M_{\text{schema}}/M_{\text{particella}})^{0,4}$$

senza apportare alcuna correzione alla costante di scattering assunta da *FAY et al.*. Si dimostra che il livello di disturbo calcolato cresce rapidamente raddoppiando e quadruplicando la grandezza della cella.