

C. N. E. A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº 3	AÑO 1978

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION

ECUACION CUASIARMONICA CON DERIVADA TEMPORAL.
SU RESOLUCION POR EL METODO DE FAEDO-GALERKIN
CON ELEMENTOS FINITOS
(Programas CTR y CTR1)

Por

Fernando G. Basombrío

Implementación de la parte computacional a cargo de:

Bibiana Cruz

Centro de Cómputos
Centro Atómico Bariloche
Comisión Nacional de Energía Atómica

San Carlos de Bariloche
Marzo de 1977

RESUMEN: Se ha desarrollado un programa general cuyo objeto es resolver por el método de Faedo-Galerkin y elementos finitos, la ecuación cuasiarmónica con derivada temporal para los casos de simetría plana y cilíndrica. Se ha previsto una extensión al caso no lineal. Se incluyen ejemplos de aplicación.

ABSTRACT: A general program whose purpose is to solve the quasi-harmonic equation with time derivative for the cases of plane and cylindrical symmetries, using the Faedo-Galerkin method and finite elements, has been developed. An extension for the non linear case is also possible. Some application examples are included.

1. GENERALIDADES

En [1] se describe en forma completa un tipo de programas cuyo objetivo es resolver, por el método de Ritz y elementos finitos, la ecuación cuasiarmónica lineal y no lineal ([3] Cap. 15), para simetría plana y de revolución. Sus innumerables aplicaciones físicas se refieren a problemas de estado estacionario.

Nos proponemos aquí la resolución del caso no estacionario, o transitorio, por el método de Faedo-Galerkin ([2] Cap. 7) con elementos finitos para las variables de espacio y utilizando una discretización en diferencias finitas tipo Crank-Nicolson para la variable temporal. Como es usual en problemas de evolución, no se procede en forma global sino por saltos a tiempo constante, igualmente espaciados, comenzando desde el instante inicial. Nos referiremos primero al caso de simetría plana.

La formulación matemática exacta es la siguiente: encontrar una solución $\phi(x,y,t)$ de la ecuación cuasiarmónica con derivada temporal.

$$v\phi_t + (b\phi_x)_x + (b\phi_y)_y = g \quad (1)$$

definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, para $0 \leq t \leq T$ y que cumpla las condiciones,

$$\phi|_{\Gamma^*} = \delta : \text{condición de contorno "forzada"}$$

$$b \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma'} = \gamma : \text{condición de contorno "libre"}$$

$$\phi(x,y,0) = \psi(x,y) : \text{condición inicial.}$$

Las funciones v, b, g dependerán en general de las dos variables de espacio y del tiempo t ; δ y γ , definidas en la frontera Γ de Ω , podrán depender también de t . La dependencia explícita de los coeficientes v y b respecto de t tiene como principal finalidad posibilitar la implementación de extensiones no lineales.

Se admitirá además que,

$$C \geq |b(x,y,t)| \geq c > 0 \quad x,y \in \Omega, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

Notación:

Ω : dominio regular del plano donde interesa la solución de (1)

n : normal interior a Ω

Γ : frontera de Ω

$\bar{\Omega}$: clausura de Ω

$\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma^*$

Γ' : frontera de condiciones de contorno "naturales"

Γ^* : frontera de condiciones de contorno "forzadas"

Nota: se considera que Γ^* es un conjunto cerrado y que

$$\Gamma' \cap \Gamma^* = \emptyset$$

2. APROXIMACION

2.1. Método de Faedo-Galerkin

Este método es una variante del procedimiento usual de Galerkin ([2] §2.3 y 7.1) propuesta para la resolución de problemas de evolución. Tal procedimiento hubiese considerado el operador diferencial actuante en el primer miembro de (1), en el que aparecen tres variables independientes, haciendo intervenir conjuntos adecuados de funciones definidas en la región espacio temporal $\Omega \times (0,T)$.

En contraste, la modificación de Faedo consiste en aplicar la idea de Galerkin pero para cada instante fijo, con t como parámetro, usando conjuntos de funciones definidos en Ω . Más precisamente, y para el caso en estudio, se impone a $\phi(x,y,t)$ la condición

$$\int \int_{\Omega} [v \phi_t + (b \phi_x)_x + (b \phi_y)_y - g] v \, dx dy = 0 \quad (2)$$

$$\forall v \in V$$

$$\forall t > 0, \text{ fijo}$$

donde V es un espacio adecuado de funciones "de ensayo" definidas en Ω .

En lo que sigue se admitirá que para t fijo las funciones a, b, g son de cuadrado integrable en Ω ; γ y la restricción de b a la frontera Γ , de cuadrado integrable en Γ .

Sea el espacio de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \{f \mid f \in L^2(\Omega) ; \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in L^2(\Omega)\} \quad (3)$$

Por simplicidad técnica se supondrá que el dato de Dirichlet es nulo: $\delta \equiv 0$. Es sabido que esto no limita la generalidad siempre y cuando δ sea lo suficientemente adecuado como para que exista una función del $H^1(\Omega)$ que restringida a Γ^* coincida con δ . En definitiva, a costa de modificar el segundo miembro de la ecuación (1) se lleva el problema al caso homogéneo.

Como es usual para ecuaciones como la (1) ([2], §2.3 y 7.1) el conjunto V se tomará como el subespacio vectorial cerrado $H_E^1(\Omega)$ de $H^1(\Omega)$:

$$H_E^1(\Omega) = \{f \mid f \in H^1(\Omega); f|_{\Gamma^*} = 0\} \quad (4)$$

A efectos de llegar a un planteo matemático coherente, dentro de las condiciones previas, se procede a efectuar una transformación de (2) utilizando el teorema de la divergencia y las condiciones de contorno, quedando por fin la formulación:

$$a_t(\phi, v) = L_t(v) \quad \forall v \in H_E^1(\Omega); t > 0 \text{ fijo} \quad (5)$$

donde

$$a_t(\phi, v) \equiv \iint_{\Omega} [-v \phi_t + b \phi_x v_x + b \phi_y v_y] dx dy$$

$$L_t(v) \equiv - \iint_{\Omega} g v dx dy - \int_{\Gamma} \gamma v ds \quad (6)$$

Es razonable esperar que la solución ϕ pertenezca, para todo t fijo, al espacio $H_E^1(\Omega)$.

El método de aproximación consiste entonces en aplicar la condición (5) en subespacios $M_h \subset H_E^1$, de dimensión finita, y en encontrar una función $\phi_h(x, y, t)$ que para cada $t > 0$ pertenezca a M_h y cumpla,

$$a_t(\phi_h, v^h) = L_t(v^h) \quad \forall v^h \in M_h \quad (7)$$

Los subespacios M_h serán los usuales de funciones "poliédricas", correspondientes a elementos triangulares en polinomios de primer grado, que cumplen la condición de Dirichlet en Γ^* .

Estos ya han sido descriptos en [1].

La función de aproximación es:

$$\begin{aligned} \phi_h(x,y,t) = \frac{1}{2\Delta} [(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \phi_i^h(t) + \\ + (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) \phi_j^h(t) + (\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y) \phi_m^h(t)] \quad x,y \in e \end{aligned} \quad (8)$$

donde:

e : elemento en consideración

α_i : $x_j y_m - x_m y_j$

β_i : $y_j - y_m$

γ_i : $x_m - x_j$

x,y : coordenadas de los vértices i,j,m del triángulo "e"

Δ : área del triángulo "e"

$\phi_i^h(t)$: valores "nodales" dependientes del tiempo t

A efectos de desarrollar las expresiones que siguen resulta conveniente pensar en que aún no se ha llevado a cabo el artificio para transformar el problema en uno homogéneo, y considerar $\delta \neq 0$. Tal artificio quedará realizado de hecho a posteriori.

Enumeraremos de 1 a N a los nodos de la triangulación que tienen una incógnita asociada y de $N+1$ a $N+M$ a los que pertenecen a la frontera de Dirichlet Γ^* . Si $x_i^h(x,y)$ $i=1, \dots, N+M$ son las funciones de base usuales (ver [1]), la (8) puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \phi_h(x,y,t) = \sum_{k=1}^N \phi_k^h(t) x_k^h(x,y) - R(x,y,t) \\ R(x,y,t) = - \sum_{k=N+1}^{N+M} \delta_k(t) x_k^h(x,y) \end{aligned} \quad (9)$$

$\phi_k^h(t)$: parámetros nodales a determinar

$\delta_k(t)$: valor del dato de Dirichlet en correspondencia con el nodo "k" perteneciente a Γ^* .

Reemplazando (9) en (7) y teniendo en cuenta las (6), se llega (*) al sistema de N ecuaciones diferenciales ordinarias para las N funciones incógnitas $\phi_i^h(t)$:

$$\sum_{k=1}^N M_{kr} \cdot \phi_k^h + \sum_{k=1}^N K_{kr} \phi_k^h = F_r \quad r=1,2,\dots,N \quad (9')$$

donde

$$M_{kr}(t) = - \iint_{\Omega} v(x,y,t) x_k^h(x,y) x_r^h(x,y) dx dy$$

$$K_{kr}(t) = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial x_k^h}{\partial x} \cdot \frac{\partial x_r^h}{\partial x} + \frac{\partial x_k^h}{\partial y} \cdot \frac{\partial x_r^h}{\partial y} \right] b(x,y,t) dx dy$$

$$F_r(t) = L_t(x_r^h) + a_t(R, x_r^h) \quad (**)$$

$$L_t(x_r^h) = - \iint_{\Omega} g(x,y,t) x_r^h(x,y) dx dy - \int_{\Gamma'} x_r^h ds \quad (10)$$

$$a_t(R, x_r^h) = \iint_{\Omega} \left[-v \frac{\partial R}{\partial t} x_r^h + b \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x_r^h}{\partial x} + b \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial x_r^h}{\partial y} \right] dx dy$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = - \sum_{k=N+1}^{N+M} \delta_k(t) x_k^h$$

Por la estructura típica de los programas de elementos finitos, resulta útil explicitar la contribución de cada elemento al sistema global (9'). Esta se escribe a continuación en notación matricial:

- - - - -

(*) Obsérvese que basta tomar las funciones de base x_i^h en lugar de las v^h .

(**) En el caso $\delta \neq 0$ la contribución al segundo miembro por "no homogeneidad" aparece aquí representada por $a_t(R, x_i^h)$. Esto equivale al artificio mencionado.

$$M^e(t) X^e(t) + K^e(t) X^e(t) + B^e(t) + D^e(t) \quad (11)$$

Las matrices M^e y K^e provienen de la primera de las (6) restringida al elemento "e".

$$\begin{aligned}
 - M^e(t) &= \frac{N^e}{2\Delta^2} \begin{pmatrix} \alpha_i \alpha_i & \alpha_i \alpha_j & \alpha_i \alpha_m \\ \alpha_j \alpha_i & \alpha_j \alpha_j & \alpha_j \alpha_m \\ \alpha_m \alpha_i & \alpha_m \alpha_j & \alpha_m \alpha_m \end{pmatrix} + \\
 &+ \frac{N_x^e}{2\Delta^2} \begin{pmatrix} 2\alpha_i \beta_i & \alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i & \alpha_i \beta_m + \alpha_m \beta_i \\ \alpha_j \beta_i + \alpha_i \beta_j & 2\alpha_j \beta_j & \alpha_j \beta_m + \alpha_m \beta_j \\ \alpha_m \beta_i + \alpha_i \beta_m & \alpha_m \beta_j + \alpha_j \beta_m & 2\alpha_m \beta_m \end{pmatrix} + \\
 &+ \frac{N_y^e}{2\Delta^2} \begin{pmatrix} 2\alpha_i \gamma_i & \alpha_i \gamma_j + \alpha_j \gamma_i & \alpha_i \gamma_m + \alpha_m \gamma_i \\ \alpha_j \gamma_i + \alpha_i \gamma_j & 2\alpha_j \gamma_j & \alpha_j \gamma_m + \alpha_m \gamma_j \\ \alpha_m \gamma_i + \alpha_i \gamma_m & \alpha_m \gamma_j + \alpha_j \gamma_m & 2\alpha_m \gamma_m \end{pmatrix} + \\
 &+ \frac{N_{xx}^e}{2\Delta^2} \begin{pmatrix} \beta_i \beta_i & \beta_i \beta_j & \beta_i \beta_m \\ \beta_j \beta_i & \beta_j \beta_j & \beta_j \beta_m \\ \beta_m \beta_i & \beta_m \beta_j & \beta_m \beta_m \end{pmatrix} + \\
 &+ \frac{N_{yy}^e}{2\Delta^2} \begin{pmatrix} \gamma_i \gamma_i & \gamma_i \gamma_j & \gamma_i \gamma_m \\ \gamma_j \gamma_i & \gamma_j \gamma_j & \gamma_j \gamma_m \\ \gamma_m \gamma_i & \gamma_m \gamma_j & \gamma_m \gamma_m \end{pmatrix} + \\
 &+ \frac{N_{xy}^e}{2\Delta^2} \begin{pmatrix} 2\beta_i \gamma_i & \beta_i \gamma_j + \beta_j \gamma_i & \beta_i \gamma_m + \beta_m \gamma_i \\ \beta_j \gamma_i + \beta_i \gamma_j & 2\beta_j \gamma_j & \beta_j \gamma_m + \beta_m \gamma_j \\ \beta_m \gamma_i + \beta_i \gamma_m & \beta_m \gamma_j + \beta_j \gamma_m & 2\beta_m \gamma_m \end{pmatrix}
 \end{aligned} \quad (12)$$

$$K^e(t) = \frac{B}{2\Delta^2} \begin{pmatrix} \beta_i \beta_i & \beta_j \beta_i & \beta_m \beta_i \\ \beta_i \beta_j & \beta_j \beta_j & \beta_m \beta_j \\ \beta_i \beta_m & \beta_j \beta_m & \beta_m \beta_m \end{pmatrix} + \frac{B}{2\Delta^2} \begin{pmatrix} \gamma_i \gamma_i & \gamma_j \gamma_i & \gamma_m \gamma_i \\ \gamma_i \gamma_j & \gamma_j \gamma_j & \gamma_m \gamma_j \\ \gamma_i \gamma_m & \gamma_j \gamma_m & \gamma_m \gamma_m \end{pmatrix} \quad (13)$$

donde

$$\begin{aligned} N^e(t) &= \iint_e v(x,y,t) \, dx dy & N_x^e &= \iint_e v(x,y,t) \, x dx dy \\ N_y^e(t) &= \iint_e v(x,y,t) \, y \, dx dy & N_{xx}^e(t) &= \iint_e v(x,y,t) \, x^2 dx dy \\ N_{yy}^e(t) &= \iint_e v(x,y,t) \, y^2 dx dy & N_{xy}^e(t) &= \iint_e v(x,y,t) \, x y \, dx dy \\ B^e(t) &= \iint_e b(x,y,t) \, dx dy \end{aligned} \quad (14)$$

El vector $B^e(t)$ es la contribución de la primera integral de la segunda expresión (6):

$$B^e(t) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \alpha_i G + \beta_i G_x + \gamma_i G_y \\ \alpha_j G + \beta_j G_x + \gamma_j G_y \\ \alpha_m G + \beta_m G_x + \gamma_m G_y \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$G^e(t) = \iint_e g(x,y,t) \, dx dy; \quad G_x^e(t) = \iint_e x g(x,y,t) \, dx dy;$$

$$G_y^e(t) = \iint_e y g(x,y,t) \, dx dy$$

El vector $D^e(t)$ es la contribución de la segunda integral de la segunda de las (6) que aparece, como se detalla en [1], sólo cuando el triángulo "e" posee un lado λ' de vértices extremos i, j , por ejemplo, sobre la frontera de Neumann Γ' :

$$D^e(t) = 2 \begin{pmatrix} \rho_i(t) \\ \rho_j(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\rho_i(t) = \begin{cases} s(i) = \ell \\ \gamma(x(s), y(s), t) \frac{s}{\ell} ds \\ s(j) = 0 \end{cases}; \quad \rho_j(t) = \begin{cases} s(j) = \ell \\ \gamma(x(s), y(s), t) \frac{s}{\ell} ds \\ s(i) = 0 \end{cases}$$

ℓ : longitud de λ'

Si el nodo "j", por ejemplo, pertenece a la frontera Γ^* , entonces deberá tomarse $\rho_j = 0$.

El vector X^e está constituido por los tres parámetros no dales del elemento "e".

$$X^e(t) = \begin{pmatrix} \phi_i^h(t) \\ \phi_j^h(t) \\ \phi_m^h(t) \end{pmatrix} \quad (17)$$

Las matrices M^e y K^e contribuyen al primer miembro del sistema de ecuaciones. Los vectores B^e y D^e contribuyen al segundo miembro debiéndoseles por tanto cambiar de signo. Si el triángulo "e" posee al menos un nodo en la frontera Γ^* , digamos el "j", entonces en el elemento del medio del vector (17) aparecerá el valor $\delta_j(t)$, dato de Dirichlet. En este caso debe desde luego ignorarse la ecuación "j" y tenerse en cuenta la contribución al segundo miembro de los productos de $\delta_j(t)$ y $\delta_j(t)$ por los elementos de las segundas columnas de las matrices K^e y M^e respectivamente, cambiados de signo. Esto, por cada nodo de "e" que pertenezca a Γ^* .

Resulta clara la reducción de las expresiones (9) (10) y (11) a las usuales del caso estacionario ($v \neq 0$). Las (13), (15) y (16) son idénticas a las de [1] si se les quita la dependencia temporal.

2.2. Discretización de la variable temporal

A diferencia de lo que ocurre para el caso estacionario, el problema no concluye en el punto precedente ya que se hace necesario establecer la forma en que se procederá para integrar numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (9).

El algoritmo de discretización espacial es de orden 2 en norma media cuadrática en el caso estacionario (|2|§ 2.2) al menos para coeficientes regulares de (1). No se justifica en tonces un algoritmo de integración numérica para las (9), de orden superior a éste.

El método de discretización temporal adoptado es del tipo Crank-Nicolson que trabaja en valores centrados en $(n+\frac{1}{2})\Delta t$, donde n es el número genérico de pasos Δt en el tiempo. Es de segundo orden (|2|§ 7.2).

Resulta más claro el planteo si se trata transitoriamente a los valores nodales de Dirichlet como si también fuesen incógnitas. A posteriori lo que habrá que hacer es dar a esas supuestas incógnitas los valores prefijados de Dirichlet, tener en cuenta las contribuciones al segundo miembro que ellos originen y eliminar sus correspondientes ecuaciones.

Diferenciamos los vectores y matrices de tal sistema ficticio de los del sistema efectivo (9'), colocándoles una barra arriba. El primero, escrito en forma matricial, es

$$\bar{M}(t) \dot{\bar{X}}(t) + \bar{K}(t)\bar{X}(t) = -\bar{B}(t) - \bar{D}(t) \quad (18)$$

donde \bar{M} y \bar{K} son las matrices globales de $(N+M) \times (N+M)$ posiciones armadas a partir de las contribuciones por triángulo M^e y K^e ; similarmente \bar{B} y \bar{D} son los vectores de $N+M$ componentes formados a partir de B^e y D^e y por último

$$\bar{X}(t) = \begin{pmatrix} \phi_1^h(t) \\ \vdots \\ \phi_N^h(t) \\ \delta_{N+1}(t) \\ \vdots \\ \delta_{N+M}(t) \end{pmatrix} \quad (19)$$

Las discretizaciones propuestas son:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{M}^{n+1} + \bar{M}^n}{2} \cdot \frac{\bar{X}^{n+1} - \bar{X}^n}{\Delta t} + \frac{\bar{K}^{n+1} + \bar{K}^n}{2} \cdot \frac{\bar{X}^{n+1} + \bar{X}^n}{2} = \\ & = - \frac{\bar{B}^{n+1} + \bar{B}^n}{2} - \frac{\bar{D}^{n+1} + \bar{D}^n}{2} \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

y la variante

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{M}^{n+1} + \bar{M}^n}{2} \cdot \frac{\bar{X}^{n+1} - \bar{X}^n}{\Delta t} + \frac{\bar{K}^{n+1} \bar{X}^{n+1} + \bar{K}^n \bar{X}^n}{2} = \\ & = - \frac{\bar{B}^{n+1} + \bar{B}^n}{2} - \frac{\bar{D}^{n+1} + \bar{D}^n}{2} \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

donde \bar{M}^n , etc. significa $\bar{M}(n\Delta t)$, etc.

Explicitando \bar{X}^{n+1} en la (20) y la (21) queda,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\bar{M}^{n+1} + \bar{M}^n}{\Delta t} + \frac{\bar{K}^{n+1} + \bar{K}^n}{2} \right) \bar{X}^{n+1} = \\ & = \left(\frac{\bar{M}^{n+1} + \bar{M}^n}{\Delta t} - \frac{\bar{K}^{n+1} + \bar{K}^n}{2} \right) \bar{X}^n - (\bar{B}^{n+1} + \bar{B}^n) - (\bar{D}^{n+1} + \bar{D}^n) \end{aligned} \quad (22)$$

y

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\bar{M}^{n+1} + \bar{M}^n}{\Delta t} + \bar{K}^{n+1} \right) \bar{X}^{n+1} = \\ & = \left(\frac{\bar{M}^{n+1} + \bar{M}^n}{\Delta t} - \bar{K}^n \right) \bar{X}^n - (\bar{B}^{n+1} + \bar{B}^n) - (\bar{D}^{n+1} + \bar{D}^n) \end{aligned} \quad (23)$$

Si se tienen en cuenta los datos de Dirichlet eliminándose entonces las correspondientes ecuaciones, y se consideran las sendas contribuciones al segundo miembro como antes se indicara, de (22) y (23) se obtienen sistemas de N ecuaciones para determinar las N incógnitas del nivel $n+1$, las \bar{X}^{n+1} , en función de las condiciones de contorno. Este algoritmo, que es implícito, arranca de las condiciones iniciales X^0 , que provienen de la interpolación usual del dato inicial $\psi(x, y)$. En el intervienen simultáneamente sólo dos niveles.

En cuanto a la convergencia del procedimiento vale el resultado usual para diferencias finitas: "para un problema bien planteado, un método aproximado de resolución formalmente consistente es convergente, si y sólo si es estable" ([4], [2] § 7.1 y 7.2). El algoritmo en cuestión es incondicionalmente estable y por lo tanto convergente. La influencia de otro tipo de errores que se cometan, ha sido analizada en [1].

A efectos de simplificar el cálculo práctico sobre todo en el caso de coeficientes discontinuos se tomarán los valores de v , b y g constantes por triángulo (γ_e, b_e, g_e) y los de γ constantes por lado λ' de triángulo perteneciente a Γ' $(\gamma_{\lambda'})$. Los valores del dato de Dirichlet δ son tomados por nodo de Γ^* . El aspecto final que presentan entonces las (14), (15) y las segundas de (16), se encuentra en el Apéndice 1.

2.3. Caso de simetría axial

Las consideraciones teóricas inherentes al caso axisimétrico son similares a las expuestas. Nos limitaremos a consignar las expresiones previas del texto que se vean modificadas.

El sistema de coordenadas se designa ahora como r, z . El dominio Ω del plano r, z y su frontera Γ serán en la realidad rotados en torno al eje z por lo que deberá ser siempre $r \geq 0$. Las fronteras de Dirichlet (Γ^*) y de Neumann (Γ') conservan su significado. También el elemento real de cálculo será el sólido que se engendra por rotación del triángulo usual. ([3] Cap. 5). A efectos prácticos, las redes de triángulos en las coordenadas r, z son las mismas que en el caso plano usual.

Ecuación diferencial:

$$v \phi_t + (b \phi_r)_r + (b \phi_z)_z + \frac{b}{r} \phi_r = g$$

$$\phi|_{\Gamma^*} = \delta; \quad b \frac{\partial \phi}{\partial n} |_{\Gamma'} = \gamma; \quad \phi(r, z, 0) = \psi(r, z) \quad (1')$$

Expresiones del método de Faedo-Galerkin:

$$2 - \iint_{\Omega} [v \phi_t + (b \phi_r)_r + (b \phi_z)_z + \frac{b}{r} \phi_r] v r dr dz = 0 \quad (2')$$

$$\forall v \in V \quad t > 0, \text{ fijo}$$

$$a_t(\phi, v) \equiv \iint_{\Omega} [-v\phi_t v + b\phi_r v_r + b\phi_z v_z] r dr dz \quad (6')$$

$$L_t(v) \equiv - \iint_{\Omega} g v r dr dz - \int_{\Gamma} \gamma v r ds$$

$$M_{ks}(t) = - \iint_{\Omega} v x_k^h x_s^h r dr dz$$

$$K_{ks}(t) = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial x_k^h}{\partial r} \cdot \frac{\partial x_s^h}{\partial r} + \frac{\partial x_k^h}{\partial z} \cdot \frac{\partial x_s^h}{\partial z} \right] b r dr dz$$

$$F_s(t) = L_t(x_s^h) + a_t(R, x_s^h) \quad (10')$$

$$L_t(x_s^h) = - \iint_{\Omega} g x_s^h r dr dz - \int_{\Gamma} \gamma x_s^h r ds$$

$$a_t(R, x_s^h) = \iint_{\Omega} \left[-v \frac{\partial R}{\partial t} x_s^h + b \frac{\partial R}{\partial r} \cdot \frac{x_s^h}{\partial r} + b \frac{\partial R}{\partial z} \cdot \frac{x_s^h}{\partial z} \right] r dr dz$$

$$N^e(t) = \iiint_e v r dr dz; \quad N_r^e(t) = \iiint_e v r^2 dr dz; \quad N_z^e(t) = \iiint_e v z r dr dz \quad (14')$$

$$N_{rr}^e(t) = \iiint_e v r^3 dr dz; \quad N_{zz}^e(t) = \iiint_e v z^2 r dr dz; \quad N_{rz}^e(t) = \iiint_e v r^2 z dr dz$$

$$B^e(t) = \iiint_{\Omega} b r dr dz$$

$$G^e(t) = \iiint_{\Omega} g r dr dz; \quad G_r^e(t) = \iiint_{\Omega} g r^2 dr dz; \quad G_z^e(t) = \iiint_{\Omega} g r z dr dz \quad (15')$$

5. PROGRAMA DE CALCULO

En esencia, el programa, llamado CTR, consiste en el uso reiterado de las rutinas tipo "CUARM" (ver |1|) para cada paso de tiempo. La discretización conforme al algoritmo Faedo-Galerkin-Crank-Nicolson conduce a resolver un sistema lineal de ecuaciones en cada salto en el tiempo (sistema implícito) que si bien es bastante distinto al de |1|, globalmente puede asimilársele.

Se adoptó la discretización (20) pues permite, mediante una adecuada programación, un mayor ahorro de memoria.

La lógica general es la de un programa corriente de elementos finitos, en la que se considera la contribución triángulo por triángulo a la matriz de rigidez y al vector términos independientes. Tal sistema de ecuaciones se resuelve con el método de eliminación de Gauss.

La capacidad del programa (*) permite redes de hasta 1100 triángulos y 800 nodos, aproximadamente. Por sencillez interna del mismo, no deberá haber en la red ningún triángulo con sus tres vértices sobre la frontera. A efectos del cálculo, el dominio Ω puede ser múltiplemente conexo.

Los nodos que corresponden a incógnitas propiamente dichas del problema, es decir todos aquellos que no pertenecen a la frontera de Dirchlet Γ^* , se enumeran de 1 a n ; y los de Γ^* de $n+1$ a $n+m$. Una enumeración adecuada de los nodos conduce a anchos de banda reducidos.

El tiempo de máquina empleado para resolver un problema de 255 nodos y 512 triángulos es del orden de los 32 segundos por ciclo temporal.

Pueden obtenerse resultados tabulados y graficados (curvas de nivel) también para etapas intermedias de tiempo.

Se trabaja siempre en precisión simple.

- - - - -

(*) Implementado en la computadora IBM/360 Mod. 44 del Centro de Cómputos del Centro Atómico Bariloche con 128 Kb de capacidad de memoria de núcleos. No se utilizan archivos adicionales.

4. PRUEBAS EFECTUADAS

El programa fue sometido a pruebas que adicionalmente permitieron llevar a cabo experiencias numéricas relativas a la propagación de errores de redondeo y de discretización. A efectos de estudiar los primeros se resolvió un problema estacionario de solución conocida y sencilla.

4.1 Prueba independiente del tiempo. Propagación de errores de redondeo.

Tipo de simetría: dos casos, plana y de revolución
 Región de cálculo : cuadrado que en "x" se extiende de 0 a 16 y en "y" de -8 a +8
 Ecuación diferencial: $b \equiv 1$; $v \equiv 1$; $g \equiv 0$
 Dato de Dirichlet: $\delta = -8$ para $y=8$ y $0 \leq x \leq 16$
 $\delta = 8$ para $y=-8$ y $0 \leq x \leq 16$
 Dato de Neumann: $\gamma = 0$ para $x=0$; $-8 \leq y \leq 8$
 $\gamma = 0$ para $x=16$; $-8 \leq y \leq 8$
 Condición inicial: $\varphi(x,y) = -y$
 Solución exacta: $\phi(x,y,t) = -y$
 Incremento de tiempo: $\Delta t = 1$
 Red empleada: de geometría regular de 16×16 con 255 nodos "incógnita", 34 nodos de Dirichlet, 32 de Neumann y 512 triángulos.

Dado que la solución no depende de "x", se estudiaron los errores medios cuadráticos (EMC) para las filas $y=0$, $y=4$ e $y=7$ además de los correspondientes errores medios cuadráticos relativos (EMCR) en las dos últimas. Se obtuvo también para cada instante discretizado de tiempo, el error máximo absoluto de esa etapa (EMA).

Como el algoritmo en el caso presente admite solución exacta, los errores antes citados son sólo de redondeo.

La experiencia numérica, que tomó más de 110 ciclos en el tiempo, fue realizada con precisión simple. En el Cuadro I

se muestran los errores acumulados para n=110 tanto para simetría plana como para simetría de revolución.

SIMETRIA	EMA	y = 0		y = 4		y = 7	
		EMC	EMCR	EMC	EMCR	EMC	EMCR
Plana	$0,31 \times 10^{-3}$	$0,56 \times 10^{-4}$	-	$0,19 \times 10^{-3}$	$0,45 \times 10^{-4}$	$0,95 \times 10^{-4}$	$0,14 \times 10^{-4}$
De rev.	$0,51 \times 10^{-3}$	$0,33 \times 10^{-4}$	-	$0,21 \times 10^{-3}$	$0,51 \times 10^{-4}$	$0,80 \times 10^{-4}$	$0,11 \times 10^{-4}$

CUADRO I:

Errores de redondeo acumulados para n = 110

Se destaca que los errores consignados sólo tienen influencia en el cuarto o quinto dígito de los resultados. En la experiencia también se observa una notoria estabilización de la magnitud de los errores a partir del ciclo n = 40. La acumulación de los mismos, groseramente varía en forma proporcional a la raíz cuadrada del número n de pasos |4|.

4.2. Prueba general dependiente del tiempo. Propagación de errores de discretización.

Se trató de diseñar una prueba lo suficientemente general, que a su vez tenga una solución sencilla que facilite el cálculo de errores y su interpretación posterior. Además fue tal que la solución resulta la misma tanto para simetría plana como de revolución, lo que permite la comparación de los errores originados en sendos algoritmos.

Tipo de simetría: dos casos, plana y de revolución

Región de cálculo Ω : la descripta en 4.1

Ecuación diferencial(*): $v(x,y,t) = 10+x+y+\text{sen}(t/6)$
 $b(x,y,t) = -2 - \text{sen}[(x+y+t)/6]$
 $g(x,y,t) = x^2 [10+x+y+\text{sen}(t/6)] -$
 $- t\{4+2\text{sen}[(x+y+t)/6]+\frac{1}{3}x \cos[(x+y+t)/6]\}$

(*) A cada triángulo (o respect. lado) se le asigna un valor constante igual al promedio de los valores nodales.

Para simetría de revolución v y b iguales pero,

$$g(r,z,t) = r^2 [10+r+z+\text{sen}(t/6)] - \\ - t \{ 8+4\text{sen}[(r+z+t)/6] + \frac{1}{3}r \cos[(r+z+t)/6] \}$$

Dato de Dirichlet: $\delta = x^2 t$ para $y = 8$ y $0 \leq x \leq 16$

$\delta = x t$ " $y = -8$ y $0 \leq x \leq 16$

Dato de Neumann: $\gamma = 0$ para $x = 0$; $-8 \leq y \leq 8$

$\gamma = 32t \{ 2 + \text{sen}[(16+y+t)/6] \}$ para $x = 16$;
 $-8 \leq y \leq 8$

Condición inicial: $\varphi(x,y) = 0$

Solución exacta: $\phi(x,y,t) = x^2 t$

Incremento de tiempo: $\Delta t = 1$

Red empleada: la descripta en 4.1

Como la solución no depende de "y", se estudiaron los errores medios cuadráticos (EMC) para las columnas $x=4$, $x=10$ y $x=15$ además de los correspondientes errores medios cuadráticos relativos (EMCR). Se obtuvo también para cada paso en el tiempo el error máximo absoluto (EMA) de esa etapa.

La experiencia numérica, llevada hasta 110 ciclos, también fue hecha en precisión simple. Para $n=110$ se consignan en el Cuadro II los errores acumulados.

SIMETRIA	EMA	x = 4		x = 10		x = 15	
		EMC	EMCR	EMC	EMCR	EMC	EMCR
Plana	$0,51 \times 10^2$	$0,19 \times 10^2$	$0,11 \times 10^{-1}$	$0,29 \times 10^2$	$0,26 \times 10^{-2}$	$0,14 \times 10^2$	$0,56 \times 10^{-3}$
De rev.	$0,41 \times 10^2$	$0,20 \times 10^2$	$0,11 \times 10^{-1}$	$0,28 \times 10^2$	$0,26 \times 10^{-2}$	$0,13 \times 10^2$	$0,54 \times 10^{-3}$

CUADRO II:

Errores de discretización acumulados para $n=110$

El ejemplo descripto en 4.1 si bien distinto del presente, permite concluir que los valores del cuadro previo son prácticamente los errores de discretización del algoritmo para el caso estudiado.

Se destaca la pequeñez de los errores relativos. Para $x=4$ donde la solución (parabólica) toma ya valores bajos, y por lo tanto donde los errores ejercen mayor influencia, su magnitud sólo llega al 1%, disminuyendo luego hasta el 0,05% para $x=15$.

4.3 Algunas conclusiones extraídas de las experiencias precedentes.

- Los errores de redondeo son muy pequeños y tienden a estabilizarse obedeciendo en cierta forma a una ley de acumulación, proporcional a la raíz cuadrada del número de pasos en el tiempo. La estabilización se hace notoria ya para el ciclo 40.

- Los errores de discretización absolutos crecen con n , aunque dicho crecimiento tiende a atenuarse en forma marcada.

- Los errores de discretización relativos tienden a disminuir con n (¡pero la solución es creciente con el tiempo!).

- Toda variación del error con el número de pasos n , presenta oscilaciones.

- No se nota diferencia práctica entre los errores correspondientes a cada una de las simetrías.

- Se observa que el nivel general de error es inferior a lo esperado, manteniéndose hasta los 110 ciclos adecuadamente bajo. La marcada tendencia que los mismos presentan a la estabilización permite confiar en que su acumulación no sobrepasará en ca sos usuales los límites tolerables.

5. EXTENSION A PROBLEMAS NO LINEALES

Entendemos por problemas no lineales, aquellos en que los coeficientes a, b y el segundo miembro g puedan también depender de la solución ϕ .

La modificación del programa para atender dichos problemas se lleva a cabo bajo los lineamientos expresados en [1]: para cada paso de tiempo se calcula la solución ϕ^{n+1} del nivel siguiente

usando los valores tentativos de v, b, g y γ evaluados para la solución ϕ^n del nivel conocido. Obtenido ese primer valor provisorio de ϕ^{n+1} se calculan para el mismo v, b, g y γ . Se cotejan con los obtenidos antes y si en ningún punto de la red la diferencia supera un máximo prefijado se interrumpe el proceso. Si esto no es el caso, con tales valores de v, b, g y γ se recalcula ϕ^{n+1} y luego los nuevos v, b, g y γ que se cotejan con los previos; y así sucesivamente hasta lograr la convergencia esperada.

Este procedimiento ha sido rápidamente convergente en general [1]. Para diferencias máximas del 1% o menos pueden llegar a ser necesarias sólo dos o tres iteraciones. Pero esto es gravoso ya que el tiempo total de máquina ha de multiplicarse por un factor dos o tres. En los casos usuales, cuando no todos los parámetros dependen simultáneamente de ϕ , basta con evaluar dichos parámetros para el valor de ϕ^n y realizar a lo sumo uno o dos ajustes adicionales.

Al código correspondiente se le ha llamado CTRL.

BIBLIOGRAFIA

1. BASOMBRIIO, F.G.; CRUZ, B.: "Resolución por elementos finitos de la ecuación cuasiarmónica bidimensional (Programas "CUARM", "AXICUARM", "NOLICUARM")" CAB/1976/2 - Propuesto para ser publicado por la Comisión Nacional de Energía Atómica.
2. STRANG, G.; FIX, G.: "An analysis of the finite element method" (1973)
3. ZIENKIEWICZ, O.: "The finite element method" (1971)
4. RICHTMYER, R.D.; MORTON, K.W.: "Difference methods for initial-value problems" (1967)

APENDICE 1

Expresiones que intervienen en las fórmulas de contribución por elemento al sistema de ecuaciones, para el caso de funciones constantes por triángulo.

a) Simetría plana

$X = x - x_e$; $Y = y - y_e$; x_e, y_e : coord. del centroide

$$N^e(t) = v_e(t)\Delta; \quad N_x^e(t) = v_e(t)x_e\Delta; \quad N_y^e(t) = v_e(t)y_e\Delta$$

$$N_{xx}^e(t) = \Delta v_e(t) \left[\frac{X_i^2 + X_j^2 + X_m^2}{12} + x_e^2 \right]$$

$$N_{yy}^e(t) = \Delta v_e(t) \left[\frac{Y_i^2 + Y_j^2 + Y_m^2}{12} + y_e^2 \right]$$

$$N_{xy}^e(t) = \Delta v_e(t) \left[\frac{X_i Y_i + X_j Y_j + X_m Y_m}{12} + x_e y_e \right]$$

$$B^e(t) = b_e(t)\Delta; \quad G^e(t) = g_e(t)\Delta; \quad G_x^e(t) = g_e(t)x_e\Delta$$

$$G_y^e(t) = g_e(t)y_e\Delta; \quad \rho_i(t) = \frac{1}{2}\gamma_{\lambda}(t)l; \quad \rho_j = \frac{1}{2}\gamma_{\lambda}(t)l$$

b) Simetría de revolución

$R = r - r_e$; $Z = z - z_e$; r_e, z_e : coord. del centroide

$$N^e(t) = \Delta v_e(t)r_e; \quad N_r^e(t) = \Delta v_e(t) \left[\frac{R_i^2 + R_j^2 + R_m^2}{12} + r_e^2 \right]$$

$$N_z^e(t) = \Delta v_e(t) \left[\frac{R_i Z_i + R_j Z_j + R_m Z_m}{12} + r_e z_e \right]$$

$$N_{rr}^e(t) = \Delta v_e(t) \left[\frac{R_i^3 + R_j^3 + R_m^3}{30} + \frac{R_i^2 + R_j^2 + R_m^2}{4} r_e + r_e^3 \right]$$

$$N_{zz}^e(t) = \Delta v_e(t) \left\{ \frac{Z_i^2 R_i + Z_j^2 R_j + Z_m^2 R_m}{30} + \frac{Z_i^2 + Z_j^2 + Z_m^2}{12} r_e + \frac{Z_i R_i + Z_j R_j + Z_m R_m}{6} z_e + z_e^2 r_e \right\}$$

$$N_{rz}^e(t) = \Delta v_e(t) \left\{ \frac{R_i^2 Z_i + R_j^2 Z_j + R_m^2 Z_m}{30} + \frac{R_i^2 + R_j^2 + R_m^2}{12} z_e + \frac{R_i Z_i + R_j Z_j + R_m Z_m}{6} r_e + r_e^2 z_e \right\}$$

$$B^e(t) = b_e(t) r_e^\Delta ; \quad G^e(t) = g_e(t) r_e^\Delta$$

$$G_r^e(t) = \frac{\Delta g_e(t)}{12} (R_i^2 + R_j^2 + R_m^2) + \Delta g_e(t) r_e^2$$

$$G_z^e(t) = \frac{\Delta g_e(t)}{12} (R_i Z_i + R_j Z_j + R_m Z_m) + \Delta g_e(t) r_e z_e$$

$$\rho_i(t) = \frac{\gamma_{\lambda, (t) \cdot \lambda}}{6} (2r_i + r_j); \quad \rho_j(t) = \frac{\gamma_{\lambda, (t) \cdot \lambda}}{6} (2r_j + r_i)$$