

01.67.02

CNEA - 201

REPUBLICA ARGENTINA

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA



SOBRE LA INFLUENCIA DE LOS PROCESOS NORMALES EN LA
CONDUCTIVIDAD TERMICA DE AISLANTES Y DE
AISLANTES FERROMAGNETICOS

por

Blas Alascio



BUENOS AIRES

1967

REPUBLICA ARGENTINA

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA



SOBRE LA INFLUENCIA DE LOS PROCESOS NORMALES EN LA
CONDUCTIVIDAD TERMICA DE AISLANTES Y DE
AISLANTES FERROMAGNETICOS

por

Blas Alascio



BUENOS AIRES

1967

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION

**SOBRE LA INFLUENCIA DE LOS PROCESOS NORMALES EN LA
CONDUCTIVIDAD TERMICA DE AISLANTES Y DE
AISLANTES FERROMAGNETICOS**

Blaas Alascio⁽¹⁾

RESUMEN

Se calcula la cantidad de calor que pasa por segundo a través de una lámina infinita de material aislante y de espesor $2a$, en la cual se mantiene una diferencia de temperatura ΔT entre sus dos caras, para los casos límite en los cuales valen las desigualdades $2a \gg \Lambda$ y $2a \ll \Lambda$, (siendo Λ el camino libre medio de las excitaciones). El cálculo se repite para un aislante ferromagnético. En los dos casos se supone que solamente procesos normales son de importancia en las condiciones de cálculo.

Se muestra que el flujo en el caso $\Lambda \ll 2a$, es sustancialmente diferente del flujo en el caso $\Lambda \gg 2a$, pudiendo ser mayor o menor que éste.

(1) Centro Atómico Bariloche (CNEA) e Instituto de Física "Dr. J.A. Balseiro"
(CNEA y UNC).

INTRODUCCION

Es sabido que los procesos normales entre fonones por sí solos no dan lugar a una resistencia térmica finita en especímenes infinitos. Erdős (1) ha calculado el flujo de calor a través de una lámina de material dieléctrico en el cual se mantiene una diferencia de temperatura ΔT entre sus dos caras, en el caso en que no hay procesos de ninguna clase entre los fonones y también en el caso en que los fonones chocan con imperfecciones puntuales de la red. En el mismo trabajo Erdős calcula la función de distribución que se tendría en el caso en que el cambio libre medio de los fonones por procesos normales, fuera mucho menor que el ancho de la lámina y que lo contrario valiera para el camino libre medio por procesos resistivos. Haciendo uso de un argumento basado en la linealidad de la relación de dispersión, Erdős concluye que el flujo de calor es el mismo haya o no procesos normales dentro de la muestra. El argumento es correcto si se considera que los procesos normales ocurren solamente entre fonones de una misma rama; pero cuando se considera que los fonones que intervienen en una colisión que conserva impulso lineal k , pueden tener diferentes velocidades, que es la situación más común, esto no es necesariamente cierto:

$$\text{Sea:} \quad Q = \sum_{k \ s} n_{ks} \epsilon_{ks} c_{ks} \quad (1)$$

en algún instante dado; (en (1) n_{ks} es el número de fonones por cm^3 con número de onda k y polarización s , ϵ_{ks} y c_{ks} son respectivamente energía y velocidad). Supongamos ahora que ocurre un proceso normal, en el cual dos fonones (ks) y ($k' s'$) se unen para dar un tercero ($k'' s''$). Después del proceso tendremos:

$$Q' = Q - c_{ks} \epsilon_{ks} - c_{k's'} \epsilon_{k's'} + c_{k''s''} \epsilon_{k''s''} \quad (2)$$

Si la relación de dispersión es de la forma $\epsilon_{ks} = c_s k$ y además todas las c_s son iguales, es claro que para cualquier valor de los k , es $Q - Q' = 0$, mientras que si los c_s son diferentes, esto no es general cierto.

En la sección (i) calculamos el flujo de calor en el caso en que el camino libre medio es mucho más pequeño que la distancia entre las caras de la lámina y lo comparamos con el flujo que se obtiene en el caso opuesto.

En la sección (ii) se repite el cálculo para un aislante ferromagnético. Se supone que un campo externo actúa sobre la lámina y que la diferencia de temperatura es suficientemente chica para evitar el problema discutido por Erdős (2), que se presenta cuando el argumento de la función de Bose-Einstein se hace negativo.

i.) *Comparación de los flujos de calor para la lámina de aislantes en los casos $\Lambda \gg 2a$ y $\Lambda \ll 2a$.*

Erdős ha calculado el flujo en el primer caso suponiendo una relación de dispersión lineal y encuentra que el flujo se puede escribir como la suma de los flujos debidos a cada polarización $Q = \sum_s Q_s$. Los Q_s están dados por la expresión:

$$Q_s = \frac{4\pi\hbar J_3}{(2\pi)^3} c_s^2 \frac{(k_B T)^4}{(c_s \hbar)^4} \frac{\Delta T}{T} \quad (i.1)$$

donde siguiendo a Erdős se define

$$J_n = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x - 1}$$

k_B es la constante de Boltzmann, y T es la semisuma de las temperaturas en las caras. En la obtención de la fórmula (i.1) se supone que $\Delta T \ll T$.

El impulso lineal asociado a los fonones de polarización s está dado por:

$$P_s = \sum_s \hbar k n_{ks} = \frac{1}{c_s^2} \sum_k \epsilon_{ks} c_{ks} n_{ks} = \frac{Q_s}{c_s^2} \quad (i.2)$$

de manera que el impulso lineal total está dado por:

$$P = \frac{4\pi\hbar J_3 V}{(2\pi)^3} \sum_s \frac{(k_B T)^4}{(c_s \hbar)^4} \frac{\Delta T}{T} \quad (i.3)$$

Como ha sido discutido por Erdős en (1), la función de distribución en el caso $\Lambda \ll 2a$ es, con muy buena aproximación, de la forma:

$$n_k = \frac{1}{\frac{\epsilon_k - \hbar \lambda k}{e^{k_B T'} - 1}} \quad (i.4)$$

para todo punto tal que la distancia a cualquiera de las caras sea mucho mayor que Λ . Ya que el flujo es el mismo a través de cualquier superficie, bastará calcularlo en una superficie para la cual la función de distribución dada por (i.4) es válida.

λ y T' en (i.4) son parámetros a priori desconocidos, que deben ser determinados de tal manera que el impulso lineal K , y la energía E , sean los mismos que en ausencia de procesos normales, ya que estas cantidades se conservan en una colisión de este tipo.

Haciendo uso de (i.4), es posible calcular el impulso lineal para el caso $\Lambda \ll 2a$. El resultado obtenido es (hasta primer orden en λ/c):

$$\hbar K = \sum_k \hbar k n_k = \frac{16\pi\hbar J_3 V}{3(2\pi)^3} \frac{(k_B T')^4}{\hbar^4} \lambda \sum_s c_s^{-5} \quad (i.5)$$

mientras que para la misma distribución, la energía, también al primer orden en λ/c , está dada por:

$$E = \sum_s \frac{4 \pi V \hbar J_3}{(2 \pi)^3 c_s^3} \frac{(k_B T')^4}{\hbar^4} \quad (i.6)$$

La energía para el caso $\Lambda \gg 2a$ está dada por una expresión igual a (i.6), en la cual T' está reemplazada por T . Ya que las energías deben ser iguales, se concluye que $T' = T$.

Usando el resultado anterior, e igualando el resultado obtenido en (i.5) con el obtenido en (i.3), se obtiene de acuerdo con Erdős:

$$\lambda = \frac{3}{4} \frac{\sum_s c_s^{-4}}{\sum_s c_s^{-5}} \frac{\Delta T}{T} \quad (i.7)$$

Conocidos ahora λ y T' es posible calcular el flujo de calor Q^N (el superíndice N indica la presencia de procesos normales):

$$Q^N = \frac{4 \pi \hbar J_3}{(2 \pi)^3} \frac{(k_B T)^4}{\hbar^4} \frac{\Delta T}{T} \frac{\sum_s c_s^{-3} \times \sum_s c_s^{-4}}{\sum_s c_s^{-5}} \quad (i.8)$$

así que finalmente tenemos:

$$\frac{Q^N}{Q} = \frac{\sum_s c_s^{-3} \cdot \sum_s c_s^{-4}}{\sum_s c_s^{-5} + \sum_s c_s^{-2}} \quad (\text{i.9})$$

Si llamamos ahora c a la velocidad de los modos transversales y c/r a la velocidad del modo longitudinal, la razón (i.9) entre el flujo de calor en presencia de procesos normales y el flujo en ausencia de los mismos, será una función solamente de r :

$$\frac{Q^N}{Q} = \frac{(2+r^3)(2+r^4)}{(2+r^5)(2+r^2)} \quad (\text{i.10})$$

Vemos que tanto para $r=0$ como para $r=1$, la función Q^N/Q es uno, ya que en ambos casos todos los modos que contribuyen al flujo de calor tienen la misma velocidad. La figura 1 muestra el comportamiento de Q^N/Q para r variando entre 0 y 1.

ii.) El flujo de calor para la lámina de aislante ferromagnético

En esta sección calcularemos el flujo de calor debido a magnones y fonones para los casos $\Lambda \gg 2a$ y $\Lambda \ll 2a$. En el primer caso ya Erdős (2) ha calculado el flujo y el momento lineal asociado para campo externo cero. Repitiendo el cálculo de Erdős (Ref. (2) sec. II), pero teniendo en cuenta que la relación de dispersión para magnones se modifica por la presencia de un campo externo:

$$\epsilon_k = D k^2 + \mu H \quad (\text{ii.1})$$

donde D es una constante característica del material y relacionada con la integral de intercambio, μ es el momento magnético de cada ion, y H es el campo magnético externo.

Llamando y a $\mu H/k_B T$ se obtiene para el flujo y el momento lineal correspondiente asociados a los magnones solamente:

$$Q^M = \frac{\pi D^2}{\hbar (2\pi)^3} \frac{(k_B T)^3}{D^3} \frac{\Delta T}{T} \left[3g(y) - \frac{\partial g(y)}{\partial y} y \right] \quad (\text{ii.2})$$

$$\hbar K^M = \frac{\pi \hbar V}{2 (2\pi)^3} \frac{(k_B T)^2}{D^2} \frac{\Delta T}{T} \left[2f_2(y) - \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} \right] \quad (\text{ii.3})$$

en (ii.2) y (ii.3) se han usado las definiciones:

$$g(y) = f_2(y) + y f_2'(y) \quad (\text{ii.4})$$

$$f_n(y) = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^{x+y} - 1} \quad (\text{ii.5})$$

El flujo y el momento lineal correspondiente asociados a los fonones no son modificados respecto de la sección (i) y están dados por las fórmulas (i.1) e (i.3), respectivamente.

Es fácil ver que las fórmulas (ii.2) e (ii.3) tomadas para $H = 0$ se reducen a las dadas por Erdős:

$$Q^M = \frac{3\pi D^2 J_2}{\hbar (2\pi)^3} \frac{(k_B T)^3}{D^3} \frac{\Delta T}{T} \quad (\text{ii.6})$$

y

$$n_k^M = \frac{\pi \hbar J_1}{(2\pi)^3} \frac{(k_B T)^2}{D^2} \frac{\Delta T}{T} \quad (\text{ii.7})$$

Como en la sección (1), cuando el tamaño de la muestra es tal que permite muchos procesos normales en el interior, habrá dentro de la misma una región en la cual la función de distribución estará determinada por los procesos normales. Nuevamente, esta función estará dada por:

$$n_k^{MP} = \frac{1}{\frac{\epsilon^{MP} - \hbar k \lambda}{e^{k_B T'} - 1}} \quad (\text{ii.8})$$

el superíndice M o P indica magnón o fonón, y de la misma manera que en la sección anterior, λ y T' son parámetros que deben ser elegidos de tal manera que el impulso lineal y la energía *totales* sean iguales a los valores obtenidos en ausencia de procesos normales.

Al inspeccionar (ii.8) en el caso de magnones y en ausencia de campo magnético externo, resulta evidente que habrá una región del espacio k para la cual $\epsilon^{MP} - \hbar k \lambda$ es menor que cero y por consiguiente n_k resulta negativo. Esta inconsistencia ha sido discutida por Erdős (2). La presencia de un campo magnético externo añade a la energía de los magnones un término lineal en H e independiente de k , de manera que es posible, variando la intensidad de campo y la diferencia de temperatura entre las caras de la lámina, mantenerse en un régimen tal que (ii.8) es válida.

Callaway y Boyd (3) han hecho uso de esta función de distribución, para, usando el modelo propuesto por Callaway (4), estudiar la influencia de los procesos normales en la conductividad térmica de ferromagnetos aislantes cuando existen impurezas que contribuyen a la resistividad del material. Sin embargo, la influencia de procesos normales fonón-magnón ha sido despreciada completamente en (3).

Para seguir adelante con el cálculo, será necesario en primer lugar obtener

el impulso lineal para el caso $\Lambda \ll 2a$. El impulso lineal total será la suma del impulso lineal debido a los fonones y del debido a los magnones. El impulso lineal asociado a los fonones en función de λ está dado en la sección anterior por la fórmula (i.5). Calculamos ahora el impulso lineal asociado a los magnones:

$$\hbar K^M = \sum_k \hbar k n_k^M$$

reemplazando n_k^M por la expresión dada en (ii.8) y tomando nuevamente el término de menor potencia en λ que no se anula tenemos:

$$\begin{aligned} \hbar K^M &= \frac{4\pi \hbar^2 V}{3(2\pi)^3} \lambda T' \frac{\partial}{\partial T'} \int_0^\infty \frac{k^4 dk}{\epsilon^M \left(e^{\frac{\epsilon^M}{k_B T'}} - 1 \right)} \\ &= \frac{4\pi \hbar^2 V}{3(2\pi)^3} \frac{\lambda}{2D} \frac{(k_B T')^{3/2}}{D^{3/2}} \left[\frac{3}{2} F_{1/2}(y) - y \frac{\partial F_{1/2}(y)}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (\text{ii.9})$$

donde $F_n(y)$ están definidas por

$$F_n(y) = \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{(x+y)(e^{xy} - 1)} \quad (\text{ii.10})$$

Por otra parte, es fácil ver que si se tiene en cuenta solamente términos en primer orden de λ y ΔT , T' resulta igual a T , ya que las contribuciones de las correcciones en el primer orden a la función de distribución, se anulan por paridad.

El impulso lineal total está dado entonces por la suma de $\hbar K^M$ y $\hbar K^P$:

$$\begin{aligned} \hbar K &= \frac{16\pi J_3 V (k_B T)^4}{3(2\pi)^3 \hbar^4} \sum_s c_s^{-5} + \\ &+ \frac{\pi \hbar J_{1/2} V (k_B T)^{3/2}}{(2\pi)^3 D D^{3/2}} \left[\frac{F_{1/2}(y)}{J_{1/2}} - \frac{2y}{3J_{1/2}} \frac{\partial F_{1/2}(y)}{\partial y} \right] \hbar \lambda \end{aligned} \quad (\text{ii.11})$$

(nótese que para $y = 0$ la expresión entre corchetes vale 1).

Ya que los procesos normales conservan el impulso, la expresión obtenida en el mismo en (ii.11) debe ser igual a la suma de $\hbar K^M$ y $\hbar K^P$ como están dados por (ii.3) y (i.3); de esta igualdad obtenemos

$$\begin{aligned} \hbar \lambda &= \frac{4\pi \hbar J_3 \frac{(k_B T)^4}{\hbar^4} \sum_s c_s^{-4} + \pi J_1 \hbar \frac{(k_B T)^2}{D^2} \left[\frac{f_1(y)}{J_1} - \frac{y}{2J_1} \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} \right]}{\frac{16\pi J_3 (k_B T)^4}{3 \hbar^4} \sum_s c_s^{-5} + \pi J_{1/2} \frac{\hbar (k_B T)^{3/2}}{D D^{3/2}} \left[\frac{F_{1/2}(y)}{J_{1/2}} - \frac{2y}{3J_{1/2}} \frac{\partial F_{1/2}(y)}{\partial y} \right]} \\ & \frac{\Delta T}{T} \quad (\text{ii.12}) \end{aligned}$$

Conocido λ se puede ahora calcular el flujo de calor mediante (ii.8), que nuevamente tendrá una contribución de fonones y una de magnones. Se obtiene entonces:

$$Q = \left\{ \frac{2 J_3}{3 \pi^2} \frac{(k_B T)^4}{\hbar^4} \sum_s c_s^{-3} + \right. \\ \left. - \frac{5 J_{3/2} D (k_B T)^{5/2}}{3 (2\pi)^2 \hbar D^{5/2}} \left[\frac{f_{3/2}(y)}{J_{3/2}} - \frac{2y}{5 J_{3/2}} \frac{\partial f_{3/2}(y)}{\partial y} \right] \right\} \hbar \lambda \quad (\text{ii.13})$$

En este momento es importante notar que en todo el cálculo se ha supuesto que la diferencia de temperatura entre las caras es la misma para fonones y magnones. En realidad, si se pretende predecir los resultados de un experimento tipo sandwich como el realizado por Douglass (4), es necesario tener en cuenta además que aún cuando el contacto de las tapas con la muestra es perfecto, la diferencia de temperatura entre las caras no es la misma para fonones y magnones. Los resultados de Douglass, aunque burdos, indican que ΔT para magnones es una pequeña fracción del ΔT para fonones. Es sencillo modificar nuestros resultados para incluir las consecuencias de este hecho: inspeccionando la derivación de (ii.12) y (ii.13) se concluye que, mientras (ii.13) queda como antes, (ii.12), que nos da λ , se modifica de tal manera que si se llama $a \Delta T$ la diferencia de temperatura para magnones y ΔT la diferencia de temperatura para fonones, λ viene dada por la siguiente expresión:

$$\hbar \lambda = \frac{4\pi \hbar J_3 \frac{(k_B T)^4}{\hbar^4} \sum_s c_s^{-4} + \pi J_1 \hbar \frac{(k_B T)^2}{D^2} \left[\frac{f_1(y)}{J_1} - \frac{y}{2 J_1} \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} \right] a}{\frac{16\pi J_3 (k_B T)^4}{3 \hbar^4} \sum_s c_s^{-5} + \pi J_{1/2} \frac{\hbar (k_B T)^{3/2}}{D D^{3/2}} \left[\frac{F_{1/2}(y)}{J_{1/2}} - \frac{2y}{3 J_{1/2}} \frac{\partial F_{1/2}(y)}{\partial y} \right]} \frac{\Delta T}{T}$$

La figura.2 muestra $Q/T^3 \Delta T$ en función de T para $\alpha = 0$, $c_s = 5 \times 10^5$
 $D = 10^{-28}$ erg. cm² y $H = 0$ y $H = \infty$.

En la misma figura se muestra la misma expresión como se obtiene de (i.1),
que daría el flujo para la lámina de aislante ferromagnético en el caso $\alpha = 0$.
Como se ve en la figura, el flujo en el caso en que muchos procesos normales
ocurren dentro de la muestra puede ser mayor o menor que en el caso contrario.

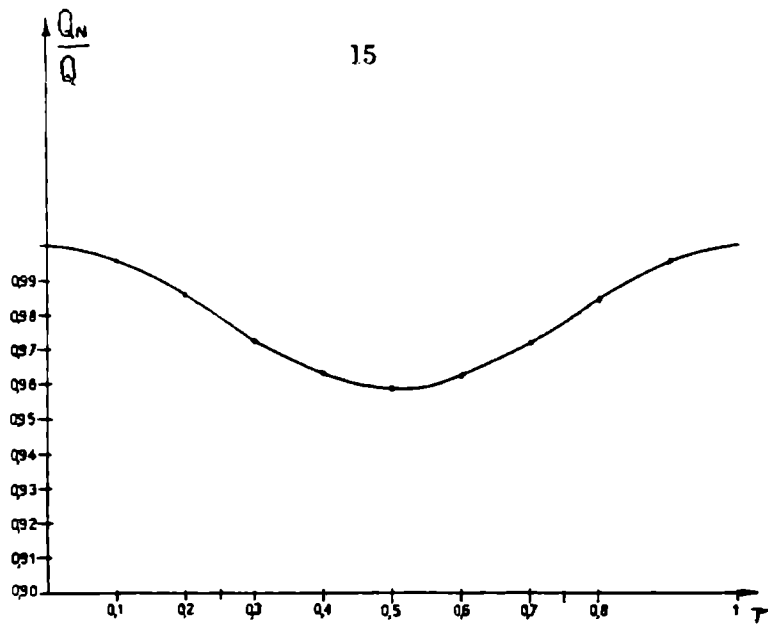


Figura 1 - Muestra la razón entre el flujo de calor a través de una lámina aislante en presencia de procesos normales y en ausencia de los mismos en función de $r = \frac{C_t}{C_1}$.

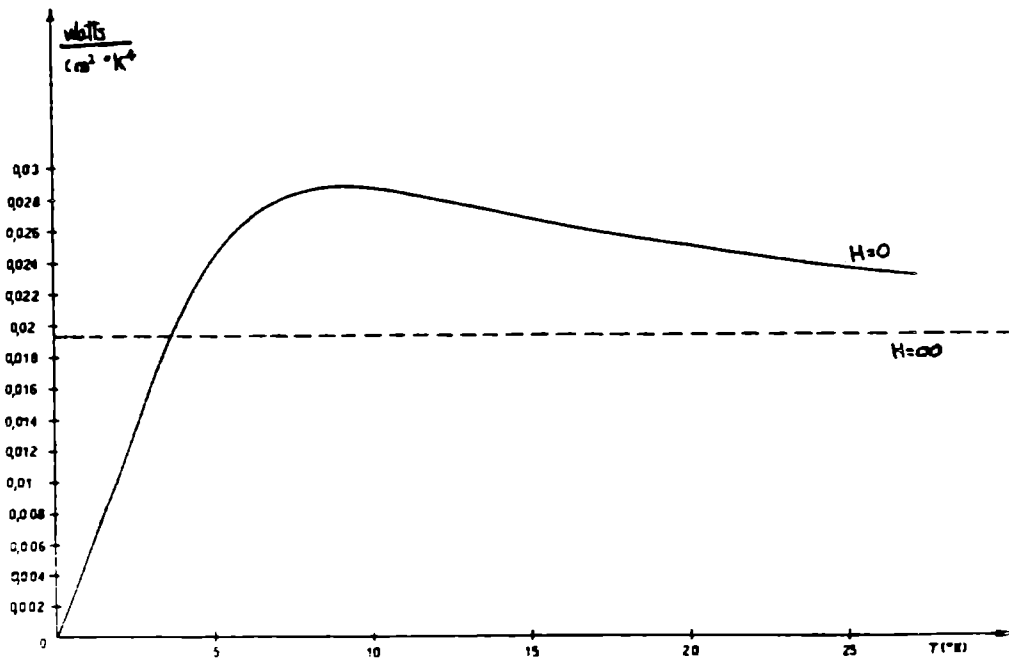


Figura 2 - Muestra flujo de calor en función de T para una lámina de aislante ferromagnético con $D = 10^{-28}$ erg.cm², $C = 5 \times 10^5$ cm/seg y $\alpha = 0$ en presencia de procesos normales para $H = 0$ y para $H = \infty$. La curva para $H = \infty$ coincide con el flujo en ausencia de procesos normales.

BIBLIOGRAFIA

1. ERDÖS, P. : Phys. Rev. 138, Al 200 (1965).-
2. ERDÖS, P. : Phys. Rev. 139, Al 249 (1965).-
3. CALLAWAY, J. y BOYD, R. : Phys. Rev. 134, Al 655 (1964).-
4. DOUGLASS, R. L. : Phys. Rev. 129, 1132 (1963).-

