

C.N.E.A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
N.º 3	AÑO 1986

00.86.10

CNEA-NT 34/86

REPUBLICA ARGENTINA  
COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA  
Dependiente de la Presidencia de la Nación  
DIRECCION DE PLANIFICACION, COORDINACION Y CONTROL  
Departamento Centro de Cálculo Científico

RESOLUCION POR ELEMENTOS FINITOS DEL PROBLEMA TERMICO  
REPRESENTADO POR LA ECUACION DE POISSON  
EN UN DOMINIO BIDIMENSIONAL

Sergio LANZIANI

Implementación computacional a cargo de:

Viviana M. VISCONTI

Buenos Aires

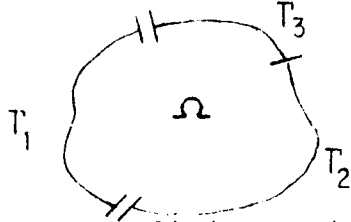
1986



1) ECUACION PROPUESTA:  $-k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = Q(x,y)$

$Q(x,y)$  representa la generación local del calor

2) DOMINIO:



-  $\Gamma_1$  frontera de condiciones de contorno forzadas:  $T = T(x,y)$  en  $\Gamma_1$

-  $\Gamma_2$  frontera de conducción de calor:  $q = k \left( \frac{\partial T}{\partial x} n_x - \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right)$

La ley de Fourier es  $q = -k \frac{dT}{dx}$   $|k| = \text{cal/cm seg } ^\circ\text{K}$

$q$  representa la cantidad de calor transferida a través de la frontera por conducción por unidad de tiempo y por unidad de longitud de la frontera.

-  $\Gamma_3$  es la frontera de convección  $q = k \left( \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) = h(T_\infty - T)$

Esta es la ley de Newton,  $T_\infty$  es la temperatura "bulk" y  $T$  es la temperatura sobre la frontera.

$h$  es el coeficiente de convección  $|h| = \frac{\text{cal}}{\text{seg cm}^2 ^\circ\text{K}}$

3) APROXIMACION DE LA SOLUCION:

$$T(x,y) = N_i(x,t) T_i + N_j(x,t) T_j + N_k(x,t) T_k$$

4) RESOLUCION: se aplica Galerkin y se calcula un sistema algebraico

$$|K_d| |T| = |R|$$

donde  $K_d$  es la matriz de difusión (ensamblados todos los elementos),  $T$  es el vector que contiene las incógnitas nodales y  $R$  es el término independiente.

Aplicamos Galerkin al elemento genérico ( $e$ ) y consideramos la función de forma  $N_j$ :

$$- \iint_{\Omega(e)} k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) N_j^{(e)} d\Omega^{(e)} = \iint_{\Omega(e)} Q N_j^{(e)} d\Omega^{(e)}$$

el término de la derecha forma parte del término independiente pues en él no figura la incógnita  $T$ ; lo llamaremos  $R_Q$  donde el subíndice  $Q$  indica que proviene como consecuencia de la generación interna de calor (fuentes internas).

En el término de la izquierda calculamos la parte correspondiente a  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  y obtenemos el resto por analogía.

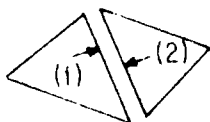
$$-\iint_{\Omega(e)} k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} N_i(e) d\Omega(e) =$$

$$\int_{\Gamma(e)} k \frac{\partial T}{\partial x} N_i(e) d\Gamma(e) - \iint_{\Omega(e)} k \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial N_i(e)}{\partial x} d\Omega(e)$$

(1)

(2)

El término (1) es una integral a través de la frontera  $\frac{\partial T}{\partial x}$  del elemento,  $k \frac{\partial T}{\partial x}$  representa un flujo de calor y está pesado con la función de forma  $N_i$ . Al ensamblar todos los elementos, para los elementos interiores del dominio, los flujos a través de las fronteras comunes se anulan entre sí.

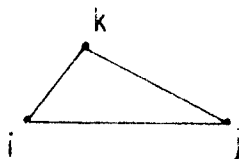


De manera que en el ensamblado final sólo contribuyen aquellos elementos que tienen algunos de sus lados ubicados sobre la frontera  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ .

El término (2) da la contribución a la matriz de difusión cuyo cálculo es bien conocido:

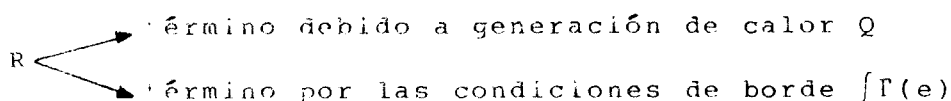
$$K_{d_{ij}} = \frac{k}{4\Lambda} (b_i g_j + c_i c_j) \text{ con las funciones de forma}$$

$$N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Lambda}$$



$$\Lambda = \text{área del elemento y} \quad \begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ b_i &= y_j - y_k \\ c_i &= x_k - x_j \end{aligned}$$

Lo que debemos calcular con más cuidado es el término independiente R.



Además la matriz de difusión ensamblada  $K_\phi$  tiene términos:

$$k_{dij} \left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega(e)} k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial N_i(e)}{\partial x} d\Omega(e) \\ \iint_{\Omega(e)} k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{\partial N_i(e)}{\partial y} d\Omega(e) \end{array} \right.$$

como resultado de

$K_{dh}$  término proveniente de la frontera 13.

ANÁLISIS DEL TÉRMINO:  $|R|$  independiente

$$|R|(e) = |R_Q|(e) + |R_{\Gamma_1}|(e) + |R_{\Gamma_2}(q)|(e) + |R_{Q_3}(h)|(e)$$

cero

a) CÁLCULO DE  $|R_Q|(e)$

$$|R_{Q_i}|(e) = \iint_{\Omega(e)} \tilde{Q} N_i d\Omega \quad \text{el subíndice } i \text{ representa a la función de forma } N_i$$

Se aproxima la generación de calor  $Q$  dentro del elemento como una combinación lineal de las producciones de calor en los nodos  $i, j, k$  que se introducen al programa como dato.

$$\tilde{Q} = Q_i N_i + Q_j N_j + Q_k N_k$$

y la integral da:

$$|R_{Q_i}|(e) = \iint_{\Omega(e)} (Q_i N_i^2 + Q_j N_i N_j + Q_k N_i N_k) d\Omega =$$

$$- \frac{\Lambda}{12} |2Q_i + Q_j + Q_k|$$

haciendo lo mismo para las otras funciones de forma se obtiene:

$$|R_{Q_j}|(e) = - \frac{\Lambda}{12} |Q_i + 2Q_j + Q_k|$$

$$|R_{Q_k}|(e) = - \frac{\Lambda}{12} |Q_i + Q_j + 2Q_k|$$

b) CALCULO DE LA CONTRIBUCION DE LA FRONTERA DE CONVECCION:

$$|R_{\Gamma_3}(h)|^{(e)} = \int_{\Gamma_3(e)} h(T_\infty - T) N_i d\Gamma_3 = \int_{\Gamma_3(e)} h T_\infty N_i^{(e)} d\Gamma_3 - \quad (1)$$

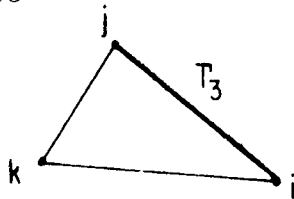
$$\int_{\Gamma_3(e)} h(N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k) N_i^{(e)} d\Gamma_3 \quad (2)$$

El término (1) representa la contribución al término independiente.

El término (2) se ensambla a la matriz de difusión  $K_d$ .

$$(1) h T_\infty \int_{\Gamma_3(e)} N_i^{(e)} d\Gamma_3$$

supongamos el elemento



los nodos i y j ubicados sobre la frontera reciben contribución en el ensamblado y el valor de la integral es  $h T_\infty \frac{l_{ij}}{2}$

El término (2) da como resultado:

$$- \frac{h}{3} \begin{bmatrix} l_{ij} & l_{ij}/2 & 0 \\ l_{ij}/2 & l_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{bmatrix}$$

que se ensambla a la matriz de difusión. Las componentes asociadas a  $\phi_k$  que no están sobre la frontera dan nulas.

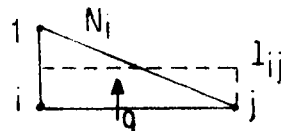
c) CALCULO DE LA CONTRIBUCION DE LA FRONTERA DE CONDUCCION

$$|R_{\Gamma_2}(q)|^{(e)} = \int_{\Gamma_2(e)} q N_i d\Gamma_2 = q \int_{\Gamma_2} N_i d\Gamma_2$$

Al programa se le dice cuáles son los lados de la frontera de conducción y se le da como único dato la densidad lineal de conducción a través de la misma, es decir

$$q \text{ [cal/cm.seg } ^\circ\text{k]}$$

la integral da  $q \frac{l_{ij}}{2}$ ; es como un flujo integrado con la función de peso igual a la función de forma



En el ensamblado, a los nodos ubicados sobre la frontera de conducción  $\Gamma_2$ , se le suma una contribución  $q \frac{l_{ij}}{2}$  en el término independiente; el dato es q y  $l_{ij}$  es calculado por el programa.

BIBLIOGRAFIA

- [1] K.H. Huebner, *The Finite Element Method for Engineers*, John Wiley, New York, London, Toronto, 1975.
- [2] G. Marshall and P. Binaghi, "A General Collapsing Technique for Three Dimensional Algebraic Grid Generation II", SIAM Conference in Geometric Modeling and Robotics, Albany, New York, July 15-19, 1985.
- [3] G. Marshall y P. Binaghi, "Generador Automático de Malla: Programa Bidimesh", CNEA, 1985.

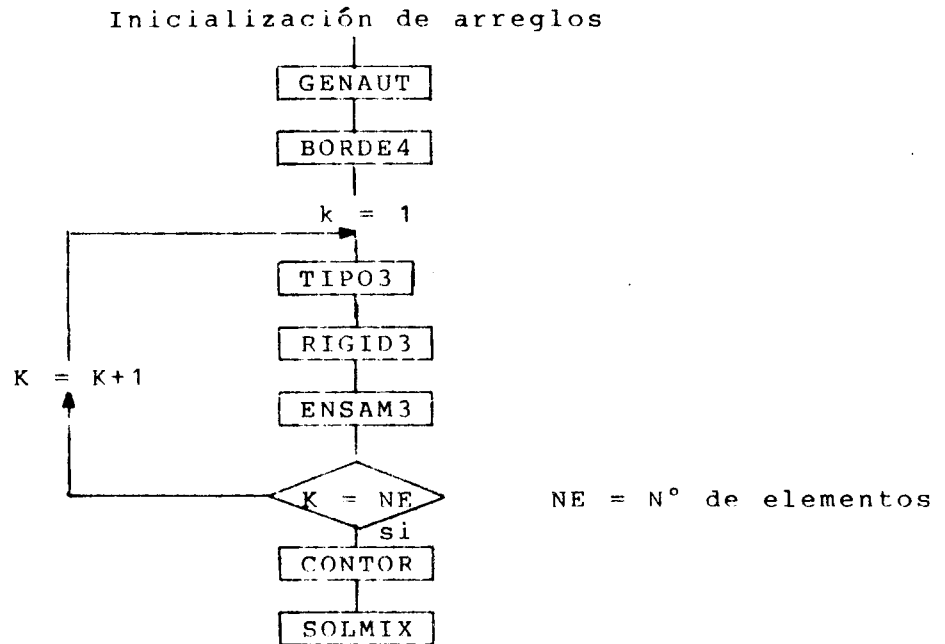




PROGRAMA DE CALCULO TERM2

Se implementó sobre la base del programa publicado en [1] y como aplicación del curso de Elementos Finitos dictado por el Dr. Guillermo Marshall, haciéndolo modular al descomponerlo en un conjunto de subrutinas que resuelven paso a paso el problema térmico planteado y que integran una pequeña biblioteca de elementos finitos.

El diagrama de flujo del programa TERM2 es el siguiente:



DESCRIPCION DE LAS RUTINAS

GENAUT: Realiza la generación automática de malla presentada en [2] y desarrollada en [3]. Requiere el mismo archivo de datos usado en [3].

BORDE4: Sobre la base de la malla generada por GENAUT permite la imposición automática de las condiciones de borde sobre el contorno, suponiendo que éste es un rectángulo.

Al archivo de datos hay que agregarle las siguientes tarjetas:

- una tarjeta con la que se suministrará el valor de la conductividad termal y de la generación interna de calor que se aplicará a todos los elementos. Si se desease tener elementos con valores distintos, deberá indicárselo en la llave existente en esta tarjeta.

Formato de la tarjeta (E9.2, F10.0, I5) :

TKT: valor de la conductividad termal para todos los elementos  
FUENTE: valor de la generación interna de calor para todos los elementos.

LLAVE = 0 indica que los valores de la conductividad termal y de la generación interna de calor son válidos para todos los elementos.

= 1 indica que se proveerán a continuación valores distintos de conductividad termal y de generación interna de calor.

Será necesario en este caso haber hecho un preprocesamiento previo con [3] para conocer los números de elementos de comienzo de aplicación de los nuevos valores.

- bloque de tarjetas para aplicación de nuevos valores de conductividad termal.

Formato de cada tarjeta (I5, I5, I5, E9.2) :

IEL: número de elemento de comienzo de aplicación del nuevo valor.

LAN: cantidad de elementos hacia lo ancho de aplicación.

LAL: cantidad de elementos hacia lo alto de aplicación.

TKT: valor de la conductividad termal.

Finalización del bloque con una tarjeta en blanco.

- el bloque de tarjetas para aplicación de nuevos valores de generación interna de calor es análogo al anterior proveyendo en FUENTE (en lugar de TKT) el nuevo valor.

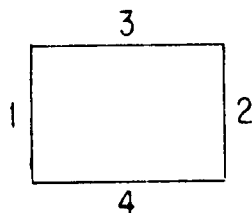
- tarjeta de datos para  $\Gamma_1$  (frontera de condiciones de contorno forzadas  $T = T(x,y)$ ).

Esta tarjeta ofrece la posibilidad de indicarle al programa que se va a proveer  $FUN(x,y)$  (en cuyo caso habrá que codificarla en la subrutina BORDE4) o bien, introducir valores numéricos para cada uno de los lados que definen  $\Gamma_1$ .

Formato de la tarjeta (F10.0, F10.0, F10.0, F10.0, I5,)

TN1 TN2 TN3 TN4 IFUN

donde los bordes se definen según la siguiente convención:



Si alguno de los  $TN_i = -1$  esto indica que no se imponen condiciones sobre ese borde.

Si  $IFUN \neq 0$ , entonces no interesan los valores de  $TN_i$  pues se aplicará  $FUN(x,y)$ .

- tarjeta de datos para  $\Gamma_2$  (frontera de conducción de calor)

Formato de la tarjeta (F10.0, F10.0, F10.0, F10.0)

$Q_1$   $Q_2$   $Q_3$   $Q_4$

donde los bordes se definen según la convención anterior. Si alguno de los  $Q_i = -1$ , esto indica que no se imponen condiciones sobre ese borde.

- tarjeta de datos para  $\Gamma_3$  (frontera de convección)

Formato de la tarjeta:

(F10.0, F10.0, F10.0, F10.0, F10.0, F10.0, F10.0, F10.0)

HH1 HH2 HH3 HH4 TINF1 TINF2 TINF3 TINF4

donde  $HH_i$  define el coeficiente de transferencia de calor convectivo para el borde  $i$  y  $TINF_i$  define la temperatura ambiente para el borde  $i$  según las convenciones vistas.

- tarjeta donde se provee un valor de escalamiento para la posterior graficación de los resultados.

Formato de la tarjeta (F10.0)

ESCALA

TIPO3 : Define para el elemento de entrada (cuadrilátero o triángulo) la utilización de las funciones básicas trinodales para dos triángulos).

RIGID3: Calcula las matrices elementales de rigidez para T y Q.

$$[K_{d_{ij}}]^{(e)} = \frac{k}{4\Delta} (b_i b_j + c_i c_j)$$

$$[R_{Q_i}]^{(e)} = - \frac{\Delta}{12} [2Q_i + Q_j + Q_k]$$

ENSAM3: Ensambla las matrices elementales en la matriz global.

CONTOR: Modifica la contribución de los términos independientes introduciendo las condiciones de contorno definidas en BORDE4.

SOLMIX: Reacondiciona la matriz ensamblada total y resuelve el sistema de ecuaciones resultante.



- DESCRIPCION DE LOS PARAMETROS UTILIZADOS POR CADA UNA DE LAS  
RUTINAS -

Subroutine GENAUT (NNODE, NE, XX, YY, NODE, INODE, NR, NT,  
LIN, IREG, JREG)

Generador automático de malla.

Requiere en la unidad 5 el mismo archivo de datos necesario  
para el programa BIDIMESH.

Los siguientes son todos parámetros retornados por la  
rutina. (salvo INODE).

- Parámetros -

NNODE : indica cantidad total de nodos generada.  
NE : indica número total de elementos generado  
XX : vector conteniendo las coordenadas X generadas.  
YY : vector conteniendo las coordenadas Y generadas.  
NODE : matriz de dimensión (INODE , 4) conteniendo la topología  
(números de nodos por elemento).  
INODE : dimensión principal de NODE en el programa invocante  
(mínimo : cantidad total de elementos).  
NR : número total de puntos en la dirección X.  
NT : número total de puntos en la dirección Y.  
LIN : indicador de tipo de aristas. (1:lineales 2:curvas)  
IREG : cantidad de regiones en la dirección X.  
JREG : cantidad de regiones en la dirección Y.

Subroutine BORDE4 (NX, NY, NE, NN, TK, QQ, T, Q, NTS, NNTS,  
NQS, NNQS, NC1, NC2, NC3, NC4, H, TINF, NNHC, ESCALA, NNQSEG,  
RQS).

Entrada de las condiciones de borde.

Requiere en la unidad 5 el archivo de datos que se describió  
antes.

- Parámetros para la rutina -

NX : cantidad de puntos en la malla en la dirección X.  
NY : cantidad de puntos en la malla en la dirección Y.  
NE : cantidad de elementos.  
NN : cantidad de nodos.  
TK : al retorno, vector conteniendo los valores de la conduc-  
tividad termal para cada elemento.  
QQ : al retorno, vector conteniendo los valores de la generación  
interna de calor para cada elemento.  
T : al retorno, vector conteniendo en las posiciones respec-  
tivas de la numeración real de los nodos (el resto inicia-  
lado en 0 por el programa), los valores introducidos para  
la frontera de condiciones de contorno forzadas  $t = t(x,y)$ .

Q : al retorno, vector conteniendo los valores introducidos para la frontera de conducción de calor.  
NTS : al retorno, vector conteniendo los números de los nodos para la frontera de condiciones forzadas.  
NNTS : al retorno, cantidad de datos introducidos para T.  
NQS : al retorno, vector conteniendo los números de los nodos para la frontera de conducción de calor.  
NNQS : al retorno, cantidad de datos introducidos para Q.  
NC1,NC2 : al retorno, vectores conteniendo los límites de cada segmento de frontera de conducción.  
NC3,NC4 : al retorno, vectores conteniendo los límites de cada segmento de frontera de convección.  
NNHC : cantidad de datos introducidos para la convección.  
H : al retorno, vector conteniendo los valores de los coeficientes de transferencia de calor de la frontera de convección.  
TINF : al retorno, vector conteniendo los valores de la temperatura ambiente de la frontera de convección.  
ESCALA : valor de escala introducido para graficar los resultados.  
NNQSEG : al retorno, cantidad de segmentos que constituyen la frontera de conducción.  
RQS : al retorno, vector conteniendo los valores introducidos para cada uno de los segmentos de la frontera de conducción.

Subroutine TIPO3 (K, K1, INODE, NODE, TK, QQ, AUX, NE, NNN)

Definición de características para uso de funciones básicas trinodales; define para el elemento de entrada, dos triángulos.

- Parámetros -

K : número de elemento.  
K1 : indica tipo de descomposición (1 o 2) (retornado por la rutina).  
INODE : dimensión principal de NODE en el programa ivocante.  
NODE : matriz de dimensión (INODE, 4) conteniendo la topología (elemento, números de nodos).  
TK : vector conteniendo los valores de la conductividad termal para cada elemento.  
QQ : vector conteniendo los valores de la generación interna de calor para cada elemento.  
AUX : vector auxiliar de dimensión 9 usado por la rutina.  
NE : número total de elementos incrementado en 1 por cada elemento de entrada.  
NNN : matriz de dimensión (2, 3) usada por la rutina para indicar el orden de los nodos en la descomposición.

Subroutine RIGID3 (K, L, TK, QQ, TMP, FQQP, AUX)

Cálculo de las matrices elementales de rigidez para t y q.

- Parámetros -

K : número de elemento (para el se definieron dos triángulos).  
L : número de entrada para K (1 o 2).  
TK : vector conteniendo los valores de la conductividad termal para cada elemento.  
QQ : vector conteniendo los valores de la generación interna de calor para cada elemento.  
TMP : matriz elemental de rigidez de dimensión (3, 3) para t, calculada por la rutina.  
FQQP : vector elemental de rigidez de dimensión 3 para q, calculado por la rutina.  
AUX : vector auxiliar de dimension 9 usado por la rutina.

Subroutine ENSAM3 (L, TMP, ITM, TM, FQQP, FQQ)

Ensamblado de las matrices elementales en la matriz global.

- Parámetros -

L : número de entrada para el elemento K (1 o 2).  
TMP : matriz elemental de rigidez de dimensión (3, 3) para T.  
ITM : dimensión de FQQ y dimensión principal de TM en el main.  
TM : matriz global de dimensión (ITM, ITM) para t.  
FQQP : vector elemental de rigidez de dimensión 3 para q.  
FQQ : vector global de dimensión ITM para q.

Subroutine CONTOR (NNQS, Q, RHS, NNHC, H, TINF, RHST, NQS, NC3, NC4, ITM, TM)

Modifica la contribución de los términos independientes al sistema global, introduciendo las condiciones de borde.

- Parámetros -

NNQS : cantidad de datos introducidos para Q.  
Q : vector de dimensión ITM conteniendo los valores de la frontera de conducción de calor.  
RHS : vector de dimensión ITM conteniendo los términos independientes del sistema.  
NNHC : cantidad de datos introducidos para la convección.  
H : vector de dimensión ITM conteniendo los valores de los coeficientes de transferencia de calor de la frontera de convección.  
TINF : vector de dimensión ITM conteniendo los valores de la temperatura ambiente de la frontera de convección.

RHST : vector de dimensión ITM conteniendo los términos independientes del sistema modificados con los términos convectivos.  
NQS : vector de dimensión ITM conteniendo los números de los nodos para la frontera de conducción de calor.  
NC3,NC4 : vectores de dimensión ITM conteniendo los límites de un segmento de frontera de convección.  
ITM : dimensión de FQQ y dimensión principal de TM en el main, siendo FQQ : vector de términos independientes del sistema y TM : matriz global del sistema.  
TM : matriz global del sistema.

Subroutine SOLMIX (IA, N, A, X, Y, NX, LISTX, NY, LISTY)

Reacondiciona la matriz ensamblada total y resuelve el sistema de ecuaciones resultante.

- Parámetros -

IA : dimensión principal de A.  
N : cantidad de nodos con datos.  
A : arreglo de dimensión (IA, IA) conteniendo la matriz global del sistema.  
X : vector incógnita de dimensión IA en el que se obtendrá la solución del sistema y que contiene a la entrada los valores de las condiciones forzadas para los nodos indicados en LISTX y en las posiciones respectivas.  
Y : vector de dimensión IA conteniendo los términos independientes.  
NX : cantidad de datos para las condiciones forzadas.  
LISTX : vector de dimensión IA conteniendo los números de los nodos donde se han introducido condiciones forzadas.  
NY : cantidad de datos para la frontera de conducción de calor.  
LISTY : vector de dimensión IA conteniendo los números de los nodos donde se han introducido datos de conducción.