

02.54.04

C.N.E.A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº	AÑO
1	1954

REPUBLICA ARGENTINA

PUBLICACIONES

DE LA

COMISION NACIONAL DE LA ENERGIA ATOMICA

SERIE FISICA

VOL. I — N° 2

LA CASCADA NUCLEONICA

Por JUAN G. ROEDERER



BUENOS AIRES

1954

REPUBLICA ARGENTINA

PUBLICACIONES

DE LA

COMISION NACIONAL DE LA ENERGIA ATOMICA

SERIE FISICA

VOL. I — N° 2

LA CASCADA NUCLEONICA

Por JUAN G. ROEDERER



BUENOS AIRES

1954

Imprenta CoNF, Perú 684, Buenos Aires

1224

LA CASCADA NUCLEONICA

SUMMARY

In the present paper a theory of the nucleonic cascade is given paying special attention to latitude effects. In the first part the basic assumptions are discussed. In the second one the mathematical development is given, starting from the diffusion equations and using Budini-Molière's generation spectrum. Explicit expressions are derived for the development of the nucleonic cascade, assuming either a cut-off of primary spectrum of a pure potential form, or one of a «sectional form» as a better approximation to the real non-potential one. In the third part numerical results are given. All important features of the latitude effect of the nucleonic component as found by experiment are readily explained. Several curves are given, showing the absorptions of nucleons for different energy intervals; the variation of the absorption path with atmospheric depth and energy; the variation of the integral latitude effect for protons and neutrons as a function of energy and atmospheric depth; the integral intensity of protons and neutrons as a function of geomagnetic latitude; etc.

§ 1. INTRODUCCIÓN

Actualmente se tiene una imagen adecuada — y en cierto modo acabada — de los fenómenos concernientes a la radiación cósmica. El rapidísimo progreso que durante los últimos años se realizara en la construcción de los aparatos e instrumentos de detección de las partículas que componen dicha radiación, ha hecho posible aclarar casi todos los puntos fundamentales, quedando reducida la mayor parte de los detalles aun poco conocidos, a problemas fundamentales de la física nuclear y de la física de las partículas elementales.

Uno de los propósitos de este trabajo es describir esta imagen en su forma física y matemática actualmente más sencilla, señalar su alcance para explicar y prever fenómenos, e indicar en qué aspectos

es útil para « poner a prueba » diversas hipótesis que se formularen sobre algunos puntos de difícil comprobación experimental, pero de gran interés para la física nuclear. Describir esta imagen significa edificar una teoría fenomenológica basada en un cierto conjunto mínimo de fenómenos experimentalmente conocibles ya sea en forma directa o indirecta; teoría que por medio de una adecuada formulación matemática, deberá dar cuenta en forma cuantitativa del comportamiento de las componentes de la radiación cósmica.

Este trabajo se limitará a la descripción de la *componente nucleónica*; componente más importante de la radiación secundaria, que constituye el sostén y la fuente de todas las demás componentes que integran el flujo de partículas a través de la atmósfera.

El propósito principal será — además de una exposición sistemática del formalismo físico y matemático de la teoría — el análisis detallado del « efecto de latitud » de la componente nucleónica.

Varios autores han contribuido a edificar la teoría de la difusión de nucleones, o « teoría de la cascada nucleónica ». Los primeros cálculos fueron realizados por W. Heitler y L. Janossy (1), siguiendo los cálculos detallados de H. Messel et al. (2), a la par de otros (P. Caldirola et al. (3); B. Rossi (4), y otros). Una exposición sistemática, elegante y muy completa fué dada por P. Budini y Molière (5). La teoría de Budini y Molière ha servido de base para todo lo que sigue: el presente trabajo se puede considerar meramente como una ampliación del § 3, 1, capítulo V de 5. Con todo, se ha preferido utilizar el formalismo matemático de las *ecuaciones de difusión* (al que no recurrieron Budini y Molière), por ser éste un camino que permite presentar el problema en una forma más general y quizá más fácilmente visible.

§ 2. LA CASCADA NUCLEÓNICA

La imagen que se trata de describir teóricamente es la siguiente:

Una partícula primaria incide sobre la capa atmosférica. Luego de recorrer en promedio cierto trayecto (« camino medio de colisión »), se encuentra con un núcleo de la atmósfera, desintegrándolo. En esa desintegración nacen — con un cierto espectro « de generación » y con cierta distribución angular — partículas que vuelven a producir desintegraciones en su trayecto por la atmósfera. Este proceso transfiere la energía de una sola partícula a varias (« cascada »), perdién-

dose cierta proporción en otras acciones (creación de mesones, excitación del núcleo, radiación). Esta *transferencia y degradación* causan la variación de la intensidad y del espectro de la componente nucleónica, al atravesar la atmósfera u otro material. Esta variación es accesible a la experiencia, poseyéndose hoy día suficientes datos al respecto, como para confrontarlos con los resultados teóricos.

Para establecer la teoría fenomenológica correspondiente, se deberá partir de las siguientes bases :

- a) El *espectro de las partículas primarias* incidentes sobre la atmósfera ;
- b) La *sección eficaz* total de colisión con núcleos del aire para nucleones ;
- c) El *espectro de generación* de nucleones en una desintegración nuclear.

Con estos datos, y estableciendo las ecuaciones que gobiernan la difusión de los nucleones en la atmósfera, se estará en condiciones de determinar — por lo menos formalmente — la intensidad, el espectro de energía y la composición de la componente a cualquier profundidad atmosférica.

La teoría de la cascada nucleónica se caracteriza — además de su engorroso desarrollo matemático — por ser una teoría que debe partir de bases poco conocidas (especialmente los espectros de generación), para explicar hechos hoy día relativamente bien establecidos. Esto hace suponer que la principal utilidad de la teoría — además de describir la imagen — sea la de servir como «prueba» de las hipótesis hechas sobre la forma del espectro de generación y sobre la expresión de la sección eficaz, que se hayan adoptado como puntos de partida. En una palabra, podrá servir para dar importantes informaciones sobre los mecanismos de la desintegración nuclear, para un rango de energías que se extiende hasta muy por encima de las alcanzables en los grandes aceleradores que hoy día funcionan en diversos laboratorios.

Sin embargo, se tropieza con una dificultad intrínseca de la teoría : el factor principal que determina el desenvolvimiento de la cascada nucleónica no resulta ser el espectro de generación en sí, sino ciertas *transformadas* (de Mellin, pág. 6) de él, y que tienen la propiedad de «borrar» detalles intrínsecos de ese espectro. En otras palabras, lo que determina la propagación de la componente nucleónica es, en primer lugar, *el hecho en sí* de tratarse de un proceso en *cascadas* ; los

detalles de lo que sucede en cada acto elemental de desintegración sólo intervienen en forma secundaria. Por otra parte, cualquier expresión que se adopte para el espectro de generación tiene suficiente abundancia de parámetros, como para « ajustar » éstos en forma conveniente para reproducir correctamente los datos experimentales.

Estas son seguramente las causas por las que todas la teorías desarrolladas hasta hoy día por diversos autores, partiendo de espectros de generación a primera vista diferentes, pueden llegar a resultados coincidentes en mayor o menor grado.

Afortunadamente, existen ciertos puntos en la teoría que presenta una mayor « sensibilidad » a la forma del espectro de generación.

Entre ellos figuran el « efecto de latitud » (o sea la variación de las características de la componente nucleónica con la latitud geomagnética § 6) y la absorción de un espectro primario *no potencial*. Estos puntos podrían desempeñar, por tanto, un papel importante para el estudio del mecanismo de desintegraciones nucleares energéticas.

Respecto de los tres puntos de partida enunciados anteriormente cabe observar lo siguiente :

a) *Espectro primario* : Si bien la radiación primaria consta de un flujo de núcleos ionizados (p. e., cap. IV de (6) y (7)), siendo el hidrógeno (protones aislados) el más abundante (aprox. un 90 %, en las latitudes altas), puede considerarse en primera aproximación que el flujo aparece convertido rápidamente en un flujo de protones y neutrones, dada la gran sección eficaz de colisión para los núcleos pesados.

El *espectro integral* de las partículas primarias (o sea, el número $I(E)$ de partículas con energía superior a E , que por cm^2 y segundo incide sobre la atmósfera) es del tipo :

$$I(E) = A \cdot (E + B)^{-\alpha}. \quad (1)$$

Para los protones incidentes, la constante B es de orden de 6 GeV; el exponente α vale 1,75 (cap. V, § 3 de 5); A es una constante.

Para energías mayores que 10 GeV se puede usar sin mayor error la forma :

$$I(E) = A \cdot E^{-1,75}. \quad (1a)$$

El *espectro diferencial* correspondiente queda :

$$N(E) dE = k \cdot E^{-2,75} dE. \quad (1b)$$

$N(E)$ es el número de partículas de energía entre E y $E + dE$, incidente por cm^2 (seg. y GeV). La expresión potencial (1a) o (1b) resul-

ta de inapreciable ventaja para el tratamiento matemático de la teoría.

La *distribución angular* de las partículas primarias es aproximadamente isotrópica en la semiesfera cenital (a latitudes geomagnéticas altas).

El campo geomagnético « corta » el espectro diferencial primario, es decir, prohíbe el acceso de partículas de un impulso menor que cierto valor p_0 (dependiente de la latitud). La energía correspondiente se denomina *energía de corte* geomagnético. Una expresión aproximada del impulso mínimo p_0 en función de la latitud geomagnética es :

$$p_0 = 14,9 \cos^4 \lambda \quad (\text{en GeV}/c),$$

para protones de incidencia vertical. Para los núcleos pesados, el impulso mínimo valdrá aproximadamente la mitad. Para otras direcciones de incidencia es necesario reemplazar la constante 14,9 GeV/c por una función del ángulo cenital.

En resumen : se tomará como primera aproximación del espectro diferencial primario, un flujo constante de protones, cuya intensidad está dada por la expresión (1b). Para energía del orden de los 1-10 GeV, se recurrirá a una aproximación de la expresión (1) (§ 7), cortada por el campo geomagnético en un valor $E_m \cong 14 \cdot \cos^4 \lambda$.

Un tratamiento más riguroso deberá tener en cuenta la incidencia de núcleos pesados.

b) *Sección eficaz total de colisión*. La sección eficaz total para la producción de una desintegración nuclear por un nucleón se supondrá constante (independiente de la energía del nucleón incidente), y de un valor cercano al valor geométrico (núcleos opacos) :

$$\sigma_{\text{geom}} = \pi r_0^2 \cdot A^{2/3}; \quad r_0 = 1,38 \cdot 10^{-13} \text{ cm}, \quad A : \text{ peso atómico.}$$

En vez de la sección eficaz total se usará la magnitud asociada : el camino medio de colisión : $l = \frac{A}{N\sigma}$ (N : número de Avogadro). Todas las longitudes (traducidas ya a gr de sustancia por cm^2) se expresarán en unidades de l correspondiente al material en cuestión (para el aire, $l \cong 60 \text{ gr}/\text{cm}^2$).

c) *El espectro de generación*. Se lo representará con la notación $f_{ij}(E, E') dE$; éste es el número de partículas de tipo « i » que salen con una energía entre E y E + dE, de una desintegración nuclear producida por una partícula tipo « j », de energía E'. Para $E \geq E'$, la

función f_{ij} es nula (no se generan partículas de energía mayor que la incidente). Debido al poco conocimiento que se tiene del proceso de la cascada nuclear (8), surgen grandes dificultades para establecer una expresión correcta para $f_{ij}(E, E')$.

Se hará la hipótesis de que f_{ij} sea una función homogénea en E y E' . (como lo hicieron Heitler, Janossy, Messel, Budini, Molière, etc.):

$$f(E, E') dE = f(E/E') dE/E' = f(\tau) d\tau; \quad \tau = E/E'.$$

Traducido al lenguaje físico: se supondrá que la *forma* del espectro de los nucleones que salen de una desintegración es independiente de la energía del nucleón que la causa. Esta sola hipótesis facilita enormemente los cálculos (§ 3), y ya basta para poder sacar importantes consecuencias de la teoría. Budini y Molière mostraron que esta homogeneidad no puede valer en la zona de energías bajas, pero que, por otro lado, esta no homogeneidad no influye sensiblemente en la evolución de la cascada nucleónica.

Un papel importante en la teoría de la cascada nucleónica juegan las transformadas de Mellin de $f(E, E')$:

$$m_f(s) = \int_0^1 f(\tau) \tau^s d\tau \quad (1)$$

Físicamente significan por ejemplo:

$m_f(0)$ = multiplicidad (número total de partículas generadas).

$m_f(1)$ = fracción de energía incidente cedida a los nucleones secundarios.

Se adoptará para la función $f(E, E')$ la forma dada por Budini y Molière (5), la cual es adecuada para el tratamiento matemático y muy « dócil » para ser acomodada a las distintas hipótesis físicas:

$$f(\tau) d\tau = \frac{\gamma}{\Gamma(\alpha-1)} \lg^{(\alpha-1)}\left(\frac{1}{\tau}\right) d\tau, \quad \gamma \text{ y } \alpha \text{ constantes.} \quad (2)$$

Si bien esta expresión es a primera vista algo complicada, su transformada de Mellin es sencilla:

$$m_f(s) = \frac{\gamma}{s_\alpha}$$

(1): en realidad $m_f(s) = \int_0^\infty f(\tau) \tau^s d\tau$, pero recuérdese que $f(\tau) = 0$ para $\tau \geq 1$.

Obsérvese que γ es la fracción de energía transmitida $m_T(1)$, mientras que α indica la mayor o menor participación de partículas energéticas: para $\alpha = 0$ (y $\gamma = 1$) no hay reproducción de partículas; después de la colisión se obtiene nuevamente la partícula incidente (¹). Al crecer α , se obtienen cada vez menos partículas de energía alta (cerca de E'), y más partículas de energía baja. Un gráfico de la función (2), se encuentra en (5) (pág. 368).

Lo que queda por determinar son los valores numéricos de α y γ . Dependerán de la clase de partículas en cuestión y, en menor grado, de los núcleos del medio absorbente.

Para el espectro de generación de los mesones π hay datos experimentales y teóricos, que sirven de guía para determinar α_π y γ_π . Resulta para α_π un valor ~ 2 y para γ_π un valor $\sim 0,1 - 0,25$. Para nucleones no hay ninguna posibilidad de determinar α y γ a priori. Sólo se puede decir que γ_n no diferirá mucho de 1 (por lo dicho en la página 9, y también porque $\gamma_\pi + \gamma_n \cong 1$, por conservación de la energía). α_n debe ser menor que α_π (aproximadamente del orden de 1), pues la fracción de nucleones energéticos debe ser bastante *mayor* que la fracción correspondiente de mesones (inelasticidad en la creación de mesones).

Teniendo en cuenta que entre los nucleones originados en una desintegración hay aproximadamente igual proporción de protones y neutrones (núcleos livianos), los valores de γ para cada uno de ellos por separado, serán:

$$\gamma_p = \gamma_n = \frac{1}{2} \gamma_n.$$

Para los α correspondientes se tendrá:

$$\alpha_p = \alpha_n = \alpha_n,$$

pues el mecanismo de reproducción es el mismo para protones y neutrones.

Hasta aquí no se habló de la *distribución angular* de los nucleones en una desintegración. Este es un punto muy delicado, especialmente por las dificultades matemáticas que se introducen; por eso se lo deja de lado, haciendo la hipótesis de que las partículas emitidas en una desintegración están totalmente *colimadas* en la dirección

(¹) Ello puede deducirse directamente del espectro integral correspondiente a $f(x) dx$.

del nucleón incidente, reduciéndose así el problema de propagación a un problema de una sola dimensión. La hipótesis es tanto más correcta, cuanto mayores son las energías en cuestión. El no tomar en cuenta la dispersión angular constituye seguramente un error apreciable para energías menores que 5-10 GeV.

§ 3. LAS ECUACIONES DE DIFUSIÓN DE LA COMPONENTE NUCLEÓNICA

Con estos tres datos: el espectro primario, el camino medio de colisión y el espectro de generación es posible — al menos formalmente — determinar el comportamiento de la componente nucleónica. Para ello hay que partir de las ecuaciones de difusión, que están reproducidas a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h} P(E, h) &= -P(E, h) + \int_E^\infty P(E', h) f_{pP}(E, E') dE' + & (3) \\ &+ \int_E^\infty N(E', h) f_{pN}(E, E') dE'; \\ \frac{\partial}{\partial h} N(E, h) &= -N(E, h) + \int_E^\infty N(E', h) f_{nN}(E, E') dE' + \\ &+ \int_E^\infty P(E', h) f_{nP}(E, E') dE'. \end{aligned}$$

Las soluciones $P(E, h) dE$ y $N(E, h) dE$ del sistema, son los *espectros diferenciales* de protones y neutrones a la profundidad atmosférica h (esta última expresada en unidades del camino medio de colisión l). f_{pn} , f_{pp} , etc., son los espectros de generación. En estas ecuaciones se supuso implícitamente que $l_p = l_n$. Las condiciones iniciales para este sistema de ecuaciones integro-diferenciales son:

$$P(E, 0) dE = \text{espectro de protones primarios}$$

y

$$N(E, 0) dE = \text{espectro de neutrones primarios.}$$

En las ecuaciones de difusión (3) no se ha tenido en cuenta el hecho de que los protones son frenados por efectos de la *ionización* del medio difusor. Ésta es una aproximación válida sólo para energías superiores a 1-2 GeV. Para energías menores hay que tener en cuenta la ionización, hecho que en las (3) se traduce en un término adicional

— $\frac{\partial}{\partial \mathbf{E}} \left[k(\mathbf{E}) P(\mathbf{E}, h) \right]$ en la primera ecuación, término que complica considerablemente la resolución del sistema (9).

§ 3a. INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES PARA UN ESPECTRO POTENCIAL

Considerando el caso de un sólo tipo de partículas descrito por el espectro $I(\mathbf{E}, h) d\mathbf{E}$, la ecuación de difusión correspondiente será:

$$\frac{\partial I(\mathbf{E}, h)}{\partial h} = -I(\mathbf{E}, h) + \int_{\mathbf{E}}^{\infty} I(\mathbf{E}', h) f(\mathbf{E}, \mathbf{E}') d\mathbf{E}'. \quad (3a)$$

Intentando una separación de variables: $I(\mathbf{E}, h) = g(\mathbf{E}) \cdot p(h)$ (físicamente significa considerar un espectro que *no cambia de forma* — $g(\mathbf{E})$ — al absorberse; o sea, el caso de una absorción independiente de la energía se obtienen las siguientes ecuaciones para g y p :

1) $1 + \frac{1}{g(\mathbf{E})} \int_{\mathbf{E}}^{\infty} g(\mathbf{E}') f(\mathbf{E}, \mathbf{E}') d\mathbf{E}' = -a$; $a =$ constante de separación o sea, $g(\mathbf{E})$ es autofunción g_s del núcleo $f(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$, con autovalor $1 - a_s$ (s es un índice que individualiza las autofunciones y autovalores):

$$(1 - a_s) g_s(\mathbf{E}) = \int_{\mathbf{E}}^{\infty} g_s(\mathbf{E}') f(\mathbf{E}, \mathbf{E}') d\mathbf{E}';$$

2) $\frac{dp}{dh} = ap = 0$ o sea, $p(h) = p_0 \cdot \exp(-ah)$. Por lo tanto $p_0 \cdot g_s(\mathbf{E})$ es el espectro primario (o sea, la condición inicial). Se deduce que sólo aquellos espectros primarios que son *autofunciones* del espectro de generación, se absorben sin cambiar de forma, o sea, independientemente de la energía; la absorción resulta exponencial.

Con la sola hipótesis de que $f(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$ sea *homogénea* ($f(\tau)$, $\tau = \mathbf{E}/\mathbf{E}'$), se puede ver fácilmente que toda función potencial $g_s(\mathbf{E}) = \mathbf{E}^{-s}$ es autofunción de $f(\tau)$, con un autovalor

$$1 - a_s = \int_0^1 \tau^{s-1} f(\tau) d\tau = m_f(s - 1). \quad (\text{pág. 9})$$

Es decir, tomando como espectro primario una *expresión potencial* (1b), tal como sucede efectivamente para energías altas (> 10 GeV) la expresión de la intensidad de la componente nucleónica resulta:

$$I(\mathbf{E}, h) = I_0 \cdot \mathbf{E}^{-s} \cdot \exp(-[1 - m_f(s - 1)]h). \quad (4)$$

Aquí s vale 2,75. Un espectro potencial de nucleones primarios se absorbe pues exponencialmente, conservando la misma forma potencial. Esto se ha confirmado experimentalmente (10), especialmente para energías mayores que 10 GeV. Queda probado en forma definitiva:

1) que la sección eficaz total para desintegración nuclear es efectivamente independiente de la energía;

2) que el espectro de generación de nucleones es *homogéneo*.

Obsérvese que lo que determina la absorción de espectro potencial, no es el espectro $f(E, E')$ sino su *transformada de Mellin* de parámetro $s - 1 = s_0$, donde s_0 es el exponente del espectro primario integral (1,75). Lo que puede determinarse experimentalmente es el valor de $1 - m_f(s_0)$, o también de su inversa $L = 1/1 - m_f(s_0)$, que se denomina *longitud de absorción*. Expresada en g/cm^2 ($L(g/cm^2) = l(g/cm^2)/1 - m_f(s_0)$), su valor experimental es aproximadamente 100 g/cm^2 . De éste se puede sacar una tercera conclusión importante, observando que siempre $l \leq L$:

3) para la sección eficaz total hay una *cota inferior*

$$0,60 \sigma_{geom} \leq \sigma \leq \sigma_{geom}.$$

De aquí no se pueden obtener más informaciones sobre la función f . Si se pudiera modificar el exponente s_0 del espectro primario y estudiar la absorción de espectros con diferentes s_0 (o sea, si se conociera la dependencia $L = L(s_0)$), se podría determinar formalmente la función $f(\tau)$, como *antitransformada* de $m_f(s_0)$. Esto no es posible en esa forma ideal, pero la consideración anterior permite prever que los casos más « sensibles » a la forma de f , serán aquellos en que s_0 *no sea constante*, sino una función de E (espectros no potenciales). El estudio de la absorción de un espectro tipo ¹ y el análisis del efecto geomagnético en la componente nucleónica (absorción de un espectro cortado), serán dos casos de esta índole, pues ambos se pueden interpretar como la absorción de un espectro E^{-s} , de exponente variable $s_0(E)$.

¹ Mientras que l era el camino medio que recorre un mismo nucleón hasta la primera colisión, L es el camino medio que recorre un nucleón de cierta energía hasta desaparecer, independientemente de su individualidad, o sea, pudiendo ser reemplazado durante su camino por otro nucleón de la misma energía (es decir, el nucleón puede desaparecer en una colisión, pero otro de igual energía puede aparecer en otra colisión simultánea).

Antes de pasar a la resolución de la ecuación integro-diferencial para el último caso, se verá qué es lo que se puede *predecir cualitativamente* analizando la expresión (4).

$m_f(s_0)$ es una función decreciente de s_0 ; por lo tanto $L = l/1 - m_f(s_0)$ será también decreciente con s_0 : un espectro potencial de un exponente s_0 elevado (espectro « agudo »), se absorbe más que un espectro de exponente s_0 bajo (espectro « chato »).

Esto era de prever, pues en el último caso hay una « alimentación » (o reproducción) mucho mayor, debido a la presencia de una mayor proporción de partículas energéticas. Esto puede usarse para predecir cualitativamente lo que debe suceder con la absorción de un espectro tipo (1). Este espectro se puede escribir en la forma $k' \cdot E^{-s}(E)$, donde $s(E)$ es una función *lentamente decreciente* de E . Por lo tanto la longitud de absorción $L = L(s_0) = L(E)$ debe crecer al disminuir E : los nucleones de baja energía deberán *absorberse menos* que los nucleones de mayor energía.

Para el efecto de latitud ya no es tan fácil prever el resultado, ya que un espectro cortado es una función discontinua. De cualquier manera, también aquí es de esperar un *aumento* de L al disminuir E , aún más pronunciado que en el caso anterior.

Si se quiere estudiar el comportamiento de los protones y neutrones *individualmente*, debe partirse del sistema (3). Este sistema se reduce fácilmente, si se tiene en cuenta que (§ 2):

$f_{np} = f_{nn} = f_{pn} = f_{pp} = \frac{1}{2} \cdot f$, donde f es el espectro de generación de « nucleones » (protones + neutrones).

Sumando y restando respectivamente las dos ecuaciones (3), se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h} [P(E, h) + N(E, h)] &= - [P(E, h) + N(E, h)] + \\ &+ \int_E^\infty [P(E', h) + N(E', h)] f(E, E') dE', \\ \text{y} \\ \frac{\partial}{\partial h} [P(E, h) - N(E, h)] &= - [P(E, h) - N(E, h)]. \end{aligned} \quad (5)$$

La primera es idéntica a la (3a), donde $I = P + N$. La segunda ecuación es independiente de $f(E, E')$, y su solución siempre vale

$$P(E, h) - N(E, h) = [P(E, 0) - N(E, 0)] \exp(-h).$$

Físicamente significa que el exceso primario $P_0 - N_0$ de una de las dos componentes disminuye exponencialmente: las dos componentes se ponen en *equilibrio mutuo*, en una forma totalmente *independiente* del mecanismo de reproducción.

Para dos espectros potenciales primarios: $P(E, 0) = k_p \cdot E^{-s}$ y $N(E, 0) = k_n \cdot E^{-s}$, con el mismo exponente s , se tienen las soluciones:

$$P(E, h) = \left[\frac{k_p + k_n}{2} e^{-\frac{h}{L}} + \frac{k_p - k_n}{2} e^{-h} \right] E^{-s},$$

$$N(E, h) = \left[\frac{k_p + k_n}{2} e^{-\frac{h}{L}} - \frac{k_p - k_n}{2} e^{-h} \right] E^{-s}.$$

Si se supone que $k_n = 0$ (no hay neutrones primarios), queda:

$$P(E, h) = \frac{1}{2} k_p E^{-s} (e^{-\frac{h}{L}} + e^{-h}), \quad (\text{fig. 1}) \quad (6)$$

$$N(E, h) = \frac{1}{2} k_p E^{-s} (e^{-\frac{h}{L}} - e^{-h}).$$

La expresión para N muestra que los neutrones forman una componente naciente en el medio, que comienza con una intensidad 0, pasa por un máximo situado en la profundidad $h_m = 1gL/(1 - 1/L)$ (para el aire, h_m vale 80 g/cm², es decir que el máximo está situado a unos 17 km s. n. m.), para absorberse luego en forma aproximadamente exponencial.

Hasta aquí se ha tratado la difusión de los nucleones en una sola dirección; por ejemplo, la vertical. Teniendo en cuenta la incidencia isótropa desde todas las direcciones, de nucleones sobre el tope de la atmósfera, es necesario realizar la transformación de Gross, para obtener las intensidades totales correspondientes:

$$I_{\text{total}}(E, h) = 2\pi I_0(E) \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{h}{L} \cos^2 \theta} \cos \theta \sin \theta \, d\theta, \quad \text{para una absorción}$$

exponencial, y

$$I_{\text{total}}(E, h) = 2\pi \int_0^{2\pi} I \left(E, \frac{h}{L \cos \theta} \right) \cos \theta \sin \theta \, d\theta, \quad \text{para absorción uni-}$$

direccional I cualquiera.

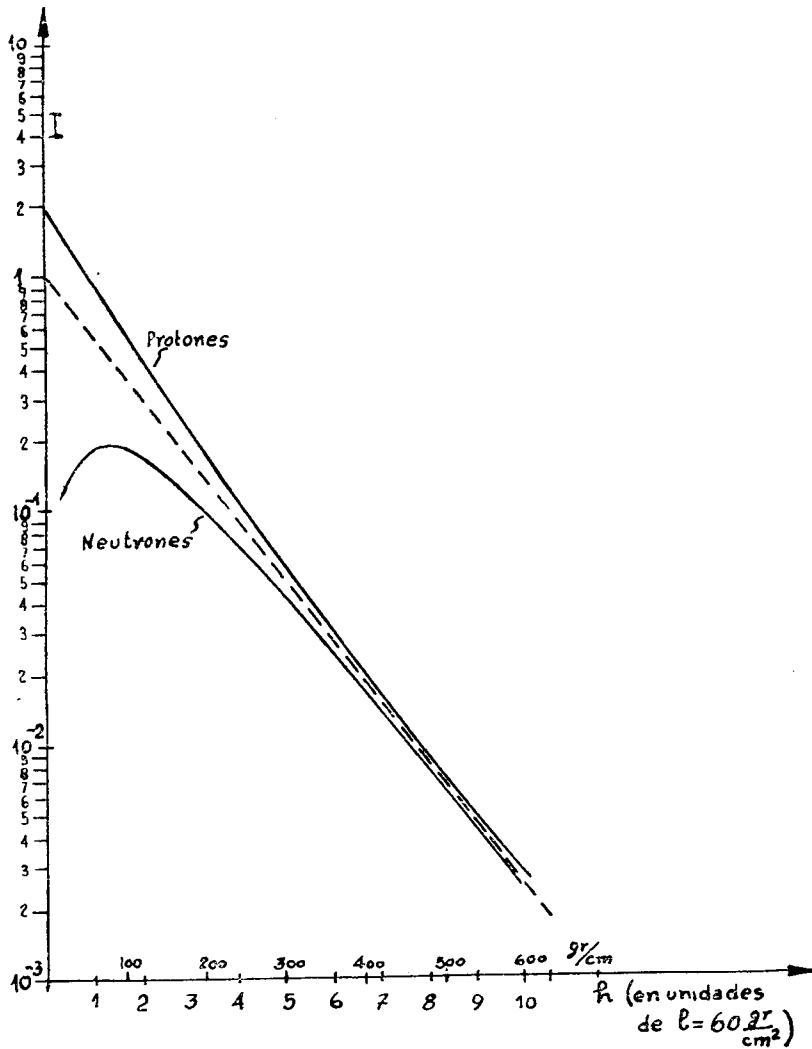


Fig. 1. — Intensidad I de protones y neutrones como función del espesor atmosférico (ecuaciones (6)), para el caso de un espectro potencial de protones primarios.

§ 4. INTEGRACIÓN GENERAL DE LAS ECUACIONES DE DIFUSIÓN

Para integrar una ecuación del tipo (3a), teniendo como condición inicial un espectro primario cualquiera, se procede en forma análoga a otros casos de ecuaciones íntegro-diferenciales. Desarrollando el espectro primario en las autofunciones del núcleo $f(E, E')$:

$$I(E, 0) = \sum_s c_s g_s(E) \quad (\text{suma o integral})$$

se obtiene como solución general:

$$I(E, h) = \sum_s c_s g_s(E) e^{-a_s h}.$$

Si se considera un espectro de generación homogéneo, las $g_s(E)$ son las funciones E^{-s} . El desarrollo del espectro primario deberá realizarse en el *plano complejo* (para poder expresar las antitransformadas c_s):

$$I(E, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} c(s) E^{-s} ds;$$

$$\text{luego: } c(s) = \int_0^{\infty} E^{s-1} I(E, 0) dE = m_0(s-1)$$

(transformada de Mellin del espectro primario).

Para la intensidad $I(E, h)$ se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned} I(E, h) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} m_0(s-1) E^{-s} e^{-[1-m_f(s-1)]h} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} m_0(s) E^{-(s+1)} e^{-[1-m_f(s)]h} ds. \end{aligned} \quad (7)$$

Esta expresión es idéntica a la siguiente:

$$m_I(s) = m_0(s) e^{-[1-m_f(s)]h}. \quad (7a)$$

Para dar la solución general del sistema (3) basta pasar de la solución $I = P + N$ de la primera de las (5), y $P - N$ de la segunda, a las funciones P y N originales:

$$P(E, h) + N(E, h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [m_{op}(s) + m_{on}(s)] \cdot [E^{-(s+1)} \cdot e^{-[1-m_f(s)]h}] \cdot ds,$$

por (7) donde m_{op} y m_{on} son las transformadas de Mellin de los espectros primarios P_0 y N_0 respectivamente. m_f es la transformada de Mellin del espectro de generación de protones + neutrones. Finalmente, queda la solución general en la forma :

$$P(E, h) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{m_{op}(s) + m_{on}(s)}{2} \cdot e^{-[1-m_f(s)]h} \cdot E^{-(s+1)} \cdot ds + \frac{P_0(E) - N_0(E)}{2} \cdot e^{-h} \quad (8)$$

$$N(E, h) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{m_{op}(s) + m_{on}(s)}{2} \cdot e^{-[1-m_f(s)]h} \cdot E^{-(s+1)} ds - \frac{P_0(E) - N_0(E)}{2} \cdot e^{-h}.$$

Este sistema es equivalente al siguiente :

$$m_p(s) = \frac{m_{op}(s) + m_{on}(s)}{2} \cdot e^{-[1-m_f(s)]h} + \frac{m_{op}(s) - m_{on}(s)}{2} \cdot e^{-h}, \quad (8a)$$

$$m_n(s) = \frac{m_{op}(s) + m_{on}(s)}{2} \cdot e^{-[1-m_f(s)]h} - \frac{m_{op}(s) - m_{on}(s)}{2} \cdot e^{-h}.$$

Para calcular las integrales anteriores ((7), (8)) hace falta conocer la función $f(E, E')$.

§ 5. INTEGRACIÓN PARA UN NUCLEÓN PRIMARIO AISLADO

(SHOWER EXTENSO)

Es de gran ventaja para la resolución del problema general, conocer las funciones $P(E, h)$ y $N(E, h)$ para la cascada originada por *un solo protón* (o neutrón) de energía E_0 incidente sobre la atmósfera.

Matemáticamente, esto significa hallar dos soluciones $P^*(E, h)$ y $N^*(E, h)$ del sistema (3) para las condiciones iniciales

$$P_0(E, 0) = \delta(E - E_0) \quad (\text{protón incidente})$$

$$N_0(E, 0) = 0.$$

Las transformadas de Mellin de este espectro primario son :

$$m_{0p}(s) = \int_0^{\infty} \delta(E - E_0) \cdot E^s \cdot dE = E_0^s,$$

$$m_{0n} = 0.$$

Si se adopta ahora la expresión (2) para el espectro de generación $f(E, E')$, se obtiene para P^* y N^* (sistema (8)) :

$$P^*(E, h) = \frac{e^{-h} \cdot 1}{2E \cdot 2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\frac{\gamma h}{s^\alpha}} \cdot \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \cdot ds + \frac{e^{-h}}{2} \delta(E - E_0),$$

$$N^*(E, h) = \frac{e^{-h}}{2E} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\frac{\gamma h}{s^\alpha}} \cdot \left(\frac{E_0}{E}\right)^s ds - \frac{e^{-h}}{2} \cdot \delta(E - E_0).$$
(9)

La integral :

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\frac{h\gamma}{s^\alpha}} \gamma^{-s} ds, \quad \text{donde } \gamma = E/E_0$$

se puede escribir evidentemente :

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int e^{-s \lg \gamma} \cdot e^{\frac{h\gamma}{s^\alpha}} ds = \frac{1}{2\pi i} \int e^{st} e^{\frac{h\gamma}{s^\alpha}} ds = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi i} \int e^{st} \frac{e^{\frac{h\gamma}{s^\alpha}}}{s} ds,$$

siendo

$$t = \lg \frac{1}{\gamma} = \lg \frac{E_0}{E}.$$

Ahora bien

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \cdot \frac{e^{\frac{h\gamma}{s^\alpha}}}{s} ds = \begin{cases} L^{-1} \left(\frac{e^{\frac{h\gamma}{s^\alpha}}}{s} \right), & \text{para } t > 0, \\ 0 & \text{para } t < 0. \end{cases} \quad (10)$$

L^{-1} significa *antitransformada de Laplace*.

Llamando $L^{-1} \left(\frac{e^{\frac{h\gamma}{s^\alpha}}}{s} \right) = G_\alpha(t, h)$, y utilizando la función de Heaviside

$$H(t) \begin{cases} = 1 & \text{para } t \geq 0 \\ = 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

se tiene finalmente :

$$I = \frac{\partial}{\partial t} [H(t) G_{\alpha}(t, h)].$$

Volviendo a la variable η resulta, siendo

$$H\left(\lg \frac{1}{\eta}\right) \equiv H(1 - \eta).$$

$$\begin{aligned} I &= -\eta \frac{\partial}{\partial \eta} [H(1 - \eta) G_{\alpha}(\eta h)] \\ &= -\eta H(1 - \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} G_{\alpha}(\eta h) + \eta G_{\alpha}(\eta h) \delta(1 - \eta). \end{aligned}$$

El factor $\eta G_{\alpha}(\eta, h)$ vale 1 para $\eta=1$; por lo tanto se lo puede suprimir delante de la δ , y nos queda

$$I = -\eta H(1 - \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} G_{\alpha}(\eta h) + \delta(1 - \eta).$$

Volviendo a la expresión de $P^*(E, h)$:

$$\begin{aligned} P^*(E, h) &= -\frac{e^{-h}}{2E_0} H\left(1 - \frac{E}{E_0}\right) \frac{\partial}{\partial \eta} G_{\alpha}(\eta h) + \frac{e^{-h}}{2E} \delta\left(1 - \frac{E}{E_0}\right) + \frac{e^{-h}}{2} (E - E_0) = \\ &= \frac{e^{-h}}{2E_0} H\left(1 - \frac{E}{E_0}\right) \frac{\partial}{\partial \eta} G_{\alpha}(\eta h) + \frac{e^{-h}}{2} \delta(E - E_0) + \frac{e^{-h}}{2} \delta(E - E_0), \end{aligned}$$

ya que $\frac{1}{E} \delta\left(1 - \frac{E}{E_0}\right) = \frac{1}{E} \delta\left(\frac{E_0 - E}{E_0}\right) = \frac{E_0}{E} \delta(E_0 - E) = \delta(E - E_0)$.

Haciendo lo mismo para $N^*(E, h)$, se tiene finalmente :

$$\begin{aligned} P^*(E_0, E, h) &= -\frac{e^{-h}}{2E_0} H\left(1 - \frac{E}{E_0}\right) \frac{\partial}{\partial \eta} G_{\alpha}(\eta h) + e^{-h} \delta(E - E_0), \\ N^*(E_0, E, h) &= -\frac{e^{-h}}{2E_0} H\left(1 - \frac{E}{E_0}\right) \frac{\partial}{\partial \eta} G_{\alpha}(\eta, h). \end{aligned} \tag{11}$$

Se ha escrito $P^*(E_0, E, h)$ y $N^*(E_0, E, h)$, para poner en evidencia la dependencia de la energía E_0 del protón primario.

El significado físico de este resultado es el siguiente : para energías $E < E_0$, los espectros de protones y neutrones son idénticos y valen :

$$P^*(E_0, E, h) = N^*(E_0, E, h) = -\frac{e^{-h}}{2E_0} \frac{\partial}{\partial \eta} G_{\alpha}(\eta, h). \tag{11a}$$

Para energías $E > E_0$ no hay nucleones en la cascada.

El término $e^{-h} \delta(E - E_0)$ en la expresión de $P^*(E, h)$ indica que en un espesor h , el espectro primario $\delta(E - E_0)$ está representado con una intensidad e^{-h} . En otras palabras : la *probabilidad* de encontrar el protón primario en un espesor h es e^{-h} . Efectivamente, es fácil deducir — a partir de la definición misma del camino medio de colisión — que e^{-h} (recuérdese que h está expresada en unidades de l) es la probabilidad de que un nucleón recorra un espesor h sin sufrir colisión alguna.

La expresión (11a) es importante, pues describe la evolución de la parte nucleónica de un shower extenso, siempre que se desprecie la dispersión angular.

La antitransformada de Laplace $G_\alpha(\tau, h)$ sólo se conoce en forma « cerrada » para el valor $\alpha = 1$ (11) :

$$G_1(\tau, h) = \frac{1}{2\pi i} \int e^{st} \frac{e^{\frac{h\gamma}{s}}}{s} ds = J_0(2\sqrt{-h\gamma t}) = I_0\left(2\sqrt{h\gamma \lg \frac{1}{\tau}}\right) \quad (12)$$

(J_0 función de Bessel de orden 0, I_0 ídem, de argumento imaginario). Para $\alpha \neq 0$, Budini y Molière han deducido por un camino totalmente independiente de las ecuaciones de difusión (3), una serie para G_α :

$$G_\alpha(\tau, h) = 1 + \frac{h\gamma \lg \left(\frac{1}{\tau}\right)}{1! \Gamma(\alpha)} + \frac{\left(h\gamma \lg \left(\frac{1}{\tau}\right)\right)^2}{2! \Gamma(2\alpha)} + \dots \quad (12a)$$

de poca utilidad por su convergencia muy lenta.

Ahora bien ; ya se dijo que sería de esperar que α tuviera en el caso de los nucleones, un valor cercano a 1. Budini y Molière encontraron por ejemplo, que para adaptar sus resultados teóricos en forma satisfactoria a ciertos resultados experimentales (5) (pág. 383), el valor de α debería ser $\sim 1,3$. Por lo tanto no será un esfuerzo inútil recurrir directamente a la función de Bessel (12) para efectuar los cálculos, los que en tal caso deberán reproducir con buena aproximación los resultados experimentales. Las posibles correcciones cuantitativas podrán ser de utilidad para calcular con mejor precisión en valor de α .

El *espectro integral* de nucleones, producido por un primario de energía E_0 es, para $\alpha=1$:

$$N(E, h) = \int_E^\infty (P^* + N^*) dE = e^{-h} I_0\left(2\sqrt{h\gamma \lg \frac{E_0}{E}}\right) \quad (\text{para } E < E_0). \quad (13)$$

En la figura 2 está trazada la intensidad integral como función del espesor atmosférico, para diferentes valores de E_0/E . (Véase en 5, curvas semejantes (pág. 439), pero calculadas numéricamente, para un valor $\alpha = 1,3$).

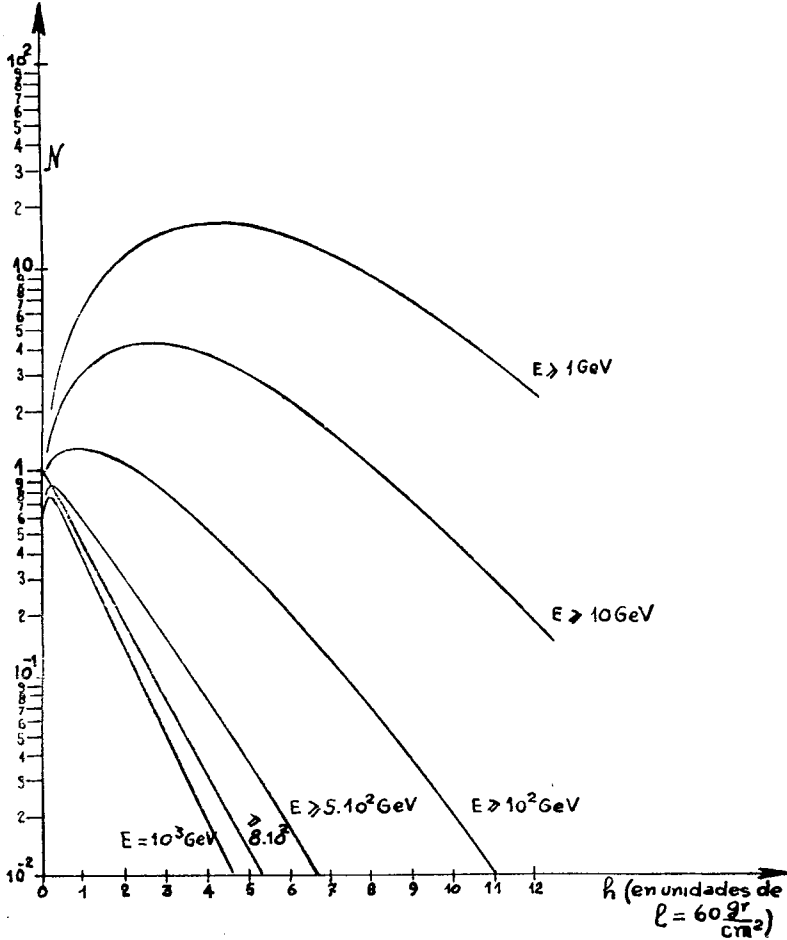


Fig. 2. — Intensidad integral de los nucleones pertenecientes a una cascada producida por un nucleón primario de 10^3 GeV (13).

§ 6. INTEGRACIÓN PARA UN ESPECTRO POTENCIAL CORTADO (EFECTO DE LATITUD)

Teniendo las soluciones P^* y N^* para la cascada producida por un único protón primario de energía E_0 , se pueden expresar inmediata-

mente las soluciones para un espectro de protones primarios cualquiera $P_0(E)$. Efectivamente, si se considera que :

$$P_0(E) = \int_0^{\infty} P_0(E_0) \delta(E - E_0) dE_0$$

o sea, desarrollando el espectro primario en espectros $\delta(E - E_0)$ de protones *aislados*, y recordando que cada protón de energía E_0 contribuye con una cascada P^* y N^* , la intensidad de protones y neutrones a un espesor h será :

$$P(E, h) = \int_0^{\infty} P_0(E_0) P^*(E_0, E, h) dE_0,$$

$$N(E, h) = \int_0^{\infty} P_0(E_0) N^*(E_0, E, h) dE_0.$$

Tomando un espectro $P_0(E) = \begin{cases} k \cdot E^{-s} & \text{para } E \geq E_m \\ 0 & \text{para } E < E_m \end{cases}$, y $N_0(E) = 0$

se tiene :

$$P(E, h) = \int_{E_m}^{\infty} \left[-\frac{e^{-h}}{2E_0} H\left(1 - \frac{E}{E_0}\right) \frac{\partial}{\partial r_1} G_\alpha(r_1, h) + e^{-h} \delta(E - E_0) \right] kE_0^{-s} dE_0,$$

$$N(E, h) = \int_{E_m}^{\infty} \left[-\frac{e^{-h}}{2E_0} \cdot H\left(1 - \frac{E}{E_0}\right) \frac{\partial}{\partial r_1} G_\alpha(r_1, h) \right] kE_0^{-s} dE_0 ;$$

si se introduce la variable $r_1 = E/E_0$, queda :

$$P(E, h) = -\frac{e^{-h} k E^{-s}}{2} \int_0^{E/E_m} r_1^{s-1} H(1 - r_1) \frac{\partial}{\partial r_1} G_\alpha(r_1, h) dr_1 + \quad (16)$$

$$+ e^{-h} k E^{-s} \int_0^{E/E_m} r_1^{s-1} \delta(r_1 - 1) dr_1 \quad (14)$$

$$N(E, h) = -\frac{e^{-h} \cdot k \cdot E^{-s}}{2} \int_0^{E/E_m} r_1^{s-1} H(1 - r_1) \frac{\partial}{\partial r_1} G_\alpha(r_1, h) dr_1$$

Deben considerarse aquí *dos casos*, según que E/E_m sea > 1 , ó $E/E_m < 1$.

1) $E/E_m > 1$:

La expresión (14) se convierte (teniendo en cuenta las propiedades de la función de Heaviside y de la δ) en:

$$P(E, h) = - \frac{e^{-h} k E^{-s}}{2} \int_0^1 \eta^{s-1} \frac{\partial G_\alpha(\eta, h)}{\partial \eta} d\eta + e^{-h} k E^{-s}$$

La integral se puede calcular por partes:

$$- \int_0^1 \eta^{s-1} \frac{\partial}{\partial \eta} G_\alpha(\eta, h) d\eta = - \eta^{s-1} G_\alpha(\eta, h) \Big|_0^1 + (s-1) \int_0^1 \eta^{s-2} G_\alpha(\eta, h) d\eta.$$

El primer término del segundo miembro vale -1 ; (es fácil demostrar que $\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{s-1} G_\alpha(\eta, h) = 0$, siempre que $s-1$ sea > 0 , lo que aquí no se cumple). El segundo término se puede transformar en:

$$\begin{aligned} & (s-1) \int_0^1 e^{-1 \frac{1}{\eta} (s-1)} G_\alpha(\eta, h) \frac{d\eta}{\eta} = \\ & = (s-1) \int_0^\infty e^{-(s-1)t} G_\alpha(t, h) dt = (s-1) L[G_\alpha(t, h)] = (s-1) \frac{e^{\frac{h\gamma}{s}}}{(s-1)}, \end{aligned}$$

por ser $G_\alpha(t, h)$ la antitransformada de Laplace de $\frac{e^{\frac{h\gamma}{s}}}{s}$.

Con estos resultados, queda finalmente para $P(E, h)$ y $N(E, h)$:

$$\begin{aligned} P(E, h) &= \frac{e^{-h} k E^{-s}}{2} \left[-1 + e^{\frac{h\gamma}{(s-1)^\alpha}} \right] + \\ &+ e^{-h} \cdot k \cdot E^{-s} = \frac{k E^{-s}}{2} \left[e^{-\left[1 - \frac{\gamma}{(s-1)^\alpha}\right] h} + e^{-h} \right] \quad (15) \\ N(E, h) &= \frac{e^{-h} \cdot k \cdot E^{-s}}{2} \left[-1 + e^{\frac{h\gamma}{(s-1)^\alpha}} \right] = \\ &= \frac{k E^{-s}}{2} \left[e^{-\left[1 - \frac{\gamma}{(s-1)^\alpha}\right] h} - e^{-h} \right] \end{aligned}$$

Las dos expresiones son idénticas a las (6), donde :

$$L = \frac{1}{\left(1 - \frac{\gamma}{(s-1)^\alpha}\right)} = \frac{1}{(1 - m_f(s_0))}$$

Esta identidad era de prever, ya que los nucleones de energía $E > E_m$ derivan de energías primarias también superiores a la energía de corte E_m : todo debe suceder como si *no hubiera corte magnético*.

La influencia del corte recién se pondrá de manifiesto para los nucleones de energía $E < E_m$.

2) $E/E_m < 1$: (*efecto geomagnético*).

Las ecuaciones (14) se convierten ahora en :

$$P(E, h) = N(E, h) = - \frac{e^{-h} k E^{-s}}{2} \int_0^{E/E_m} \tau^{s-1} \frac{\partial}{\partial \tau} G_\alpha(\tau, h) d\tau$$

La integral $-\int_0^{E/E_m}$ puede volver a integrarse por partes :

$$-\int_0^{E/E_m} = - \left(\frac{E}{E_m}\right)^{s-1} G_\alpha\left(\frac{E}{E_m}, h\right) + (s-1) \int_0^{E/E_m} \tau^{s-2} G_\alpha(\tau, h) d\tau.$$

La integral del segundo miembro puede escribirse $\int_0^{E/E_m} = \int_0^1 - \int_{E/E_m}^1$

y teniendo en cuenta el resultado anterior para \int_0^1 , queda :

$$P(E, h) = N(E, h) = \frac{k \cdot E^{-s}}{2} e^{-h} \left[e^{\frac{h\tau}{(s-1)^\alpha}} - \left(\frac{E}{E_m}\right)^{s-1} G_\alpha\left(\frac{E}{E_m}, h\right) - (s-1) \int_{E/E_m}^1 \tau^{s-2} G_\alpha(\tau, h) d\tau \right] = \frac{k \cdot E^{-s}}{2} \left[e^{-\frac{h}{L}} - e^{-h} f_\alpha\left(\frac{E}{E_m}, h\right) \right] \quad (16)$$

donde

$$f_\alpha\left(\frac{E}{E_m}, h\right) = \left(\frac{E}{E_m}\right)^{s-1} \cdot G_\alpha\left(\frac{E}{E_m}, h\right) + (s-1) \int_{E/E_m}^1 \tau^{s-2} G_\alpha(\tau, h) d\tau. \quad (16a)$$

Para realizar los cálculos numéricos, se utilizará la expresión tomando $\alpha=1$. En este caso, la función (16a) es :

$$f_1\left(\frac{E}{E_m}, h\right) = \left(\frac{E}{E_m}\right)^{s-1} I_0\left(2\sqrt{h\gamma \lg\left(\frac{E_m}{E}\right)}\right) + \quad (16b)$$

$$+ (s-1) \int_{E/E_m}^1 \gamma^{s-2} I_0\left(2\sqrt{h\gamma \lg\frac{1}{\gamma}}\right) d\gamma.$$

§ 7. CÁLCULOS NUMÉRICOS Y CONCLUSIONES

La expresión (16) (teniendo en cuenta lo observado en la pág. 47) es muy importante, pues explica en forma clara y sencilla todos los fenómenos observados con relación al efecto de latitud en la componente nucleónica (12).

Una representación numérica de la función $f_1(E/E_m, h)$, para diferentes valores de E/E_m , está dada en la tabla I. Para esos mismos valores de E/E_m se ha representado en la figura 3 la función

$$e^{\frac{-h}{L}} - e^{-h} f_1\left(\frac{E}{E_m}, h\right),$$

que da la *absorción* de los nucleones de energía $E < E_m$.

Se observa en la figura 3 :

1. Las curvas son parecidas a la de los neutrones de la figura 1. Esto se debe a que todos los nucleones de energía menor que la de corte geomagnético, también forman una *componente «naciente»*. Su intensidad crece hasta un valor máximo en el espesor h_m (que ahora depende de E); desde allí vuelve a disminuir, comenzando a absorberse, hasta asintotizar a una función A. exp. $(-h/L)$, o sea, hasta ponerse en equilibrio con la parte «no cortada».

2. Cuanto menor sea E/E_m , más se desplazan los máximos h_m hacia las profundidades mayores: más lento es el nacimiento o la formación de estos nucleones (y menor su intensidad). Esto pudo verse cualitativamente, considerando que los nucleones de estas energías son productos de varias etapas de generación de nucleones. Cuanto menor sea su energía (menor E/E_m), mayor será el número de generaciones necesarias para producirlos; mayor por lo tanto el espesor atmosférico atravesado.

3. Para un dado espesor atmosférico h , la «longitud de absorción $L = -\frac{\partial \lg I}{\partial h}$ es una función de la energía. Aumenta para partículas de baja energía (fig. 4).

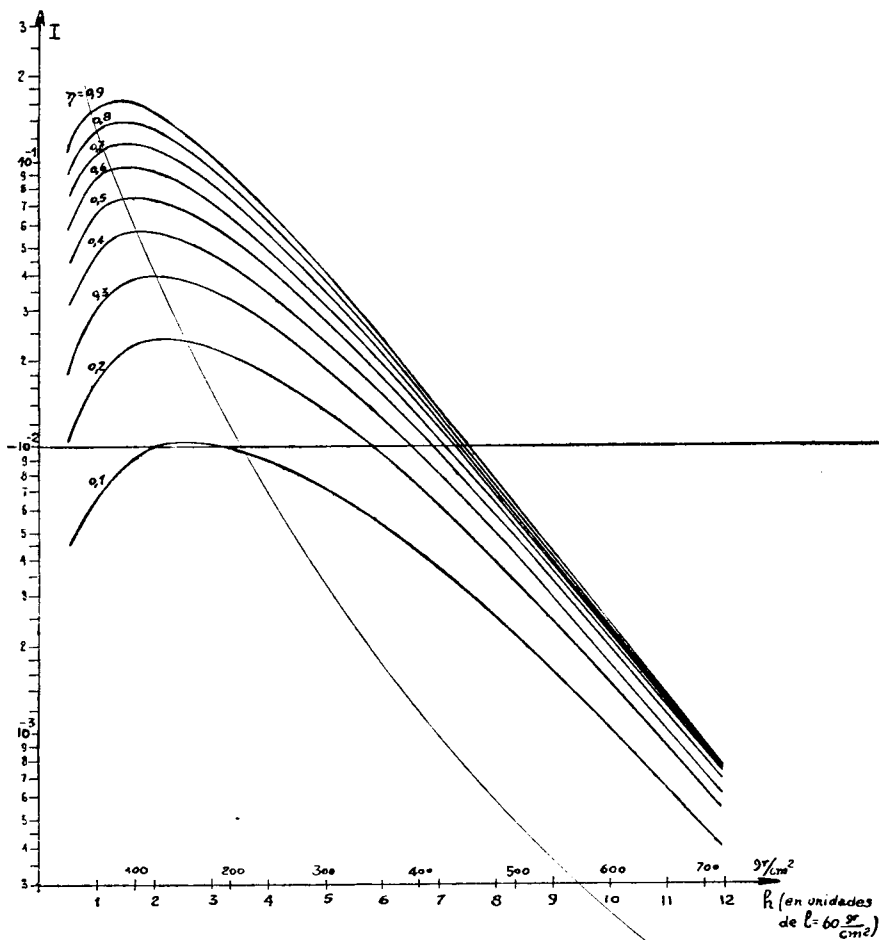


Fig. 3. — Curvas de absorción de los nucleones de energía inferior a la de corte geomagnético E_m , para un espectro primario potencial ($\tau = M/E_m$).

4. La intensidad de nucleones de una misma energía E , y en un mismo espesor atmosférico h , disminuirá al disminuir la latitud geomagnética del lugar de observación (siempre que $E < E_m$). Esta disminución es tanto más pronunciada cuanto menor sea h : la influencia de la latitud se hace tanto más notable, cuanto mayor sea la altura s. n. m. del lugar de observación.

Todos estos puntos están siendo confirmados experimentalmente. Para una comparación cuantitativa es menester, sin embargo, refinar los cálculos, pasando del espectro puramente potencial (1b), a uno que responda más a la realidad, ya que el ámbito de energías

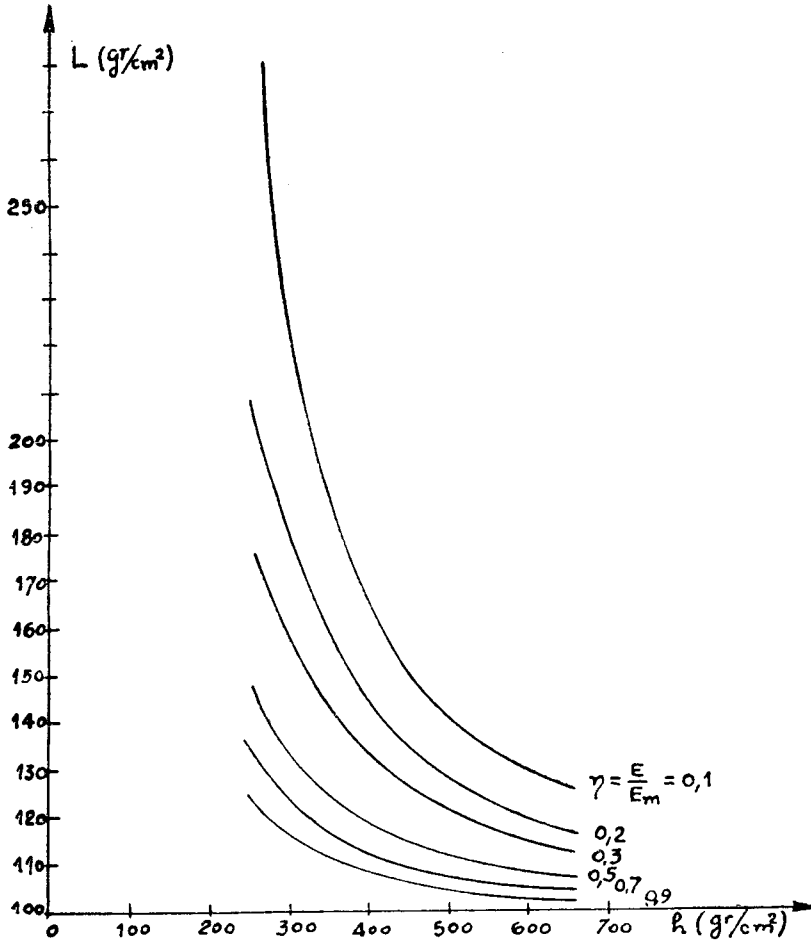


Fig. 4. — Longitud de absorción L , en función del espesor atmosférico, trazada para diversos valores de E/E_m (espectro primario potencial).

primarias que juegan el papel principal en el efecto de latitud es justamente aquél, en el cual deja de valer la forma potencial. Se podría recurrir a la expresión rigurosa (1), cuya forma diferencial es :

$$I(E) = k \cdot (E + B)^{-2.75}; \quad (17)$$

pero se tropezaría con dificultades matemáticas, que si bien pueden vencerse recurriendo al cálculo puramente numérico, no conducen a expresiones « cerradas », más sencillas de tratar y de interpretar. Efectivamente, siguiendo el método expuesto en el § 4 (desarrollando el espectro primario (17) en serie de espectros potenciales) se llegaría a la serie :

$$I(E, h) = kE^{-s} \left[e^{-[1-m_f(s-1)]h} - \frac{B}{E} s e^{-[1-m_f(s)]h} + \left(\frac{B}{E} \right)^2 \frac{s(s+1)}{2!} e^{-[1-m_f(s+1)]h} - \dots \right] \quad (18)$$

de muy lenta convergencia.

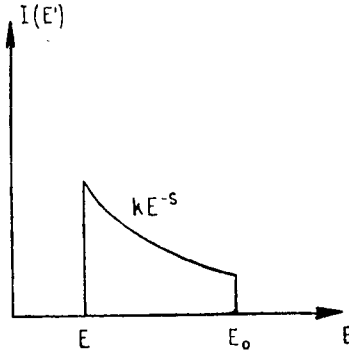


Figura 5

Un método más sencillo consiste en aproximar el espectro primario (17) con « trozos » de forma potencial. Efectivamente, la expresión (16) muestra que

$$I(E, h) = k \cdot E^{-s} e^{-h f_\alpha} \left(\frac{E}{E_0}, h \right)$$

es la intensidad de nucleones de energía E , en un espesor h , de un flujo originado por un espectro primario de la forma :

$$I(E') = \begin{cases} 0 & \text{para } E' < E \\ k \cdot E^{-s} & \text{para } E < E' < E_0 \text{ (fig. 5).} \\ 0 & \text{para } E' > E_0 \end{cases}$$

Aproximando el espectro (17) con la forma

$$I(E) = \begin{cases} k \cdot E^{-2,75} & \text{para } E > E_0, \\ 0,18 k \cdot E^{-2,10} & \text{para } 1 < E < E_0 \text{ (GeV)} \end{cases}$$

(donde para E_0 se puede tomar una energía alrededor de 15 GeV; se adoptó por comodidad $E_0 = 14$ GeV), se obtendrá para la intensidad de nucleones

$$I(E, h) = kE^{-2,75} \left[e^{-\frac{h}{L}} - \left\{ f_\alpha \left(2,75; \frac{E}{14}; h \right) - \left(\frac{E}{14} \right)^{0,65} \left\{ f_\alpha \left(2,10; \frac{E}{14}; h \right) \right\} e^{-h} \right] \quad (19)$$

Las curvas obtenidas para este caso (tomando nuevamente $\alpha = 1$) están representadas en la figura 6. En la tabla II está tabulada la función (16b), para $s = 2,1$ ($\gamma = 0,7$).

Las curvas de la figura 6 son semejantes a las que se obtienen efectuando el cálculo (numérico) exacto, tal como lo plantearon Budini y Molière (§ 3e del cap. V de 5). La expresión (19) confirma lo previsto en el capítulo 3.

Si el espectro primario (18) está cortado por el campo geomagnético en E_m , se tendrá para protones y neutrones:

$$P(E, h) = N(E, h) = \frac{k}{2} E^{-2,75} \left\{ e^{-\frac{h}{L}} - \left[f_\alpha \left(2,75; \frac{E}{14}; h \right) - \left(\frac{E}{14} \right)^{0,65} \left\{ f_\alpha \left(2,10; \frac{E}{14}; h \right) - f_\alpha \left(2,10; \frac{E}{E_m}; h \right) \right\} \right] e^{-h} \right\},$$

que nuevamente tiene la forma

$$\frac{k}{2} E^{-2,75} \left[e^{-\frac{h}{L}} - \Phi(E, E_m, h) e^{-h} \right],$$

que vuelve a ser una función que crece con E y con h , y que vale 1 para $h = 0$, valiendo por tanto aquí también las propiedades enunciadas para la expresión (16). Obsérvese sin embargo, que ya no hay más homogeneidad en E y E_m .

Para $E_m = 14$ GeV (ecuador geomagnético) se vuelven a obtener las curvas de la figura 3 (y 4). Ahora los valores de τ de la figura son los cocientes $E/14$.

Dado que en la experiencia se suele medir siempre intensidades integrales (número de partículas de energía superior a un cierto

¹ Se puso $f_\alpha \left(s, \frac{E}{E_0}, h \right)$ para poner en evidencia el valor del parámetro s .

valor E , o sea: $\int_E^{\infty} I(E', h) dE'$, es conveniente realizar esta transformación para las intensidades antes expresadas. Se calculó así el coeficiente $B = \frac{I}{I_\lambda}$ polo que representa el efecto de latitud absoluto inte-

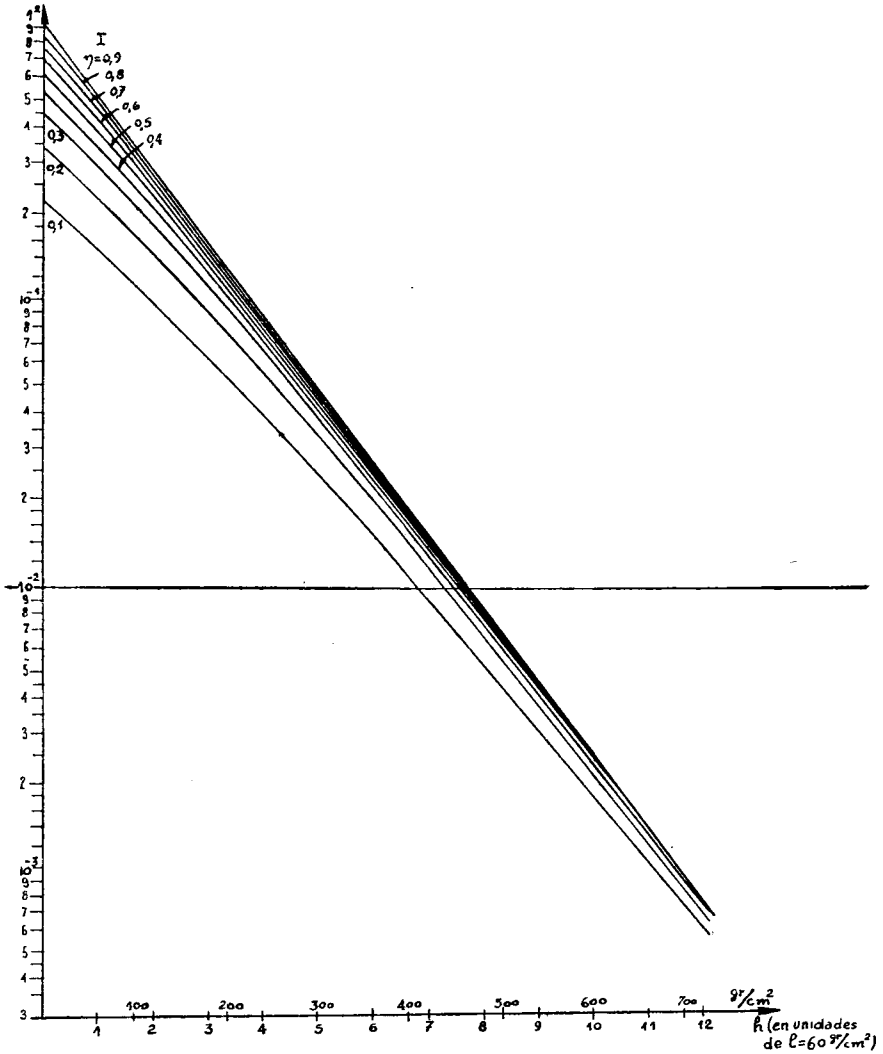


Fig. 6. — Curvas de absorción de nucleones, para el caso de un espectro primario del tipo (18). $\tau = E/14$ (GeV).

gral (I_{polo} e I_{λ} son las intensidades en el polo y en la latitud λ , respectivamente). Para el caso de $\lambda = 0$ (ecuador geomagnético), se lo representó en las figuras 7a y 7b, como función de la energía, para

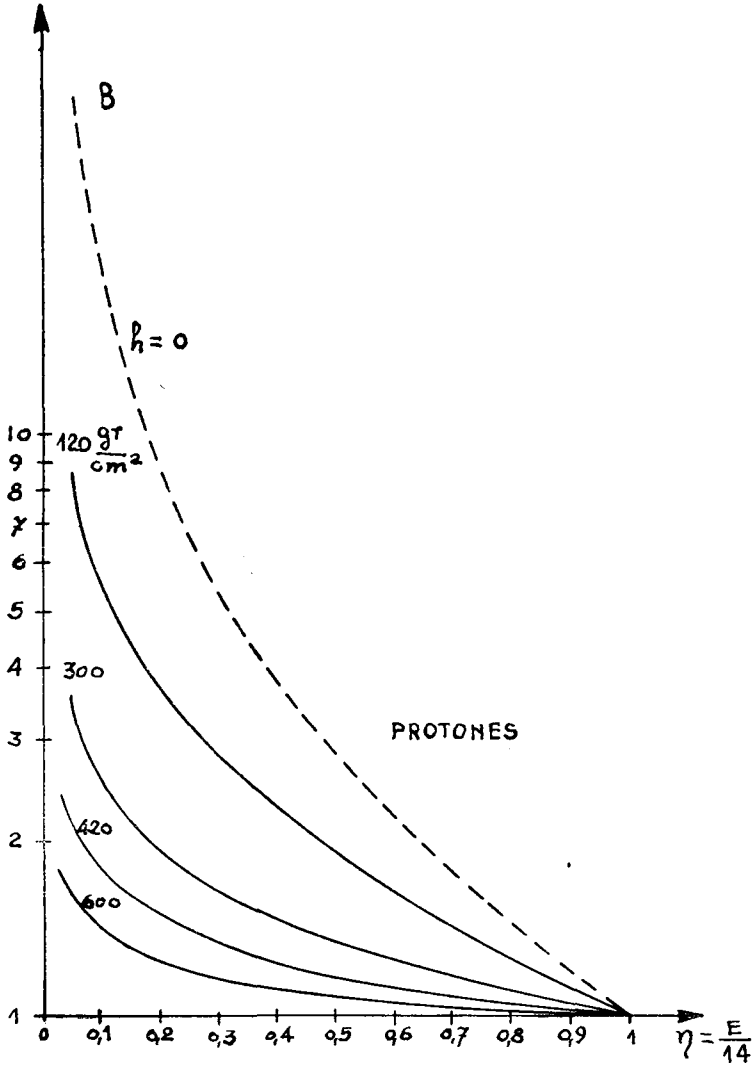


Fig. 7a. — Efecto de latitud integral $B = \frac{I_{\text{po}}}{I_0}$, para protones, en el ecuador geomagnético

distintas profundidades atmosféricas. El efecto de latitud B de ambos tipos de partículas aumenta, tanto al disminuir la energía, como al disminuir la profundidad atmosférica.

Para otras latitudes ($\lambda \neq 0$) se obtendrían curvas muy parecidas en su forma, disminuyendo sin embargo el valor de B (para cada E y h) al aumentar λ (debido a la no-homogeneidad de Φ).

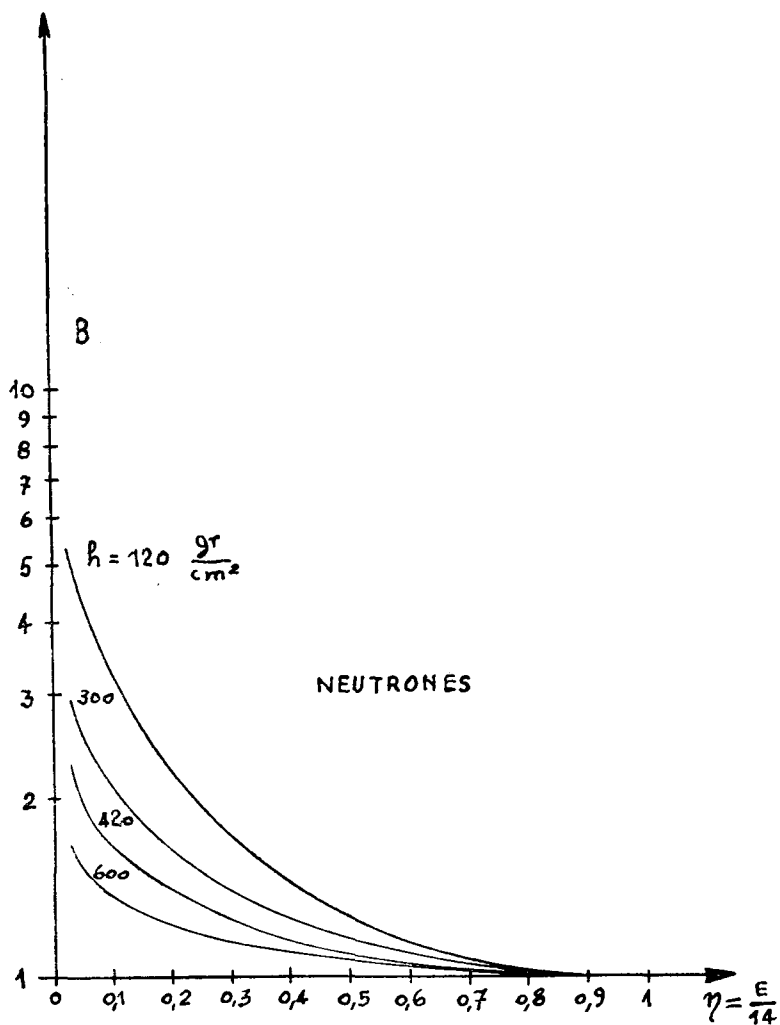


Fig. 7b. — Efecto de latitud integral $B = \frac{I_{20}}{I_0}$, para neutrones.

En las figuras 7a y 7b se observa además, que el efecto de la latitud de los neutrones siempre es menor que el de los protones. Esto se puede explicar fácilmente, recordando que los neutrones siempre (también en las latitudes altas) constituyen una componente naciente en la atmósfera, mientras que los protones (de una energía dada)

pasan de ser una componente puramente naciente (en el ecuador) a una componente « mixta » constituida por protones primarios y protones que nacen en la atmósfera. Una observación importante, físicamente equivalente a la anterior, es la siguiente: en ningún momento (ni siquiera en la región $h \rightarrow 0$), el espectro diferencial de neutrones deja de ser una función continua en el punto E_m (o sea, nunca aparecer « cortado », contrariamente al espectro de protones); sólo presenta allí un ángulo. Esto puede verse inmediatamente recu-

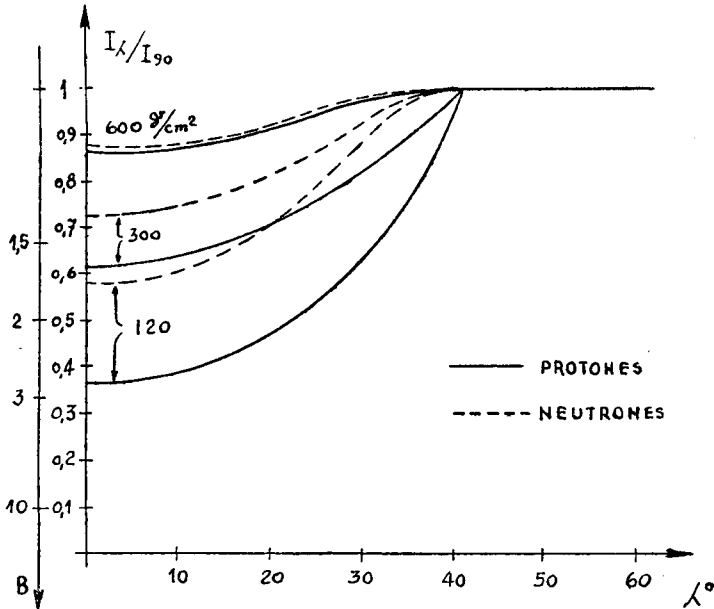


Fig. 8a. — Intensidad de protones y neutrones de energía $E \geq 1,4$ GeV en función de la latitud geomagnética, normalizada para $\lambda = 90^\circ$. Escala B: efecto de latitud.

rriendo a las expresiones (16) (para $E < E_m$) y (6) (para $E > E_m$). A medida que el flujo penetra en el medio absorbente, los protones y neutrones se van poniendo en equilibrio mutuo (expresiones (5)), asintotizándose mutuamente el efecto de latitud de protones y neutrones.

En las figuras 8a y 8b se ha representado la intensidad de protones y neutrones, de energías superior a 1,4 y 4,2 GeV respectivamente, como función de la latitud geomagnética, para diversos espesores h , normalizando las curvas en el polo geomagnético. Se observa que la intensidad de protones disminuye bruscamente en la zona de las latitudes cercanas a la correspondiente al corte; los neutrones

en cambio, sufren una disminución «continua» decreciendo con mayor intensidad en las latitudes intermedias. La causa de este efecto se encuentra nuevamente en el hecho de que el espectro diferencial de neutrones es siempre continuo, en contraposición de lo que sucede con los protones en la alta atmósfera.

Una comparación cuantitativa con la experiencia es, por el momento, prácticamente imposible. En primer lugar, porque hay muy pocos datos para la componente puramente nucleónica 12 y 13. En

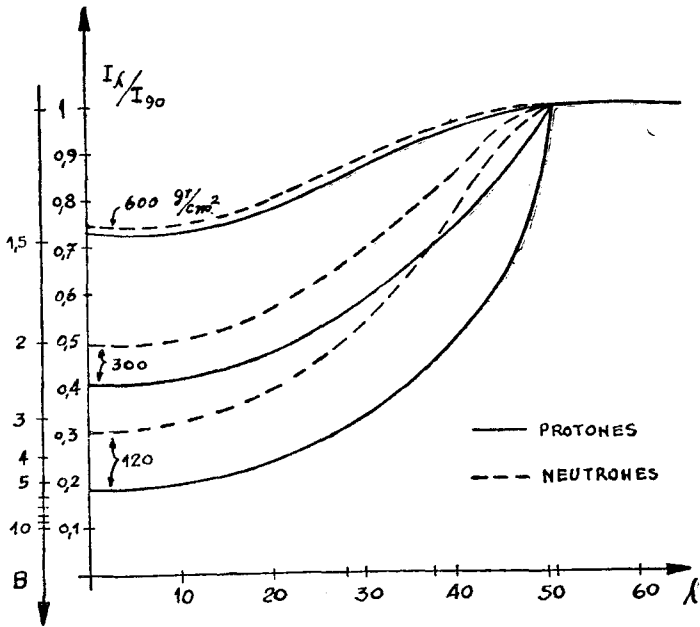


Fig. 8b. — Idem Fig. 8a. para protones y neutrones de energía $E \geq 4.2$ GeV.

segundo lugar, porque estos pocos datos suelen corresponder a energías bajas, para las cuales no vale más la teoría en la forma desarrollada en los párrafos anteriores.

Por último, se resumirá cuáles son las limitaciones y los errores sistemáticos que presenta la teoría en la forma aquí desarrollada, y se indicará en que aspectos ésta puede ser mejorada. En primer lugar, se usó una aproximación muy grosera (18) del espectro primario. Sería conveniente realizar los cálculos con mayor cantidad de «trozos» potenciales. En el espectro primario se despreció la presencia de los núcleos pesados; esto trae como consecuencia la necesidad de una corrección que, si bien pequeña en la atmósfera inter-

media y baja, puede resultar apreciable en la alta atmósfera ($0 - 120$ gr/cm²). Otra consecuencia de la incidencia de los núcleos pesados es que aproximadamente un 20 % de los nucleones primarios inciden como neutrones. Estos, y otros 20 % de protones, están sujetos a un corte geomagnético en una energía que vale la mitad de la energía de corte del 60 % de protones (libres) restantes. Esto trae como consecuencia una disminución del efecto de latitud calculado anteriormente, así como una aminoración de la diferencia entre la absorción de protones y neutrones.

Otro factor que puede ser fuente de errores es el espectro de generación. Pero es posible que, teniendo alguna vez en mano resulta-

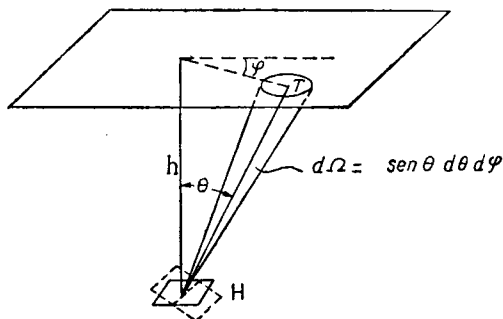


Figura 9

dos experimentales más completos, se puedan utilizar las posibles diferencias entre teoría y experimentación para ajustar mejor los parámetros α y γ de (2).

Se ha despreciado también, para los protones, la pérdida de energía por ionización; tampoco se tuvo en cuenta la distribución angular de las partículas en una desintegración nuclear. Ambos efectos influyen apreciablemente en la propagación de la cascada nucleónica en el rango de las energías menores que 1-2 GeV. Tampoco se tuvo en cuenta la participación de los mesones en la cascada nucleónica. Ello sólo constituye un error para energías superiores a unos 50 GeV, no influirán por tanto en los cálculos relacionados con el efecto de latitud.

Debe observarse por último, que todos los resultados deducidos en los párrafos anteriores sólo valen para nucleones de una dirección determinada (la vertical); para una comparación con la experiencia habrá que realizar, pues, una transformación de Gross, siempre que el sistema de detección sea unidireccional.

TABLA I
Valores de la función (16b), para $s=2,75$ y $\gamma=0,7$

γ h	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
0,5	1,033	1,065	1,096	1,123	1,148	1,168	1,189	1,203	1,214
1,0	1,071	1,136	1,197	1,248	1,308	1,361	1,407	1,444	1,474
1,5	1,103	1,207	1,302	1,395	1,488	1,572	1,654	1,724	1,783
2,0	1,15	1,28	1,41	1,55	1,68	1,82	1,94	2,05	2,15
2,5	1,18	1,35	1,53	1,71	1,90	2,07	2,26	2,43	2,59
3,0	1,21	1,43	1,66	1,89	2,13	2,38	2,62	2,88	3,12
4	1,29	1,60	1,93	2,28	2,65	3,05	3,50	3,97	4,47
5	1,37	1,77	2,22	2,72	3,29	3,90	4,61	5,42	6,33
6	1,45	1,96	2,54	3,20	3,97	4,90	6,00	7,27	8,88
7	1,54	2,17	2,92	3,75	4,84	6,12	7,70	9,67	12,35
8	1,63	2,39	3,33	4,46	5,87	7,64	9,90	12,85	17,07
9	1,71	2,61	3,76	5,20	7,03	9,43	12,52	16,81	23,40
10	1,81	2,86	4,16	5,99	8,31	11,50	15,73	21,81	31,87
12	2,01	3,40	5,32	7,95	11,60	16,85	24,47	36,12	57,29

TABLA II
Valores de la función (16b), para $s=2,10$ y $\gamma=0,7$

γ h	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
0,5	1,034	1,071	1,106	1,444	1,181	1,216	1,255	1,292	1,333
1,0	1,074	1,148	1,222	1,289	1,374	1,465	1,554	1,645	1,756
1,5	1,106	1,223	1,336	1,461	1,598	1,740	1,901	2,077	2,389
2,0	1,15	1,30	1,46	1,64	1,84	2,08	2,31	2,59	2,96
2,5	1,18	1,38	1,60	1,83	2,10	2,41	2,77	3,19	3,77
3,0	1,21	1,47	1,74	2,05	2,39	2,82	3,31	3,93	4,81
4	1,30	1,64	2,05	2,52	3,06	3,72	4,58	5,75	7,53
5	1,38	1,83	2,37	3,04	3,88	4,92	6,30	8,31	11,57
6	1,47	2,03	2,74	3,62	4,77	6,33	8,50	11,69	17,37
7	1,56	2,26	3,16	4,27	5,89	8,05	11,18	16,12	24,74
8	1,65	2,50	3,63	5,13	7,23	10,23	14,70	22,08	37,11
9	1,74	2,74	4,12	6,04	8,75	12,81	18,95	29,66	53,53
10	1,84	3,01	4,73	7,01	10,45	15,83	24,24	39,32	75,76
12	2,04	3,60	5,90	9,41	14,81	23,71	38,86	68,26	145,03

CITAS BIBLIOGRAFICAS

1. W. HEITLER Y L. JANOSSY, *Proc. Phys. Soc.*, A, **62** pp. 374 y 669 (1949).
2. J. G. WILSON, *Progress en Cosmic Ray Physics*, volume 2 cap. IV (1954). North Holland Publishing Company, Amsterdam.
3. P. CALDIROLA, R. FIESCHI Y P. GULMANELLI, *Nuovo cimento*, **9**, pp. 5 (1952).
4. B. ROSSI, *High Energy Particles*, Prentice-Hall Inc., New York (1952).
5. W. HEISENBERG, *Kosmische Strahlung*, 2. Auflage; cap. V Springer Verlag (1953).
6. J. G. WILSON, *Progress in Cosmic Ray Physics*, volume 1 (1952). North Holland Publishing Company, Amsterdam.
7. K. GOTTSSTEIN, *Die Naturwiss*, **40-3**, pág. 104 (1953).
8. Véase por ejemplo : cap. II, § 8c de 5).
9. H. MESSEL, *Phys. Rev.* **83**, pág. 21 (1951).
10. Por ejemplo : cap. II, § 2 de 5, y cap. VI de 6.
11. G. DOETSCH, *Tabellen zur Laplacetransformation*; Springer Verlag (1947).
12. Por ejemplo : cap. VI, § 2, 1 de 6; además :
H. YAGODA, *Proceedings of the Echo Lake Cosmic-Ray Symposium*, pág. 169 (1949). S. LATTIMORE, *Phil. Mag.*, **40**, pág. 394 (1949) y *Phil. Mag.*, pp. 41-819 (1950). J. ROEDERER, *Zeitschr. f. Naturforschg.* 7^a7-65 (1952) y Comunicación a la Reunión de la Asociación Física Argentina (1953). J. A. SIMPSON Y W. C. FAGOT, *Phys. Rev.*, 90 pág. 1068 (1953).
13. Véase por ejemplo la figura 3 en J. Roederer, *loc. cit.* en 12.

SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EN LAS PRENSAS DE « CONÍ »
EL 6 DE JULIO DE 1954