

02.81.01

APROXIMACION DE LA SERIE PRINCIPAL

C. N. E. A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº	AÑO
1	1981

LIC. JORGE DUKELSKY

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TITULO DE
DOCTOR EN FISICA
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

ASESOR CIENTIFICO DR. GUILLERMO G. DUSSEL

- 1981 -

02.81.

APROXIMACION DE LA SERIE PRINCIPAL

APROXIMACION DE LA SERIE PRINCIPAL

LIC. JORGE DUKELSKY

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TITULO DE
DOCTOR EN FISICA
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

ASESOR CIENTIFICO DR. GUILLERMO G. DUSSEL

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido realizado en la División de Física Nuclear Teórica de la Comisión Nacional de Energía Atómica.

La guía y apoyo del Dr. G.G.Dussel, director de esta tesis, fueron determinantes a lo largo de todo su desarrollo.

Deseo hacer llegar mi reconocimiento a todos los miembros de la División, y en especial al Dr. H.M.Sofía, que con su apoyo, contribuyeron a su realización.

INDICE

SECCION I:	Introducción	1
SECCION II:	Teoría de Campos Nucleares	5
SECCION III:	Descripción diagramática de la superconductividad en una capa	9
SECCION IV:	Tratamiento de un hamiltoniano general en la Aproximación de la Serie Principal	14
SECCION V:	Interacción de apareamiento más cuadrupolar	25
SECCION VI:	Modelo de una capa	28
SECCION VII:	Nucleos deformados en la zona de las tierras raras	32
SECCION VIII:	Estados excitados	36
SECCION IX:	Aplicaciones a los isótopos del Sn	46
Conclusiones		49
Apendice I		53
Apendice II		55
Referencias		60
Tablas		62
Figuras		68

I. INTRODUCCION

La Teoría de Campos Nucleares¹⁾ (NFT) describe un sistema de muchos fermiones en términos de los modos elementales de excitación²⁾ de carácter fermiónico y bosónico, tratando perturbativamente el acoplamiento entre estos dos tipos de excitaciones.

Se ha encontrado que la convergencia de la NFT es buena cerca de capa cerrada, en la región de los plomos³⁾ y es cada vez más difícil el tratamiento cuando el número de partículas fuera de capa cerrada (o el número de excitaciones) aumenta.

Una posible solución es la de considerar el estado fundamental como un condensado de pares (vacío de BCS), y realizar luego el tratamiento perturbativo en esta base⁴⁾.

La aproximación de la Serie Principal⁵⁾ (PSA) es un método alternativo, que fue desarrollado inicialmente para interacciones de apareamiento.

Mientras la NFT utiliza para clasificar los diagramas un modelo de dos capas de igual degeneración, la PSA lo hace en una capa de degeneración 2Ω , siendo $2k$ el número de partículas.

Si se supone la analiticidad de los elementos de matriz del operador $\hat{\theta}$ se podrá escribir:

$$\langle f | \hat{\theta} | i \rangle = \sum_{n,m} a_{nm} \left(\frac{k}{\Omega} \right)^n \left(\frac{1}{\Omega} \right)^m \quad (1.1)$$

La PSA se define en el límite en que la degeneración tiende a infinito y el cociente $\frac{k}{\Omega}$ permanece finito. El conjunto de diagramas que sobreviven en este límite corresponden a la suma parcial de $\frac{k}{\Omega}$ para el menor valor de \underline{m} , y la hemos llamado la serie principal (PS) del operador $\hat{\theta}$.

La PS de la función de Green de un cuerpo, que describe las excitaciones fermiónicas del sistema, se relaciona en forma autoconsistente

con la función de Green de dos cuerpos asociada a los grados de libertad bosónicos.

Las ecuaciones que se derivan para un hamiltoniano de dos cuerpos general son equivalentes a las ecuaciones de Hartree-Fock-Bogoliubov⁶⁾ (HFB).

La relación entre las funciones de Green de uno y dos cuerpos se obtiene suponiendo que el estado fundamental del sistema es un condensado de excitaciones bosónicas. El acoplamiento de los fermiones con los bosones del condensado determina la estructura de las excitaciones fermiónicas, que a su vez son los bloques elementales con los que se construyen las excitaciones bosónicas.

La imagen física que da la PSA es distinta a la de HFB⁷⁾, que es una teoría variacional. La PSA es una teoría perturbativa y, en principio, es posible incluir correcciones de mayor orden para mejorar los resultados, como así también aprovechar el conocimiento de los procesos que se han tenido en cuenta. Por ejemplo, la PS del operador número de partículas \hat{N} garantiza que el resultado obtenido es correcto en el orden más bajo de $1/\Omega$. Es decir que el número de partículas se conserva en este orden, como en BCS. Sin embargo, en la PSA es posible tener en cuenta el orden siguiente en $1/\Omega$, para corregir esta no conservación. El formalismo de la PSA también permite el estudio de las excitaciones de dos cuasipartículas en sistemas superconductores. En la construcción de estos estados excitados del sistema se debe distinguir entre cuasipartículas de adición y remoción, correspondientes a los sistemas con $2k+1$ y $2k-1$ partículas. Por lo tanto, hay tres clases de estados de dos cuasipartículas en el sistema de k pares, uno de ellos corresponde a una cuasipartícula de adición y una de remoción sobre el condensado de k pares y los otros corresponden a dos cuasipartículas de adición o dos de remoción sobre el condensado de $k-1$ o $k+1$ pares, respectivamente.

La distinción entre estos tipos de excitaciones es clara en núcleos de capa cerrada donde los estados de partícula independiente se clasifican en estados de partícula y estados de agujero según su energía sea mayor o menor que la del nivel de Fermi. La mezcla entre estas excitaciones es de un orden mayor en $1/\Omega$, pudiendo ser calculada perturbativamente.

La situación cambia completamente en núcleos de capas abiertas porque la PSA de dos cuasipartículas mezcla estos dos tipos de excitaciones al orden más bajo. El tratamiento con la PSA de las excitaciones de dos cuasipartículas no sólo pone de manifiesto este hecho, sino que también afirma la necesidad de considerar en pie de igualdad los vértices de partícula-agujero y partícula-partícula del hamiltoniano sin conducir a un doble conteo de diagramas.

En las secciones II y III se hace una revisión de la NFT y la PSA con una interacción de apareamiento monopolar, para pasar a desarrollar la teoría de la PSA con un hamiltoniano general en la sección IV.

En la sección V se introducen interacciones separables de apareamiento y cuadrupolar que simplifica enormemente la teoría.

Las aplicaciones de este tratamiento en una capa⁸⁾ se hacen en la sección VI estudiando en detalle las consecuencias de la PSA, como por ejemplo, la proyección de las excitaciones bosónicas sobre estados de buen momento angular y su relación con la descripción microscópica del Modelo de Bosones Interactuantes (IBM)⁹⁾.

La inclusión de dos tipos de partículas^{8,10)} (neutrones y protones) se hace en la sección VII, estudiando los núcleos deformados en la zona de las tierras raras.

En la sección VIII se desarrolla la PSA para los estados excitados de dos cuasipartículas¹¹⁾ en sistemas que conservan la simetría esférica. Las aplicaciones de este formalismo a los isótopos del Sn se hacen en la sección IX, discutiendo sus consecuencias sobre las probabilidades de

transición electromagnética y la transferencia de dos partículas a estados excitados.

II. TEORÍA DE CAMPOS NUCLEARES

Para clasificar los diagramas en la NFT se utiliza un modelo esquemático de dos capas de igual degeneración (2Ω) y 2Ω partículas llenando la capa inferior (capa cerrada), que interactúan con un hamiltoniano residual de apareamiento¹²⁾.

$$\hat{H} = \hat{H}_{pi} + \hat{H}_{dc} \quad (2.1)$$

$$\hat{H}_{pi} = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{\sigma m} \sigma a_{\sigma m}^+ a_{\sigma m} \quad (2.2)$$

$$\hat{H}_{dc} = -G\Omega \cdot A^+ A \quad ; \quad A^+ = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\sigma m > 0} a_{\sigma m}^+ a_{\sigma \bar{m}}^+ \quad (2.3)$$

El operador $a_{\sigma m}^+$ crea una partícula en el estado (σ, m) . El subíndice σ denota el nivel superior si es 1 o el nivel inferior si es -1. Cada nivel tiene degeneración 2Ω y el número cuántico semientero m ($|m| \leq \Omega - 1/2$) clasifica los estados degenerados de cada nivel. El (σ, \bar{m}) es el reverso temporal de (σ, m) . La distancia entre niveles es ϵ_0 y G la intensidad de la fuerza de apareamiento.

El tratamiento es válido cuando el estado fundamental del sistema es normal, debiendo la fuerza de apareamiento verificar la condición:

$$\chi = \frac{2G\Omega}{\epsilon} < 1 \quad (2.4)$$

Esta condición asegura que la raíz de la Aproximación de Fases al Azar (RPA) es real y que el estado fundamental es estable.

En este sistema existen dos parámetros adimensionales: x y $1/\Omega$. Los elementos de matriz de un operador $\hat{\Theta}$ se pueden expresar como una serie de potencias de estos dos parámetros.

$$\langle f | \hat{\theta} | i \rangle = \sum_{nm} a_{nm} x^n (1/\Omega)^m = \sum_m b_m(x) (1/\Omega)^m = \sum_n c_n(1/\Omega) x^n$$

En un tratamiento perturbativo fermiónico se evalúan las funciones $c_n(1/\Omega)$ para cada potencia n de x . La NFT utiliza $(1/\Omega)$ como parámetro de expansión, evaluando las funciones $b_m(x)$. Esta forma particular de sumar la serie doble converge más rápidamente cuando la degeneración es grande, como es en general el caso de los sistemas nucleares.

En este sistema existen dos tipos de excitaciones, una de carácter fermiónico y otra bosónica, asociadas con los polos de las funciones de Green de uno y dos cuerpos, respectivamente.

Estudiando el acoplamiento entre estos dos modos de excitación se encontró¹⁾ un método que permite el uso de éstos como estados básicos del sistema, reproduciendo los resultados exactos de cálculos fermiónicos en sistemas normales¹³⁾. En la referencia 14 se mostró que este método se deduce de una relación biunívoca entre los procesos que existen en el espacio fermiónico y los del espacio fermión-bosón. El método de la NFT se puede sintetizar en las siguientes reglas:

a) Las excitaciones de partícula independiente son descritas en Hartree-Fock (HF), mientras que el campo bosónico se define en la RPA. Por lo tanto, los hamiltonianos de partícula independiente y de bosones libres son:

$$\hat{H}_p = \frac{\epsilon}{2} \sum_m \sigma a_{\sigma m}^+ a_{\sigma m} \quad (2.5)$$

$$\hat{H}_b = \omega \Gamma^+ \Gamma \quad (2.6)$$

Donde ϵ es la energía de partícula independiente ϵ_0 corregida con las inserciones HF de la interacción (2.3), y ω es la raíz RPA de esta interacción.

$$\omega = \epsilon \sqrt{1-X} \quad (2.7)$$

En esta ecuación se pone de manifiesto que para que el estado fundamental sea estable se debe cumplir la condición (2.4), Γ^+ es el operador que crea un bosón. Su estructura microscópica está relacionada con los residuos de la RPA:

$$\Gamma_n^+ = \sum_{\sigma m} \langle n | a_{\sigma m}^+ a_{\sigma \bar{m}}^+ | 0 \rangle a_{\sigma m}^+ a_{\sigma \bar{m}}^+ \quad (2.8)$$

donde :

$$\langle n | a_{\sigma m}^+ a_{\sigma \bar{m}}^+ | 0 \rangle = \frac{\sigma X}{\epsilon - \omega} \sqrt{\frac{\epsilon}{8\omega\Omega}} \quad (2.9)$$

b) Los operadores fermiónicos son reemplazados por operadores de campo. En el caso del hamiltoniano, además de los términos de fermiones y bosones libres (2.5) y (2.6), éste contiene la interacción de dos cuerpos original (2.3) sin las contribuciones de HF, y el término de acoplamiento entre fermiones y bosones:

$$\hat{H}_{\text{campo}} = \hat{H}_f + \hat{H}_b + \hat{H}_{dc} + \hat{H}_{\text{acopl}} \quad (2.10)$$

donde el término de acoplamiento es:

$$\hat{H}_{\text{acopl}} = \sum_{i,j,n} \Lambda_{ij}^n a_i a_j \Gamma_n^+ + h.c. \quad (2.11)$$

con la constante de acoplamiento:

$$\Lambda_{ij}^n = \sum_{\kappa, \ell} \langle 0 | a_{\kappa} a_{\ell} | n \rangle V_{i\ell\kappa j} = -\delta_{ij} X \sqrt{\frac{\epsilon}{8\omega\Omega}} \quad (2.12)$$

c) Los términos de dos cuerpos y de acoplamiento fermión-bosón actúan a todo orden en teoría de perturbación. Se deben excluir los diagramas donde dos partículas son creadas y subsecuentemente aniquiladas sin sufrir ninguna interacción intermedia (burbujas) pues ya fueron incluidas en la definición del bosón. En forma análoga, también deben ser excluidos los diagramas que contengan inserciones de HF.

d) Los diagramas propios en la NFT son aquellos que tienen como estado inicial y final excitaciones fermiónicas y bosónicas. Los diagramas improprios deben ser excluidos¹⁵⁾ ya que los estados iniciales y finales tienen la energía no perturbada y su norma es cero.

La derivación de las tres primeras reglas está basada en el requerimiento de que todos los procesos que existen en el espacio fermiónico deben estar incluidos una sola vez en el espacio fermión-bosón.

Es posible definir las excitaciones fermiónicas¹⁶⁾ y bosónicas¹⁵⁾ por medio de series infinitas distintas de HF y RPA. En este caso la regla c) debe afirmar la exclusión de todos los diagramas donde aparecen los procesos tomados en la definición de las excitaciones fermiónicas y bosónicas.

Cuando se trata de aplicar la NFT a sistemas superconductores ($x > 1$) parece natural usar la función de onda BCS para el estado fundamental, siendo las cuasipartículas excitaciones fermiónicas y las soluciones de la RPA de dos cuasipartículas las excitaciones bosónicas. Sin embargo, la raíz más baja de la RPA tiene energía cero y su constante de acoplamiento con las cuasipartículas es infinita. Por otro lado, dado el carácter variacional de la aproximación BCS, se pierde una de las mayores ventajas de la NFT, la de conocer qué procesos se tienen en cuenta en cada etapa de la aproximación.

III. DESCRIPCION DIAGRAMATICA DE LA SUPERCONDUCTIVIDAD EN UNA CAPA

En esta sección se estudia el modelo de una capa de degeneración 2Ω , con una población de $2K$ partículas interactuando con un hamiltoniano de apareamiento:

$$\hat{H}_P = -G\Omega A^\dagger A \quad (3.1)$$

con

$$A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{m>0} a_m^\dagger a_{\bar{m}}^\dagger$$

El cero de energía se elige de modo de anular la contribución de HF a la energía de las excitaciones fermiónicas, y las excitaciones bosónicas se definen en la Aproximación de Tamm-Dancoff (TDA)

$$\Gamma^+ = A^\dagger \quad ; \quad \omega = -G\Omega \quad (3.2)$$

La constante de acoplamiento fermión-bosón es evaluada utilizando la NFT y resulta:

$$\Lambda_{ij} = -G\sqrt{\Omega} \delta_{i\bar{j}} \quad (3.3)$$

Para poder conocer la estructura topológica de los diagramas de la PSA es necesario aislar la dependencia en K y Ω de los distintos bloques de un diagrama genérico que contribuye, por ejemplo, a la energía del sistema de K bosones.

Consideremos un diagrama con r bosones externos conectados, y con $(K-r)$ bosones que no sufren ninguna interacción. Sea \underline{m} el número de bosones internos al diagrama, n el número de interacciones fermiónicas y s el número de burbujas*.

* Por extensión se usa el concepto de burbuja para dos partículas que describen un circuito cerrado y donde está involucrada una suma sobre todos los números cuánticos.

Si representamos los bosones por dos líneas paralelas, los fermiones por una línea continua y las interacciones fermiónicas por una línea de trazos, la figura 1 muestra un diagrama con siete bosones externos, un bosón interno, dos interacciones fermiónicas y cuatro burbujas.

Si se tienen en cuenta los denominadores de energía que son proporcionales a $G\Omega$, cada acoplamiento fermión-bosón es de orden $\Omega^{-1/2}$, cada vértice fermiónico es proporcional a Ω^{-1} y cada burbuja a Ω . La presencia de r bosones externos conectados al diagrama introduce un factor estadístico $K!/(K-r)!$, que en el límite $K \gg r$ se puede aproximar por K^r . Este factor corrige al acoplamiento fermión-bosón correspondiente a un bosón externo haciéndolo proporcional a $(\frac{K}{\Omega})^{1/2}$.

Por lo tanto, la contribución de un diagrama genérico a la energía será proporcional a:

$$\left(\frac{K}{\Omega}\right)^r \left(\frac{1}{\Omega}\right)^{m+n-s} \quad (3.4)$$

Si llamamos conexiones tanto a los bosones internos como a las interacciones fermiónicas, los diagramas que pertenecen a la PSA son aquellos que hacen mínima la diferencia entre el número de conexiones y el número de burbujas.

El conjunto de diagramas de la PSA que corresponden al sistema impar definen la cuasipartícula o excitación fermiónica. En la figura 2 se muestran algunos diagramas que pertenecen a la serie de la cuasipartícula, que se representa por una línea continua con una flecha.

Este conjunto de diagramas verifica la condición de que el número de burbujas es igual al número de conexiones. Si a un diagrama de la PSA se le agrega una conexión se debe generar una burbuja extra para que el diagrama siga perteneciendo a la PSA. Esto es posible si cada conexión separa el diagrama en dos bloques que no se vuelven a conectar por un

bosón interno u otra interacción fermiónica.

La línea de partícula sigue un camino zig-zag, creando o destruyendo en cada vértice un par de partículas o un bosón TDA. Estos a su vez, interactúan con el resto de los bosones TDA definiendo la excitación bosónica, representada en la figura 3 por dos líneas paralelas con una flecha.

Los diagramas de la excitación bosónica cumplen la condición de que el número de conexiones es igual al número de burbujas más uno.

La serie de la cuasipartícula puede ser reescrita en forma de una ecuación de Dyson, donde en cada vértice se absorbe o emite una excitación bosónica, mientras la excitación bosónica se construye a través de las sucesivas interacciones de una partícula y una cuasipartícula.

De esta manera tenemos un sistema de ecuaciones acopladas, las excitaciones fermiónicas se definen en términos de las bosónicas y viceversa (Figura 4).

Hay que hacer notar que cada término de la figura 4-a contiene K bosones vestidos, que pueden o no, estar conectados al diagrama. Para evitar los problemas asociados con las propiedades asintóticas del condensado de bosones, se introduce en el hamiltoniano el término $-\lambda \hat{N}$ con la prescripción de que λ sea tal que la energía del bosón vestido se anule. Esta prescripción simplifica el tratamiento, ya que elimina de la ecuación de la cuasipartícula los propagadores bosónicos.

Por lo tanto, la ecuación de Dyson de la cuasipartícula es:

$$G_m(t) = G_0(t) - K \Lambda^2 \iint d\epsilon_1 d\epsilon_2 G_0(\epsilon_2) G_0(\epsilon_2 - \epsilon_1) G_m(t - \epsilon_1) \quad (3.5)$$

Donde Λ es la constante de acoplamiento fermión-bosón vestido definida en términos de los residuos del bosón:

$$\Lambda = -G \sum_m \langle 0 | a_m a_{\bar{m}} | n \rangle \quad (3.6)$$

Las representaciones espectrales de las funciones de Green de la partícula y la cuasipartícula son:

$$G_0(t) = e^{i\lambda t} \theta(t)$$

$$G_m(t) = \mu_m^2 e^{-i\bar{E}_m t} \theta(t) - \nu_m^2 e^{i\bar{E}_m t} \theta(-t) \quad (3.7)$$

Reemplazando (3.7) en (3.5) y realizando la transformada de Fourier:

$$\frac{\mu_m^2}{\omega - \bar{E}_m} + \frac{\nu_m^2}{\omega + \bar{E}_m} = \frac{1}{\omega + \lambda} + \frac{k\Lambda^2}{\omega^2 - \lambda^2} \left\{ \frac{\mu_m^2}{\omega - \bar{E}_m} + \frac{\nu_m^2}{\omega + \bar{E}_m} \right\} \quad (3.8)$$

cuyos polos y residuos son:

$$\bar{E}_m = \sqrt{\lambda^2 + k\Lambda^2} = \bar{E}$$

$$\mu_m^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\bar{E} - \lambda}{\bar{E}} \right]$$

$$\nu_m^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\bar{E} + \lambda}{\bar{E}} \right] \quad (3.9)$$

Para obtener el coeficiente λ y la constante de acoplamiento Λ se debe sumar la serie de la figura 4-b. El primer término de esta serie es el propagador libre de una partícula y una cuasipartícula, que en la representación de energía es:

$$S_m(\omega) = \frac{\mu_m^2}{\omega - \bar{E}_m + \lambda} \quad (3.10)$$

Entonces el propagador del bosón es:

$$K_{mm'}(\omega) = S_m(\omega) \delta_{mm'} - G S_m(\omega) S_{m'}(\omega) + \dots$$

$$= S_m(\omega) \left[\delta_{mm'} - \frac{G S_{m'}(\omega)}{1 + G \sum_{m'' > 0} S_{m''}(\omega)} \right] \quad (3.11)$$

Los polos de la función de Green son las raíces del denominador, y usando la prescripción de que se debe anular la energía del bosón, se obtiene:

$$\frac{1}{G} = \sum_{m > 0} \frac{1}{2E_m} \quad (3.12)$$

Para encontrar los residuos se compara la ecuación (3.11) con la representación de Lehman de la función de Green de dos cuerpos:

$$K_{mm'}(\omega) = \frac{\langle 0 | a_{m'} a_m | n \rangle \langle n | a_m^\dagger a_{m'}^\dagger | 0 \rangle}{\omega - E_n} \quad (3.13)$$

Obteniéndose para los residuos:

$$\langle 0 | a_{m'} a_m | n \rangle = \frac{S_m(E_n)}{\left\{ \sum_{m' > 0} \frac{\mu_{m'}^2}{(E_{m'} - \lambda - E_n)^2} \right\}^{1/2}} \quad (3.14)$$

Usando (3.6) la constante de acoplamiento es:

$$\Lambda = \left\{ \sum_{m > 0} \frac{\mu_m^2}{(E_m - \lambda)^2} \right\}^{-1/2} \quad (3.15)$$

de donde se deduce:

$$K = \sum_{m > 0} v_m^2 \quad (3.16)$$

Resolviendo (3.12), (3.15) y (3.16):

$$\begin{aligned} E &= \frac{G\Omega}{2} \\ \lambda &= -\frac{G\Omega}{2} \left(1 - \frac{2K}{\Omega} \right) \\ \Lambda &= -G \sqrt{\Omega(1 - K/\Omega)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Las ecuaciones (3.17) son equivalentes a la solución BCS de una fuerza de apareamiento monopolar en una capa. La energía de estado fundamental se puede calcular teniendo en cuenta que 2λ es la diferencia entre las energías de los estados de K y $K-1$ pares. Entonces:

$$E(K) = \sum_{n=1}^K 2\lambda(n) = -G\Omega K \left(1 - \frac{K}{\Omega} \right) \quad (3.18)$$

que reproduce el resultado exacto al orden de la PSA (APENDICE I)

IV. TRATAMIENTO DE UN HAMILTONIANO GENERAL EN LA APROXIMACION DE LA SERIE PRINCIPAL.

En esta sección se aplica la PSA a un hamiltoniano general de muchos cuerpos

$$\hat{H} = \sum_i \epsilon_i a_i^\dagger a_i + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} \langle ij|V|kl\rangle a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k \quad (4.1)$$

que actúa sobre un sistema de $2K$ fermiones; los índices $ijkl$ corresponden a los estados de partícula independiente en el espacio de valencia y V es la interacción efectiva nucleón-nucleón.

La interacción de dos cuerpos (4.1) tiene vértices de dispersión (Fig. 5.A) y vértices de apareamiento (Fig. 5.B).

En la sección III se clasificaron los diagramas que pertenecen a la PSA para un hamiltoniano que sólo tiene vértices de apareamiento. La aparición de vértice de dispersión da lugar a nuevos diagramas, algunos de los cuales se muestran en la figura 6 para las excitaciones fermiónicas y en la figura 7 para las bosónicas.

Los diagramas de la PSA que corresponden a la excitación fermiónica se pueden agrupar en dos ecuaciones de Dyson. La primera de ellas (Fig. 8.A) representa la interacción, por medio del vértice de dispersión, de una partícula con el condensado de bosones, definiendo una partícula de H-F. La segunda es la ecuación de Dyson usual para la cuasipartícula (Fig. 8.B).

El bosón se construye a través de las sucesivas interacciones de una partícula de HF y una cuasipartícula (Fig. 9).

En forma análoga al tratamiento de una capa, se introduce en el hamiltoniano el término $-\lambda\hat{N}$ y se elige λ de manera de anular la energía de la excitación bosónica.

a) Propagador de la partícula de H-F (Fig. 8.A)

Para poder sumar esta serie es necesario definir el elemento de matriz densidad Ψ_{ij} , que se calcula en forma diagramática (Fig. 10) una vez conocida la estructura de la excitación bosónica.

$$\Psi_{ij} = \langle \phi_0 | a_i^\dagger a_j | \phi_0 \rangle \quad (4.2)$$

En términos de la matriz densidad, la acción del condensado de bosones sobre la partícula toma la forma de un campo externo Γ :

$$\Gamma_{ij} = \sum_{kl} \langle ik | V | jl \rangle \Psi_{kl} \quad (4.3)$$

De las definiciones (4.2) y (4.3) la matriz densidad Ψ y el potencial de H-F Γ se observa que son hermíticos.

La ecuación de Dyson para estos procesos es:

$$G_{HF}(j_i, t) = G_0(i, t) \delta_{ij} - \sum_k \Gamma_{ki} \int d\epsilon G_0(i, \epsilon) G_{HF}(j_k, t - \epsilon) \quad (4.4)$$

Donde los propagadores de la partícula desnuda y la partícula H-F son:

$$G_0(i, t) = e^{-i(\epsilon_i - \lambda)t} \theta(t) \quad (4.5)$$

$$G_{HF}(j_i, t) = \sum_a S_i^a S_j^{*a} e^{-i\epsilon_a t} \theta(t) \quad (4.6)$$

La inclusión en el hamiltoniano del término $-\lambda \hat{N}$ corre las energías de una partícula independiente una cantidad λ que se pone de manifiesto en la ecuación (4.5).

Reemplazando (4.5) y (4.6) en (4.4) y transformando Fourier se obtiene

$$\sum_a \frac{S_i^a S_j^{*a}}{\omega - \epsilon_a} = \frac{\delta_{ij}}{\omega - (\epsilon_i - \lambda)} + \sum_{k\beta} \frac{\Gamma_{ki} S_k^\beta S_j^{*\beta}}{[\omega - (\epsilon_i - \lambda)] [\omega - \epsilon_\beta]} \quad (4.7)$$

Cerca de los polos $\omega = \epsilon_\alpha$ y $\omega = \epsilon_i - \lambda$ se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$S_i^\alpha = \sum_k \frac{\Gamma_{ki} S_k^\alpha}{\epsilon_\alpha - (\epsilon_i - \lambda)}$$

$$0 = S_{ij} - \sum_{k\alpha} \frac{\Gamma_{ki} S_k^\alpha S_j^{*\alpha}}{\epsilon_\alpha - (\epsilon_i - \lambda)} \quad (4.8)$$

de la ecuaciones (4.8) se deduce la condición de normalización y una ecuación de autovectores y autovalores para los residuos y las energías:

$$\sum_\alpha S_i^\alpha S_j^{*\alpha} = S_{ij} \quad (4.9)$$

$$\epsilon_\alpha S_i^\alpha = \sum_j [\Gamma_{ji} + (\epsilon_i - \lambda) S_{ij}] S_j^\alpha \quad (4.10)$$

La matriz S es una transformación unitaria de la base \underline{i} a la base $\underline{\alpha}$.

En esta nueva base el hamiltoniano se escribe:

$$\hat{H} = \sum_\alpha \epsilon_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle \alpha\beta | V | \gamma\delta \rangle a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\delta a_\gamma \quad (4.11)$$

El término de un cuerpo incluye los procesos de la serie de HF y por lo tanto en el término de dos cuerpos sólo debe tenerse en cuenta los vértices de apareamiento para no efectuar dobles contajes. Esto es equivalente al hamiltoniano de la NFT que incluye en la parte de un cuerpo las inserciones de HF, y estos procesos deben eliminarse de los diagramas correspondientes a las sucesivas aproximaciones.

b) - Propagador de la cuasipartícula (Fig. 8-B)

Este propagador es el que da cuenta de las correlaciones del sistema. Como el bosón está construido en base a las sucesivas interacciones entre una partícula de HF y una cuasipartícula, el término n -ésimo de la serie de la cuasipartícula representa un diagrama de $n+1$ bosones inter-actuantes. Para poder escribir la ecuación de la cuasipartícula es necesario definir el vértice de acoplamiento fermión-bosón (Fig. 11).

Como es usual en la NFT, este vértice es:

$$\Delta_{\alpha\beta}^n = \frac{\sqrt{K}}{2} \sum_{\gamma\delta} \langle \alpha\beta | V | \gamma\delta \rangle \langle 0 | a_\delta a_\gamma | n \rangle$$

Donde el término $\langle 0 | a_\delta a_\gamma | n \rangle$ es la amplitud del estado de dos partículas en la raíz n del bosón y el factor \sqrt{K} proviene de la presencia de K bosones indistinguibles en el condensado. Razón por la cual podemos eliminar en lo sucesivo el índice n .

Definiendo el tensor de apareamiento t como:

$$t_{\alpha\beta} = \langle \phi_0(k) | a_\beta a_\alpha | \phi_0(k+i) \rangle = \sqrt{K} \langle 0 | a_\beta a_\alpha | n \rangle \quad (4.9)$$

El vértice fermión-bosón es:

$$\Delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\gamma\delta} \langle \alpha\beta | V | \gamma\delta \rangle t_{\gamma\delta} \quad (4.10)$$

Este vértice se suele llamar potencial de pares y constituye una matriz antisimétrica

$$\Delta_{\alpha\beta} = -\Delta_{\beta\alpha} \quad (4.11)$$

La ecuación de Dyson de la cuasipartícula es:

$$G_C(\beta\alpha, t) = G_{HF}(\alpha, t) \delta_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma\delta} \Delta_{\alpha\gamma} \Delta_{\delta\beta}^* \iint d\bar{e}_1 d\bar{e}_2 \times \\ \times G_{HF}(\alpha, \bar{e}_2) G_{HF}(\gamma, \bar{e}_2 - \bar{e}_1) G_C(\beta\delta, t - \bar{e}_1) \quad (4.12)$$

donde los propagadores de HF y cuasipartícula son:

$$G_{HF}(\alpha, t) = e^{-iE_\alpha t} \theta(t) \\ G_C(\beta\alpha, t) = \sum_{\alpha} \left\{ \mu_\alpha^a \mu_\beta^{*a} e^{-iE_\alpha t} \theta(t) - \mu_\alpha^{*a} \mu_\beta^a e^{iE_\alpha t} \theta(-t) \right\} \quad (4.13)$$

Reemplazando (4.13) en (4.12) y transformando Fourier:

$$\sum_b \frac{u_\alpha^b u_\beta^{*b}}{\omega - E_b} + \frac{v_\alpha^{*b} v_\beta^{-b}}{\omega + E_b} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\omega - E_\alpha} + \sum_{\delta\gamma} \frac{\Delta_{\alpha\delta} \Delta_{\delta\gamma}^*}{\delta\gamma (\omega - E_\alpha)(\omega + E_\delta)} \times \left\{ \sum_c \frac{u_\delta^c u_\beta^{*c}}{\omega - E_c} + \frac{v_\delta^{*c} v_\beta^{-c}}{\omega + E_c} \right\} \quad (4.14)$$

Estudiando la función (4.14) cerca de los polos $\omega = E_\alpha$ y $\omega = -E_\gamma$ se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$0 = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\delta\gamma} \Delta_{\alpha\delta} \Delta_{\delta\gamma}^* \left\{ \sum_c \frac{u_\delta^c u_\beta^{*c}}{E_\alpha - E_c} + \frac{v_\delta^{*c} v_\beta^{-c}}{E_\alpha + E_c} \right\} \quad (4.15)$$

$$0 = \sum_{\delta\gamma} \frac{\Delta_{\alpha\delta} \Delta_{\delta\gamma}^*}{E_\alpha + E_\delta} \left\{ \sum_c \frac{u_\delta^c u_\beta^{*c}}{E_\delta + E_c} + \frac{v_\delta^{*c} v_\beta^{-c}}{E_\delta - E_c} \right\}$$

y cerca de los polos $\omega = E_a$ y $\omega = -E_a$

$$u_\alpha^a = \sum_{\delta\gamma} \frac{\Delta_{\alpha\delta} \Delta_{\delta\gamma}^*}{\delta\gamma (E_a - E_\alpha)(E_a + E_\delta)} \quad (4.16)$$

$$v_\alpha^{*a} = \sum_{\delta\gamma} \frac{\Delta_{\alpha\delta} \Delta_{\delta\gamma}^*}{\delta\gamma (E_a + E_\alpha)(E_a - E_\delta)}$$

Sumando las ecuaciones (4.15) y usando las (4.16) se obtiene la condición de normalización:

$$\sum_a u_\alpha^a u_\beta^{*a} + v_\alpha^{*a} v_\beta^a = \delta_{\alpha\beta} \quad (4.17)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.16) en la segunda de las (4.15) y usando la condición de normalización (4.17) se obtiene la regla de suma pesada por la energía:

$$E_\alpha \delta_{\alpha\beta} = \sum_a E_a \left\{ u_\alpha^a u_\beta^{*a} - v_\alpha^{*a} v_\beta^a \right\} \quad (4.18)$$

predicha en la ref.17).

Por otro lado, las ecuaciones (4.16) son satisfechas por:

$$u_{\alpha}^a = \sum_{\beta} \frac{\Delta_{\alpha\beta} v_{\beta}^{-a}}{E_a - E_{\alpha}} \quad (4.19)$$

$$v_{\alpha}^a = - \sum_{\beta} \frac{\Delta_{\alpha\beta}^* u_{\beta}^a}{E_a + E_{\alpha}}$$

que se pueden reescribir para obtener un sistema de ecuaciones acopladas para la energía E y los residuos u y v como:

$$E_a u_{\alpha}^a = E_{\alpha} u_{\alpha}^a + \sum_{\beta} \Delta_{\alpha\beta} v_{\beta}^a \quad (4.20)$$

$$E_a v_{\alpha}^a = -E_{\alpha} v_{\alpha}^a - \sum_{\beta} \Delta_{\alpha\beta}^* u_{\beta}^a$$

c) Propagador bosónico (Fig. 9).

En la representación de Lehman el propagador de una excitación bosónica es:

$$K(\alpha\beta\gamma\delta, \omega) = \sum_n \frac{\langle 0 | a_{\alpha} a_{\beta} | n \rangle \langle n | a_{\gamma}^{\dagger} a_{\delta}^{\dagger} | 0 \rangle}{\omega - \omega_n} \quad (4.21)$$

Mientras que el propagador de una partícula de HF y una cuasipartícula libre es:

$$R(\alpha\beta\gamma\delta, \omega) = \sum_a \frac{u_{\beta}^a u_{\delta}^{*a} \delta_{\alpha\gamma}}{\omega - E_a - E_{\alpha}} \quad (4.22)$$

En términos de estos dos propagadores, la función de Green de la excitación bosónica es:

$$\sum_n \frac{\langle 0 | a_{\alpha} a_{\beta} | n \rangle \langle n | a_{\gamma}^{\dagger} a_{\delta}^{\dagger} | 0 \rangle}{\omega - \omega_n} = \sum_a \frac{u_{\beta}^a u_{\delta}^{*a} \delta_{\alpha\gamma}}{\omega - E_a - E_{\alpha}} - \quad (4.23)$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{b\beta'\gamma'\delta'} \frac{u_{\beta'}^b u_{\delta'}^{*b}}{\omega - E_b - E_{\alpha}} \langle \alpha\beta' | V | \gamma'\delta' \rangle \sum_n \frac{\langle 0 | a_{\alpha} a_{\beta'} | n \rangle \langle n | a_{\gamma'}^{\dagger} a_{\delta'}^{\dagger} | 0 \rangle}{\omega - \omega_n}$$

En los polos $\omega = \omega_n$ la función de Green (4.23) se transforma en:

$$\langle n | a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \beta' \gamma \delta'} \frac{\mu_{\alpha \beta}^a \mu_{\beta' \gamma}^{*a}}{E_{\alpha} + E_{\alpha'} - \omega_n} \langle \alpha \beta' | V | \gamma \delta' \rangle \langle n | a_{\gamma}^{\dagger} a_{\delta'}^{\dagger} | 0 \rangle \quad (4.24)$$

Usando la definición (4.10), la relación (4.19) y la prescripción de que λ debe anular la raíz colectiva del bosón, el residuo colectivo es:

$$\langle 0 | a_{\beta} a_{\alpha} | n_c \rangle = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sum_{\alpha} \mu_{\alpha \beta}^a \nu_{\alpha}^{*a} \quad (4.25)$$

Sin embargo, la relación (4.24) es un sistema de ecuaciones homogéneas para todos los residuos bosónicos. La condición para la existencia de soluciones es que el determinante sea nulo:

$$\left| \delta_{\alpha \gamma} \delta_{\beta \delta} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \beta'} \frac{\mu_{\alpha \beta}^a \mu_{\beta' \gamma}^{*a}}{E_{\alpha} + E_{\alpha'} - \omega_n} \langle \alpha \beta' | V | \gamma \delta' \rangle \right| = 0 \quad (4.26)$$

En los polos $\omega = E_{\alpha} + \epsilon_{\alpha}$ la función de Green del bosón es:

$$0 = \mu_{\alpha \beta}^a \mu_{\gamma \delta}^{*a} \delta_{\alpha \gamma} - \frac{1}{2} \sum_{\beta \delta'} \mu_{\beta \gamma}^a \mu_{\delta' \alpha}^{*a} \langle \alpha \beta' | V | \delta' \delta' \rangle \times \\ \times \sum_{\alpha} \frac{\langle 0 | a_{\alpha} a_{\beta} | n \rangle \langle n | a_{\gamma}^{\dagger} a_{\delta'}^{\dagger} | 0 \rangle}{E_{\alpha} + E_{\alpha'} - \omega_n} \quad (4.27)$$

y usando (4.24):

$$\sum_{\alpha} \mu_{\alpha \beta}^a \mu_{\gamma \delta}^{*a} \delta_{\alpha \gamma} = \sum_{\alpha} \langle 0 | a_{\alpha} a_{\beta} | n \rangle \langle n | a_{\gamma}^{\dagger} a_{\delta'}^{\dagger} | 0 \rangle \quad (4.28)$$

Como (4.28) contiene todas las raíces no es de mucha utilidad para determinar la raíz colectiva. Para ello podemos utilizar la identidad de

Ward que en este caso dice que el operador de número aplicado a una excitación bosónica debe ser igual a dos (Fig. 10).

$$2 = \frac{1}{K} \sum_{\alpha\beta\delta} \frac{\Delta_{\alpha\delta} \Delta_{\alpha\delta}^* u_{\delta}^{\alpha} u_{\delta}^{*\alpha}}{(E_{\alpha} + E_{\delta})^2}$$

y usando (4.19)

$$2K = \sum_{\alpha} |v_{\alpha}^a|^2 \quad (4.29)$$

Para cerrar el conjunto de ecuaciones en forma autoconsistente, se calcula por medio del diagrama de la figura 10 la matriz densidad:

$$\rho_{\alpha\beta} = \langle \phi_0 | a_{\beta}^{\dagger} a_{\alpha} | \phi_0 \rangle = \sum_{\alpha\beta\delta} \frac{\Delta_{\beta\delta} \Delta_{\alpha\delta}^* u_{\delta}^{\alpha} u_{\delta}^{*\alpha}}{(E_{\alpha} + E_{\delta})(E_{\beta} + E_{\delta})}$$

Usando la relaciones (4.19) la matriz densidad es:

$$\rho_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha} v_{\beta}^a v_{\alpha}^{*a} \quad (4.30)$$

Las ecuaciones que son solución del sistema pueden ser expresadas en forma compacta pasando, por medio de la transformación S, a la base inicial.

Las ecuaciones (4.3) y (4.10) que definen el potencial de HF y el potencial de pares son de esta base:

$$\Gamma_{ij} = \sum_{\alpha\beta\delta} \langle i\alpha | V | j\beta \rangle v_{\alpha}^a v_{\beta}^{*a} \quad (4.31)$$

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\delta} \langle i\alpha | V | j\beta \rangle u_{\alpha}^a v_{\beta}^{*a} \quad (4.32)$$

La condición de normalización de los residuos (4.17):

$$\sum_{\alpha} u_{\alpha}^a u_{\alpha}^{*a} + v_{\alpha}^{*a} v_{\alpha}^a = \delta_{ij} \quad (4.33)$$

Llamando \mathcal{H} al hamiltoniano de H-F :

$$\mathcal{H}_{ij} = \Gamma_{ij} + (\epsilon_i - \lambda) \delta_{ij}$$

Las ecuaciones (4.20) se pueden escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H} & \Delta \\ -\Delta^* & -\mathcal{H}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^a \\ v^a \end{pmatrix} = E_a \begin{pmatrix} u^a \\ v^a \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

definiendo el hamiltoniano de HFB.

La ecuación de número (4.29) se transforma en:

$$2K = \sum_{q_i} |v_{q_i}^a|^2 \quad (4.35)$$

Las ecuaciones (4.31) a (4.35) son iguales a las de HFB (Apéndice II). La dimensión del hamiltoniano de HFB duplica la dimensión del espacio de valencia. Por ser este hamiltoniano hermítico, sus autovalores, que son las energías de cuasipartículas, son reales y sus autovectores son los residuos de la cuasipartícula. Como los potenciales de HF y de pares dependen de los residuos u y v , la ecuación (4.34) es no lineal. Por esta razón el sistema de ecuaciones (4.31) a (4.34) para las energías y residuos de las cuasipartículas se resuelve en forma iterativa, ajustando el multiplicador de Lagrange λ en cada iteración con la ecuación (4.35).

El sistema converge a una solución única, es decir que existe una única raíz bosónica colectiva que da lugar a un condensado de bosones (4.26). Esta conclusión se ve corroborada por el teorema de Gell-Mann y Low¹⁸⁾.

Las ecuaciones (4.26) y (4.28) dan las energías y residuos bosónicos de las raíces no colectivas. Estas raíces podrían ser interpretadas como estados excitados del sistema, sin embargo por estar constituidas,

las burbujas, por una partícula y una cuasipartícula no tienen en cuenta todos los procesos que caracterizan un bosón excitado en la PSA, en particular, todos los procesos que lo hacen distinguible de un bosón del condensado. Por esta razón, no deben ser tenidas en cuenta.

En la sección VIII se desarrolla la teoría de los estados excitados de este sistema.

La función de onda del estado fundamental de HFB es el vacío de cuasipartículas. Bloch y Messiah¹⁹⁾ demostraron que existe una base de partícula independiente en la que la matriz densidad Ψ y el tensor de apareamiento t , adoptan la forma más sencilla posible, llamada representación canónica.

En la representación canónica la función de onda de HFB tiene la misma forma que la de BCS:

$$|\phi_0\rangle_{\text{HFB}} = \prod_{\alpha} (\mu_{\alpha} + v_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\bar{\alpha}}^{\dagger}) |0\rangle \quad (4.36)$$

Los estados conjugados $|\alpha\rangle$ y $|\bar{\alpha}\rangle$ tienen la misma probabilidad de ocupación y, en general, son no degenerados. En el tratamiento de la PSA el concepto de función de onda no ha sido utilizado, sin embargo se supuso que el estado fundamental es un condensado de bosones:

$$|\phi_0\rangle_{\text{PSA}} = (\Gamma^{\dagger})^k |0\rangle \quad (4.37)$$

El bosón del condensado está constituido por una partícula y una cuasipartícula, siendo su función de onda en la representación canónica:

$$\Gamma^{\dagger} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} \beta_{\bar{\alpha}}^{\dagger} \quad (4.38)$$

Las amplitudes λ se calculan diagramáticamente por medio de la figura 11:

$$\lambda_{\alpha} = \frac{v_{\alpha}}{\sqrt{K}} \quad (4.39)$$

Las ecuaciones (4.38) y (4.39) serán usadas en las secciones VI y VII para estudiar la estructura del bosón, en particular, los pesos relativos de las distintas componentes multipolares.

V. INTERACCION DE APAREAMIENTO MAS CUADRUPOLAR

Para poner de manifiesto la invariancia rotacional del hamiltoniano nuclear (4.1), se la puede expresar en términos de los elementos de matriz G de partícula-partícula:

$$\hat{V} = - \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} \sum_{\lambda \mu} \frac{\pi G(j_1 j_2 j_3 j_4, \lambda)}{2\lambda+1} P_{j_1 j_2, \lambda \mu}^+ P_{j_3 j_4, \lambda \mu} \quad (5.1)$$

donde:

$$P_{j_1 j_2, \lambda \mu}^+ = \langle j_1 || Y_\lambda || j_2 \rangle [a_{j_1}^+, a_{j_2}^+]_\mu^\lambda$$

El mismo hamiltoniano (4.1) es posible expresarlo en términos de los elementos de matriz K de partícula-agujero:

$$\hat{V} = - \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} \sum_{\lambda \mu} \frac{K(j_1 j_2 j_3 j_4, \lambda)}{2} Q_{j_1 j_2, \lambda \mu}^+ Q_{j_3 j_4, \lambda \mu} \quad (5.2)$$

donde:

$$Q_{j_1 j_2, \lambda \mu}^+ = - \frac{1}{\sqrt{2\lambda+1}} \langle j_1 || r^\lambda Y_\lambda || j_2 \rangle [a_{j_1}^+, a_{j_2}]_\mu^\lambda$$

La expresión (5.2) puede ser derivada de la (5.1) por medio de un reacomplamiento que contiene un coeficiente de Racah.

Estas dos formas alternativas de la interacción de dos cuerpos están relacionadas con los vértices partícula-partícula y partícula-agujero de la figura 5. Por lo tanto, la expresión (5.1) es la forma conveniente de la interacción para calcular el potencial de pares; análogamente con la expresión (5.2) se calcula el potencial de HF.

La interacción de apareamiento más cuadrupolar^{20,21} (PPQ) aproxima

los elementos de matriz partícula-partícula y partícula-agujero por:

$$G(j_1 j_2 j_3 j_4, \lambda) = G_0 \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4} \delta_{\lambda, 0} \quad (5.3)$$

$$K(j_1 j_2 j_3 j_4, \lambda) = \chi \delta_{\lambda, 2}$$

El modelo de PPQ tiene dos componentes: un término cuadrupolar-cuadrupolar que tiende a crear deformaciones nucleares y un término de apareamiento que correlaciona el movimiento de los nucleones en órbitas reverso temporales y favorece la forma esférica. Este modelo ha sido aplicado con mucho éxito en la zona de las tierras raras¹⁸⁾, explicando cualitativamente propiedades como el momento cuadrupolar estático y la diferencia entre las energías de ligadura de los núcleos par-par y par-impar vecinos (gap).

En esta aproximación, el hamiltoniano (4.1) se escribe:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{j m} \epsilon_j a_{j m}^{\dagger} a_{j m} - G_0 \sum_{\substack{j_1 m_1 \\ j_2 m_2}} a_{j_1 m_1}^{\dagger} a_{j_1 \bar{m}_1}^{\dagger} a_{j_2 \bar{m}_2} a_{j_2 m_2} - \\ & - \frac{\chi}{2} \sum_{\substack{j_1 j_2 \\ j_3 j_4}} \sum_{\substack{m_1 m_2 \\ m_3 m_4}} \sum_{\mu} \langle j_1 m_1 | r^2 Y_{2\mu} | j_2 m_2 \rangle \langle j_3 m_3 | r^2 Y_{2\mu} | j_4 m_4 \rangle \\ & \times a_{j_1 m_1}^{\dagger} a_{j_2 m_2} a_{j_3 m_3}^{\dagger} a_{j_4 m_4} \end{aligned} \quad (5.4)$$

En lo sucesivo se tratarán sistemas que conservan la simetría axial ($\mu=0$).

Con este hamiltoniano, el potencial de HF (4.28) es:

$$\Gamma_{j_1 j_2 m} = -\frac{\chi_2}{2} q_{j_1 j_2}^m \sum_{\substack{j_3 j_4 \\ m'}} q_{j_3 j_4}^{m'} \varphi_{j_3 j_4}^{m'} \quad (5.5)$$

donde:

$$q_{j_1 j_2}^m = \langle j_1 m | r^2 Y_{20} | j_2 m \rangle$$

y la suma en (5.5) es el valor de expectación de momento cuadrupolar en el condensado ($\langle Q \rangle$). Con lo que el hamiltoniano de HF es:

$$\mathcal{H}_{\text{HF}} = \sum_{j_1, j_2} \epsilon_{j_1} \delta_{j_1, j_2} - \frac{\chi}{2} \langle \hat{Q} \rangle \rho_{j_1, j_2}^m \quad (5.6)$$

Diagonalizando este hamiltoniano, se obtienen las energías ϵ_α (energías de Nilsson) y los autovectores $R_{\alpha j}^m$. La matriz R es unitaria y transforma la base esférica $|j m\rangle$ en la base $|\alpha m\rangle$. En esta nueva base el potencial de pares es constante y de su definición (4.29) se deduce la ecuación de gap de BCS:

$$\frac{1}{G_0} = \sum_{\alpha m > 0} \frac{1}{2E_{\alpha m}} \quad ; \quad E_{\alpha m} = \sqrt{(\epsilon_{\alpha m} - \lambda)^2 + \Delta^2} \quad (5.7)$$

donde $E_{\alpha m}$ son las energías de cuasipartículas.

La condición de normalización (4.30) y la ecuación de número (4.32) son:

$$v_{\alpha m}^2 + u_{\alpha m}^2 = 1 \quad (5.8)$$

$$N = \sum_{\alpha m} v_{\alpha m}^2 \quad ; \quad v_{\alpha m}^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(\epsilon_{\alpha m} - \lambda)}{E_{\alpha m}} \right] \quad (5.9)$$

y la condición de autoconsistencia del momento cuadrupolar en la base α es:

$$\langle \hat{Q} \rangle = \sum_{\alpha m} \langle \alpha m | r^2 Y_{20} | \alpha m \rangle v_{\alpha m}^2 \quad (5.10)$$

VI. MODELO DE UNA CAPA

En esta sección se aplica la interacción de PPQ a una capa de momento angular j , con el propósito de lograr un entendimiento cualitativo de la estructura del estado fundamental y su relación con el IBM.

En una capa, la función de onda bosónica (4.35) es:

$$\Gamma^+ = \sum_{m>0} \frac{v_m}{\sqrt{K}} a_m^+ B_m^+ \quad (6.1)$$

El número cuántico m corresponde a la proyección del momento angular sobre el eje z .

La función de onda uno es válida tanto en el límite esférico superconductor, cuando $v_m = \sqrt{\frac{K}{\Omega}}$, como en el límite de partículas alineadas:

$$v_m = \begin{cases} 1 & \text{si } |m| \geq \Omega - k \\ 0 & \text{si } |m| < \Omega - k \end{cases} \quad (6.2)$$

En éste último límite, el condensado de bosones dado por la ecuación (4.34), es un determinante de Slater.

Proyectando el bosón PSA sobre estados de buen momento angular:

$$\begin{aligned} \Gamma^+ &= \sum_L f_L [a^+ \beta^+]_0^L \\ \therefore f_L &= \sum_{m>0} \frac{(-)^{j-m}}{\sqrt{K}} v_m \langle j^m j^{-m} | L 0 \rangle \end{aligned} \quad (6.3)$$

Para el estado de partículas alineadas (las amplitudes de ocupación están dadas por la ecuación (6.2), la probabilidad de momento angular L está dada por:

$$f_L^2 = \left(\sum_{m=j}^{j-k+1} \frac{(-)^{j-m}}{\sqrt{K}} \langle j^m j^{-m} | L 0 \rangle \right)^2 [1 + (-)^L] \quad (6.4)$$

En la figura 12 se muestran las probabilidades para momento angular $L \leq 6$, con $\Omega=8$ y $\Omega=16$.

La diferencia en las probabilidades para los dos valores de Ω usados, ilustran el orden de magnitud de las correcciones de orden $1/\Omega$.

Excepto al principio de la capa, la amplitud de bosón s más d es muy próxima a uno. Se debe tener en cuenta que para sistemas realistas con pocas partículas fuera de capa cerrada, la interacción de apareamiento es dominante y favorece la amplitud de bosón s .

Aún en este extremo de partículas alineadas, más del 85% de la función de onda bosónica corresponde a los componentes s y d .

En la ref.²³⁾ se desarrolla un procedimiento para la descripción autoconsistente de la función de onda del estado fundamental en términos de bosones s y d que se basa en retener de la función de onda BCS sólo la parte de K pares, definiendo el bosón como:

$$\Gamma_{BCS}^+ = D_0 \sum_{m>0} \frac{v_m}{u_m} a_m^+ a_{-m}^+ \quad (6.5)$$

Pero utilizando la función de onda completa (ecuación 4.36) para calcular los elementos de matriz de los operadores cuadrupolar y de número.

El camino seguido en esta sección es el de estudiar el comportamiento del sistema cuando sólo se consideran los componentes s y d de la función de onda bosónica (6.3).

Con este fin, es útil introducir la relación inversa de (6.3):

$$v_m = \sum_L f_L \sqrt{K} \langle j_m j_{-m} | L 0 \rangle (-)^{j-m} \quad (6.6)$$

Considerando en esta suma $L=0,2$, la ecuación 6.6 define las amplitudes

v_c^m en un espacio cortado. Estas amplitudes pueden ser utilizadas para calcular elementos de matriz de operadores físicos en el espacio cortado. En particular, los operadores de número y cuadrupolar son:

$$N_c = \sum_m (v_m^c)^2 = 2k (f_0^2 + f_2^2) \quad (6.7)$$

$$\langle \hat{Q}_{20} \rangle^c = \sum_m q_m (r_m^c)^2 = 2k \sum_{L, L'=0}^2 f_L f_{L'} \sum_m q_m \langle j^m j^{-m} | L 0 \rangle \langle j^m j^{-m} | L' 0 \rangle \quad (6.8)$$

El estudio de una situación intermedia entre el estado esférico superconductor ($\chi=0$) y el de partículas alineadas ($G=0$) se hace utilizando el hamiltoniano (5.4) en una capa de $\Omega=8$ cuando $K=3$. En una capa el hamiltoniano (5.4) tiene un sólo parámetro libre, la relación entre χ y G , y este parámetro debe variar dentro de la zona de interés físico.

La interacción residual en los núcleos tiene muchas similitudes con una delta de Dirac, por lo que es razonable elegir a G y χ aproximadamente iguales como lo son en el desarrollo multipolar de la fuerza delta. Sin embargo, en un espacio de valencia con muchas capas la fuerza cuadrupolar es más efectiva que en una capa porque conecta un número mayor de estados que la fuerza de apareamiento. Por este motivo, es razonable usar un número mayor que uno para el cociente χ/G .

Otro parámetro que puede ayudar a determinar la región de interés físico es la relación $\delta\epsilon/\Delta$, donde $\delta\epsilon$ es la apertura de los niveles de partícula independiente debida a la fuerza cuadrupolar y Δ es el gap superconductor.

En la Tabla 1 se muestran los resultados de las magnitudes características del modelo de una capa, para distintos valores de χ/G . Se llama T_j al elemento de matriz del operador que crea dos partículas acopladas a momento angular j , y Q_{\max} es el momento cuadrupolar del sistema en el estado de partículas alineadas.

La región de interés físico puede ser considerada como $3 < \frac{\delta\epsilon}{\Delta} < 10$. En esta región más del 95% de la función de onda bosónica es descripta en término de los componentes s y d, y el momento cuadrupolar en el espacio cortado es levemente mayor que en el espacio completo.

En la figura 13 se grafican las amplitudes de ocupación v_m en el espacio completo (línea continua) y v_m^c en el espacio cortado (línea de trazos), para diferentes valores del cociente χ/G . En la región de interés físico las diferencias entre ellas son pequeñas. Esta diferencia es grande en el límite de partículas alineadas. A pesar de esto, los elementos de matriz de los operadores físicos son similares en este límite.

VII. NUCLEOS DEFORMADOS EN LA ZONA DE LAS TIERRAS RARAS:

En esta sección se utiliza la interacción de PPQ para el estudio de los núcleos en la zona de las tierras raras.

Para minimizar el número de parámetros se eligió el hamiltoniano usado por K.Kumar y M.Baranger²²⁾ en sus cálculos (autoconsistentes) de las propiedades estáticas de los núcleos en esta zona. Estos parámetros son las energías de partícula independiente y las intensidades de las fuerzas residuales de apareamiento y cuadrupolar.

Para la interacción de PPQ las ecuaciones de HFB se reducen a HF más BCS autoconsistente, como fue desarrollado en la Sección V.

La diagonalización del hamiltoniano de Nilsson (5.6) genera un conjunto completo de energías $\epsilon_{\alpha m}$ y autovectores $R_{\alpha j}^m$. La matriz R es unitaria y transforma los estados de la base esférica (hamiltoniano de un cuerpo) a la base de Nilsson.

$$a_{\alpha m}^+ = \sum_j R_{\alpha j}^m a_{jm}^+ \quad (7.1)$$

Como la interacción de apareamiento monopolar actúa entre pares de fermiones en el mismo estado alfa, la estructura del bosón de la PSA está dada por:

$$\Gamma^+ = \sum_{\alpha m} \lambda_{\alpha m} a_{\alpha m}^+ \beta_{\alpha -m}^+ \quad (7.2)$$

donde $\beta_{\alpha m}^+$ crea una cuasipartícula de adición en el estado (α, m) .

Los coeficientes $\lambda_{\alpha m}$ se calculan por medio del diagrama de la figura 11:

$$\lambda_{\alpha m} = \text{sig}(m) \frac{\sqrt{|\alpha m|}}{\sqrt{2K}} \quad (7.3)$$

El factor $\text{sig}(m)$ proviene del cruzamiento extra cuando $m < 0$ comparado con el caso $m > 0$.

La amplitud de momento angular L en el bosón se deduce reemplazando (7.3) y (7.1) en (7.2) y acoplando partícula y cuasipartícula

$$\Gamma^+ = \sum_{j_1 j_2 L} f_{j_1 j_2}^L [a_{j_1}^+ B_{j_2}^+]^L \quad (7.4)$$

donde:

$$f_{j_1 j_2}^L = \sum_{\alpha m \neq 0} \frac{v_{\alpha|m|}}{\sqrt{2K}} R_{\alpha j_1}^m R_{\alpha j_2}^{-m} \langle j_1 m j_2 -m | L 0 \rangle [1+t^L] \quad (7.5)$$

La probabilidad de que el bosón tenga momento angular L será:

$$P_L = \sum_{j_1 j_2} (f_{j_1 j_2}^L)^2 \quad (7.6)$$

En la figura 14-A y 14-B se grafican respectivamente, las probabilidades P_0 y P_2 para los núcleos de las zonas de las tierras raras, mientras que en la figura 14-C se grafica la suma de todas las probabilidades distintas de P_0 y P_2 . Esta figura muestra que más del 95% de la función de onda bosónica corresponde a las multipolaridades 0 y 2.

La influencia de todos los multipolos en la función de onda bosónica se muestra en la Tabla 2 para los núcleos ^{154}Sm y ^{170}Hf .

Si se utiliza el formalismo de BCS, la función de onda bosónica se puede asociar a la parte de K pares del vacío de cuasipartículas:

$$\Gamma_{\text{BCS}}^+ = \sum_{\alpha m} \lambda'_{\alpha m} a_{\alpha m}^+ a_{\alpha -m}^+$$

con:

$$\lambda'_{\alpha m} = C_0 \text{sig}(m) \frac{v_{\alpha|m|}}{u_{\alpha|m|}} \quad (7.7)$$

donde C_0 es una constante de normalización.

La figura 15 es análoga a la 14, pero las probabilidades han sido evaluadas dentro del formalismo BCS. Los dos tratamientos difieren en la importancia relativa de P_0 y P_2 , pero la suma de ambas probabilidades es casi la misma y cercana a uno.

Para definir las amplitudes de ocupación en el espacio cortado, se expresa (7.4) en términos de los operadores de partícula y cuasipartícula en la base de Nilsson:

$$\Gamma^{\dagger} = \sum_{\alpha\alpha'} W_{\alpha\alpha',m}^{L_c} a_{\alpha m}^{\dagger} B_{\alpha'-m}^{\dagger} \quad (7.8)$$

donde:

$$W_{\alpha\alpha',m}^{L_c} = \sum_{L=0}^{L_c} \sum_{j_1 j_2} f_{j_1 j_2}^L R_{j_1}^m R_{j_2}^m \langle j_1 m j_2 -m | L 0 \rangle \quad (7.9)$$

Cuando L_c es irrestricto (máximo L que permite el espacio de valencia elegido), como se ha hecho una transformación unitaria y luego su inversa, se cumple:

$$W_{\alpha\alpha',m}^{L_{\max}} = \chi_{\alpha m} \delta_{\alpha\alpha'}$$

Por otro lado, si se elige $L_c=2$ en (7.9), se está considerando sólo la parte s y d del bosón.

Definiendo:

$$(\nu_{\alpha m}^{L_c})^2 = \sum_{\alpha'} (W_{\alpha\alpha',m}^{L_c})^2 \quad (7.10)$$

es posible escribir el valor de expectación de un operador de un cuerpo \hat{T} en el espacio cortado, calculando el diagrama de la figura 10 y reteniendo sólo la parte s y d del bosón:

$$\langle \hat{T} \rangle^c = \sum_{\alpha m} (v_{\alpha m}^c)^2 \langle \alpha m | \hat{T} | \alpha m \rangle \quad (7.11)$$

que para el operador número de partículas da:

$$N^c = 2k (P_0 + P_2) \quad (7.12)$$

Mientras que el momento cuadrupolar estático debe ser evaluado numéricamente usando la ecuación (7.11). En la figura 16 se grafica el cociente $\langle Q_{20} \rangle^c / \langle Q_{20} \rangle$ correspondiendo la línea continua a neutrones y la de trazos a protones.

Es interesante comparar también, las amplitudes de ocupación $v_{\alpha m}$ con la proyectada sobre el espacio cortado $v_{\alpha m}^c$. Esta comparación se hace difícil porque el cálculo en el espacio cortado no es autoconsistente y en general $\langle Q_{20} \rangle^c$ es distinto de $\langle Q_{20} \rangle$. Por otro lado las amplitudes $v_{\alpha m}^c$ pueden ser mayores que uno, porque no están sujetas a la condición de normalización (5.8).

En la figura 17 se grafican las dos amplitudes de ocupación de protones para los núcleos ^{150}Sm y ^{184}Os en función de las energías de Nilsson.

El ^{150}Sm tiene la característica de ser el núcleo cuyo momento cuadrupolar cortado es el que más se acerca al momento cuadrupolar calculado en el espacio completo. El gráfico de amplitudes de ocupación en el espacio cortado, para este núcleo, muestra una curva suave que ajusta bien la curva de amplitudes de ocupación el espacio completo. Algunas desviaciones entre estas dos curvas se observan en el gráfico correspondiente al ^{184}Os debidas, probablemente, a las diferencias entre los momentos cuadrupolares calculados en los dos espacios.

VIII. ESTADOS EXCITADOS

El estado fundamental de un sistema esférico superconductor en la PSA es un condensado de K bosones monopolares. Las excitaciones fermiónicas de este sistema corresponden a los estados del sistema de $2K+1$ partículas (partículas de adición) y del sistema $2K-1$ partícula (agujero de remoción).

Las tres clases de excitaciones bosónicas que se pueden construir en base a estos dos tipos de excitaciones fermiónicas son: a) una cuasipartícula de adición y una de remoción en el condensado de K bosones; b) dos cuasipartículas de adición en el condensado de $K-1$ bosones y c) dos cuasipartículas de remoción en el condensado de $K+1$ pares.

En núcleos de capa cerrada el acoplamiento entre estas tres clases de excitaciones bosónicas es pequeño (del orden de $1/\Omega$ en el esquema de clasificación de la NFT). Un diagrama típico de acoplamiento se muestra en la figura 18. En núcleos superconductores, debido a la aparición de factores que dependen del número de pares K , algunos de estos procesos de acoplamiento pertenecen a la PSA.

Para construir estas excitaciones se supone una interacción residual separable, que por su sencillez, simplifica enormemente la teoría. Los parámetros de esta interacción separable se ajustan para que sus elementos de matriz sean muy cercanos a los de una interacción residual realística.

El hamiltoniano se puede escribir en la versión partícula-partícula o partícula-agujero como:

$$\hat{H} = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} - 4\pi \sum_{\lambda\mu} (2\lambda+1) G_{\lambda} P_{\lambda\mu}^{\dagger} P_{\lambda\mu}$$

(8.1)

$$\hat{H} = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} - \sum_{\lambda\mu} \frac{\chi_{\lambda}}{2} Q_{\lambda\mu}^{\dagger} Q_{\lambda\mu}$$

donde:

$$P_{\lambda\mu}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\lambda+1}} \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha || Y_{\lambda} f(r) || \beta \rangle [a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+]_{\mu}^{\lambda} \quad (8.2)$$

$$Q_{\lambda\mu} = -\frac{1}{\sqrt{2\lambda+1}} \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha || Y_{\lambda} h(r) || \beta \rangle [a_{\alpha}^+ a_{\beta}]_{\mu}^{\lambda}$$

Las dos formas alternativas (8.1) de expresar el hamiltoniano son apropiadas, por separado, para el cálculo de diagramas donde intervengan vértices de apareamiento o de dispersión (figura 5).

8.1 Función de Green de dos partículas.

En la Sección IV se mostró que cuando se estudia el polo de la función de Green de dos partículas correspondientes al estado fundamental, era necesario considerar la TDA de una partícula y una cuasipartícula, para evitar dobles contajes de diagramas.

La función de Green de dos partículas para los estados excitados del sistema incluye burbujas más complejas que la correspondiente a un bosón del condensado.

La figura 19 muestra algunos procesos que pueden sufrir dos partículas entre su creación y el estado final con una excitación bosónica. En esta figura se marca con una cruz el bosón excitado, distinto de los bosones que forman el condensado.

Es importante notar que algunas burbujas, entre dos interacciones sucesivas, no están constituidas por dos cuasipartículas. Por esta razón es necesario definir la función auxiliar F que aparece usualmente en la descripción de la superconductividad:

$$F(\alpha, t) = \langle k+1 | T \{ a_{\alpha}^+(t) a_{\alpha}^+(0) \} | k \rangle =$$

$$= \langle k+1 | a_{\alpha}^+ | + \rangle \langle + | a_{\alpha}^+ | k \rangle e^{-i E_{\alpha}^{(+)} t} \theta(t) +$$

$$+ \langle k+1 | a_{\alpha}^+ | - \rangle \langle - | a_{\alpha}^+ | k \rangle e^{-i E_{\alpha}^{(-)} t} \theta(-t) \quad (8.3)$$

La función de Green $F(\alpha, t)$ es un propagador fermiónico que conecta estados con distinto número de partículas. La serie principal de F se muestra en la figura 20b. La suma de la serie es:

$$F(\alpha, t) = u_\alpha v_\alpha [e^{-iE_\alpha t} \theta(t) + e^{iE_\alpha t} \theta(-t)] \quad (8.4)$$

donde E_α , u_α y v_α son las energías y residuos de la cuasipartícula.

La función de Green de dos partículas (TPGF) puede ser evaluada en una forma más sencilla usando su transformada de Fourier.

La TPGF tiene dos tipos diferentes de bloques constituyentes. Uno de ellos corresponden a líneas externas que se conectan al diagrama en los instantes final o inicial y se muestran esquemáticamente en la figura 21. Su transformada de Fourier es:

$$K_{\alpha\beta}^1(\omega) = i \left(\frac{u_\alpha^2 u_\beta^2}{\omega - E_{\alpha\beta}} - \frac{v_\alpha^2 v_\beta^2}{\omega + E_{\alpha\beta}} \right) \quad (8.5.a)$$

$$K_{\alpha\beta}^{\bar{1}}(\omega) = i u_\alpha u_\beta v_\alpha v_\beta \left(\frac{1}{\omega - E_{\alpha\beta}} - \frac{1}{\omega + E_{\alpha\beta}} \right) \quad (8.5.b)$$

$$K_{\alpha\beta}^0(\omega) = i u_\beta v_\beta \left(\frac{u_\alpha^2}{\omega - E_{\alpha\beta}} + \frac{v_\alpha^2}{\omega + E_{\alpha\beta}} \right) \quad (8.5.c)$$

donde :

$$E_{\alpha\beta} = E_\alpha + E_\beta$$

El otro bloque constituyente es el que contiene todos los procesos entre un bloque inicial $K_{\alpha\beta}^u$ y otro final $K_{\alpha\beta}^v$ del primer tipo. Este segundo bloque que representa a la interacción vestida L_{uv} se muestra en forma esquemática en la figura 22.

Se hará una evaluación detallada de la componente L_{11} de interacción vestida, y se darán a continuación las expresiones de las otras cinco componentes.

Para identificar todos los procesos que contribuyen a L_{11} se debe, primero, reconocer las burbujas elementales que se forman con dos propagadores de un cuerpo.

A continuación se da una lista de estas burbujas que se muestran en la figura 23 .

$$X = -2\pi G_\lambda \sum_{\alpha\beta} |M'_{\alpha\beta\lambda}|^2 \left[\frac{\mu_\alpha^2 \mu_\beta^2}{\omega - E_{\alpha\beta}} - \frac{\nu_\alpha^2 \nu_\beta^2}{\omega + E_{\alpha\beta}} \right] \quad (8.6.a)$$

$$Y = -2\pi G_\lambda \sum_{\alpha\beta} |M'_{\alpha\beta\lambda}|^2 \left[\frac{\nu_\alpha^2 \nu_\beta^2}{\omega - E_{\alpha\beta}} - \frac{\mu_\alpha^2 \mu_\beta^2}{\omega + E_{\alpha\beta}} \right] \quad (8.6.b)$$

$$Z = -2\pi G_\lambda \sum_{\alpha\beta} |M'_{\alpha\beta\lambda}|^2 \mu_\alpha \mu_\beta \nu_\alpha \nu_\beta \left[\frac{1}{\omega - E_{\alpha\beta}} - \frac{1}{\omega + E_{\alpha\beta}} \right] \quad (8.6.c)$$

$$U = -\frac{1}{2} \left[\frac{4\pi G_\lambda \chi_\lambda}{2\lambda+1} \right]^{1/2} \sum_{\alpha\beta} M^0_{\alpha\beta\lambda} M'_{\alpha\beta\lambda} (\mu_\alpha \nu_\beta + \mu_\beta \nu_\alpha) \left[\frac{\mu_\alpha \mu_\beta}{\omega - E_{\alpha\beta}} + \frac{\nu_\alpha \nu_\beta}{\omega + E_{\alpha\beta}} \right] \quad (8.6.d)$$

$$V = -\frac{1}{2} \left[\frac{4\pi G_\lambda \chi_\lambda}{2\lambda+1} \right]^{1/2} \sum_{\alpha\beta} M^0_{\alpha\beta\lambda} M'_{\alpha\beta\lambda} (\mu_\alpha \nu_\beta + \mu_\beta \nu_\alpha) \left[\frac{\nu_\alpha \nu_\beta}{\omega - E_{\alpha\beta}} + \frac{\mu_\alpha \mu_\beta}{\omega + E_{\alpha\beta}} \right] \quad (8.6.e)$$

$$S = -\frac{1}{2} \frac{\chi_\lambda}{2\lambda+1} \sum_{\alpha\beta} |M^0_{\alpha\beta\lambda}|^2 (\mu_\alpha^2 \nu_\beta^2 + \mu_\beta^2 \nu_\alpha^2) \left[\frac{1}{\omega - E_{\alpha\beta}} - \frac{1}{\omega + E_{\alpha\beta}} \right] \quad (8.6.f)$$

$$T = -\frac{\chi_\lambda}{2\lambda+1} \sum_{\alpha\beta} |M^0_{\alpha\beta\lambda}|^2 \mu_\alpha \mu_\beta \nu_\alpha \nu_\beta \left[\frac{1}{\omega - E_{\alpha\beta}} - \frac{1}{\omega + E_{\alpha\beta}} \right] \quad (8.6.g)$$

$$Y = S + T \quad (8.6.h)$$

donde:

$$M'_{\alpha\beta\lambda} = \langle \alpha || Y_\lambda k(r) || \beta \rangle$$

(8.7)

$$M^0_{\alpha\beta\lambda} = \langle \alpha || Y_\lambda h(r) || \beta \rangle$$

El conjunto total de procesos de L_{11} se pueden clasificar en las cuatro sumas parciales de las figuras 24, 25, 26 y 27.

Las sumas de las tres primeras series son:

$$L_{11}^{(0)} = \frac{1-\varphi}{(1-x)(1-\varphi)-\mu^2} \quad (8.8)$$

$$L_{\bar{1}\bar{1}}^{(0)} = \frac{1-\varphi}{(1-\gamma)(1-\varphi)-\nu^2} \quad (8.9)$$

$$L_{\bar{1}1}^{(0)} = L_{1\bar{1}}^{(0)} = \frac{z(1-\varphi) + \mu\nu}{(1-\varphi)} \quad (8.10)$$

En término de estas tres sumas parciales, la suma total de la figura 27 es:

$$\begin{aligned} L_{11} &= L_{11}^{(0)} + L_{11}^{(0)} L_{1\bar{1}}^{(0)} L_{\bar{1}\bar{1}}^{(0)} L_{\bar{1}1}^{(0)} L_{11}^{(0)} + \dots \\ &= \frac{L_{11}^{(0)}}{1 - L_{11}^{(0)} L_{1\bar{1}}^{(0)} L_{\bar{1}\bar{1}}^{(0)} L_{\bar{1}1}^{(0)}} \end{aligned} \quad (8.11)$$

y reemplazando por (8.8), (8.9) y (8.10),

$$L_{11} = \frac{(1-\gamma)(1-\varphi) - \nu^2}{\Delta} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \quad (8.12)$$

donde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-x & z & -\mu \\ z & 1-\gamma & \nu \\ -\mu & \nu & 1-\varphi \end{vmatrix} \quad (8.13)$$

y Δ_{uv} es el menor uv del determinante Δ .

Análogamente, se pueden sumar las otras cinco componentes de la interacción vestida L:

$$L_{\mu\nu} = \frac{\Delta_{\mu\nu}}{\Delta} \quad (8.14)$$

La TPGF tiene como primer término el propagador libre (8.5.a) y como segundo término todos los procesos de la figura 22:

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta}(\omega) = K_{\alpha\beta}^I(\omega) \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\delta\beta} - i \sum_{\mu\nu} K_{\alpha\beta}^{\mu}(\omega) q_{\alpha\beta\lambda}^{\mu} \times \\ \times L_{\mu\nu} q_{\gamma\delta\lambda}^{\nu} K_{\gamma\delta}^{\nu}(\omega) \quad (8.15)$$

donde:

$$q_{\alpha\beta\lambda}^I = q_{\alpha\beta\lambda}^{\dagger} = \sqrt{4\pi G_{\lambda}} \langle \alpha || f(r) Y_{\lambda} || \beta \rangle \quad (8.16) \\ q_{\alpha\beta\lambda}^0 = \sqrt{\frac{\chi_{\lambda}}{2\lambda+1}} \langle \alpha || h(r) Y_{\lambda} || \beta \rangle$$

Los polos de la TPGF son los ceros del determinante Δ . Cerca de los polos el primer término se desprecia y la función de Green se factoriza como:

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta} = i L_{\eta\eta} \left[\sum_{\mu} \frac{L_{\eta\mu}}{L_{\eta\eta}} q_{\alpha\beta\lambda}^{\mu} K_{\alpha\beta}^{\mu} \right] \left[\sum_{\nu} \frac{L_{\eta\nu}}{L_{\eta\eta}} q_{\gamma\delta\lambda}^{\nu} K_{\gamma\delta}^{\nu} \right] \quad (8.17.a)$$

Por otro lado, en la representación de Lehman la TPGF es:

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{i \langle 0 | a_{\gamma} a_{\delta} | n \rangle \langle n | a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} | 0 \rangle}{\omega - \omega_n} \quad (8.17.b)$$

Comparando (8.17.a) y (8.17.b) se obtienen los residuos:

$$\langle n | a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} | 0 \rangle = \frac{i}{[-\Delta_{\eta\eta} \frac{\partial \Delta}{\partial \omega}]^{1/2}} \sum_{\mu} \Delta_{\eta\mu} K_{\alpha\beta}^{\mu} q_{\alpha\beta\lambda}^{\mu} \quad (8.18)$$

Esta ecuación debe ser evaluada en $\omega = \omega_n$.

8.2 Función de Green de partícula agujero.

La evaluación de la función de Green de partícula-agujero (PHGF) se simplifica gracias a las definiciones usadas para la TPGF. Como en el caso anterior es posible aislar dos tipos diferentes de bloques elementales: las interacciones vestidas que son las mismas que las de la TPGF y las líneas externas de los estados final e inicial que se muestran en la figura 28, cuyas transformadas de Fourier son:

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\beta}^1(\omega) &= i \mu_\beta v_\beta \left(\frac{\mu_\alpha^2}{\omega - E_{\alpha\beta}} + \frac{v_\alpha^2}{\omega + E_{\alpha\beta}} \right) \\
 T_{\alpha\beta}^{0(a)}(\omega) &= i \left(\frac{\mu_\alpha^2 v_\beta^2}{\omega - E_{\alpha\beta}} - \frac{\mu_\beta^2 v_\alpha^2}{\omega + E_{\alpha\beta}} \right) \\
 T_{\alpha\beta}^{0(b)}(\omega) &= i (\mu_\alpha v_\beta + \mu_\beta v_\alpha) \left(\frac{1}{\omega - E_{\alpha\beta}} - \frac{1}{\omega + E_{\alpha\beta}} \right) \\
 T_{\alpha\beta}^{\bar{1}}(\omega) &= -i \mu_\alpha v_\alpha \left(\frac{v_\beta^2}{\omega - E_{\alpha\beta}} + \frac{\mu_\beta^2}{\omega + E_{\alpha\beta}} \right)
 \end{aligned} \tag{8.19}$$

Como $T^{0(a)}$ y $T^{0(b)}$ aparecen siempre sumadas es conveniente llamar T^0 a su suma. La clasificación de diagramas es completamente equivalente a la TPGF, y finalmente la PHGF es:

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\beta\delta\delta}(\omega) &= T_{\alpha\beta}^0(\omega) \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\delta} - i \sum_{\mu\nu} T_{\alpha\beta}^{\mu}(\omega) q_{\alpha\beta\lambda}^{\mu} \times \\
 &\quad \times L_{\mu\nu} q_{\delta\delta\lambda}^{\nu} T_{\delta\delta}^{\nu}(\omega)
 \end{aligned} \tag{8.20}$$

Los residuos obtenidos comparando con la representación de Lehman son:

$$\langle n | a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} | 0 \rangle = \frac{i}{[-\Delta\eta\eta \frac{\partial \Delta}{\partial \omega}]^{1/2}} \sum_{\mu} \Delta\eta_{\mu} T_{\alpha\beta}^{\mu} Q_{\mu}^{\beta\lambda} \quad (8.21)$$

Es importante notar que los residuos (8.18) y (8.21) se refieren al mismo estado excitado $|n\rangle$, pero los estados fundamentales $|0\rangle$ son diferentes. Mientras que en (8.21) el estado fundamental del sistema tiene el mismo número de partículas que $|n\rangle$, el de (8.18) tiene dos partículas menos que $|n\rangle$.

Ambos tipos de residuos tienen información relevante. El residuo de partícula-agujero se usa para evaluar operadores de un cuerpo como transiciones eléctricas cuadrupolares y el residuo de partícula-partícula para reacciones de transferencia de dos partículas.

8.3 Estados excitados 0^+

Una condición esencial que deben verificar las excitaciones bosónicas, es que su estructura sea distinta de la del bosón que constituye el condensado. En núcleos esféricos el condensado está formado por bosones de momento angular cero y paridad positiva, y por lo tanto las excitaciones bosónicas con distintos números cuánticos (por ejemplo 2^+) satisfacen trivialmente esta condición.

Cuando se estudian las excitaciones 0^+ , uno de los polos de la TPGF tiene características colectivas y corresponde a una descripción incorrecta del bosón del condensado, ya que por estar constituido por dos cuasipartículas, cada uno de los procesos se ha tenido en cuenta muchas veces.

Este hecho es similar a lo sucedido en la descripción del bosón del condensado, cuando en la ecuación (4.26) se rechazan las raíces no

colectivas, por no haberse tenido en cuenta todos los procesos que definen una excitación bosónica del sistema.

En lo que sigue se demuestra que el determinante (8.13) tiene siempre (cuando se estudian excitaciones 0^+) una raíz doble no física en $\omega=0$, mientras las otras raíces corresponden a estados físicos del sistema.

De las ecuaciones (8.6) se deduce que:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= Y(-\omega) \\ Z(\omega) &= Z(-\omega) \\ \mu(\omega) &= -\nu(-\omega) \\ \varphi(\omega) &= \varphi(-\omega) \end{aligned} \tag{8.22.a}$$

y que para $\omega=0$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta X}{\delta \omega} \Big|_{\omega=0} &= -\frac{\delta Y}{\delta \omega} \Big|_{\omega=0} \\ \frac{\delta \mu}{\delta \omega} \Big|_{\omega=0} &= \frac{\delta \nu}{\delta \omega} \Big|_{\omega=0} \\ \frac{\delta Z}{\delta \omega} \Big|_{\omega=0} &= 0 \end{aligned} \tag{8.22.b}$$

Las relaciones (8.22.a) aseguran que $\Delta(\omega)$ es una función par de ω y de (8.22.b) se deduce que para $\omega=0$, la derivada de Δ con respecto a ω se anula. Por lo tanto, si $\omega=0$ es una raíz de Δ , de (8.18) y (8.21) se deduce que todos los residuos se hacen infinitos.

Para estados 0^+

$$M_{\alpha\beta 0}^1 = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\sqrt{4\pi}}$$

Reemplazando en la definición de las burbujas (8.6) para $\omega=0$, la condición $\Delta(\omega=0) = 0$ implica:

$$1 = G_0 \sum_{\alpha} \frac{1}{4E_{\alpha}} \tag{8.23}$$

siendo esta la ecuación de gap.

El hecho de que los residuos de este estado sean infinitos se debe a que su norma es nula²⁴⁾, una de las características usuales de los estados espurios.

Como consecuencia de la norma nula de este estado, no existe ningún operador que lo conecte con los estados físicos del sistema.

IX. APLICACIONES A LOS ISOTOPOS DEL Sn

En esta sección se aplica el formalismo de la sección VIII a los estados 2^+ de los isótopos del Sn, que tienen la característica de poder considerar un sólo tipo de partículas (neutrones) como activas. Por simplicidad se usa una interacción separable como (8.1). Aunque el hamiltoniano puede ser expresado en la base partícula-partícula o en la base partícula-agujero, ambas formas de la interacción residual son relevantes porque corresponden a distintos procesos que pertenecen a la PSA.

Para comprender los resultados obtenidos, se pueden relacionar con el tratamiento BCS+RPA. Los bosones RPA tienen la forma:

$$\Gamma_{n\lambda\mu}^+ = \sum_{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}^n [b_{\alpha}^+ b_{\beta}^+]_{\mu}^{\lambda} - Y_{\alpha\beta}^n [b_{\alpha} b_{\beta}]_{\mu}^{\lambda} \quad (9.1)$$

Los operadores b^+ crean una cuasipartícula definida por la transformación de Bogoliubov-Valatin:

$$b_{\alpha}^+ = u_{\alpha} a_{\alpha}^+ - v_{\alpha} a_{\bar{\alpha}} \quad (9.2)$$

Las amplitudes $X_{\alpha\beta}^n$ y $Y_{\alpha\beta}^n$ se obtienen de las ecuaciones de linealización de la RPA:

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \Gamma_{n\lambda\mu}^+] &= \omega_{n\lambda} \Gamma_{n\lambda\mu}^+ \\ [\Gamma_{n\lambda\mu}, \Gamma_{n'\lambda'\mu'}^+] &= \delta_{nn'} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'} \end{aligned} \quad (9.3)$$

Estas amplitudes están relacionadas con los residuos de las funciones de Green de partícula-partícula y partícula-agujero (dadas por 8.18 y 8.21) a través de las ecuaciones:

$$\langle n | [a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger}]_{\mu}^{\lambda} | 0 \rangle = \mu_{\alpha} \mu_{\beta} X_{\alpha\beta}^{\lambda} - \nu_{\alpha} \nu_{\beta} Y_{\alpha\beta}^{\lambda}$$

$$\langle n | [a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}]_{\mu}^{\lambda} | 0 \rangle + \langle n | [a_{\beta}^{\dagger} a_{\alpha}]_{\mu}^{\lambda} | 0 \rangle = (\mu_{\alpha} \nu_{\beta} + \mu_{\beta} \nu_{\alpha}) \times (9.4)$$

$$\times (X_{\alpha\beta}^{\lambda} + Y_{\alpha\beta}^{\lambda})$$

Las energías de la RPA son las raíces del mismo determinante (8.13).

Una vez encontrados los residuos de los elementos de matriz de los operadores $\hat{Q}_{\lambda\mu}$ y $\hat{P}_{\lambda\mu}$ dados por (8.2), son: -

$$B(E\lambda) = |\langle n || \hat{Q}_{\lambda} || 0 \rangle|^2 = \left| \sum_{\alpha\beta} \langle n || [a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}]_{\mu}^{\lambda} | 0 \rangle M_{\alpha\beta\lambda}^0 \right|^2 \quad (9.5)$$

$$\langle n || \hat{P}_{\lambda}^{\dagger} || 0 \rangle = \sum_{\alpha\beta} \langle n || [a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger}]_{\mu}^{\lambda} | 0 \rangle M_{\alpha\beta\lambda}^{\dagger} \quad (9.6)$$

$$\langle n || \hat{P}_{\lambda} || 0 \rangle = \sum_{\alpha\beta} \langle n || [a_{\alpha} a_{\beta}]_{\mu}^{\lambda} | 0 \rangle M_{\alpha\beta\lambda}^{\dagger}$$

En los cálculos numéricos hechos para los estados 2^{+} de los isótopos del Sn, las energías de partícula independiente fueron tomadas de la ref.25 y la intensidad de la fuerza de apareamiento monopolar $G_0=19/A$ que da el mejor ajuste para las diferencias de masa entre los Sn par e impar vecinos. Los cálculos se hicieron con una fuerza de apareamiento cuadrupolar y sin ella, para investigar su influencia. La intensidad de esta fuerza, G_2 , se tomó igual a la de apareamiento monopolar, como es sugerido en la ref.26.

La intensidad de la fuerza cuadrupolar partícula-agujero X_2 , se ajustó en cada caso para reproducir la energía del primer estado 2^{+} .

En la tabla 3 se muestran los niveles de partícula independiente y las energías y amplitudes de ocupación de las cuasipartículas para el ^{114}Sn .

Para el mismo isótopo del Sn, la tabla 4 muestra las energías de las excitaciones bosónicas, el cuadrado de los elementos de matriz de los operadores \hat{Q}_2 y \hat{P}_2 (ecuaciones 9.5 y 9.6), la suma de los cuadrados de

las amplitudes retardadas ($\sum_{\alpha\beta} (Y_{\alpha\beta}^n)^2$), para cada estado con $G_2=0$ y $G_2=G_0$ y en la última línea figura la regla de suma pesada por energía para los tres operadores.

En la tabla 5 figuran el cuadrado de los elementos de matriz de los operadores \hat{Q}_2 , \hat{P}_2^+ y \hat{P}_2 entre el estado fundamental y el primer 2^+ , la suma de los cuadrados de las amplitudes de retroceso y la regla de suma pesada por energías para los tres operadores, evaluados en todos los isótopos del Sn.

La inclusión de la fuerza de apareamiento cuadrupolar, cambia considerablemente las propiedades del primer estado 2^+ : el momento cuadrupolar se reduce casi a la mitad, mientras que la probabilidad de transferencia de dos partículas crece más del doble. Este incremento es una consecuencia natural de la introducción de una fuerza de apareamiento cuadrupolar atractiva. Las correlaciones en el estado fundamental inducidas por esta fuerza tienden a cancelar las correlaciones debidas a la fuerza cuadrupolar de partícula-agujero. Esta cancelación de correlaciones que se verifica en el decrecimiento de la suma de las amplitudes de retroceso, es la responsable del decrecimiento del momento cuadrupolar.

Las energías de las raíces colectivas de la RPA no cambian mucho cuando se introduce la fuerza de apareamiento cuadrupolar. Sin embargo, los momentos cuadrupolares son siempre menores y la contribución de las 16 raíces no colectivas a la regla de suma pesada por energía del operador cuadrupolar se reduce en un factor tres. Por otro lado, los cuadrados de los elementos de matriz y las reglas de suma para los dos operadores relacionados con la transferencia de dos partículas no sufren cambios apreciables para las raíces no colectivas.

La tabla 5 ilustra cómo las conclusiones extraídas del ^{114}Sn son igualmente aplicables a todos los isótopos del Sn.

CONCLUSIONES:

El método desarrollado en esta tesis consiste en una clasificación particular de todos los diagramas de la serie perturbativa de un sistema fermiónico finito.

La aproximación inicial del método, es la de suponer que el estado fundamental del sistema es un condensado de bosones. Esta suposición no es muy restrictiva ya que permite describir tanto el estado superfluido como el límite normal (ver la discusión que sigue a la ecuación 6.1).

La PSA, definida como la suma de todos los diagramas que contribuyen al orden cero en el parámetro de expansión $1/\Omega$, fue desarrollada en la sección IV para un hamiltoniano general, obteniendo las ecuaciones de HFB.

La teoría de HFB fue derivada previamente utilizando las transformaciones de Bogoliubov²⁹⁾ y el método de ecuaciones de movimiento en la ref.6 o el principio variacional en la ref.7.

Los intentos de describir el fenómeno de superfluidez por medio de funciones de Green, se remontan a los trabajos de Gorkov³¹⁾, donde se define la función de Green de un cuerpo de la misma manera que en la PSA. Sin embargo, la teoría de Gorkov carece de un método de clasificación de diagramas que permita la determinación de la función de Green de dos cuerpos en la misma aproximación que la de un cuerpo.

En un trabajo reciente³²⁾ se utilizan funciones de Green para explicar la transición del estado normal al superfluido, aislando en la parte dinámica del operador de masa el polo colectivo asociado a un par de partículas acopladas a momento angular cero, obteniendo las ecuaciones de HFB para un hamiltoniano que sólo tiene vértices de apareamiento. Para la transición del estado esférico al deformado se aísla en la parte dinámica del operador de masa el polo colectivo asociado con un par partícula-agujero acopladas a un momento angular dos, obteniendo las ecuaciones de HF.

se desarrolla
etapas

Descripción

Antecedentes

Antecedentes

hecho
resultado

Antecedentes

En este mismo trabajo se sugiere el tratamiento simultáneo de los polos colectivos del par de Cooper y todas las multipolaridades de los pares de partícula-agujero.

Esta es la suposición de partícula de la PSA, en la que el estado fundamental del sistema es un condensado de bosones que tienen, en general, momento angular mal definido. Dando cuenta, en el mismo formalismo, de las dos transiciones de fase.

Anders

La derivación diagramática de las ecuaciones de HFB por medio de la PSA, aporta nuevos conocimientos sobre los procesos que se han tenido en cuenta y deja abierta la posibilidad de mejorar la teoría, incluyendo los diagramas que correspondan a órdenes superiores en el parámetro $1/\Omega$.

La diferencia fundamental entre la teoría de HFB y la PSA reside en la estructura del estado fundamental. Mientras en HFB el estado fundamental es el vacío de cuasipartículas (ecuación 4.36), en la PSA es un condensado de bosones (ecuación 4.37). Esta característica de la PSA permite establecer una relación directa con el Modelo de Bosones Interactuantes³³⁾ (IBM).

En las secciones VI y VII se utiliza la interacción de PPQ para estudiar la estructura multipolar del bosón del condensado y los valores de expectación de distintos operadores cuando se restringe el momento angular del bosón a 0 y 2.

Una vez determinada la función de onda bosónica, tanto en el modelo de una capa (sección VI) como en núcleos de las tierras raras (sección VII), se calculan las amplitudes s y d del bosón y los operadores de número cuadrupolar en este espacio cortado. Los resultados así obtenidos confirman la importancia de la parte s y d del bosón (~95%) y los operadores calculados en este espacio concuerdan bien con los calculados en el espacio completo.

Resultados similares fueron obtenidos por Otsuka³⁴⁾ utilizando una aproximación del Modelo de Capas para el caso de muchas capas degeneradas.

Es importante notar que este trabajo y el de Otsuka³⁴⁾ aportan una condición necesaria, la dominancia de la parte s y d del bosón, para que la descripción de los núcleos deformados por medio del IBM sea microscópicamente aceptable.

La condición suficiente sería un cálculo autoconsistente sobre la base de pares de partículas que sólo se pueden acoplar a momento angular 0 y 2.

En las referencias^{23,35)} se realizaron cálculos en este sentido, sin embargo, la elección del modelo de una capa sin fuerza de apareamiento en el primer caso y las restricciones impuestas a la estructura del bosón para poder ser descrito en la aproximación de Nilsson + BCS en el segundo, dejan abierto el interrogante sobre la verificación de esta segunda condición.

En la sección VIII se trataron los estados excitados de dos cuasipartículas, que en la PSA incluyen el acoplamiento de la PHGF con la TBGF. Este acoplamiento proviene de la inclusión simultánea de los vértices de apareamiento y dispersión del hamiltoniano, que en el orden de aproximación de la PSA no produce contajes dobles de diagramas. Como se deduce de la definición de las burbujas (ecuaciones 8.6), donde cada una de ellas corresponde a procesos físicos diferentes, y por lo tanto deben ser incluidas.

Las burbujas s y t aparecen en el tratamiento de una fuerza separable partícula-agujero, mientras que las x , y y z corresponden a una fuerza partícula-partícula. Las burbujas u y v , que acoplan los dos tipos de excitaciones, sólo se pueden construir cuando los vértices de dispersión y apareamiento del hamiltoniano son tenidos en cuenta en forma simultánea.

Cuando el acoplamiento introducido por u y v no se considera, la TPGF y la PHGF tienen diferentes polos, y el número de estados excitados

es dos veces el número de estados de dos cuasipartículas. Cuando u y v son considerados las dos funciones de Green tienen los mismos polos, dados por los ceros de Δ (ecuación 8.13), siendo el número de soluciones igual al número de estados de dos cuasipartículas. Aún en el caso de momento angular cero, en que la solución con energía cero es espúrea y debe ser excluída, el resto de las soluciones dan el número correcto de excitaciones.

En los cálculos realizados en la sección IX para los isótopos del Sn, se observan muchas diferencias físicas entre las soluciones correspondientes a haber tenido en cuenta los dos vértices del hamiltoniano y el tratamiento usual que sólo considera el vértice de dispersión. Entre estas diferencias cabe mencionar el cambio en el cuadrado de los elementos de matriz del operador \hat{Q}_{2u} y su regla de suma pesada por energías, que introducirían grandes diferencias en la sección eficaz inelástica para proyectiles livianos.

APENDICE I

SOLUCION EXACTA DE UNA FUERZA DE APAREAMIENTO EN UNA CAPA

Sea una capa de degeneración 2Ω con $2K$ partículas que interactúan con una hamiltoniano de apareamiento monopolar²⁷⁾

$$\hat{H} = -G \sum_{m\bar{m}} a_m^\dagger a_{\bar{m}}^\dagger a_{\bar{m}} a_m \quad (\text{I.1})$$

La solución exacta de este modelo se obtiene utilizando el formalismo de quasiespín²⁸⁾ que explota la analogía entre los productos bilineales de operadores fermiónicos y los operadores de espín, definiendo:

$$\begin{aligned} S_{m+} &= a_m^\dagger a_{\bar{m}}^\dagger \\ S_{m-} &= a_{\bar{m}} a_m \\ S_{m0} &= \frac{1}{2} (a_m^\dagger a_m + a_{\bar{m}}^\dagger a_{\bar{m}} - 1) \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

Estos operadores verifican las siguientes relaciones de conmutación:

$$[S_{m+}, S_{m-}] = 2 S_{m0} ; \quad [S_{m0}, S_{m+}] = S_{m+} ; \quad [S_{m0}, S_{m-}] = -S_{m-} \quad (\text{I.3})$$

Estas relaciones de conmutación son iguales a las de las matrices de Pauli si:

$$S_{\pm} = \frac{1}{2} (\mp \sigma_x \pm i \sigma_y) ; \quad S_0 = \frac{1}{2} \sigma_z \quad (\text{I.4})$$

Se puede definir ahora, los operadores del espín total:

$$S_{\pm} = \sum_{\mathfrak{M}} S_{m\pm} ; \quad S_0 = \sum_{\mathfrak{M}} S_{m0} \quad (\text{I.5})$$

El operador S_0 se relaciona con el operador número de partículas \hat{N} , a través de la relación:

$$\hat{S}_0 = \frac{1}{2} (\hat{N} - \Omega) \quad (I.6)$$

El operador espín total es:

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_0^2 + \hat{S}_+ \hat{S}_- - \hat{S}_0 \quad (I.7)$$

En términos de estos operadores el hamiltoniano (I.1) se puede escribir como:

$$\hat{H} = -G (\hat{S}^2 - \hat{S}_0^2 + \hat{S}_0) \quad (I.8)$$

Como \hat{H} conmuta con \hat{S}_0 , llamando $S(S+1)$ a los autovalores de operador de espín total, los autovalores del hamiltoniano son:

$$E = -G \left\{ S(S+1) - \frac{1}{4} (N-\Omega)^2 + \frac{1}{2} (N-\Omega) \right\} \quad (I.9)$$

La energía del estado fundamental corresponde al mayor valor posible de S ($S = \frac{1}{2} \Omega$):

$$E_{ef} = -\frac{G\Omega N}{2} \left\{ 1 - \frac{N}{2\Omega} + \frac{1}{\Omega} \right\} \quad (I.10)$$

APENDICE II

HARTREE-FOCK-BOGOLIUBOV

Sea un hamiltoniano de muchos cuerpos:

$$\hat{H} = \sum_i \langle i | \hat{T} | i \rangle a_i^\dagger a_i + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} \langle ij | V | kl \rangle a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k \quad (\text{II.1})$$

donde los subíndices $ijkl$ corresponden, cada uno de ellos, a todos los números cuánticos necesarios para especificar los estados de partícula independiente en el espacio de valencia.

La idea básica del método de HFB^{29,30} es la de encontrar una transformación de las coordenadas de partícula a las de cuasipartículas tal que las cuasipartículas interactúen débilmente. Es decir, que se quiere expresar el hamiltonian II.1 como:

$$\hat{H} = E_0 + \hat{H}_{cp} + \hat{H}_{cp-int} \quad (\text{II.2})$$

donde E_0 es la energía del vacío de cuasipartículas, H_{cp} es el hamiltoniano de cuasipartícula libre, y H_{cp-int} la interacción entre cuasipartículas. Este último término se desprecia en HFB.

Algunas de las simetrías que contiene el hamiltoniano II.1 se pierden como consecuencia de despreciar la interacción entre cuasipartículas. Sin embargo, se puede constreñir el hamiltoniano usando multiplicadores de Lagrange y exigiendo que los observables tengan el valor de expectación deseado. En el caso del número de partículas, se reemplaza H por:

$$\hat{H}' = \hat{H} - \lambda \hat{N} \quad (\text{II.3})$$

\hat{N} es el operador número de partículas, y el multiplicador de Lagrange λ (potencial químico) queda definido por la ecuación:

$$\langle \phi_0 | \hat{N} | \phi_0 \rangle = N \quad (\text{II.4})$$

Para definir las cuasipartículas se utiliza la transformación general de Bogoliubov:

$$\beta_i^+ = \sum_j (U_{ij} a_j^+ + V_{ij} a_j) \quad (\text{II.5})$$

siendo β_i^+ el operador que crea una cuasipartícula en el estado i .

Esta transformación se puede expresar en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \beta^+ \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & V \\ V^* & U^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^+ \\ a \end{pmatrix} \quad (\text{II.6})$$

La unitariedad de la transformación impone las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} UU^+ + VV^+ &= U^+U + V^T V^* = I \\ UV^T + VU^T &= U^+V + V^T U^* = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Estas condiciones pueden ser derivadas, también, de exigir que las cuasipartículas verifiquen las reglas de anticonmutación fermiónicas.

El estado fundamental del sistema es el vacío de cuasipartículas:

$$\beta_i | \phi_0 \rangle = 0 \quad \text{para todo } i \quad (\text{II.8})$$

La matriz densidad ρ y el tensor de apareamiento t se definen por:

$$\begin{aligned} \rho_{ij} &= \langle \phi_0 | a_j^+ a_i | \phi_0 \rangle \\ t_{ij} &= \langle \phi_0 | a_j a_i | \phi_0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Utilizando la transformación de Bogoliubov II.6 y las reglas de anti-conmutación fermiónica II.9, se reducen a:

$$\begin{aligned}\varphi &= V^+ V \\ t &= V^+ U\end{aligned}\tag{II.10}$$

El hamiltoniano constreñido II.3 se puede expresar como:

$$\hat{H}' = \hat{H}'_0 + \hat{H}'_2 + \hat{H}'_4\tag{II.11}$$

con:

$$\hat{H}'_0 = T_r \left[(T - \lambda N + \frac{1}{2} \Gamma) \varphi + \frac{1}{2} \Delta t^+ \right]\tag{II.12}$$

$$\begin{aligned}\hat{H}'_2 &= \sum_{ij} (\chi - \lambda N)_{ij} : a_i^+ a_j : + \frac{1}{2} \sum_{ij} \Delta_{ij} : a_i^+ a_j^+ : + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{ij} \Delta_{ij}^+ : a_i a_j :\end{aligned}\tag{II.13}$$

$$\hat{H}'_4 = \frac{1}{4} \sum_{ijkl} \langle ij | V | kl \rangle : a_i^+ a_j^+ a_l a_k :\tag{II.14}$$

donde los operadores entre dos puntos significan orden normal; y el hamiltoniano de HF χ , el potencial de HF Γ y el potencial de pares Δ están dados por:

$$\chi = T + \Gamma\tag{II.15}$$

$$\Gamma_{ij} = \sum_{kl} \langle ikl | V | jkl \rangle \varphi_{kl}\tag{II.16}$$

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{kl} \langle ijkl | V | kl \rangle t_{kl}\tag{II.17}$$

de las definiciones II.9, II.15, II.16 y II.17 se deduce que \mathcal{P} , \mathcal{X} y Γ son hermíticos y t y Δ antisimétricos.

Para cualquier producto normal $:\hat{O}:$, el valor de expectación $\langle \phi_0 | :\hat{O}: | \phi_0 \rangle$ se anula por construcción. Por lo tanto, la energía del vacío de cuasipartículas es:

$$\langle \phi_0 | \hat{H} | \phi_0 \rangle = \langle \phi_0 | \hat{H}' + \lambda \hat{N} | \phi_0 \rangle = \text{Tr} \left[\left(\Gamma + \frac{1}{2} \Gamma \right) \mathcal{P} + \frac{1}{2} \Delta t^\dagger \right] \quad (\text{II.18})$$

Para que el hamiltoniano II.11 adquiriera la forma II.2, se debe cumplir:

$$\hat{H}'_2 = \sum_i E_i B_i^\dagger B_i \quad (\text{II.19})$$

Usando esta definición de \hat{H}'_2 se puede calcular el conmutador:

$$[\hat{H}'_2, B_i^\dagger] = E_i B_i^\dagger = E_i \sum_d (U_{id} a_d^\dagger + V_{id} a_d) \quad (\text{II.20})$$

y en forma alternativa, usando II.13:

$$\begin{aligned} [\hat{H}'_2, B_i^\dagger] &= \sum_{jk} [(\mathcal{X} - \lambda \hat{N})_{jk} U_{ik} + \Delta_{jk} V_{ik}] a_d^\dagger \\ &+ \sum_{jk} [-\Delta_{jk}^* U_{ik} - (\mathcal{X} - \lambda \hat{N})_{jk}^* V_{ik}] a_d \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

Iguando II.20 y II.21 se obtiene:

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{X} - \lambda N) & \Delta \\ -\Delta^* & -(\mathcal{X} - \lambda N)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i \\ V_i \end{pmatrix} = E_i \begin{pmatrix} U_i \\ V_i \end{pmatrix} \quad (\text{II.22})$$

Las ecuaciones II.4, II.7, II.10 y II.22 forman el sistema de ecuaciones de HFB.

REFERENCIAS:

- 1) D.R.Bes, G.G.Dussel, R.A.Broglia, R.J.Liotta y B.R.Mottelson, Phys. Lett. 52B(1974)253.
- 2) L.Landau, J.Phys. U.S.S.R. 5(1941)71.
- 3) P.F.Bortignon, R.A.Broglia y D.R.Bes, Phys. Lett. 76B(1978)153.
- 4) V.Alessandrini, D.R.Bes y B.Machet, Nucl. Phys. B142(1978)489.
- 5) G.G.Dussel y D.R.Bes, Nucl. Phys. A323(1979)392.
- 6) M.Baranger, Phys. Rev. 122(1961)992.
- 7) H.Mang, Phys. Rep. 18C(1975)325.
- 8) T.Otsuka, A.Arima y F.Iachello, Nucl. Phys. A309(1978)1.
- 10) J.Dukelsky, G.G.Dussel y H.M.Sofía, Phys. Lett. 100B(1981)367.
- 11) J.Dukelsky, G.G.Dussel y H.M.Sofía, enviado para su publicación.
- 12) D.R.Bes, R.A.Broglia, G.G.Dussel, R.J.Liotta y H.M.Sofía, Nucl. Phys. A260(1976)27.
- 13) D.R.Bes, R.A.Broglia, G.G.Dussel, R.J.Liotta y H.M.Sofía, Nucl. Phys. A260(1976)1.
- 14) D.R.Bes, R.A.Broglia, G.G.Dussel, R.J.Liotta, R.P.J.Perazzo, Nucl. Phys. A260(1976)77.
- 15) D.R.Bes, G.G.Dussel, R.P.J.Perazzo y H.M.Sofía, Nucl. Phys. A307(1978)402.
- 16) D.R.Bes, G.G.Dussel, R.P.J.Perazzo y H.M.Sofía, Nucl. Phys. A293(1977)350.
- 17) M.Baranger, Nucl. Phys. A149(1970)225.
- 18) M.Gell-Mann y F.Low, Phys. Rev. 84(1951)300.
- 19) C.Block y A.Messiah, Nucl. Phys. 39(1962)95.
- 20) D.R.Bes y R.A.Sorensen, Adv. in Nucl. Phys., Vol. 2, Plenum Press, New York (1969).
- 21) M.Baranger y K.Kumar, Nucl. Phys. A110(1968)490.
- 22) K.Kumar y M.Baranger, Nucl. Phys. A110(1968)529.
- 23) A.Bohr y B.R.Mottelson, Physica Scripta 22(1980)468.
- 24) R.A.Broglia, B.R.Mottelson, D.R.Bes, R.J.Liotta y H.M.Sofía, Phys. Lett. 64B(1976)29.

- 25) R.A.Uhrer y R.A.Sorensen, Nucl. Phys. 86(1966)1.
- 26) R.A.Brogia, D.R.Bes y B.S.Nilsson, Phys. Lett. 50B(1974)213.
- 27) G.E.Brown, Unified Theory of Nuclear Models and Forces. North-Holland Publishing Co., (1964).
- 28) A.K.Kerman, Ann. of Phys. 12(1961)300.
- 29) N.N.Bogoliubov, Soviet Phys. Uspekhi 67(1959)236.
- 30) A.L.Goodman, Adv. in Nucl. Phys. Vol. 11, Chap. 4, (1979).
- 31) L.P.Gorkov, Soviet Phys. JETP 7(1958)505.
- 32) P.Ring y P.Schuck, The Nuclear Many-Body Problem Springer-Verlag, (1980).
- 33) A.Arima y F.Iachello, Phys. Rev. Lett. 35(1975)1069.
- 34) T.Otsuka, Nucl. Phys. A368(1981)244.
- 35) D.R.Bes, R.A.Brogia, E.Maglione y A.Vitturi, Preimpreso.

NOTAS A LAS TABLAS:

- Tabla 1: Resultados obtenidos en una capa con $\Omega=8$ y $K=3$ para distintos valores de χ/G_0 . Q_{\max} es el valor de Q_{20} para el estado de partículas alineadas.
- Tabla 2: Probabilidades de los distintos componentes multipolares del bosón para ^{154}Sm y ^{170}Hf .
- Tabla 3: Números cuánticos (nlj) y energías de partícula independiente para el ^{114}Sn tomados de Uhrer y Sorensen²⁵). Las columnas 5, 6 y 7 dan las energías de cuasipartícula E_j y los factores de ocupación U_j y V_j .
- Tabla 4: Energías ω_n , elementos de matriz al cuadrado de los operadores Q_2 , P_2^+ y P_2 y suma del cuadrado de las amplitudes retardadas para el ^{114}Sn . La última línea corresponde a la regla de suma pesada por energías de los tres operadores. Los resultados están dados para $G_2=0$ en el primer caso y para $G_2=19/A$ MeV en el segundo.
- Tabla 5: Elementos de matriz al cuadrado de los operadores Q_2 , P_2^+ y P_2 y suma de los cuadrados de las amplitudes retardadas, entre el estado fundamental y el primer 2^+ -excitado para todos los isótopos del Sn. Las últimas tres columnas dan la regla de suma pesada por energía de los operadores Q_2 , P_2^+ y P_2 . Para cada isótopo, la primer línea corresponde a $G_2=0$ y la segunda a $G_2=19/A$ MeV.

T A B L E 1

$\frac{x}{G_0}$	$\delta\epsilon/\Delta$	N_C/N	P_0	P_2	$\frac{\langle Q_{20}^C \rangle}{\langle Q_{20} \rangle}$	$\frac{\langle Q_{20} \rangle}{\langle Q_{20} \rangle_{\max}}$	$\frac{T_0}{\Omega}$	$\frac{T_2}{\Omega}$	$\frac{T_4}{\Omega}$
1.00	0	1.00	1.00	0.	---	---	.484	0.	0.
1.15	2.36	.998	8.70	.128	1.018	.638	.392	.022	-.061
1.45	6.23	.980	.694	.286	1.051	.883	.259	.012	-.100
1.75	14.1	.944	.553	.391	1.054	.966	.151	.009	-.082
2.05	2410.	.868	.376	.492	1.011	1.00	.001	.001	-.001
∞	∞	.868	.375	.493	1.010	1.00	0.	0.	0.

TABLA 2

L	^{154}Sm		^{170}Hf	
	protones	neutrones	protones	neutrones
0	.811	.721	.906	.742
2	.175	.234	.080	.225
4	.010	.033	.013	.017
6	.003	.009	.001	.012
8	.001	.002	--	.003
10	--	.001	--	--
12	--	--	--	--

T A B L A 3

n	ℓ	j	ϵ_j	E'_j	V_j	U_j
0	4	9/2	-4.106	5.586	.993	.116
1	2	5/2	-0.20	1.865	.928	.372
0	4	7/2	.861	1.371	.819	.574
2	0	1/2	1.322	1.289	.709	.705
0	5	11/2	2.506	1.745	.404	.915
1	2	3/2	2.878	2.015	.340	.940
0	5	9/2	7.369	6.176	.105	.994
1	3	7/2	8.326	7.115	.091	.996

T A B L A 5

A	$\langle z^4 Q_2 0 \rangle^2$	$\sum_{\alpha\beta} (Y_{\alpha\beta}^1)^2$	$\langle z^4 P_2 0 \rangle^2$	$\langle z^4 P_2^+ 0 \rangle^2$	$\sum_n \omega_n \langle n Q_2 0 \rangle^2$	$\sum_n \omega_n \langle n P_2 0 \rangle^2$	$\sum_n \omega_n \langle n P_2^+ 0 \rangle^2$
104	1814.	.1406	.0001	.1583	5454	1.235	9.766
	1153.	.0206	.0550	.2100	2930	1.748	7.987
106	2717.	.1917	.0018	.1687	6511	1.552	8.605
	1635.	.0287	.0330	.3440	3249	2.065	7.330
108	3431.	.2211	.0060	.1597	7371	1.881	7.636
	1995.	.0335	.0516	.3189	3573	2.366	6.705
110	3916.	.2323	.0148	.1369	8028	2.215	6.808
	2250.	.0352	.0760	.2786	3867	2.649	6.244
112	4208.	.2277	.0303	.1163	8471	2.570	6.077
	2386.	.0318	.1092	.2450	4112	2.940	5.782
114	4480.	.2267	.0466	.1039	8748	2.959	5.395
	2509.	.0303	.1386	.2224	4324	3.248	5.320
116	4867.	.2292	.0547	.0923	8979	3.395	4.749
	2658.	.0337	.1489	.1997	4559	3.576	4.835
118	4742.	.2287	0.579	.0719	9259	3.868	4.153
	2799.	.0408	.1482	.1627	4859	3.910	4.351
120	4599.	.2160	.0689	.0469	9523	4.354	3.627
	2830.	.0438	.1608	.1187	5185	4.238	3.914
122	4286	.1954	.0914	.0247	9621	4.843	3.167
	2717	.0414	.1920	.0779	5464	4.549	3.532
124	3832	.1732	.1241	.0092	9444	5.339	2.762
	2470.	.0364	.2382	.0447	5641	4.849	3.194
126	3209.	.1479	.1644	.0014	8929	5.861	2.409
	2067.	.0291	.2961	.0213	5690	5.156	2.897
128	2489.	.1662	.2081	.0004	8034	6.426	2.103
	1551.	.0227	.3610	.0064	5595	5.476	2.631
130	1678.	.1074	.2459	.0044	6716	7.100	1.860
	905.	.0162	.4267	.0003	5342	5.842	2.402

NOTA A LAS FIGURAS:

- Figura 1: Diagrama típico de la PSA que contribuye a la energía del sistema par.
- Figura 2: Algunos diagramas que aparecen en la evaluación de las energías de excitación fermiónicas.
- Figura 3: Algunos diagramas que aparecen en la evaluación de la energía de la excitación bosónica.
- Figura 4: Diagramas de la PSA para las funciones de Green de un cuerpo (A) y dos cuerpos (B).
- Figura 5: Representación gráfica de los vértices del hamiltoniano: (A) vértice de apareamiento, (B) vértice de dispersión.
- Figura 6: Algunos diagramas que contribuyen a las energías fermiónicas cuando los dos vértices del hamiltoniano son tenidos en cuenta.
- Figura 7: Algunos diagramas que contribuyen a la energía de las excitaciones bosónicas cuando los dos vértices del hamiltoniano son tenidos en cuenta.
- Figura 8: Serie Principal de las funciones de Green de un cuerpo. (a) Partícula de HF, (b) Cuasipartícula.
- Figura 9: Serie Principal de la función de Green de dos cuerpos.
- Figura 10: Diagrama correspondiente a los elementos de matriz de un operador de un cuerpo.
- Figura 11: Amplitud del estado partícula-cuasipartícula en el bosón.
- Figura 12: Probabilidad de que el bosón tenga momento angular $L(L-6)$ en función del cociente K/Ω . La línea llena corresponde a $\Omega=8$ y la línea de trazos a $\Omega=16$.
- Figura 13: Números de ocupación para distintos valores del cociente \mathcal{X}/G_0 . La línea llena corresponde a V_m y la de trazos a V_m^c . Los cálculos se hicieron para $\Omega=8$ y $K_m^m=3$.
- Figura 14: Probabilidades de las distintas multipolaridades del bosón de la PSA para los núcleos de tierras raras. (A) probabilidad para $J=0$, (B) para $J=2$, (C) para $J \neq 0$ y 2.
- Figura 15: Probabilidades de las distintas multipolaridades del bosón de BCS para los núcleos de las tierras raras. Las convenciones son iguales a las de la figura 14.

- Figura 16: Cociente de los valores de expectación del operador cuadrupolar (Q_{20}), en el espacio cortado ($\langle Q_{20} \rangle^c$) y en el espacio completo ($\langle Q_{20} \rangle$).
- Figura 17: Probabilidades de ocupación para (A) ^{150}Sm y (B) ^{184}Os . La línea llena corresponde a V_m y la de trazos a V_m^c .
- Figura 18: Diagrama de acoplamiento entre excitaciones bosónicas de partícula-partícula y partícula-agujero en núcleos de capa cerrada.
- Figura 19: Algunos procesos que puedan sufrir dos partículas, entre su creación y el estado final de un bosón excitado, marcado con una cruz.
- Figura 20: Serie Principal de las funciones de Green de un cuerpo G y F.
- Figura 21: Diferentes tipos de líneas externas que puede tener un diagrama de la función Green de dos partículas.
- Figura 22: Representación esquemática de las interacciones vestidas L_{μ} .
- Figura 23: Burbujas elementales.
- Figura 24: Representación gráfica de $L_{11}^{(0)}$
- Figura 25: Representación gráfica de $L_{\overline{1}\overline{1}}^{(0)}$
- Figura 26: Representación gráfica de $L_{\overline{1}\overline{1}}^{(0)}$
- Figura 27: Representación gráfica de $L_{1\overline{1}}$
- Figura 28: Diferentes tipos de líneas externas que puede tener un diagrama de la función de Green partícula-agujero.

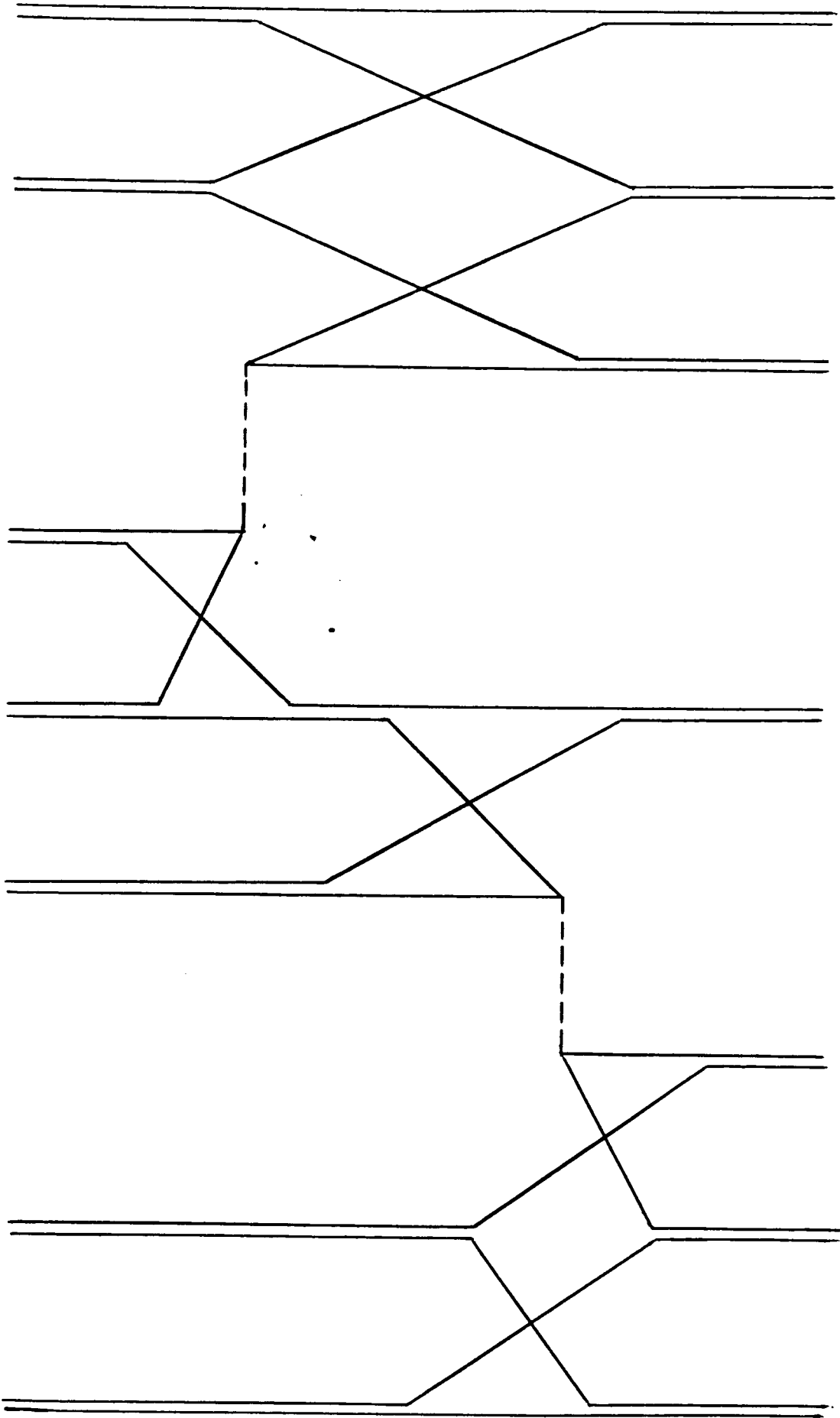


FIG. 1

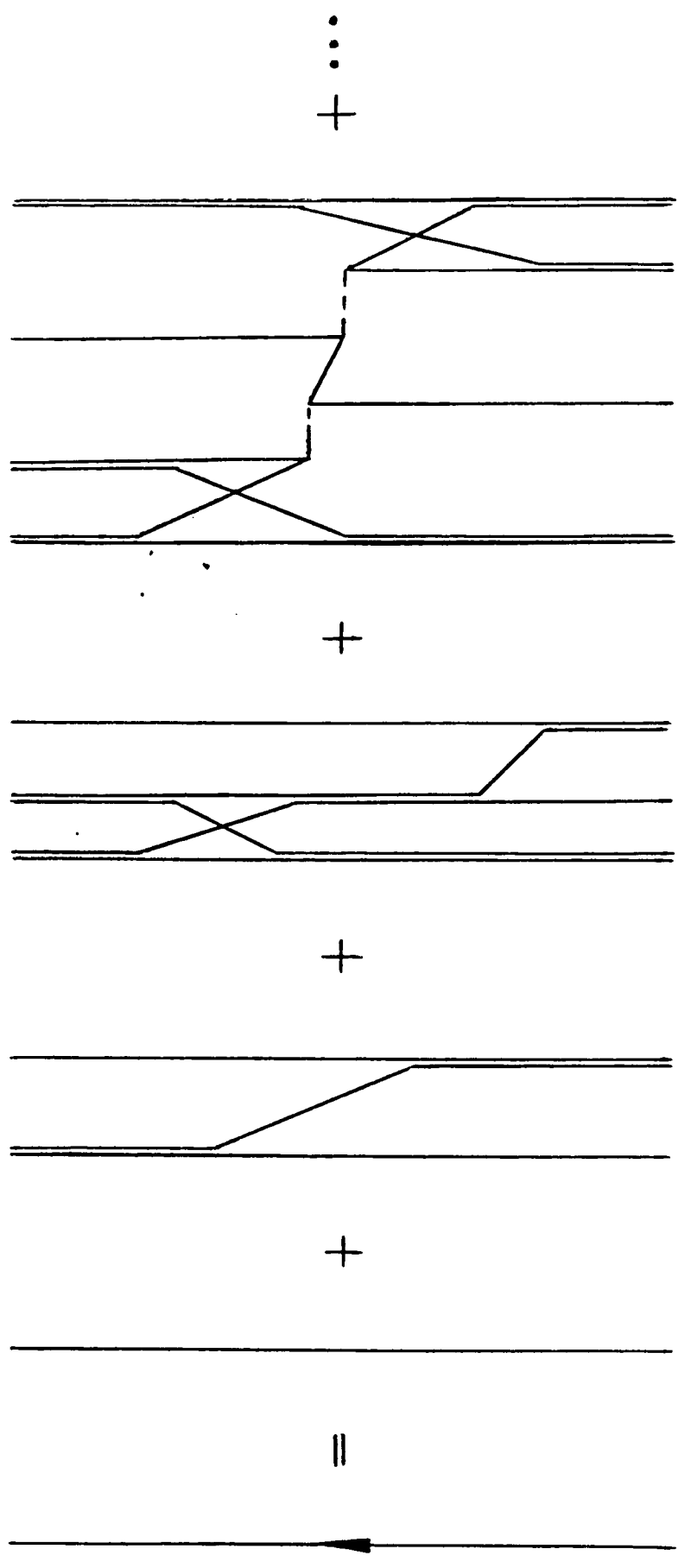


FIG. 2

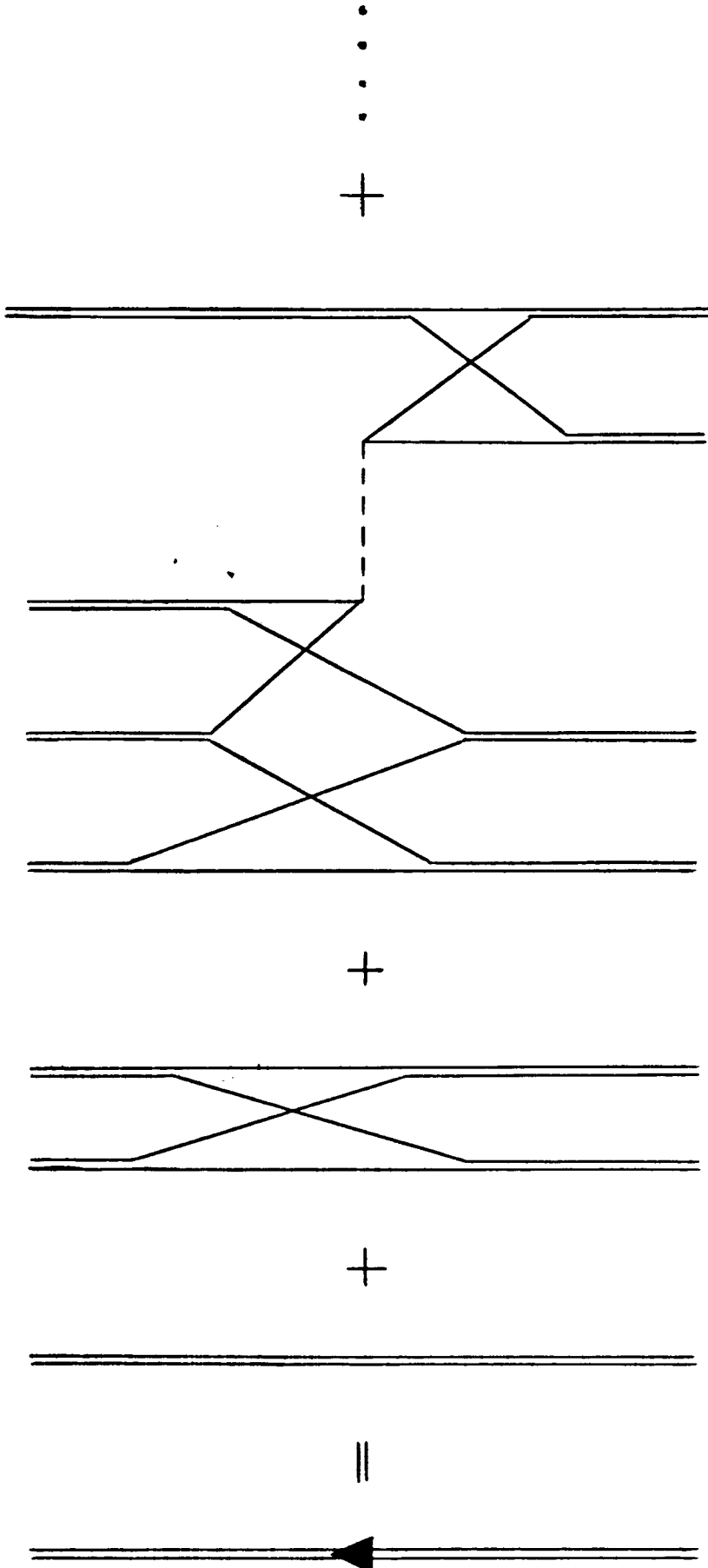


FIG. 3

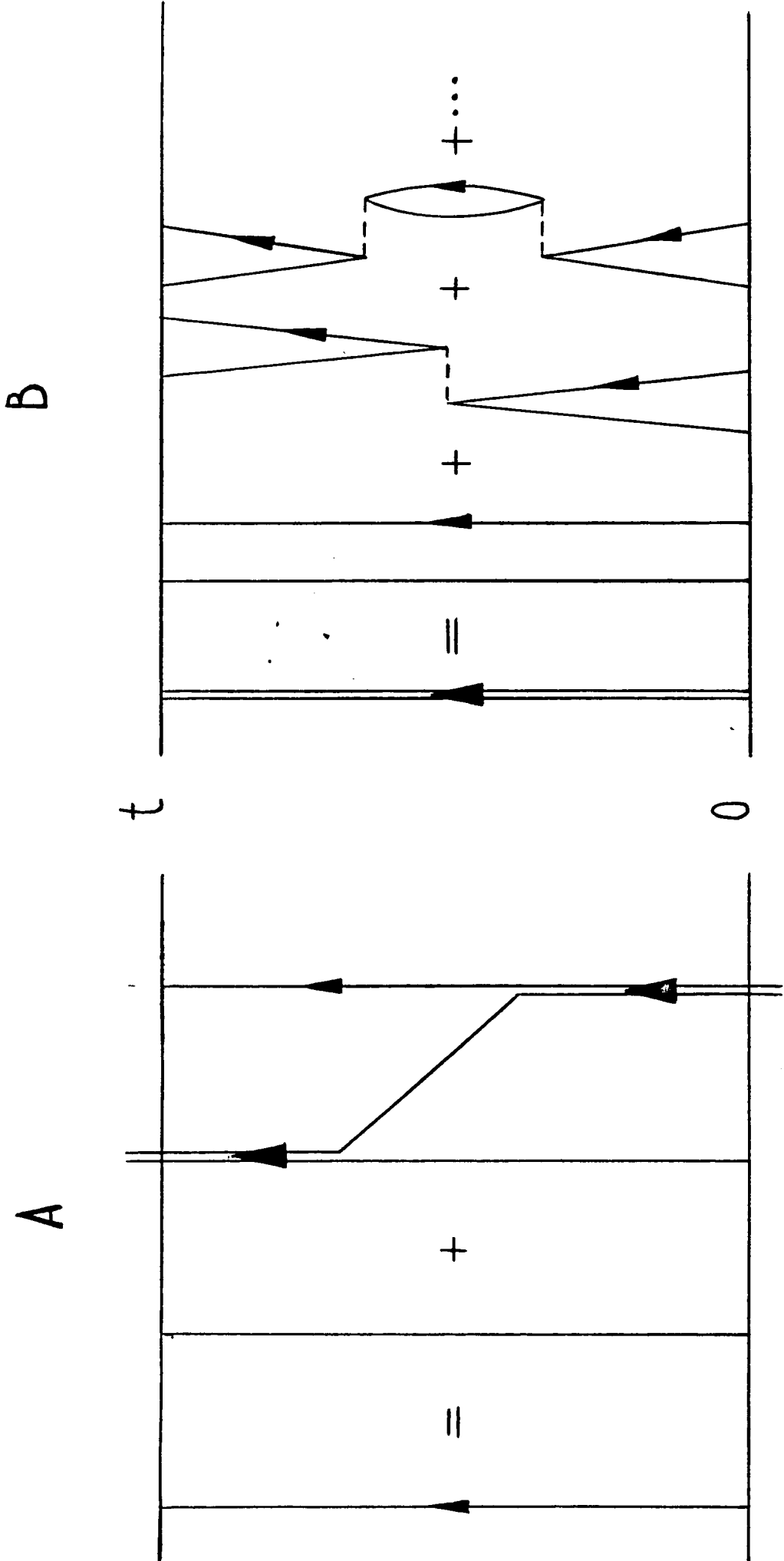


FIG. 4

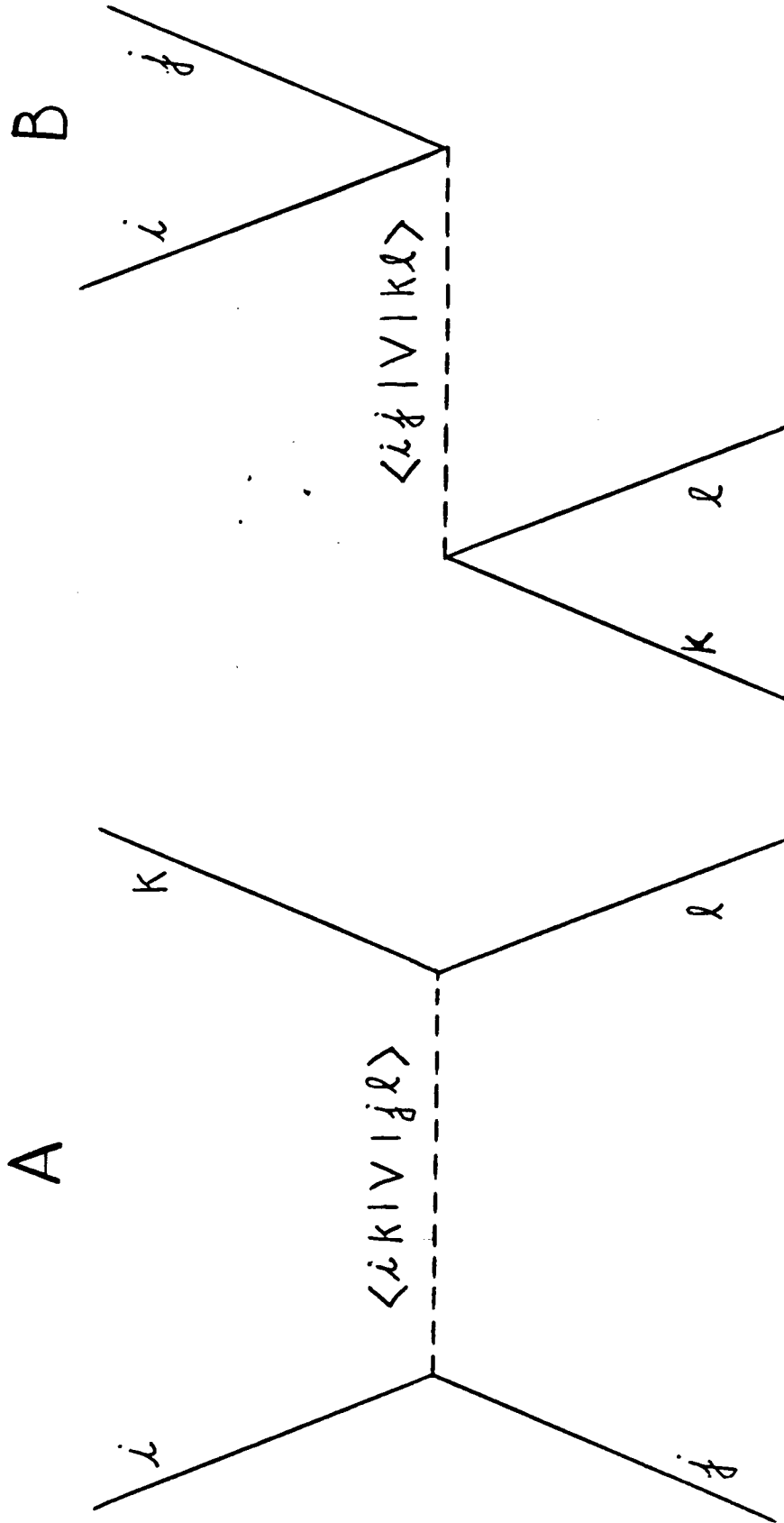


FIG. 5

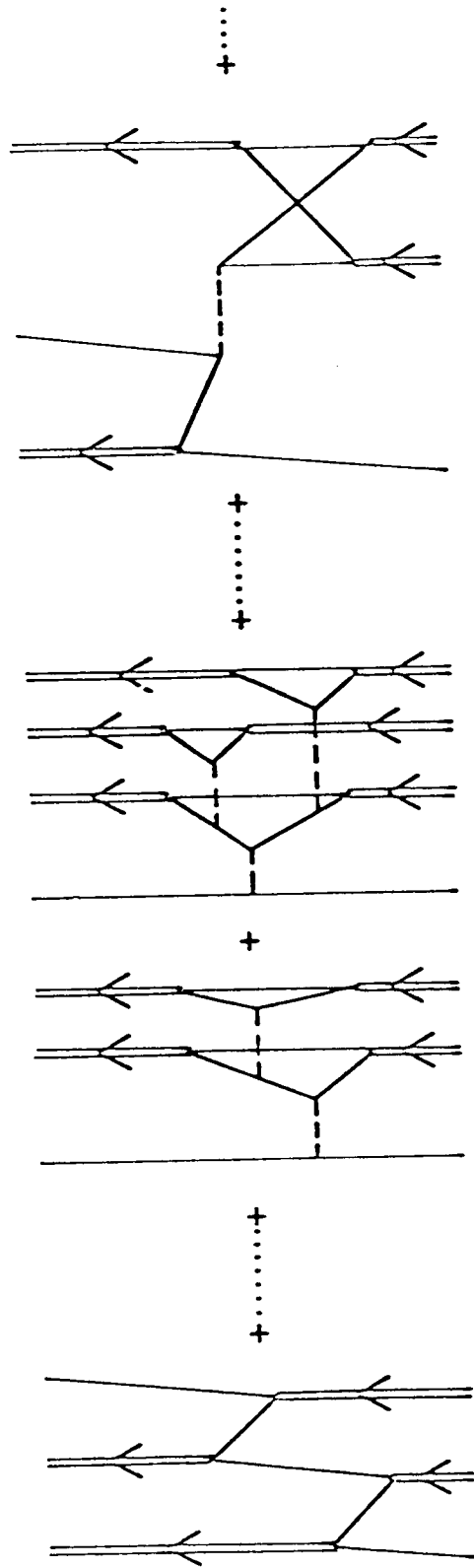
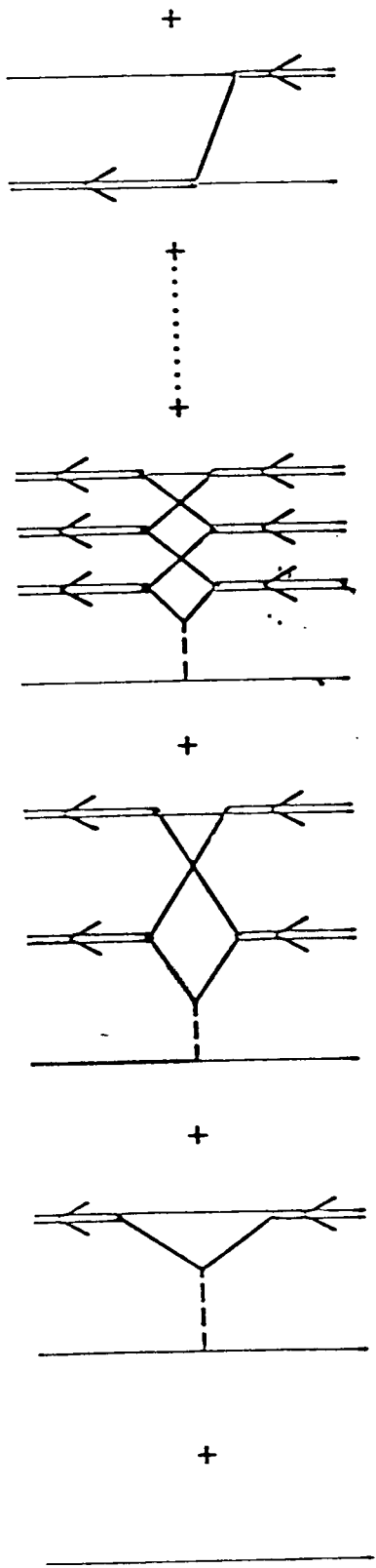


FIG. 6

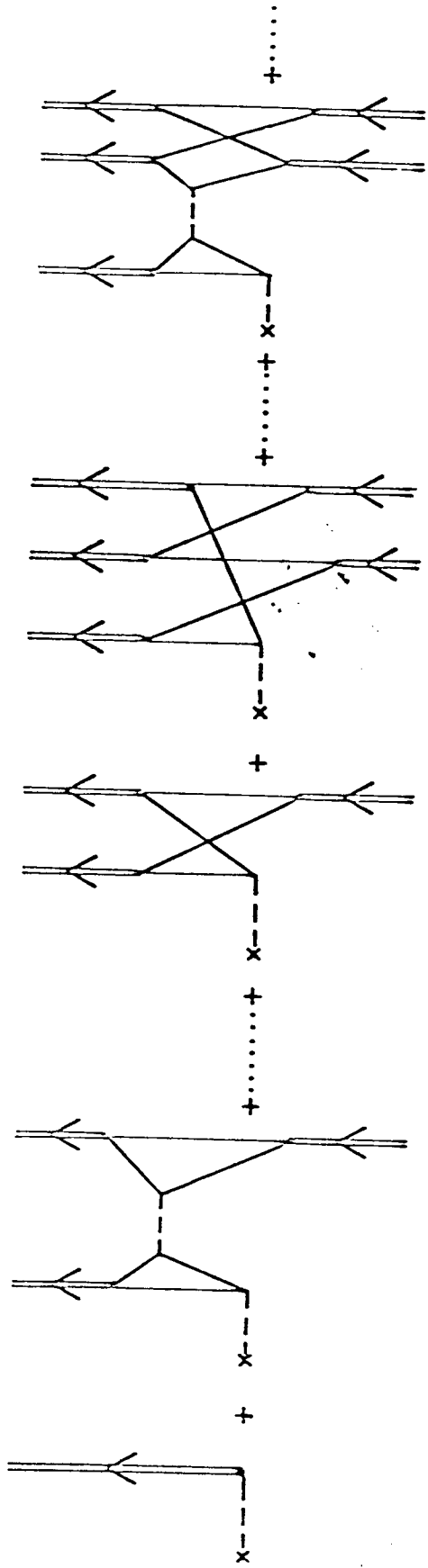
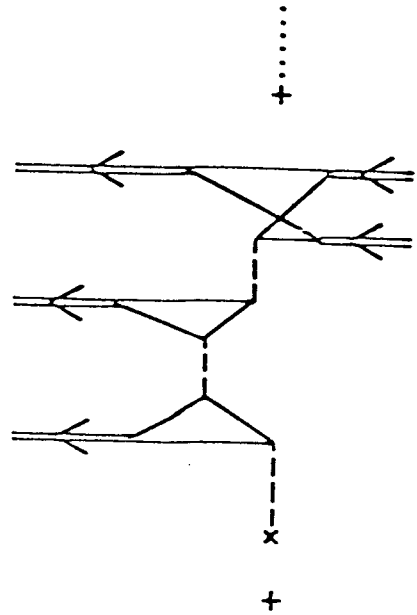
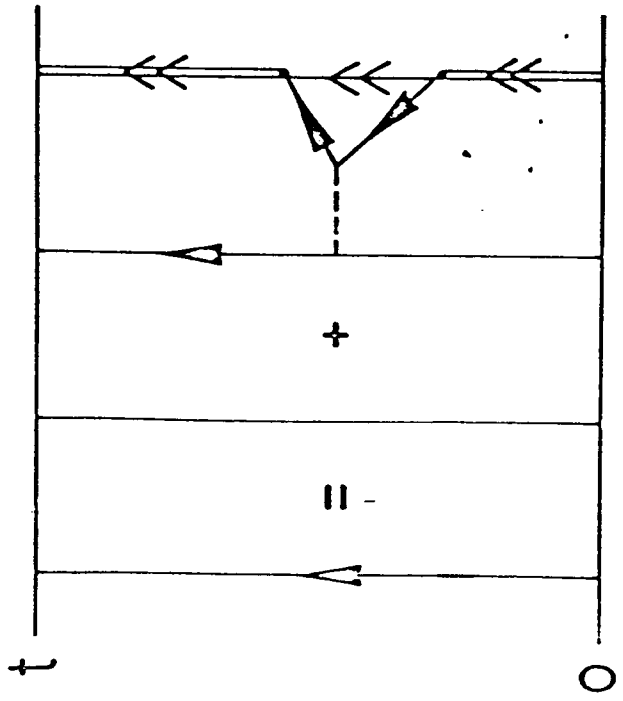
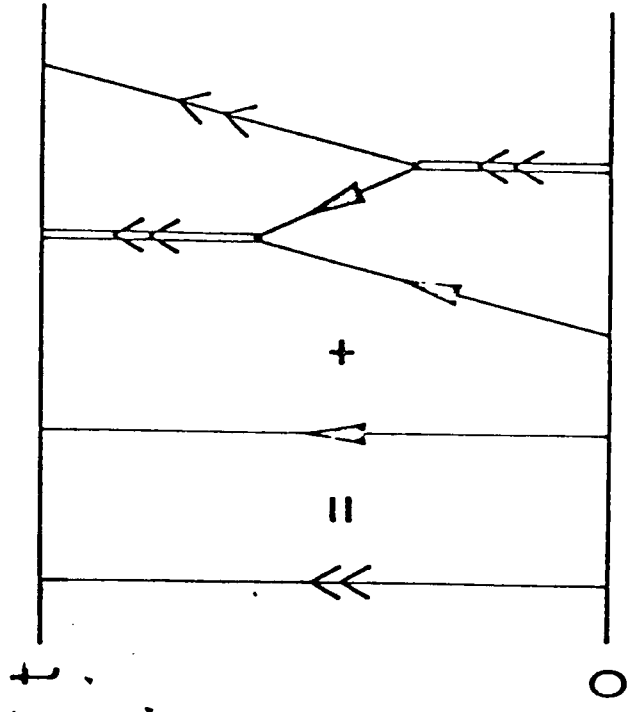


FIG. 7





(a)



(b)

FIG. 8

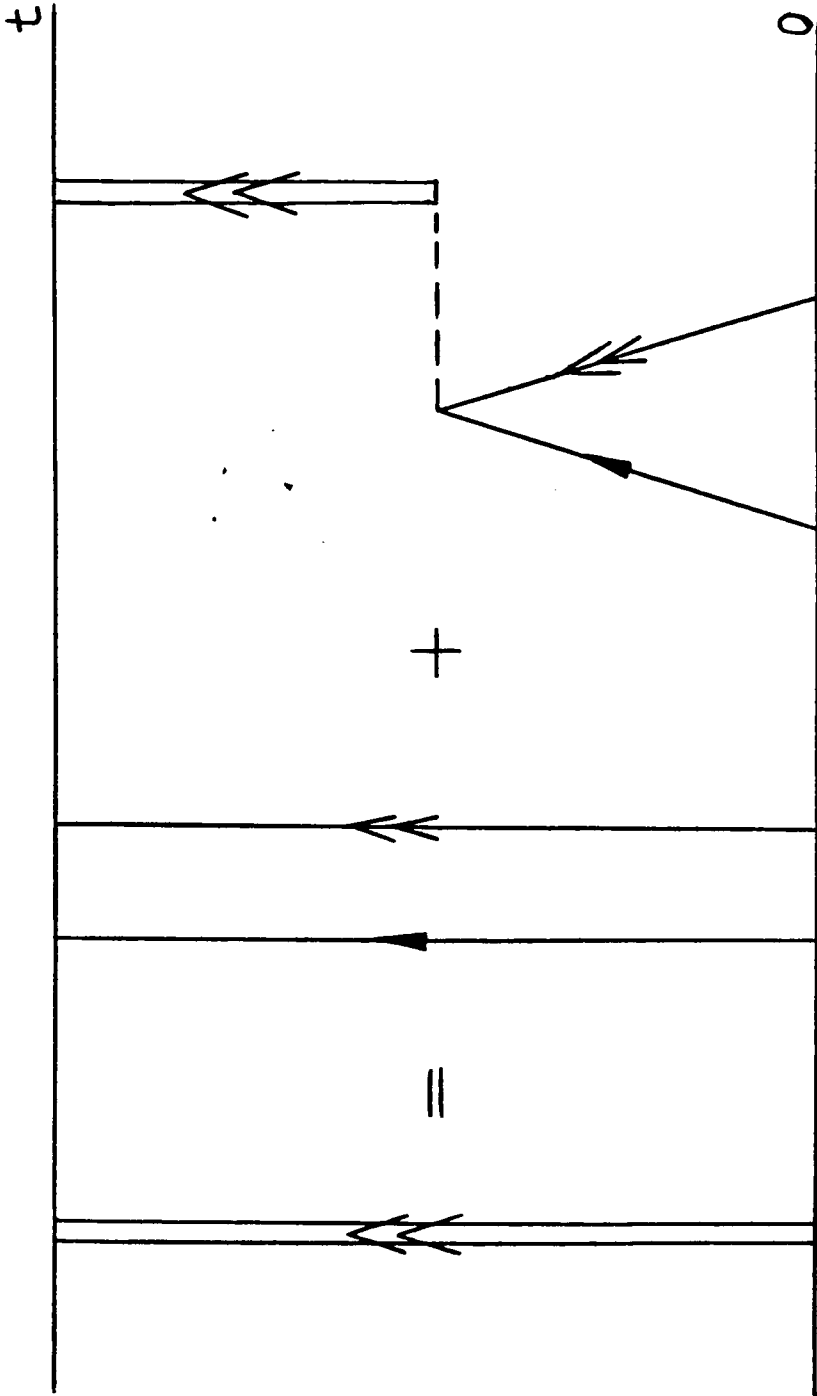


FIG. 9

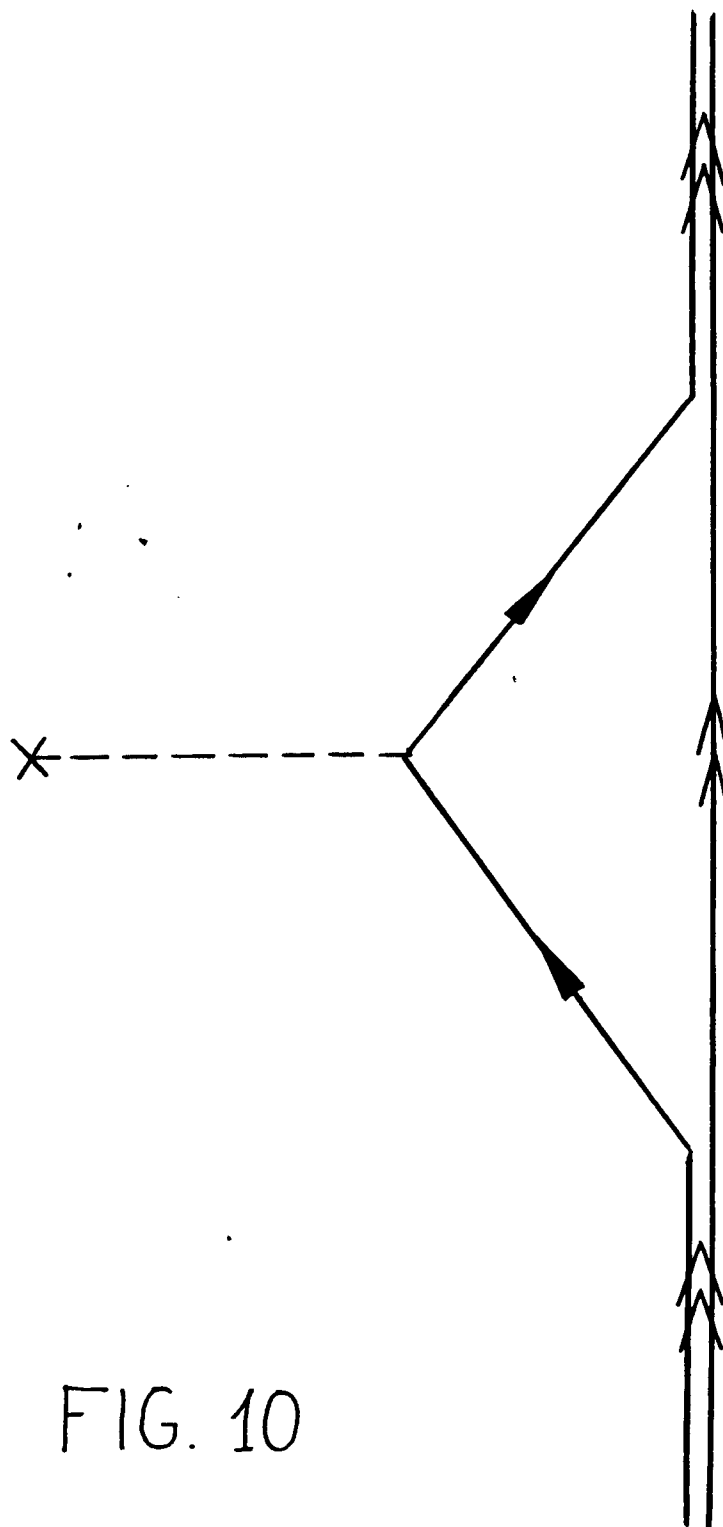


FIG. 10

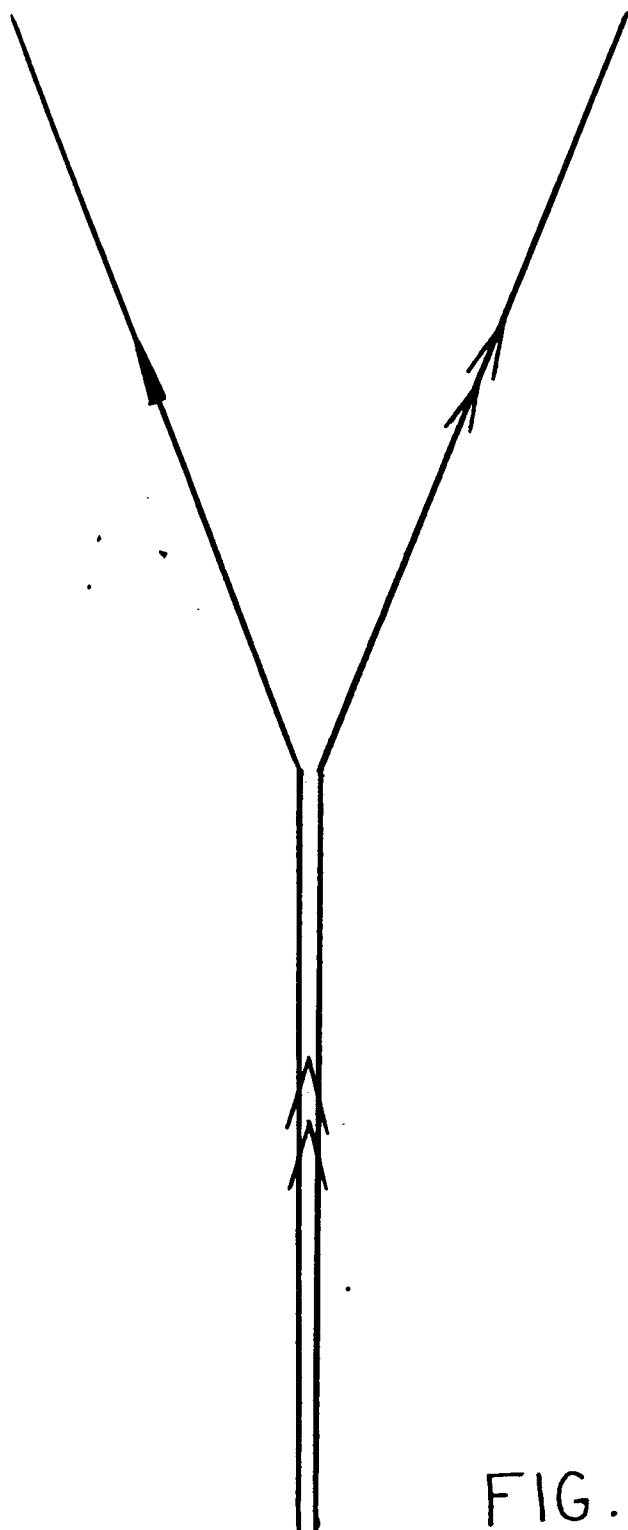


FIG. 11

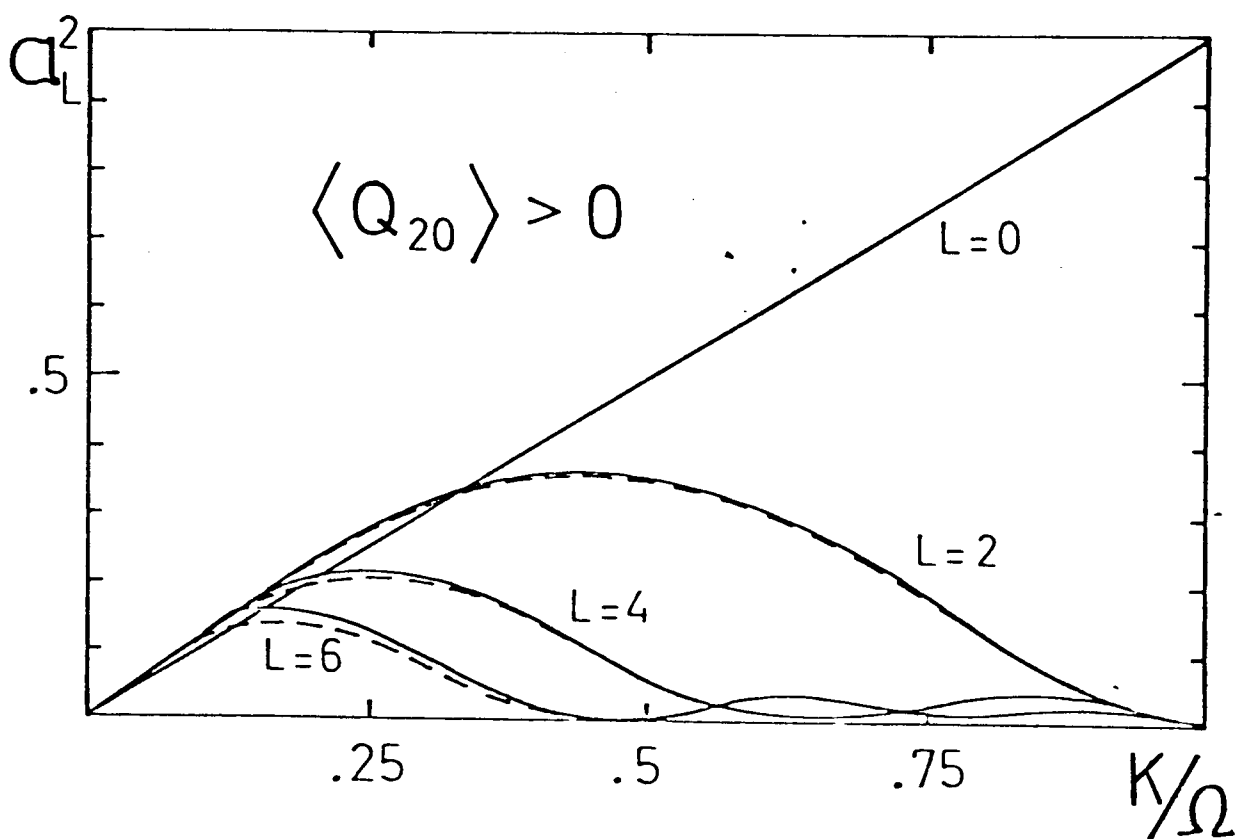
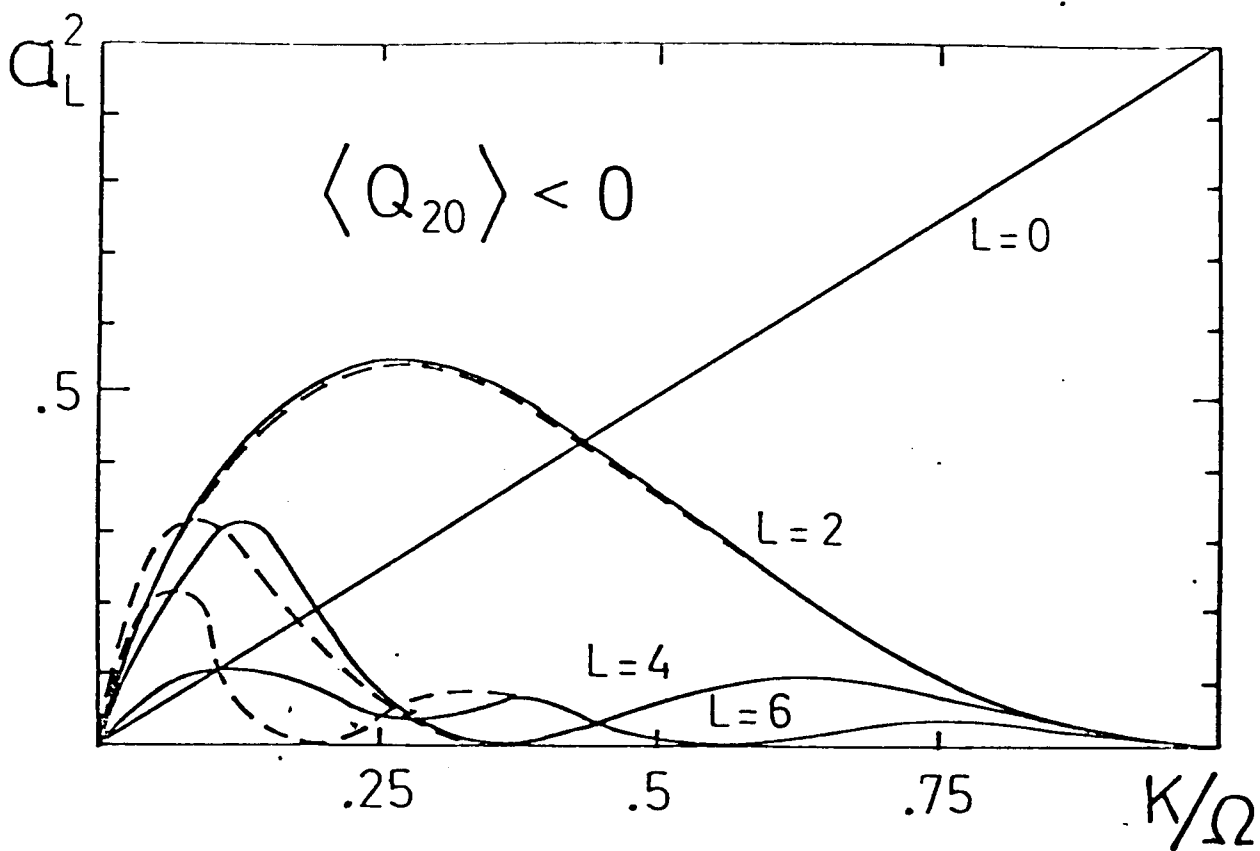


FIG.12

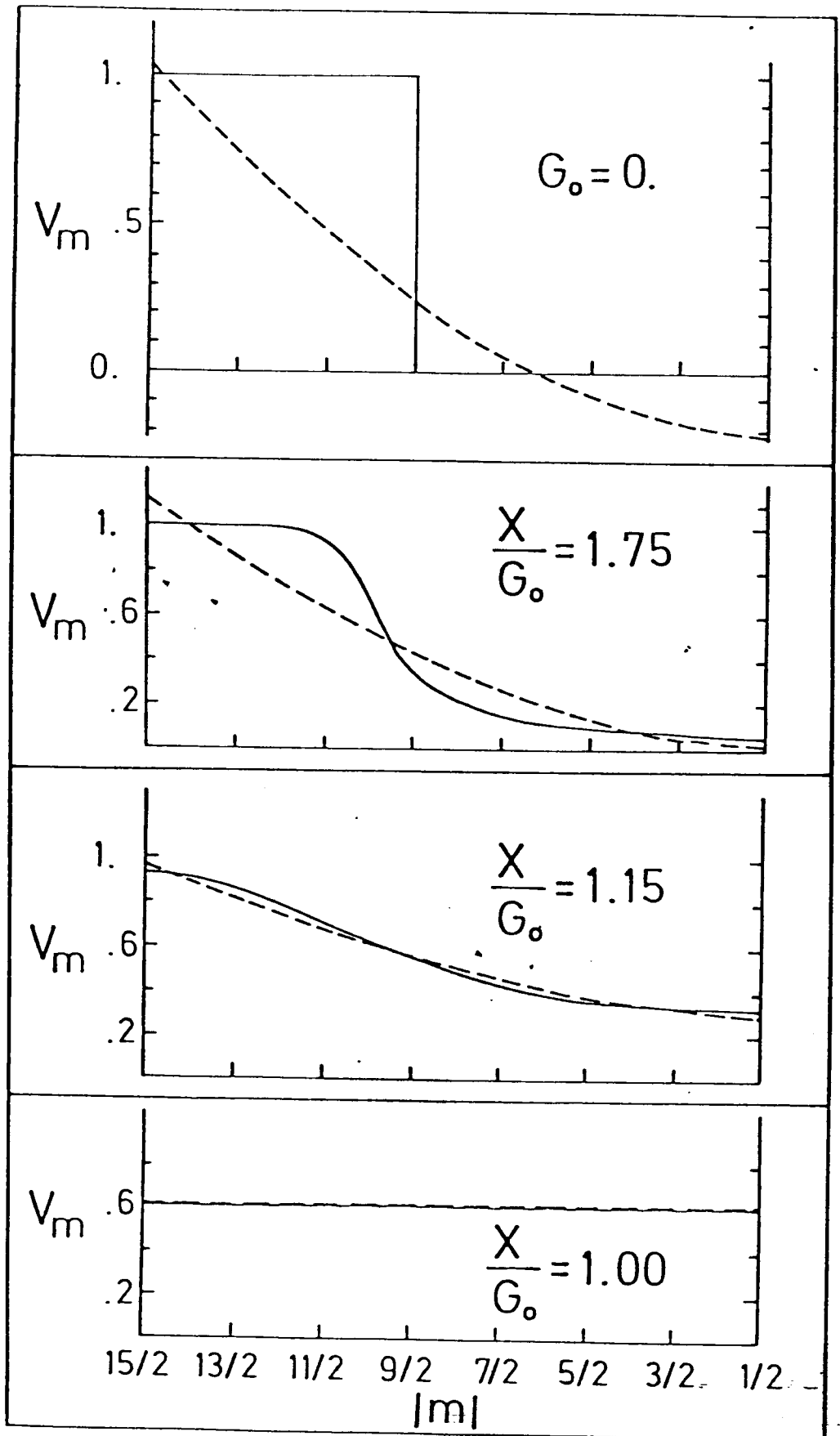


FIG.13

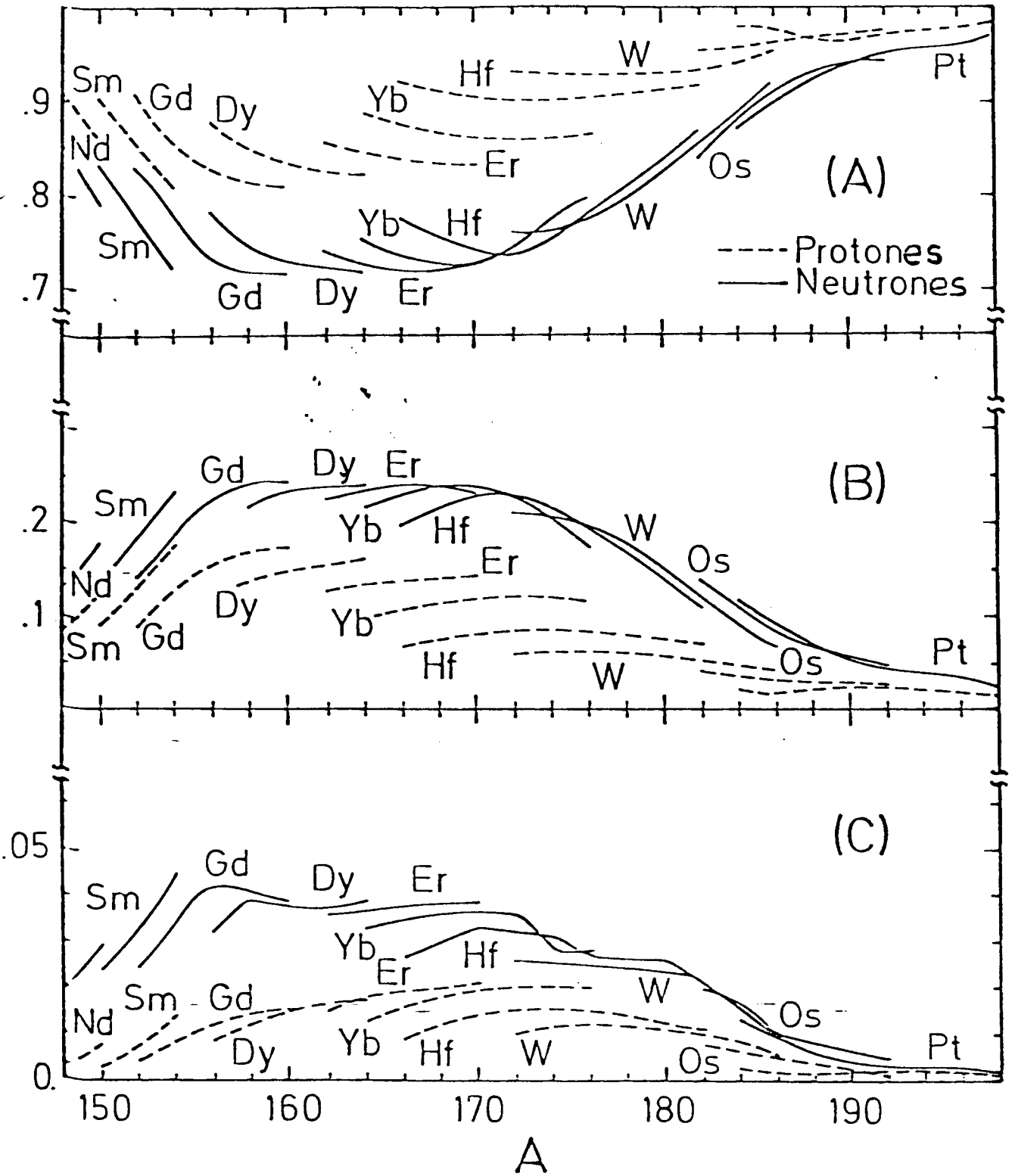


FIG. 14

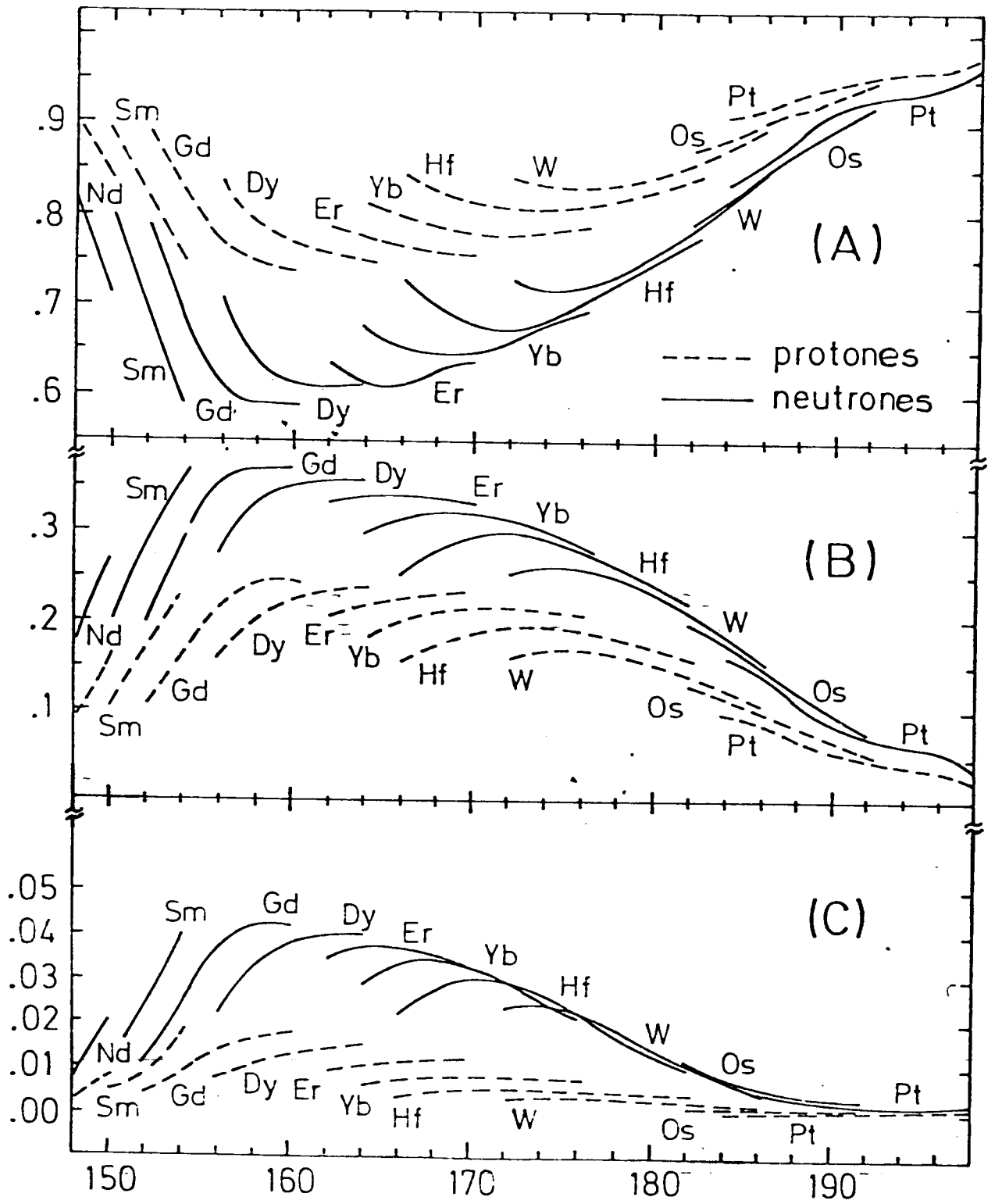


FIG. 15

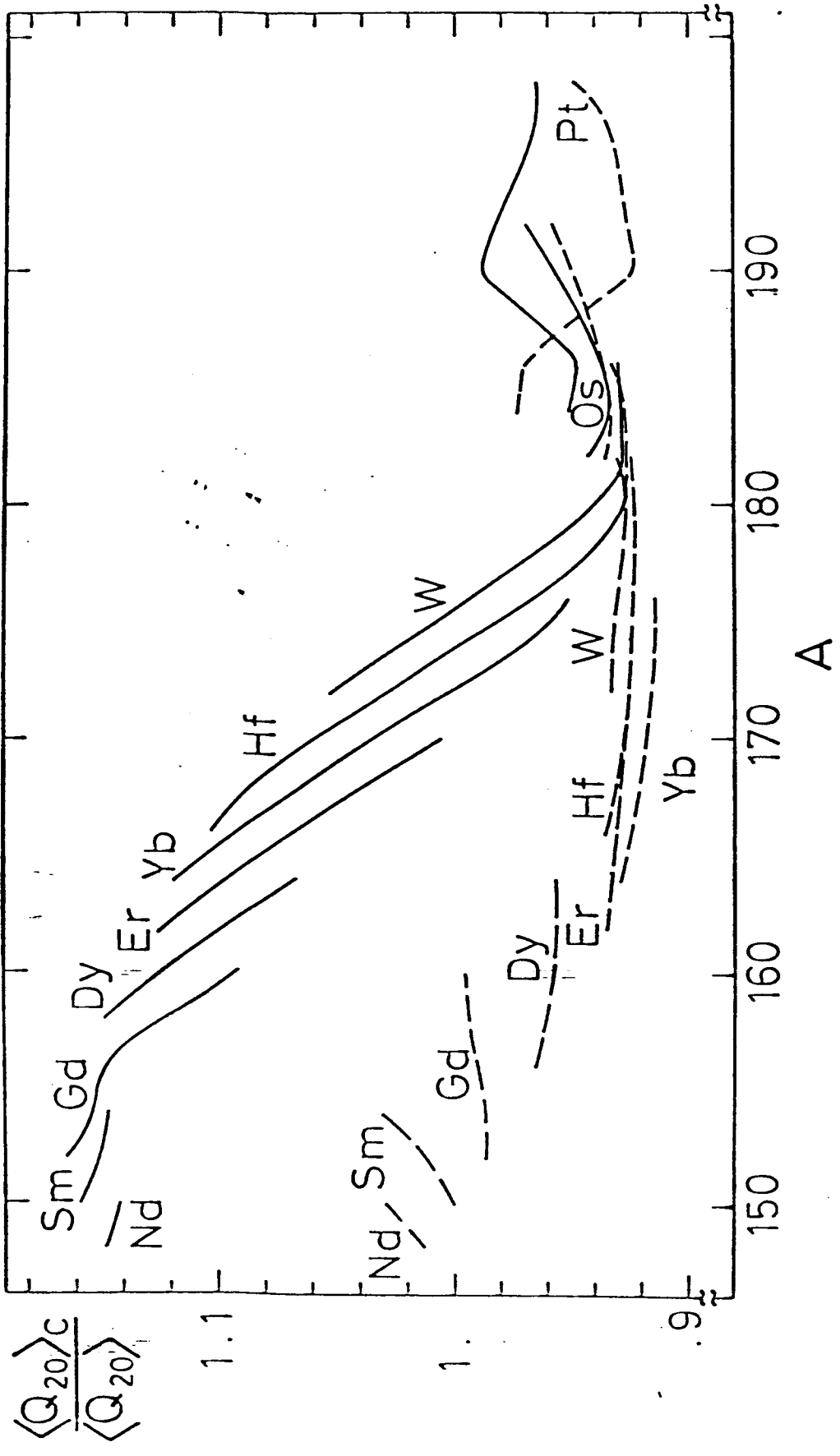


FIG. 16

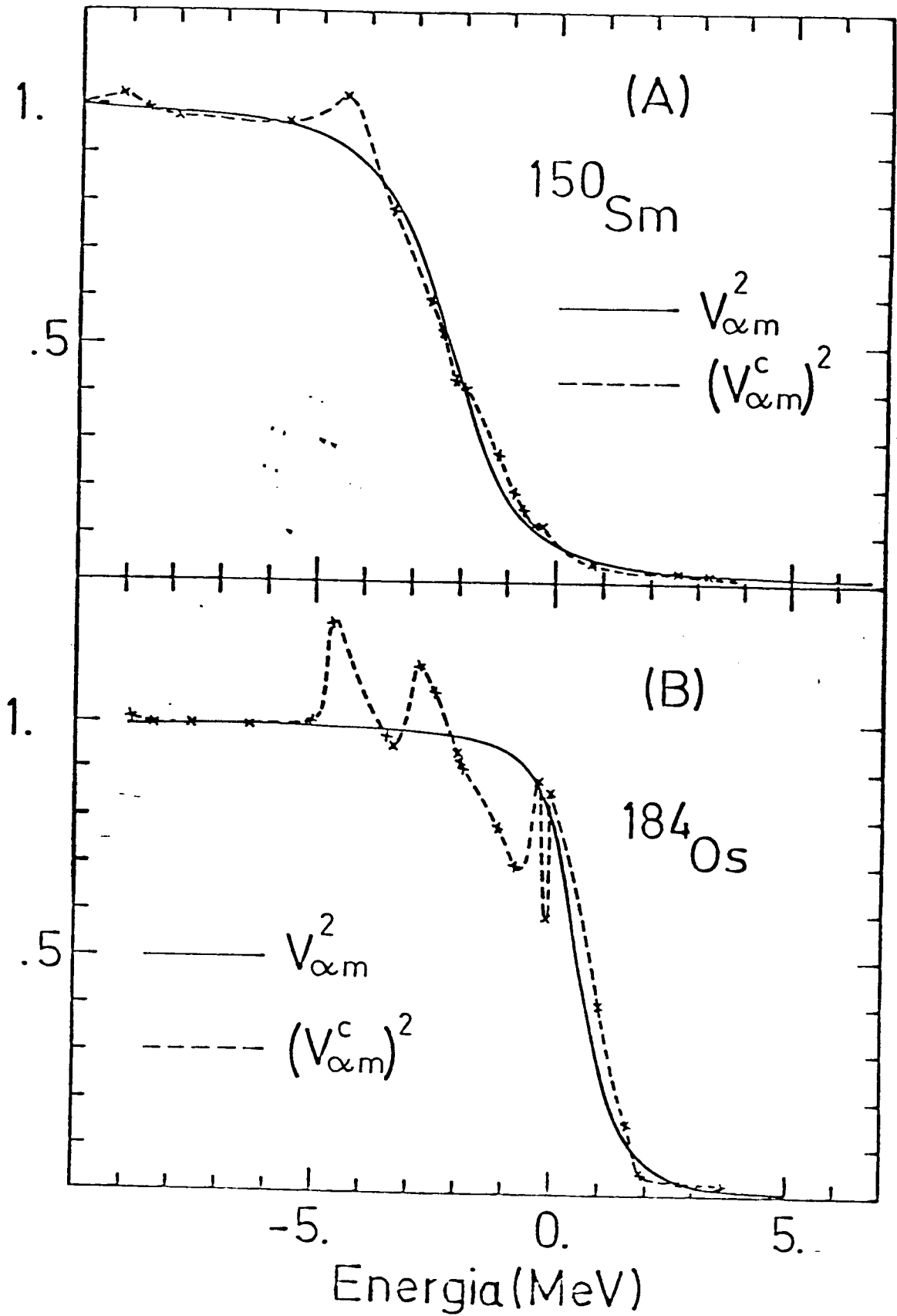


FIG. 17

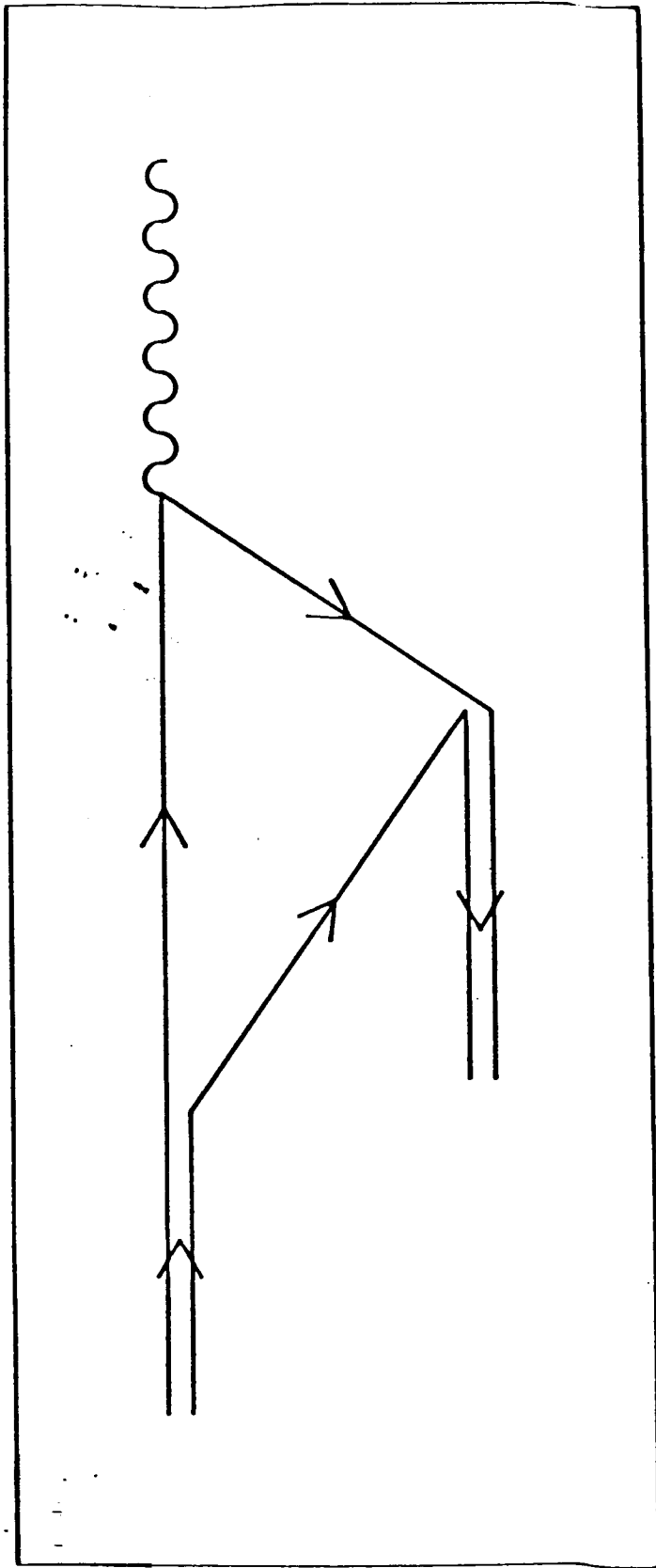


FIG. 18

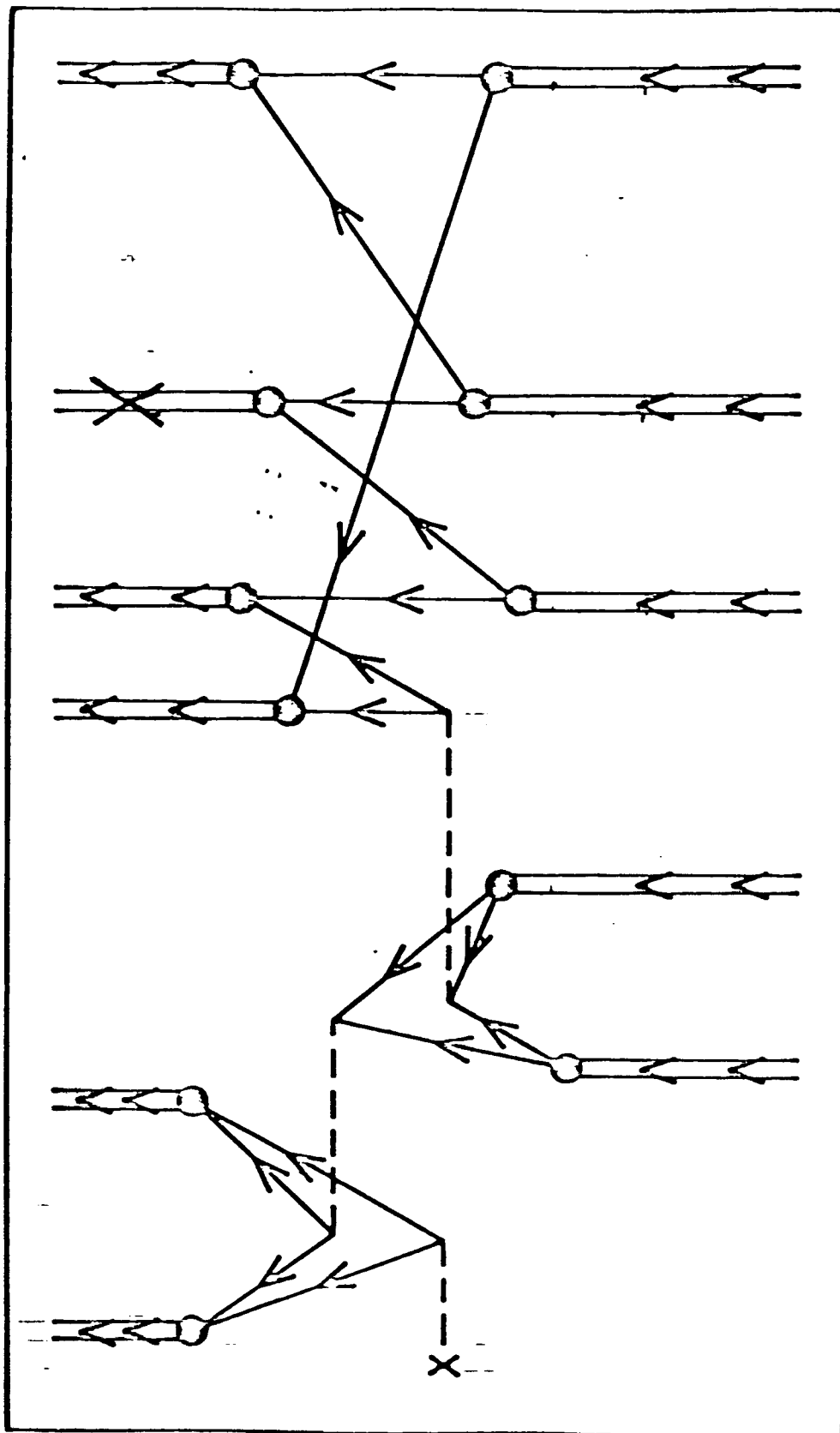
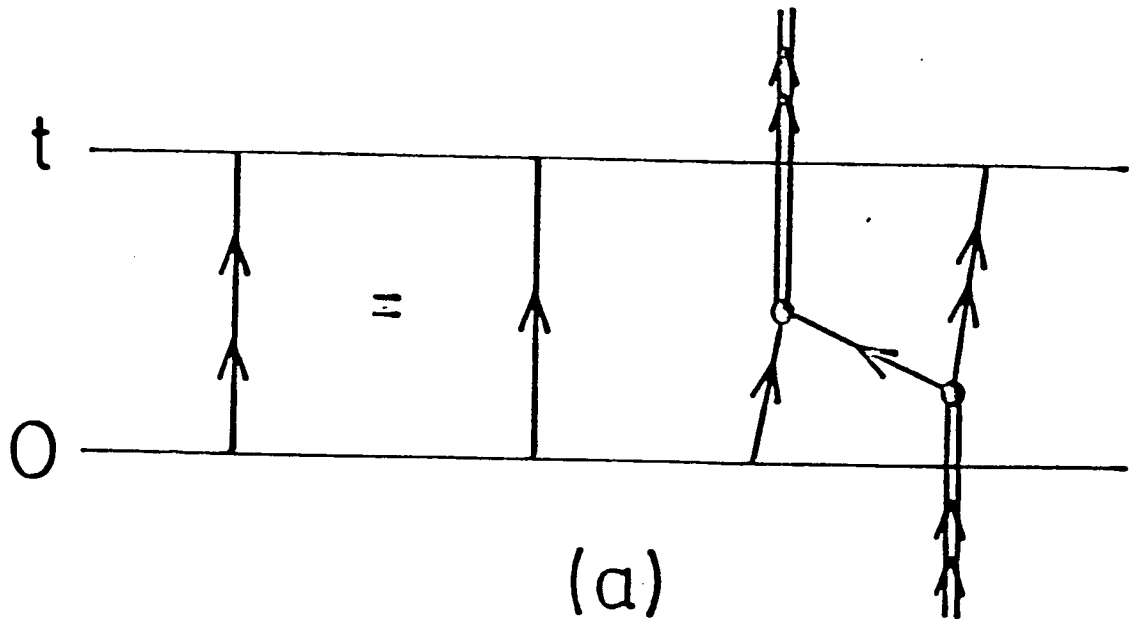
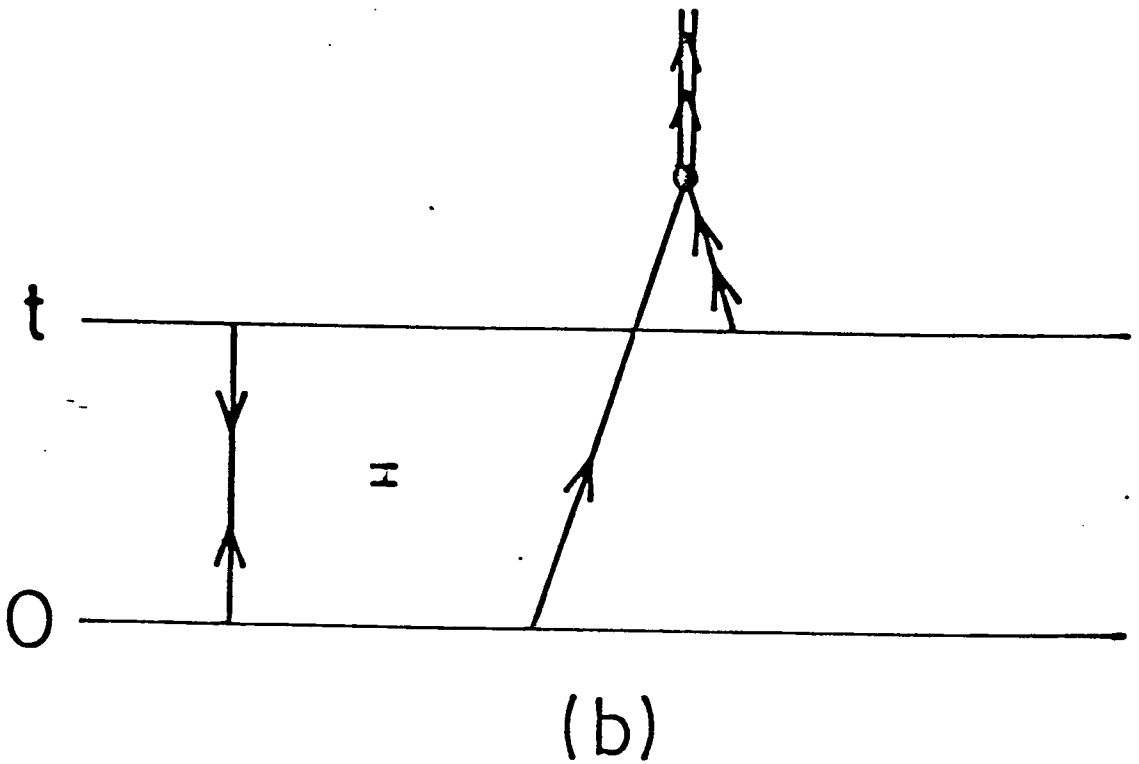


FIG. 19



(a)



(b)

FIG. 20

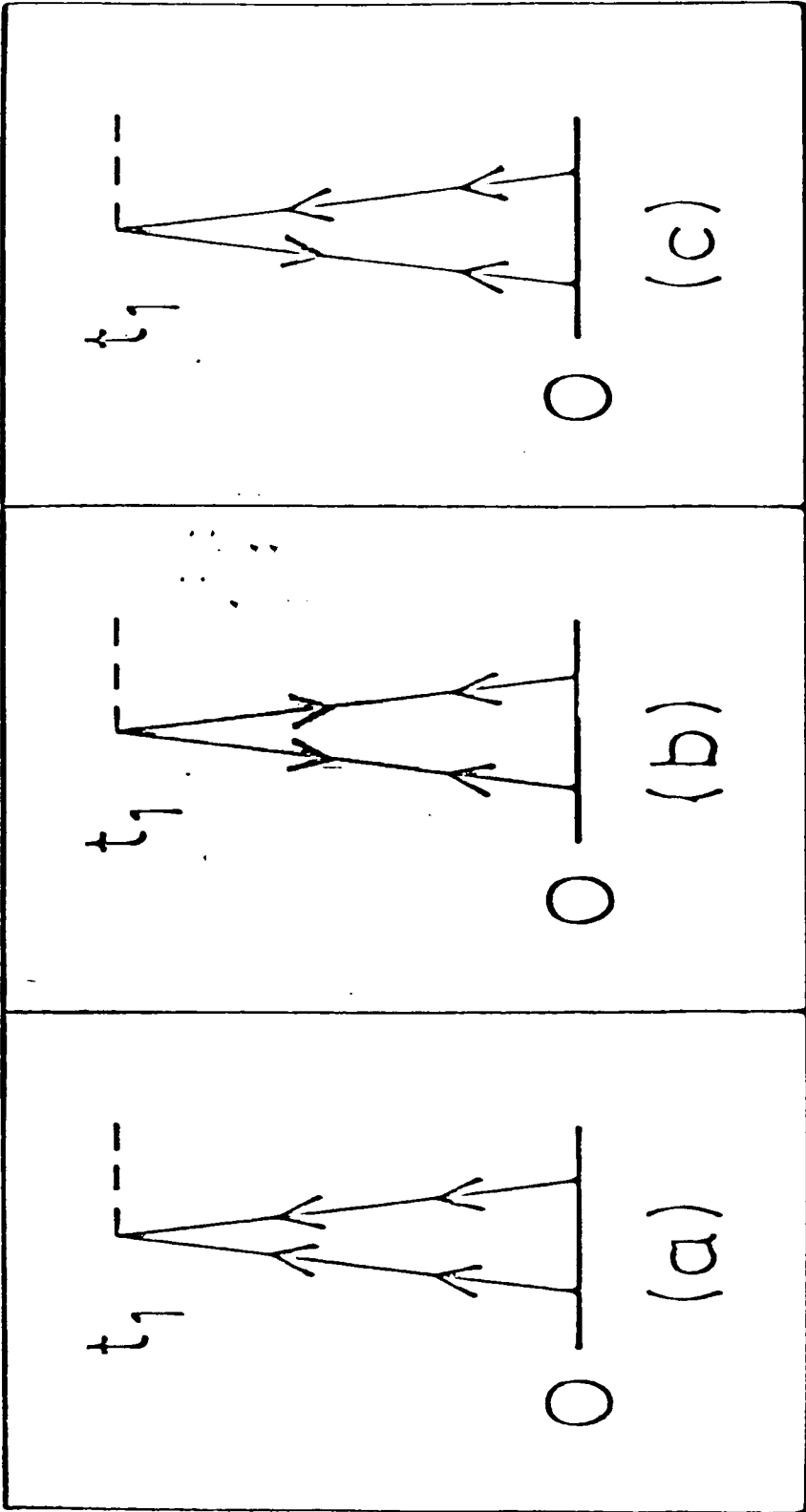


FIG. 21

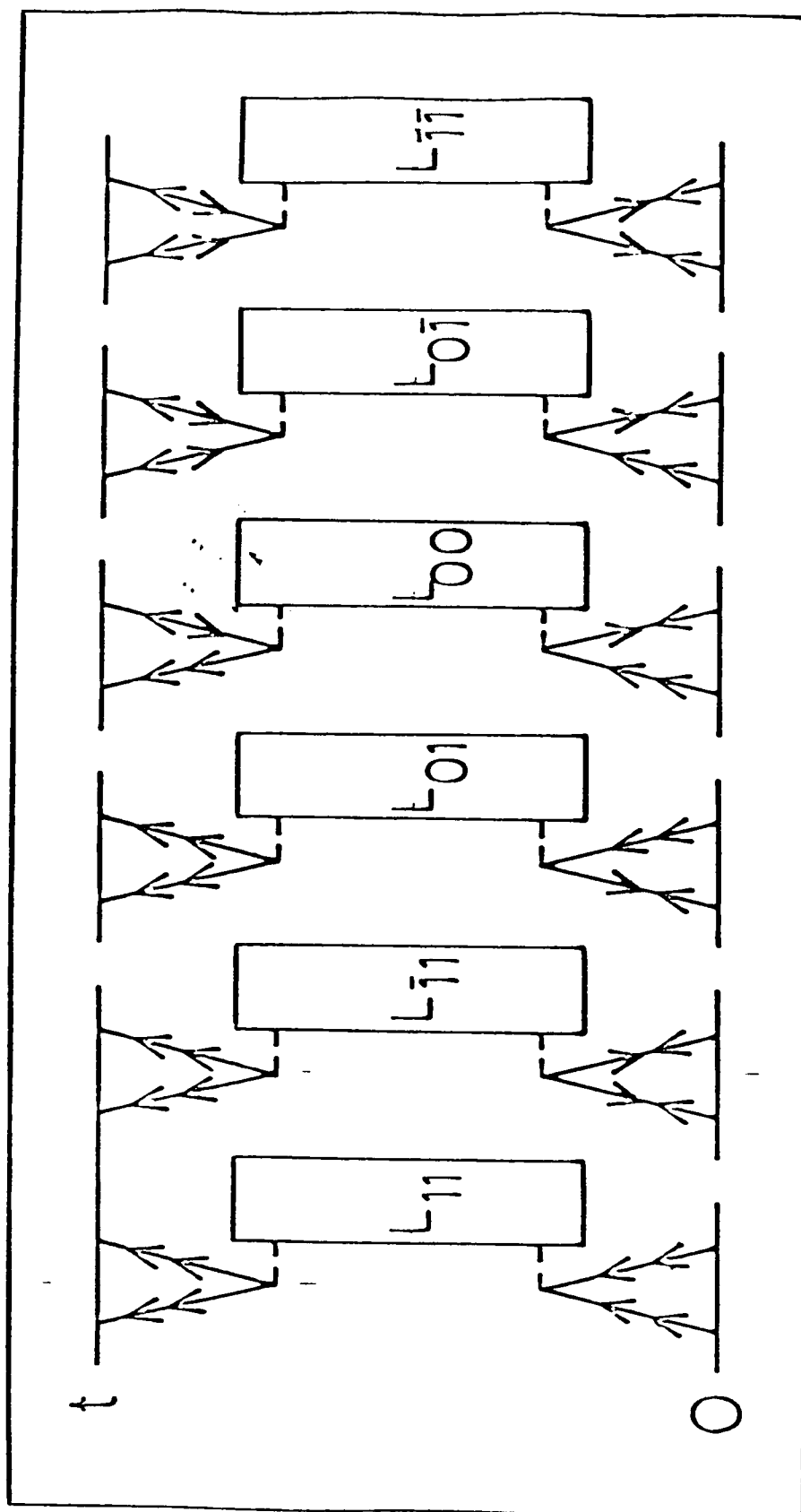


FIG. 22

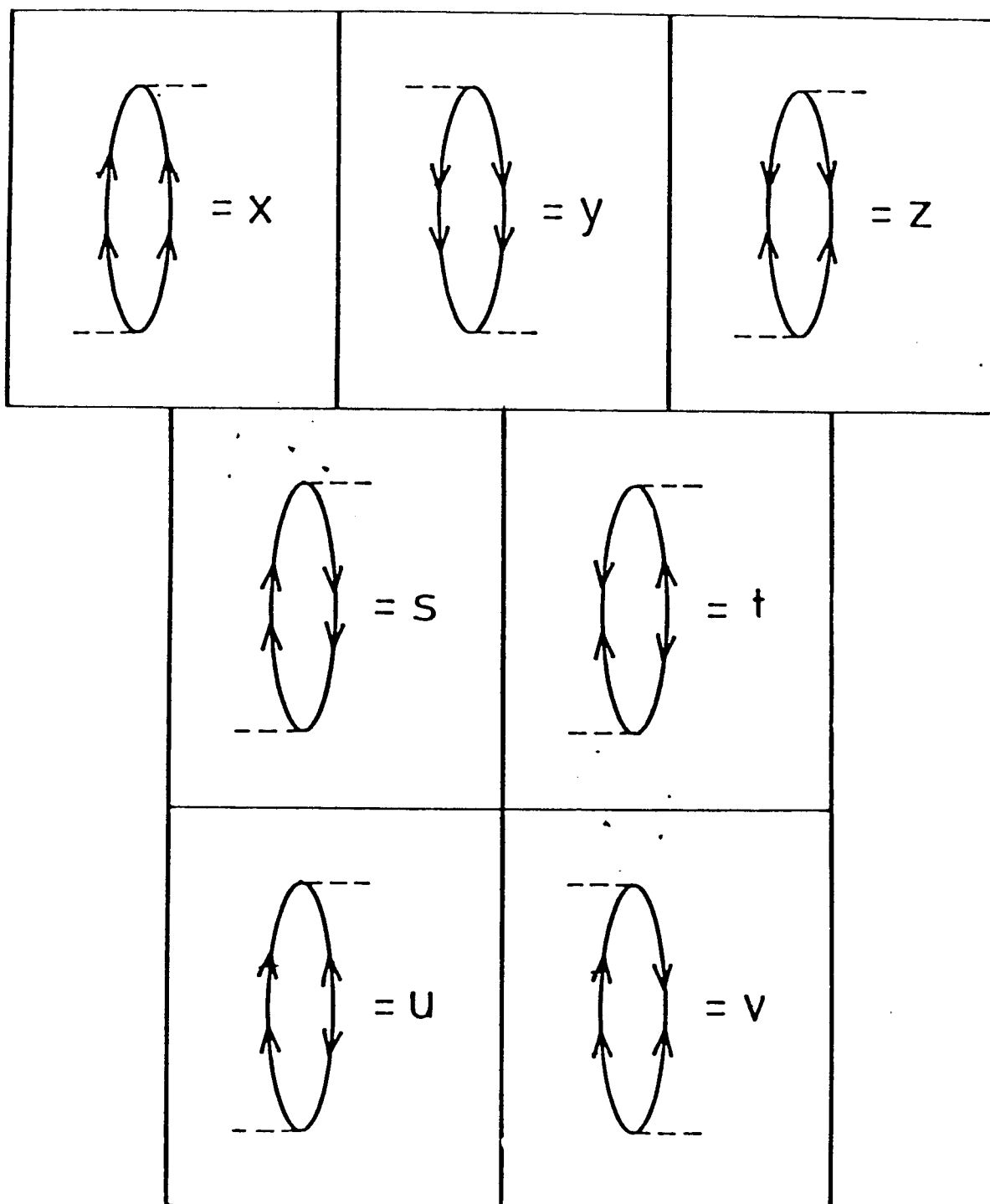


FIG. 23

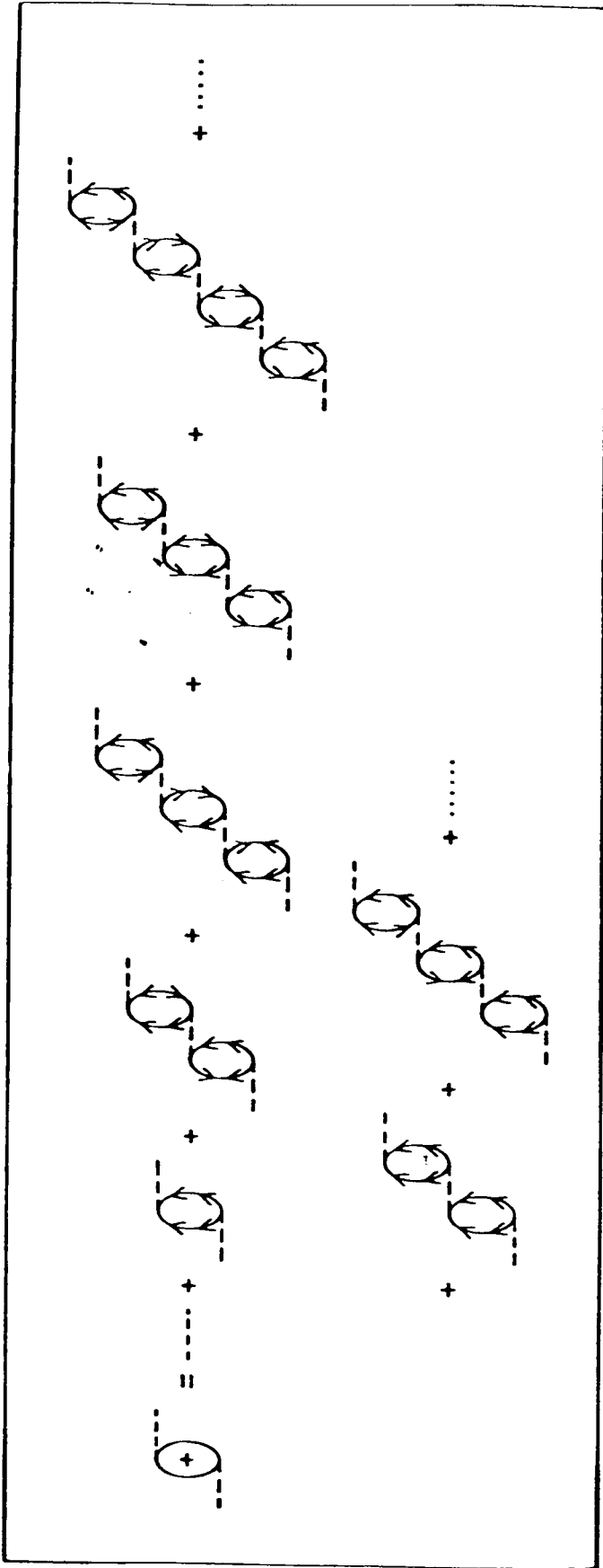


FIG. 24

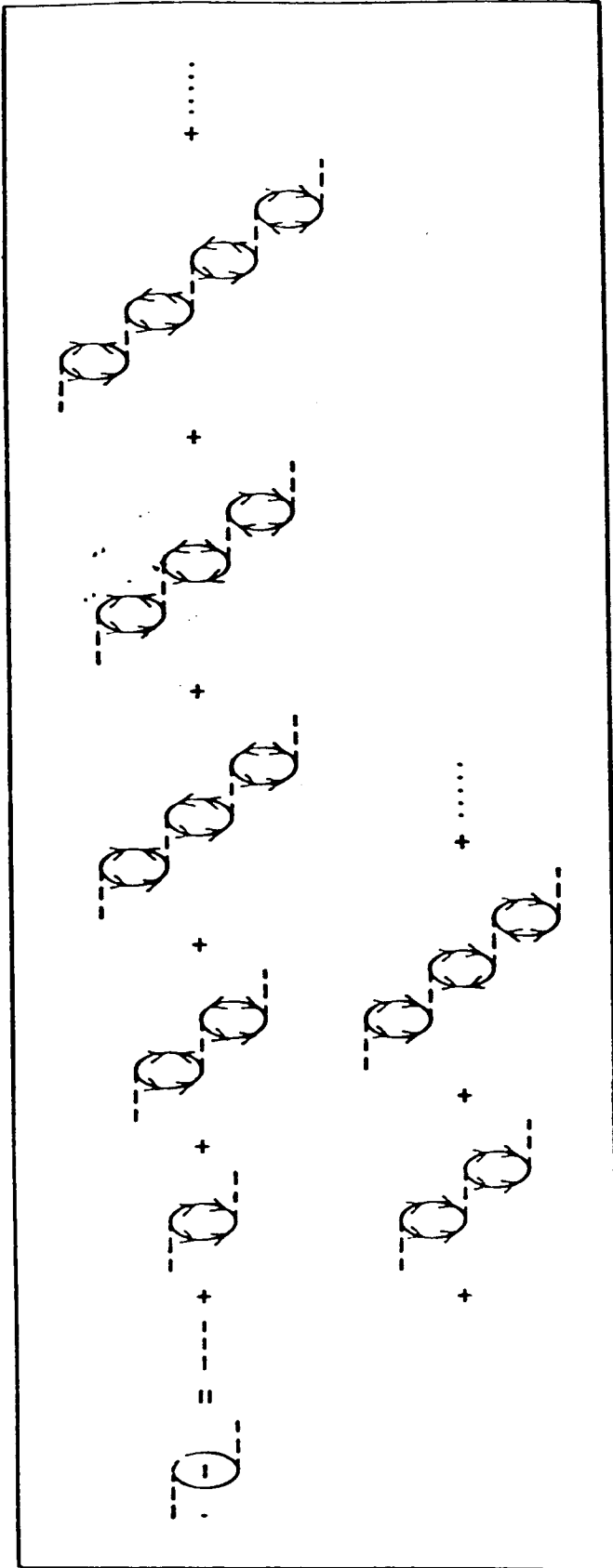


FIG. 25

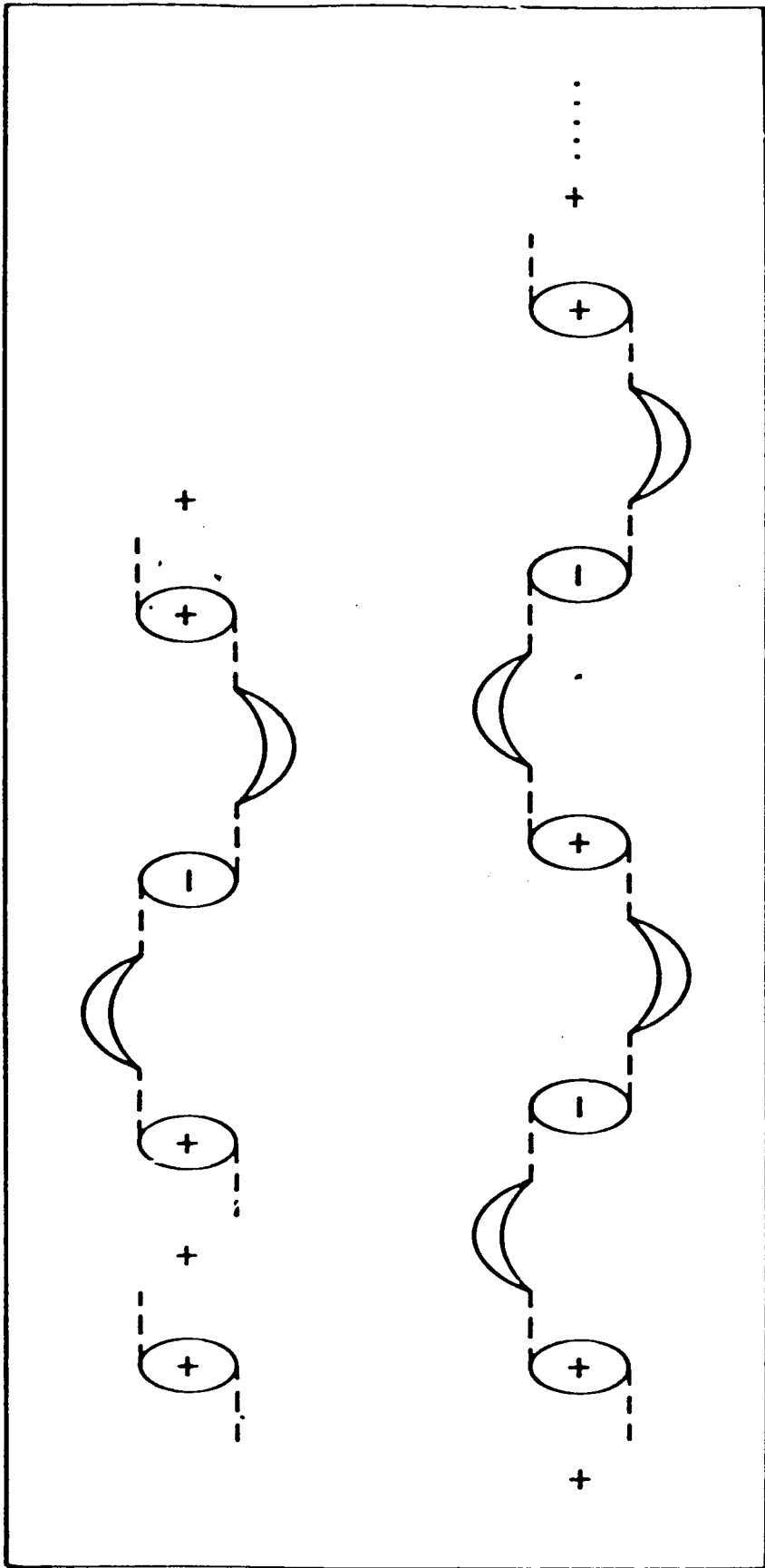


FIG. 27

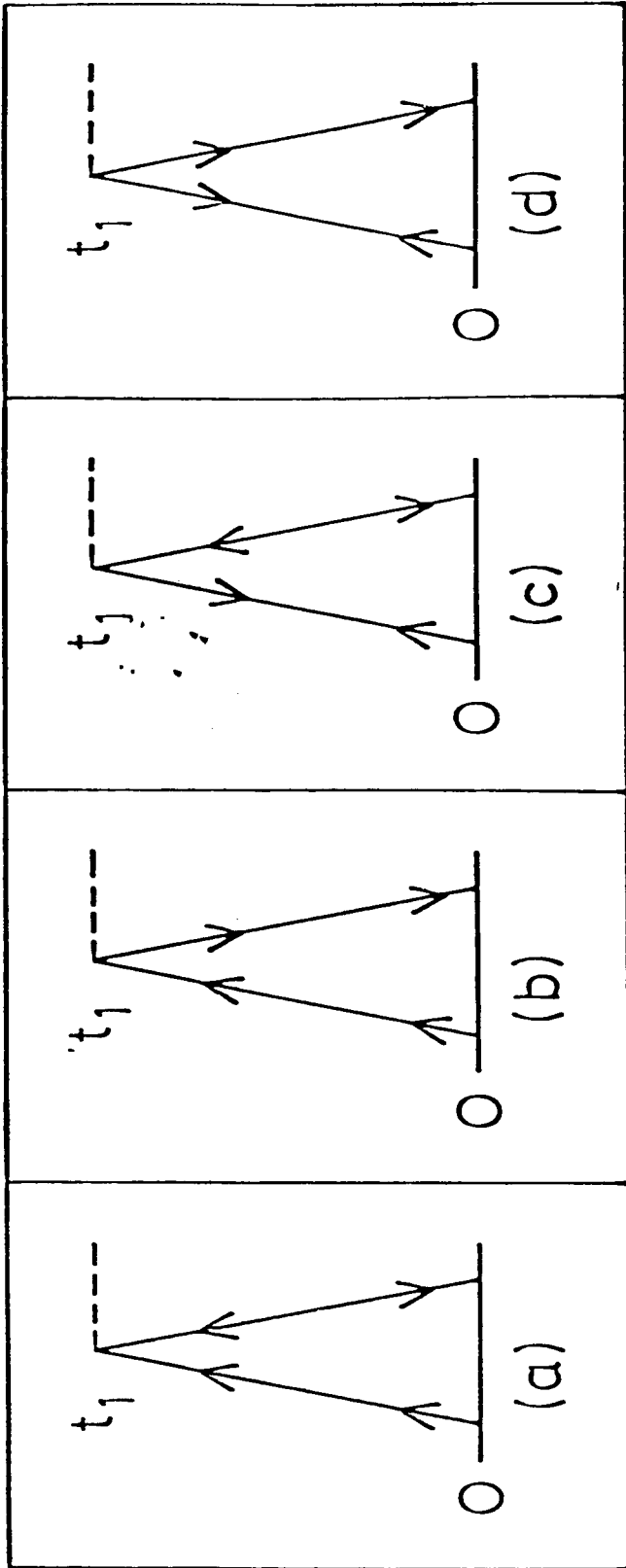


FIG. 28