

01.74.24

A) REGLAS DE SUMA CONSISTENTES DE PARAMETRO CONTINUO

B) DUALIDAD SEMILOCAL EN EL MODELO DE VENEZIANO Y
APLICACIONES A REACCIONES INCLUSIVAS

TESIS

MARTA CZEKALSKI DE ACHTERBERG

INSTITUTO DE FISICA " J. A. BALSEIRO"

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

SAN CARLOS DE BARILOCHE - RIO NEGRO - ARGENTINA

1974

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

A) REGLAS DE SUMA CONSISTENTES DE PARAMETRO CONTINUO

B) DUALIDAD SEMILOCAL EN EL MODELO DE VENEZIANO Y APLICACIONES
A REACCIONES INCLUSIVAS

TESIS

MARTA CZEKALSKI DE ACHTERBERG



DR. CONSTANTINO FERRO FONTAN
ASESOR CIENTIFICO

MARTA CZEKALSKI DE ACHTERBERG

M Cde A.

Marta Czekalski de Achterberg

Doctoranda

Resumen

En la primera parte de este trabajo, se presenta una derivación sencilla y completamente general de reglas de suma auto-consistentes, que utilizan solamente la parte imaginaria de la amplitud. Se demuestra que cualquiera de ellas es equivalente a una superposición de reglas de suma de energía finita, de momento entero. Se discute, como ejemplos, la aplicación a las reglas de suma de momento continuo, y a las reglas de suma de momento oscilante de García y Másperi.

A fin de ensayar la efectividad y equivalencia de la formulación de las reglas de suma, se la aplica, usando la función de peso de García y Másperi, a la amplitud de dispersión hacia adelante Compton, promediada sobre el spin. Se encuentran los parámetros de los polos P y P' , y la presencia de un polo fijo en $J = 0$, consistente con el límite de Thomson. Los resultados obtenidos están de acuerdo con aquéllos resultantes del uso de reglas de suma de energía finita, de momento entero, confirmando la equivalencia predicha.

En la segunda parte de este trabajo se estudia las propiedades de dualidad semilocal de las amplitudes de Veneziano, en el sentido de comparar promedios sobre las resonancias con el comportamiento de Regge. Se analiza tanto la amplitud correspondiente a cuatro partículas, como al caso de secciones eficaces inclusivas de una partícula, incluyendo la contribución de las trayectorias hijas. Como consecuencia se aclara el origen de la discrepancia que aparece en las reglas de suma de energía finita (para cuatro partículas) o de masa finita (para procesos inclusivos) aplicadas a la amplitud de Veneziano, al nivel de la segunda y sucesivas hijas.

Se analiza, para el caso inclusivo, la contribución del diagrama dual árbol simétrico con resonancias en el canal s , considerando que el producto de las resonancias en el canal a b y $\bar{a}$ $\bar{b}$ se puede reemplazar por una función delta, según la aproximación de resonancias de anchos pequeños. Se encuentra un resultado no sa-

tisfactorio asintóticamente, por producirse una violación del "scaling", y una contribución a la zona de pionización que decrece a lo sumo como una potencia de t . Estas dificultades podrían resolverse si los anchos de las resonancias crecen con la energía, de modo que la interferencia entre las mismas se vuelva importante. Se discute la posible influencia de este efecto en los criterios para determinar cuándo una distribución inclusiva alcanza el "scaling" a baja energía.

Indice

	pag.
<u>PARTE A - REGLAS DE SUMA CONSISTENTES DE PARAMETRO CONTINUO</u>	1
CAPITULO I - PROPIEDADES DE LA AMPLITUD DE DISPERSION	1
Definiciones y cinemática	1
La matriz de dispersión S	3
Relación de unitariedad y teorema óptico	5
Propiedad de cruce	7
Analicidad y representación de Mandelstam	8
 CAPITULO II - FORMALISMO DE REGGE	12
Transformada de Sommerfeld - Watson - Comportamiento asintótico	12
Fórmula de Froissart - Gribov	15
Dispersión de partículas con spin	16
Unitariedad y polos fijos	17
 CAPITULO III - REGLAS DE SUMA Y RELACIONES DE DISPERSION	19
Introducción	19
Reglas de suma de energía finita	20
Relaciones de superconvergencia	21
Reglas de suma de momento continuo, CMSR	22
Regla de suma de García - Masperi	24
Reglas de suma autoconsistentes	25
 CAPITULO IV - DISPERSION COMPTON HACIA ADELANTE	28
Introducción	28
Desarrollo de Regge y polos fijos	29
 CAPITULO V - DERIVACION SIMPLE Y GENERAL DE REGLAS DE SUMA CONSISTENTES DE PARAMETRO CONTINUO	33
Introducción	33
Reglas de suma arbitrarias como superposición de FESR	34
Algunos ejemplos	38
Regla de suma para dispersión Compton	40
Conclusiones	42
Nota agregada	43

PARTE B - DUALIDAD SEMILOCAL EN EL MODELO DE VENEZIANO Y

<u>APLICACIONES A REACCIONES INCLUSIVAS</u>	45
CAPITULO VI - REACCIONES INCLUSIVAS - CINEMATICA Y DEFINICIONES	45
Cinemática de reacciones inclusivas	45
Descripción en términos de variables relacionadas con el impulso longitudinal de c	46
Zonas de fragmentación	47
Zonas de Triple Regge	50
Zona central o de pionización	50
Variable y o "rapidez"	50
CAPITULO VII - ESPECTROS INCLUSIVOS - DEFINICIONES - CARACTERISTICAS	52
Fragmentación límite y "scaling"	53
Hipótesis de longitud de correlación	55
CAPITULO VIII - ANALISIS DE MUELLER - FORMALISMO DE REGGE - REGLAS DE SUMA EN REACCIONES INCLUSIVAS	57
Análisis de Mueller	57
Desarrollo en $O(2, 1)$ simple	58
Desarrollo en $O(2, 1)$ doble	59
Aplicación a reacciones inclusivas de una partícula	60
Región central	61
Zona de fragmentación de a	64
Zona de Triple Regge	66
Reglas de suma de M^2 finito	68
CAPITULO IX - MODELO DUAL DE RESONANCIAS ANGOSTAS - GENERALIZACION A MUCHAS PARTICULAS	72
Generalización de la amplitud de Veneziano a más de 4 partículas	73
Representación de Hopkinson - Plahte	77
NRDM para seis partículas	78
Aplicación del NRDM a las secciones inclusivas	79
CAPITULO X - PROPIEDADES DE DUALIDAD Y "SCALING" A BAJA ENERGIA	84
Propiedades duales de amplitudes de 4 partículas	84
Propiedades duales de los espectros inclusivos	86

Predicciones de "scaling" a baja energía: esquema de Chen Hong Mo (CHQM)	87
Criterio de Einhorn, Green y Virasoro	89
Esquema de Gallardo y Masperi	89
CAPITULO XI - DUALIDAD SEMILOCAL Y PROBLEMAS DE F.E.S.R.	
EN EL MODELO DE VENEZIANO	94
Amplitud de 4 partículas	94
Procesos inclusivos de una partícula	96
Otras permutaciones del gráfico en árbol	104
Agradecimientos	109
Referencias	110

PARTE A - REGLAS DE SUMA CONSISTENTES DE PARAMETRO CONTINUO

CAPITULO I - PROPIEDADES DE LA AMPLITUD DE DISPERSION

1) Definiciones y cinemática

En una reacción donde intervienen N partículas, de impulsos $p_1 \dots p_N$, como indica la figura I.1:

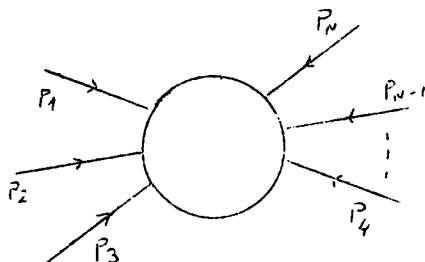


figura I.1

se tendría $4N$ variables, es decir las componentes de los N impulsos. Estas variables no son independientes, ya que están ligadas por las 4 condiciones de conservación de energía e impulso:

$$\sum_i p_i = 0 \quad (I.1)$$

y las N condiciones provenientes de colocar las N partículas sobre la capa de masas:

$$p_i^2 = m_i^2 \quad (I.2)$$

siendo m_i la masa de la partícula i 'ésima.

La invariancia de la teoría frente a las transformaciones de Lorentz nos permite, además, eliminar 6 variables, eligiendo, por ejemplo, uno de los cuadvectores con las tres componentes espaciales nulas, otro con dos nulas y otro más con una componente nula. En suma, todas las cantidades independientes del sistema de referencia considerado, serán función solamente de $3N - 10$ variables.

En el caso de una reacción de 2 partículas yendo a 2 partículas, el número de variables independientes es igual a 2 (excluyendo las variables de spin). Ello se puede ver particularmente bien observando la reacción en el sistema de centro de masa. En este sistema las partículas incidentes, 1 y 2, tienen impulsos, respectivamente:

$$p_1 = (\sqrt{m_1^2 + k^2}, 0, 0, k) \quad p_2 = (\sqrt{m_2^2 + k^2}, 0, 0, -k)$$

y las partículas emergentes, 3 y 4, tienen impulsos espaciales iguales en módulo y de direcciones opuestas, cuyo módulo, k' , es función solamente de la energía incidente, $E = E_1 + E_2$, y de las masas m_3 y m_4 ⁽¹⁾; girados respecto a los impulsos incidentes en un ángulo θ , como indica la figura I.2:

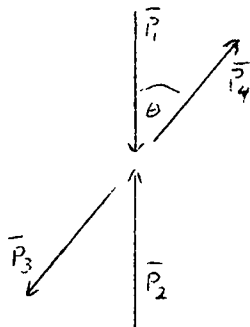


figura I.2

A fin de trabajar con variables invariantes relativistas, se introducen las variables de Mandelstam (considerando

p_1 y p_2 entrantes y p_3 y p_4 salientes):

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2$$

(I.3)

de las que sólo dos son independientes, siendo fácil probar, usando I.1 y I.2, que:

$$s + t + u = \sum = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$$

(I.4)

La variable s resulta igual al cuadrado de la energía total en el centro de masa, mientras que t está relacionada con el ángulo θ de la forma:

$$t = \frac{1}{2s} \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} \sqrt{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)} \cos \theta + m_1^2 + m_3^2 - \frac{1}{2s} (s + m_1^2 - m_2^2)(s + m_3^2 - m_4^2) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{s}{2} (\cos \theta - 1)$$

(I.5)

donde $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz$

En el caso en que $m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$ (dispersión elástica), I.5 se reduce a:

$$\cos \theta = 1 + \frac{2st}{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1 + \frac{2t}{s} \quad (\text{I.6})$$

Evidentemente, los valores físicos que puede tomar s son:

$$s \geq (m_1 + m_2)^2 \quad (\text{I.7})$$

y para cada valor de s , los de t están determinados por la condición:

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \quad (\text{I.8})$$

De la forma asintótica I.5 se puede ver que, por lo menos para s grande, debe ser:

$$t \leq 0 \quad (\text{I.9})$$

y de I.4 resulta que, para s grande y $|t|$ pequeño, debe ser

$$u \leq 0 \quad (\text{I.10})$$

2) La matriz de dispersión S

Supongamos una reacción donde una cierta configuración de partículas en un estado α pasa a una configuración de partículas diferente, en el estado β . El hecho de que las fuerzas involucradas son de corto alcance permite considerar a α y β como estados de partículas libres, de impulsos definidos. Se define el elemento de matriz $S_{\beta\alpha}$ como la amplitud de probabilidad de que en la colisión se pase del estado α al estado β . Es decir que la probabilidad de transición del estado α al β está dada por:

$$P_{\beta\alpha} = |\langle \beta | S | \alpha \rangle|^2 \quad (\text{I.11})$$

La matriz S se puede representar de la forma:

$$S_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) T_{\beta\alpha} \quad (\text{I.12})$$

donde p_α , p_β son los cuadrimpulsos de los estados inicial y final.

La probabilidad de transición de $|\alpha\rangle$ a $|\beta\rangle$, por unidad de tiempo, está dada por:

$$\begin{aligned} P_{\beta\alpha} &= |(2\pi)^4 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) \langle \beta | T | \alpha \rangle|^2 = \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) |\langle \beta | T | \alpha \rangle|^2 \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

con la regla usual para el cuadrado de la función delta ⁽⁹⁰⁾ para funciones de onda normalizadas en una caja de volumen uno. Si el estado inicial consiste de dos partículas de cuadrimpulsos p_1 y p_2 , y el estado final de un número arbitrario de partículas, N , de impulsos p_i , se obtiene, con la normalización relativista:

$$P_{\beta\alpha} = (2\pi)^4 \int \prod_i \left[\frac{d^3 p'_i}{2 p'_{0i} (2\pi)^3} \right] |\langle p'_1 \dots p'_N | T | p_1 p_2 \rangle|^2 \times \\ \times \delta(p_\beta - p_1 - p_2) \quad (I.14)$$

El flujo inicial de partículas, medido en el sistema del centro de masa, está dado por:

$$4 E_1 E_2 |v_1 - v_2|_{c.m.} = 4 q_{12} \sqrt{s} \quad (I.15)$$

siendo q_{12} el módulo del tri-impulso, en su centro de masa, de las partículas que inician la reacción. Entonces, la sección eficaz de dispersión de $|\alpha\rangle$ a $|\beta\rangle$ es:

$$\sigma = \frac{\text{Probabilidad de transición por unidad de tiempo}}{\text{Flujo de las partículas incidentes}} = \\ = \frac{(2\pi)^4}{4 q_{12} \sqrt{s}} \int \prod_i \left[\frac{d^3 p'_i}{2 p'_{0i} (2\pi)^3} \right] |\langle p'_1 \dots p'_N | T | p_1 p_2 \rangle|^2 \times \\ \times \delta^4(p_\beta - p_1 - p_2) \quad (I.16)$$

En el caso de dos partículas en el estado final, con impulsos p_3 y p_4 :

$$\sigma = \frac{1}{(8\pi)^2 q_{12} \sqrt{s}} \int \frac{d^3 p_3 d^3 p_4}{E_3 E_4} |\langle p_3 p_4 | T | p_1 p_2 \rangle|^2 \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \quad (I.17)$$

siendo E_3 y E_4 las energías en centro de masa de las partículas 3 y 4.

Utilizando la δ^4 se puede realizar cuatro integrales, quedando:

$$\sigma = \frac{q_{34}}{(8\pi)^2 q_{12} s} \int |\langle p_3 p_4 | T | p_1 p_2 \rangle|^2 d\Omega \quad (I.18)$$

donde q_{34} es el módulo del tri-impulso de las partículas 3 y 4 en el centro de masa.

$\langle p_3 p_4 | T | p_1 p_2 \rangle$ es un invariante Lorentz, que ponemos igual a $A(s, t)$, quedando:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q_{34}}{q_{12}} \frac{1}{(8\pi)^2 S} |A(s,t)|^2 \quad (I.19)$$

y, en términos de los invariantes:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64 \pi s q_{12}^2} |A(s,t)|^2 \quad (I.20)$$

que se obtiene expresando el ángulo de dispersión en función de s y t .

3) Relación de unitariedad y teorema óptico

Partiendo de un estado $|\alpha\rangle$, la suma de las probabilidades de transición a cualquier otro estado $|n\rangle$ (incluido $|\alpha\rangle$) debe ser igual a uno:

$$\sum_n |S_{n\alpha}|^2 = 1 \quad (I.21)$$

Es decir:

$$\begin{aligned} \sum_n \langle n|S|\alpha\rangle^* \langle n|S|\alpha\rangle &= \sum_n \langle \alpha|S^\dagger|n\rangle \langle n|S|\alpha\rangle = \\ &= \langle \alpha|S^\dagger S|\alpha\rangle = 1 \end{aligned} \quad (I.22)$$

Como la última igualdad debe verificarse cualquiera sea $|\alpha\rangle$, debe ser:

$$S^\dagger S = S S^\dagger = 1 \quad (I.23)$$

es decir, la matriz S es unitaria.

Al mismo resultado se puede llegar, teniendo en cuenta que S relaciona dos bases ortonormales completas, la de los estados finales y la de los iniciales.

Reemplazando I.12 en I.23, se obtiene la relación de unitariedad para la matriz T :

$$\begin{aligned} \langle \beta|T - T^\dagger|\alpha\rangle &= \langle \beta|T|\alpha\rangle - \langle \alpha|T|\beta\rangle^* = \\ &= i (2\pi)^4 \sum_n S^4(P_\alpha - P_n) \langle \beta|T^\dagger|n\rangle \langle n|T|\alpha\rangle \end{aligned} \quad (I.24)$$

La invariancia de las interacciones fuertes ante transformaciones P T , nos permite poner:

$$\langle \alpha|T|\beta\rangle = \langle \beta|T|\alpha\rangle$$

Luego:

$$\text{Im} \langle \beta | T | \alpha \rangle = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_n \delta^4(p_\alpha - p_n) \langle \beta | T^\dagger | n \rangle \times \\ \times \langle n | T | \alpha \rangle \quad (\text{I.25})$$

Los estados $|n\rangle$ pertenecen al conjunto completo de estados con las partículas en la capa de masa. Si la energía no es suficiente para crear estos estados en la capa de masas, los términos correspondientes del lado derecho de I.25 son nulos. El valor mínimo de s necesario para producir el estado $|n\rangle$ con las partículas en la capa de masas se llama umbral de la reacción $|\alpha\rangle \longrightarrow |n\rangle$. Por debajo de todos los umbrales, $A(s, t)$ es real, salvo polos en los valores de la energía correspondientes a la masa de un estado intermedio $|n\rangle$ de una partícula.

Siendo la amplitud real debajo del primer umbral (excluyendo polos), el principio de continuación analítica nos permite escribir:

$$A(s, t)^* = A(s^*, t) \quad (\text{I.26})$$

De donde se deduce que, por encima del primer umbral, $A(s, t)$ es discontinua. En efecto, sobre el eje real de s se tiene, por encima del umbral elástico, una discontinuidad dada por:

$$\Delta_s(s, t) = 2i \text{Im} A(s, t) \quad (\text{I.27})$$

El residuo de los polos correspondientes a una partícula en el estado intermedio $|n\rangle$ viene dado también por el término correspondiente en I.25.

Si el estado final coincide con el estado inicial, se tiene, de I.25:

$$\text{Im} \langle \alpha | T | \alpha \rangle = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_n \delta^4(p_\alpha - p_n) |\langle n | T | \alpha \rangle|^2 \quad (\text{I.28})$$

El miembro derecho de esta relación es igual a $\frac{1}{2}$ por la probabilidad de transición a cualquier estado final $|n\rangle$, según se desprende de I.13. Luego, usando la definición de G , I.16, se tiene:

$$\text{Im} \langle \alpha | T | \alpha \rangle = \text{Im} A_{\text{elástico}}(s, t=0) = \\ = 2 q_{12} \sqrt{s} \sigma_{\text{total}}(s) \quad (\text{I.29})$$

Esta relación se conoce como el teorema óptico, siendo $\sigma_{\text{total}}(s)$ la sección eficaz total de dispersión de 1 con 2. Describe la atenuación del haz incidente, debida a la dispersión que se produce.

4) Propiedad de cruce

Considerando la reacción $1 + 2 \longrightarrow 3 + 4$, obteníamos un rango de variación de s y t (y, por lo tanto de u). Llamemos a esta reacción, la reacción del canal s , y consideremos la reacción $1 + \bar{3} \longrightarrow \bar{2} + 4$, donde $\bar{3}$ y $\bar{2}$ son las antipartículas de 3 y 2 respectivamente. Podemos describirla en términos de los mismos invariantes, s , t y u , si reemplazamos:

$$p_{\bar{2}} = -p_2 \quad p_{\bar{3}} = -p_3$$

Ahora t representará el cuadrado de la energía en centro de masa, mientras que s y u serán transferencias de impulso al cuadrado.

Deberá ser $t \geq (m_1 + m_3)^2$, $s < 0$, $u < 0$.

A este canal lo llamamos canal t .

Si consideramos la reacción $1 + \bar{4} \longrightarrow \bar{2} + 3$, y

hacemos:

$$p_{\bar{2}} = -p_2 \quad p_{\bar{4}} = -p_4$$

obtendremos que u es el cuadrado de la energía en centro de masa, y s y t son transferencias de impulso. Será: $u \geq (m_1 + m_4)^2$, $s < 0$ y $t < 0$. A este canal lo llamamos canal u .

Es decir que las tres reacciones de los canales s , t y u son descritas por las mismas tres variables, pero tomadas en zonas físicas distintas, que no se superponen.

La propiedad de cruce asegura que las tres reacciones pueden ser descritas por una sola función analítica, tomando para cada canal los valores físicos correspondientes. Para que ello sea posible es necesario que el dominio de analiticidad en los cuadririmpulsos p_i sea tal, que se pueda pasar de la zona física de un canal a la zona física de otro. A partir de los axiomas de teoría de campos es posible probar que esto se cumple ⁽²⁾.

Considerando la amplitud de dispersión $A(s, t)$ como función de los cuadririmpulsos, y llamando a las amplitudes en el canal s y t , respectivamente:

$$A^S(p_1, p_2; p_3, p_4) \quad A^t(p_1, p_3; p_2, p_4)$$

la propiedad de cruce se expresa:

$$A^S(p_1, p_2; p_3, p_4) = [A^t(p_1, p_3; p_2, p_4)]^*$$

continuada analíticamente en p_2, p_3 hasta $p_2 = -p_2^*, p_3 = -p_3^*$

Se puede adquirir una idea del motivo de la propiedad de cruce, recordando que en teoría de campos un operador de creación está asociado con un factor $\exp(ikx)$ y un operador de destrucción con $\exp(-ikx)$ ⁽⁹¹⁾. En una amplitud como A^S , las partículas 1 y 2 deben ser aniquiladas, resultando factores $\exp(-ip_1x)$ y $\exp(-ip_2x')$, mientras las partículas 3 y 4 son creadas, resultando factores $\exp(ip_3y)$ y $\exp(ip_4y')$. Un argumento similar aplicado a A^t da factores $\exp(-ip_1x)$, $\exp(-ip_3x')$, $\exp(ip_2y)$ y $\exp(ip_4y')$. La comparación de los argumentos da la regla de reemplazar los impulsos de las antipartículas por el de las partículas correspondientes cambiado de signo.

5) Analicidad y Representación de Mandelstam

Ya se ha visto que la unitariedad genera un corte en $A(s, t)$, en el eje real positivo de s , por encima del umbral elástico, y polos debajo del mismo. En la segunda hoja de Riemann se hallan los polos próximos a la zona física, que dan origen a las resonancias. La propiedad de cruce impone a la amplitud también las singularidades generadas por la unitariedad en los canales t y u , de modo que la estructura analítica de $A(s, t)$ en la hoja física del plano s , a t constante, es la indicada en la figura I.3, tomando como ejemplo la dispersión elástica pión - nucleón:

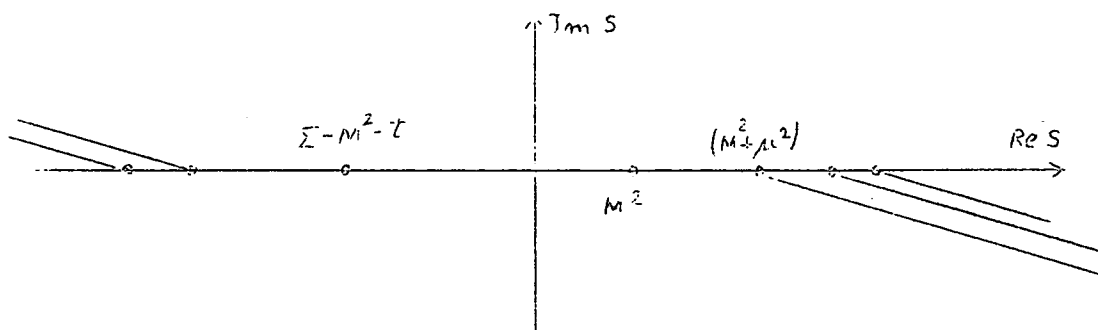


figura I.3

M : masa del nucleón

μ : masa del pión

No ha sido posible, partiendo de los axiomas básicos de teoría de campos, probar la analiticidad de la amplitud, aparte de las singularidades impuestas por la unitariedad, en regiones extensas del dominio complejo de las variables s , t y u . Por ello se adopta el punto de vista de postular la máxima analiticidad de primera especie. Según este postulado, las únicas singularidades de las amplitudes de dispersión son las exigidas por la unitariedad en todos los canales.

La aplicación del teorema de Cauchy permite expresar la amplitud en términos de las discontinuidades sobre sus cortes y de los residuos de sus polos, obteniéndose la relación de dispersión:

$$A(s, t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{D_s(s', t) ds'}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int \frac{D_u(u', t) du'}{s' - s} \quad (\text{I.30})$$

$$D_s(s, t) = \frac{1}{2i} \Delta_s(s, t) \quad D_u(u, t) = \frac{1}{2i} \Delta_u(u, t) \quad (\text{I.31})$$

Las integrales de I.30 recorren los polos y cortes del canal s (a la derecha en la figura I.3) y del canal u (a la izquierda en la misma figura). Ello es cierto si el comportamiento de la amplitud es suficientemente convergente para que la integral sobre el círculo en el infinito se anule. Si ello no ocurre, pero:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|A(s, t)|}{s^N} = 0$$

se puede realizar sustracciones, es decir, expresar la relación de dispersión para $A(s, t) [(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_N)]^{-1}$.

Queda entonces, ignorando por el momento los polos:

$$A(s, t) \prod_{i=1}^N (s - s_i)^{-1} = \sum_{j=1}^N \frac{A(s_j, t)}{s - s_j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N (s_j - s_i)^{-1} + \frac{1}{\pi} \int \frac{D_s(s', t) ds'}{(s' - s_1) \dots (s' - s_N)(s' - s)} + (\text{canal } u) \quad (\text{I.32})$$

Para t suficientemente negativo, los cortes del canal u y del canal s se recubren parcialmente. El salto de la amplitud, al pasar del semiplano inferior al superior, sigue siendo $2i \operatorname{Im} A(s, t)$, y en la zona de recubrimiento de ambos canales, la

discontinuidad será la suma de las discontinuidades sobre ambos cortes, quedando:

$$\Im A(s, t) = D_s(s, t) - D_u(u, t) \quad (\text{I.33})$$

donde los canales se recubren, y en lo que resta de los cortes:

$$\begin{aligned} \Im A(s, t) &= D_s(s, t) & (\text{canal } s) \\ \Im A(s, t) &= -D_u(u, t) & (\text{canal } u) \end{aligned} \quad (\text{I.34})$$

En las fórmulas I.33 y I.34, $\Im A(s, t)$ se refiere al labio superior de las cortaduras en el plano s . Obviamente, D_s y D_u deben ser reales en la zona no común de ambos canales, pudiendo ser complejos en la zona común, siempre que $D_s - D_u$ sea una función real.

En un polo:

$$A^{\text{polo}}(s, t) \sim \frac{g^2}{s - M^2} = g^2 \left\{ P \frac{1}{s - M^2} - i\pi \delta(s - M^2) \right\} \quad (\text{I.35})$$

y en consecuencia

$$D_s^{\text{polo}}(s, t) = -\pi g^2 \delta(s - M^2)$$

El principio de máxima analiticidad exige que D_s , D_u y D_t también presenten puntos de ramificación, de modo que, por ejemplo, $D_s(s, t)$ tiene un corte en t y otro en u . Suponiendo que no es necesario realizar sustracciones, se tiene entonces:

$$D_s(s, t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\rho_{ut}(u, t') dt'}{t' - t} + \frac{1}{\pi} \int \frac{\rho_{us}(u, s') ds'}{u' - u} \quad (\text{I.36})$$

Análogamente puede escribirse que

$$D_u(u, t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\rho_{ut}(u, t') dt'}{t' - t} + \frac{1}{\pi} \int \frac{\rho_{us}(u, s') ds'}{s' - s} \quad (\text{I.37})$$

y una expresión similar para D_t . Las funciones dobles espectrales,

ρ , son distintas de cero sólo en los puntos que están simultáneamente por encima de los umbrales de dos canales. Como fuera de estas regiones, las discontinuidades D_s , D_t y D_u son reales, las funciones espectrales serán simplemente las partes imaginarias de las D y, por lo tanto, reales. También resulta que deben ser simétricas en sus subíndices, para que se cumpla I.33. Combinando las ecuaciones I.33, I.36 y I.37, tras un breve manipuleo resulta:

$$A(s,t) = \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{st}(s',t') ds' dt'}{(s'-s)(t'-t)} + \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{su}(s',u') ds' du'}{(s'-s)(u'-u)} +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{tu}(t',u') du' dt'}{(t'-t)(u'-u)} \quad (I.38)$$

que es la representación de Mandelstam ⁽³⁾ de la amplitud de dispersión.

CAPITULO II - FORMALISMO DE REGGE

1) Transformada de Sommerfeld - Watson - Comportamiento asintótico

Considerando, por simplicidad, partículas sin spin, y de masas iguales, observando la reacción en el canal t , se tiene:

$$s = (p_1 - p_2)^2 = -2 k_t^2 (1 - \cos \theta_t)$$

$$t = (p_1 + p_3)^2 = 4(k_t^2 + m^2) \quad (II.1)$$

La amplitud $A^t(s, t)$ puede ponerse:

$$A^t(s, t) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l(t) P_l(\cos \theta_t) \quad (II.2)$$

Se desea continuar esta expresión, desde los valores físicos del canal t , a la zona asintótica del canal s , lo que corresponde a hacer $\cos \theta_t \rightarrow -\infty$.

EN II.2, $A_l(t)$ cambia poco presumiblemente en esta continuación analítica, mientras que $P_l(\cos \theta_t)$, para valores grandes del argumento, arruina la convergencia de la serie. A fin de obtener un mayor dominio de convergencia, se aplica la transformación de Sommerfeld - Watson, que consiste en poner:

$$A^t(s, t) = -\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} (2l+1) A_l(t) \frac{P_l(-\cos \theta_t)}{\sin \pi l} dl \quad (II.3)$$

siendo Γ la curva indicada en la figura II.1:

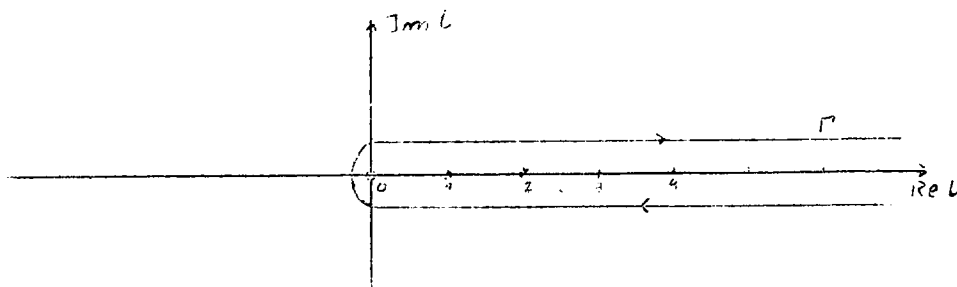


figura II.1

Se observa que la suma de los residuos en $l = 0, 1, \dots$ da el segundo miembro de II.2, cambiado de signo.

Si se cierra la curva Γ como indica la figura II.2, se obtiene que:

$$A^t(s, t) = 2\pi i \sum_i \text{Res}(\alpha_i) - \int_A - \int_B + \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty}$$

donde α_i son las posiciones de los polos de Regge en el semiplano superior de l .

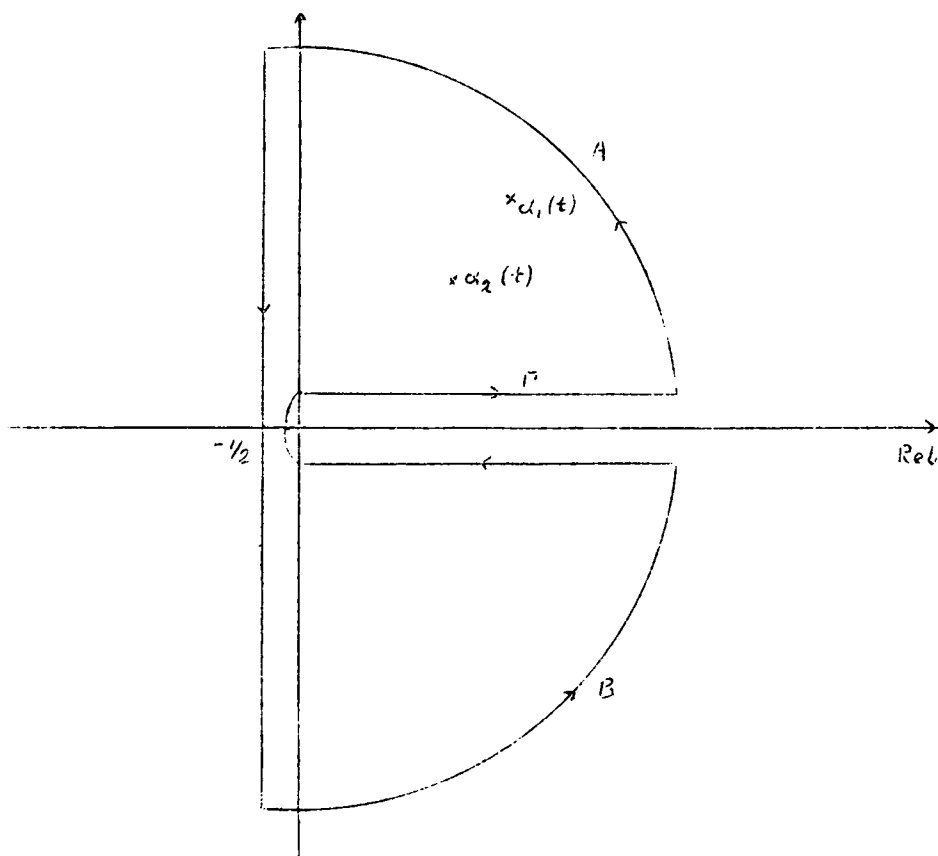


figura II.2

Suponiendo que las integrales sobre A y B se anulan (como ocurre para una amplitud de dispersión por un potencial tipo Yukawa ⁽⁴⁾), queda:

$$A^t(s, t) = \sum_i \frac{\beta'_i(t)}{\sin \pi \alpha_i(t)} P_{\alpha_i}(-\cos \theta_t) + \int_{-1/2 - i\infty}^{-1/2 + i\infty} (zL+1) A_L(t) \frac{P_L(-\cos \theta_t)}{\sin \pi L} dL \quad (\text{II.4})$$

$\beta'_i(t)$ contiene el residuo de $A_L(t)$ en $L = \alpha_i$, y la integral sobre el camino vertical se llama "background" de Regge, y contribuye a la zona asintótica, como $|\cos \theta_t|^{-1/2}$.

Puede verse en muchos ejemplos, que solamente las ondas pares o impares contribuyen a la amplitud; esto es equivalente, en teoría de potencial, a la existencia de fuerzas de intercambio, es decir tales que resulta diferente según la simetría de los estados, $(-1)^L$. Esto quiere decir que deberíamos encontrar una función analítica $A_L(t)$ que, por ejemplo, para $L = n$ par reproduzca la amplitud física, y que para $L = n$ impar sea cero. Por un teorema debido a Carlson ⁽⁵⁾, tal función no puede existir. Es necesario, por lo tanto, interpolar separadamente para valores pares e impares de L , denominándose cada contribución de signatura más o menos, respectivamente.

$$\begin{aligned} \Lambda_t^{\pm}(s, t) &= \Lambda_t^{+}(s, t) + \Lambda_t^{-}(s, t) \\ \Lambda_t^{+}(s, t) &= \sum_{l \text{ par}} (2l+1) A_l^{+}(t) P_l(\cos \theta_t) \\ \Lambda_t^{-}(s, t) &= \sum_{l \text{ impar}} (2l+1) A_l^{-}(t) P_l(\cos \theta_t) \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

entonces:

$$A_l^{\pm}(s, t) = - \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} (2l+1) A_l^{\pm}(t) \frac{\frac{1}{2} \{ P_l(-\cos \theta_t) \pm P_l(\cos \theta_t) \} dl}{\sin \pi l} \quad (\text{II.6})$$

siendo Γ la curva de la figura II.1. Si ahora se considera el circuito de la figura II.2, los polos de $A_l^{+}(t)$ contribuirán a Λ_t^{+} y los polos de $A_l^{-}(t)$ contribuirán a Λ_t^{-} . Conviene acotar que, puesto que la paridad de un estado ligado o resonancia es $P = \pi(-1)^L$, con π paridad intrínseca de las partículas incidentes, una trayectoria de Regge con signatura definida puede conectar solamente partículas de la misma paridad.

La contribución de un polo de Regge a la amplitud (despreciando el "background") será entonces:

$$\begin{aligned} [A^S(s, t)]^* &= \Lambda^t(s, t) \text{ continuada a } s \rightarrow \infty, t < 0 = \\ &= -\pi (2\alpha_{\pm} + 1) \gamma^{\pm}(t) \frac{\frac{1}{2} \{ P_{\alpha_{\pm}}(-\cos \theta_t) \pm P_{\alpha_{\pm}}(\cos \theta_t) \}}{\sin \pi \alpha_{\pm}} \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

donde $\gamma^{\pm}(t)$ es el residuo de $A_l^{\pm}(t)$ en $l = \alpha_{\pm}(t)$.

Del comportamiento de $P_{\alpha}(\cos \theta_t)$ para argumentos grandes, y de la relación de $\cos \theta_t$ con s , se tiene la contribución de un polo de Regge a la zona asintótica:

$$A^S(s, t) = \beta_{\pm}(t) \frac{(1 \pm e^{-i\pi \alpha_{\pm}(t)})}{\sin \pi \alpha_{\pm}(t)} s^{\alpha_{\pm}(t)} \quad (\text{II.8})$$

donde $\beta_{\pm}$ contiene el residuo $\gamma^{\pm}$.

En definitiva, una trayectoria que para $t > 0$ produce estados ligados y resonancias en el canal t , para $t < 0$ determina el comportamiento asintótico en el canal s .

La signatura está relacionada con la simetría ante el intercambio de s con u . En efecto, se puede demostrar que, si:

$$\begin{aligned} \Lambda_s^{+}(s, t) &= [\Lambda_t^{+}(s, t)]^* \text{ continuada y} \\ \Lambda_s^{-}(s, t) &= [\Lambda_t^{-}(s, t)]^* \text{ continuada, resulta:} \end{aligned}$$

$$\Lambda_s^\pm(s, t) = \pm \left[\Lambda_s^\pm(u, t) \right]^* \quad (\text{II.9})$$

o, en términos de la variable $v = (s - u)/4m$,

$$\begin{aligned} \Lambda_s^\pm(v, t) &= \pm \left[\Lambda_s^\pm(-v, t) \right]^* \\ \Lambda_s^\pm(v, t) &= \beta_\pm(t) \frac{1 \pm e^{i\pi\alpha_\pm(t)}}{\sin \pi\alpha_\pm(t)} v^{\alpha_\pm(t)}; \quad \tilde{\beta}_\pm \propto \beta_\pm \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

2) Fórmula de Gribov - Froissart

$$\Lambda_L(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 A^t(s, t) P_L(z) dz \quad (\text{II.11})$$

Para t fijo, supongamos que:

$$A^t(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{D_S(s', t) ds'}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{D_u(u', t) du'}{u' - u} \quad (\text{II.12})$$

Definiendo:

$$Q_L(z') = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_L(z) dz}{z' - z}$$

e introduciendo II.12 en II.11, y prolongando por separado los Λ_L

con l pares e impares, se tiene:

$$\begin{aligned} A_L^\pm(t) &= \frac{1}{\pi \left(\frac{t}{2} - 2m^2 \right)} \left\{ \int_0^\infty D_S(s', t) Q_L \left(\frac{s' + t/2 - 2m^2}{t/2 - 2m^2} \right) ds' \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \int_0^\infty D_u(u', t) Q_L \left(\frac{u' + t/2 - 2m^2}{t/2 - 2m^2} \right) du' \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Las funciones Q_L poseen polos simples para valores de l enteros negativos, lo que da lugar a polos fijos de $\Lambda_L^\pm$ (6), a menos que desaparezcan al integrar.

La transformada de Sommerfeld - Watson puede escribirse en términos de Q_L :

$$\begin{aligned} \Lambda^t(s, t) &= \Lambda_t^+(s, t) + \Lambda_t^-(s, t) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\{ (2l+1) \frac{\Gamma(-l-1)(-\cos \theta_l)}{\cos \pi l} \sin \pi l \frac{1}{z} (A_t^+(t) \xi_l^+ + \right. \\ &\quad \left. + A_t^-(t) \xi_l^-) \right\} + \sum \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

donde $\xi_l^\pm$ son los factores de signatura:

$$\xi_l^\pm = \frac{1 \pm \exp(-i\pi l)}{\sin \pi l},$$

Γ es la curva de la figura II.1, y $\sum$ cancela las contribuciones que aparecen en l semientero debido a $\cos \pi l$.

Al deformar el contorno de integración de la manera usual, el comportamiento asintótico para $v \rightarrow \infty$ será el debido a los polos de Regge, de la forma v^α , ya que:

$$Q_L(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} D_L z^{-L-1} \quad (\text{II.15})$$

Este formalismo permite llevar la integral en el plano l a valores con $\text{Re } L < -\frac{1}{2}$, con lo que el nuevo "background" contribuye presumiblemente como $1/\sqrt{L}$. Aparecen entonces, además de los polos de Regge, los eventuales con $\text{Re } \alpha < -\frac{1}{2}$, los polos fijos con l entero negativo, y los polos con l semientero negativo.

De II.15, y siendo:

$$Q_L(z) \sim \pi \cot \pi L P_{-L-1}(z) \quad l \sim -n \quad (\text{II.16})$$

es fácil ver que la contribución asintótica de los polos fijos es del tipo (6):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ \int_0^\infty D_S(s', t) P_{n-1} \left(\frac{s' + t/2 - 2m^2}{t/2 - 2m^2} \right) ds' + \right. \\ \left. + (-1)^n \int_0^\infty D_u(u', t) P_{n-1} \left(\frac{u' + t/2 - 2m^2}{t/2 - 2m^2} \right) du' \right\} \quad (\text{II.17}) \end{aligned}$$

3) Dispersión de partículas con spin

En este caso es común usar las amplitudes de helicidad de Jacob y Wick (7). La helicidad es una cantidad invariante, luego, para helicidades dadas de las partículas entrantes y salientes, la amplitud de dispersión es una función de s y t .

Promediando las helicidades de las partículas iniciales, y sumando sobre las finales, resulta:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q_{34}}{q_{12}} \frac{1}{(8\pi)^2 s} \frac{1}{(2\sigma_1+1)(2\sigma_2+1)} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4} |\langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle|^2 \quad (\text{II.18})$$

λ_i : helicidad de la partícula i

Las fórmulas semejantes a II.2 y II.11 son, en el canal s :

$$\begin{aligned} \langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \sum_{J=0, \infty} (2J+1) \langle \lambda_3 \lambda_4 | A_J(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \times \\ \times d_{\lambda\lambda'}^J(\theta_s) \quad (\text{II.19}) \end{aligned}$$

donde $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, $\lambda' = \lambda_3 - \lambda_4$, $d_{\lambda\lambda'}^J(\theta)$ es la matriz de rotación definida por Rose (8), y

$$\langle \lambda_3 \lambda_4 | A_J(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz \langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle d_{\lambda\lambda'}^J(\theta_s) \quad (\text{II.20})$$

con $z = \cos \theta_s$.

Al realizar la transformada de Sommerfeld - Watson en este caso, el contorno Γ' correspondiente encierra sólo la parte del eje real en el plano J con $\text{Re } J > \lambda$. Ello hace que puedan aparecer polos fijos con $0 \leq \alpha < \lambda$.

4) Unitariedad y polos fijos

Consideremos el caso de partículas sin spin, y supongamos que existe una región elástica de un sólo canal, $s_0 < s < s_I$. Como $A(s)$ se comporta en el umbral como $q_{12} q_{34}$ ⁽⁹⁾, usaremos la amplitud de onda parcial reducida dada por:

$$B_L(s) = [q_{12} q_{34}]^{-L} A_L(s)$$

La relación de unitariedad para esta onda parcial valdrá:

$$\text{Im } B_L(s) = [q_{12} q_{34}]^L \rho(s) |B_L(s)|^2 \quad (\text{II.21})$$

$\rho(s)$ es el factor de espacio de las fases de dos partículas,

$$\rho(s) = q_{12} / \sqrt{s}.$$

De otro modo:

$$B_L^\pm(s) - B_{L*}^\pm(s)^* = 2i [q_{12} q_{34}]^{-L} \rho(s) B_{L*}^\pm(s)^* \cdot B_L^\pm(s) \quad (\text{II.22})$$

ecuación que se cumple para l enteros positivos pares para B_L^+ , y para l enteros positivos impares para B_L^- (s). El teorema de Carlson ⁽⁵⁾ asegura que esta relación se puede prolongar analíticamente a todos los valores de l , donde se puede prolongar $B_L^\pm$.

Para s real, $s_0 < s < s_I$ se tiene la relación:

$$B_L^\pm(1^*, s + i\epsilon)^* = B_L^\pm(1, s - i\epsilon)$$

luego:

$$B_L^\pm(1, s + i\epsilon) - B_L^\pm(1, s - i\epsilon) = 2i [q_{12} q_{34}]^L \rho(s) \times B_L^\pm(1, s - i\epsilon) \cdot B_L^\pm(1, s + i\epsilon) \quad (\text{II.23})$$

De aquí se ve que, en ausencia de cortes en el plano l , no pueden existir polos fijos, pues uno de estos polos daría lugar a un polo doble en el lado derecho de II.23, y a un polo simple del lado izquierdo.

Se puede ver ⁽⁹⁾ que aún en el caso de no existir una zona de elasticidad de un solo canal, no puede haber polos fijos para

valores reales de l .

La presencia de cortes en el plano l , en cambio, no permite descartar la existencia de polos fijos, aún sobre el eje real de l .

CAPITULO III - REGLAS DE SUMA Y RELACIONES DE DISPERSION

1) Introducción

Sea $h(\nu)$ una función analítica en el plano complejo ν ($\nu = (s - u)/4m$, es la energía en el sistema de laboratorio de la partícula incidente en un proceso de dispersión), excepto polos y cortes sobre el eje real. Aplicando el teorema de Cauchy al camino cerrado de la figura III.1, se tiene

$$\oint h(\nu) d\nu = 0 \quad (III.1)$$

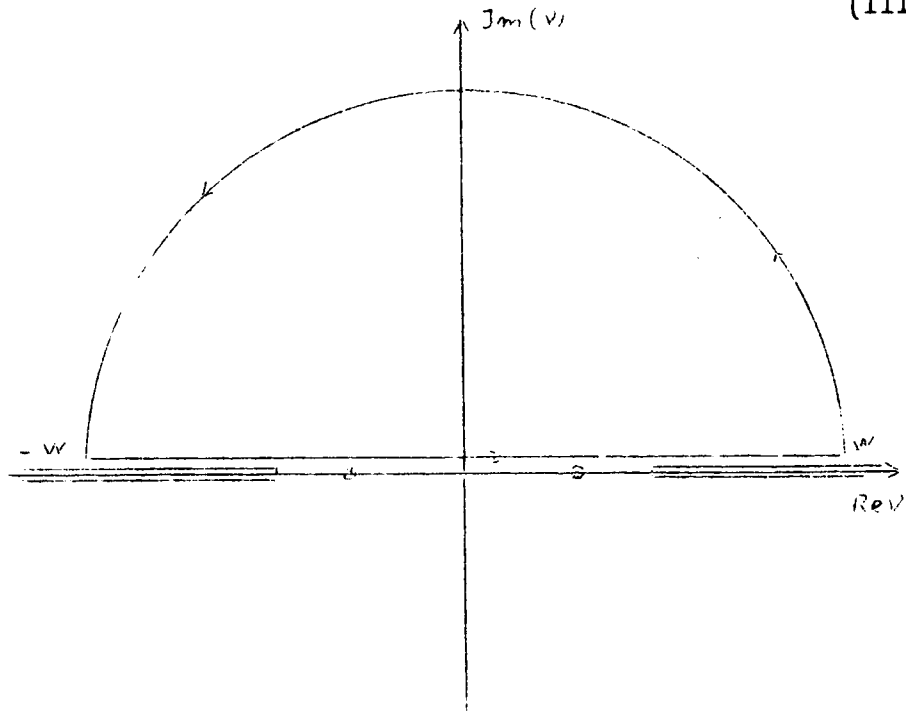


figura III.1

$$\int_{-w}^w h(\nu) d\nu = - \int_{\text{arco}} h(\nu) d\nu \quad (III.2)$$

Casi todas las reglas de suma pueden ser deducidas como casos particulares de III.2. El uso de estas relaciones, con w finito, presenta ventajas sobre el caso de w infinito, ya que no es necesario imponer restricciones sobre el comportamiento en el infinito de $h(\nu)$.

Usualmente se elige $h(\nu) = K(\nu) \cdot f(\nu)$, siendo $K(\nu)$ un factor cinemático, y $f(\nu)$ alguna amplitud o combinación de amplitudes de dispersión.

$$\text{Se satisface la relación } f(\nu^*) = f(\nu)^* \quad (III.3)$$

En general se elige $K(\nu)$ de modo que satisfaga II.3, de modo

que $h(\nu)$ también la satisface.

2) Reglas de Suma de Energía Finita

Si, para $\nu \geq W$ se conoce una forma asintótica de $f(\nu)$, $f(\nu, q_i)$, donde q_i son parámetros, la integral sobre el semicírculo se puede expresar como una función $H(q_i, W)$, y se tiene:

$$\int_{-W}^W h(\nu) d\nu = H(q_i, W) \quad (\text{III.4})$$

de modo que, conociendo la amplitud $f(\nu)$ entre $-W$ y W , se puede obtener los valores de los parámetros q_i .

Este tipo de reglas de suma se llaman reglas de suma de energía finita (F.E.S.R.), aunque este nombre se acostumbra reservar para los casos en que $K(\nu)$ es de la forma ν^n (n entero). En general sólo se utiliza la parte imaginaria de la ecuación III.4.

Si $K(\nu)$ es de la forma ν^n (n entero positivo), y se conoce la parte imaginaria de la amplitud entre 0 y W a partir del teorema óptico, los valores de n que proveen reglas de suma útiles para determinar los q_i , dependerán de la simetría de la parte imaginaria de la amplitud. Por ejemplo, una amplitud anti-simétrica, o sea tal que $f(\nu) = -f(-\nu)$ para todo ν complejo, cumple, usando II.3, la siguiente relación entre los valores sobre los que se integra:

$$f(-\nu + i\epsilon) = -[f(\nu + i\epsilon)]^* \quad (\text{III.5})$$

o sea que la parte imaginaria resulta simétrica sobre las dos zonas de integración: $-W, 0$ y $0, W$. En este caso se obtendrá la regla de suma para valores pares de n .

Se tiene entonces las reglas de suma de Dolen, Horn y Schmid (10):

$$S_n = \frac{1}{W^{n+1}} \int_0^W \nu^n \Im f(\nu) d\nu = \sum_i \beta_i \frac{W^{\alpha_i}}{\alpha_i + n + 1} \quad (\text{III.6})$$

donde la suma sobre i recorre todos los polos de Regge que pueden intercambiarse en el canal t de la reacción considerada. Si se usan valores negativos de n , las reglas de suma involucran las derivadas de orden $n-1$ de la amplitud en el umbral.

Estas reglas de suma se usaron para estudiar la dispersión elástica $\pi N, K N, N N$ ⁽¹¹⁾.

3) Relaciones de Superconvergencia

En el caso de que, para $|v|$ grande, la función $h(v)$ esté acotada por:

$$|h(v)| \leq M |v|^\delta \quad \delta < -1 \quad (\text{III.7})$$

para alguna constante M , $h(v)$ es superconvergente y la integral sobre el semicírculo en III.2 se anula cuando $M \rightarrow \infty$, llevando a la relación de superconvergencia (S.C.R.):

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(v) dv = 0 \quad (\text{III.8})$$

Si $h(v)$ es antisimétrica ante el cruce $v \rightarrow -v$,

III.8 se reduce a:

$$\int_0^{\infty} \text{Im } h(v) dv = 0 \quad (\text{III.9})$$

mientras la parte real se satisface trivialmente. Si $h(v)$ es simétrica, la relación no trivial es la que contiene a $\text{Re } h(v)$.

Si $h(v)$ satisface una cota como la III.7, pero con $\delta < -n-1$, donde n es un entero positivo, se tiene SCR suplementarias de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^m h(v) dv = 0 \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III.10})$$

Las relaciones de dispersión ordinarias se pueden obtener como casos particulares de SCR, eligiendo adecuadamente $K(v)$. Si, por ejemplo, $|f(v)| < M |v|^{-\epsilon}$ ($\epsilon > 0$) cuando $|v| \rightarrow \infty$, entonces $h(v') = f(v')/(v' - v)$ es superconvergente, y usando:

$$\frac{1}{v' + i\epsilon - v} = \frac{P}{v' - v} - i\pi \delta(v' - v), \quad (\text{III.11})$$

donde P indica la parte principal de la integral, se obtiene:

$$\text{Re } f(v) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } f(v')}{v' - v} dv' \quad (\text{III.12})$$

que es la relación de dispersión no sustraída para $f(v)$. Las relaciones de dispersión sustraídas se pueden obtener de forma análoga, incluyendo más denominadores del tipo $(v' - v_0)$ en $h(v')$.

El límite de unitariedad ⁽⁹⁾ para la amplitud de dispersión elástica de dos partículas sin spin no es suficiente

para la superconvergencia. Sin embargo, en el caso de partículas con spin, algunas de las amplitudes con "flip" de helicidad suficientemente grande, son forzadas por la unitariedad a obedecer cotas más fuertes a alta energía, y superconvergen⁽¹²⁾.

En las SCR del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nu^m \text{Im} F(\nu) d\nu = 0 \quad (\text{III.13})$$

en general se usan funciones $F(\nu)$ simétricas o antisimétricas en ν , de modo que tales relaciones se satisfacen trivialmente para m par o impar. Schwarz⁽¹³⁾ mostró que, si se puede despreciar el efecto de la tercera función espectral, ρ_{su} , tanto la integral sobre valores negativos de ν , como la integral sobre los valores positivos se anula, dando SCRs adicionales. Si ello no ocurre se tiene que

$$\int_0^{\infty} \nu^m \text{Im} F(\nu) d\nu$$

está dado por los valores de los residuos de los polos fijos de signatura no física.

Haciendo suposiciones dinámicas acerca del comportamiento a alta energía de las amplitudes, por ejemplo el modelo de Regge, es posible, en muchos casos, hallar SCRs adicionales a las provenientes de la unitariedad.

Si la amplitud de un proceso de dispersión que involucra partículas con spin se expresa en función de amplitudes invariantes que dependen asintóticamente como $s^{\alpha(t) - M}$, siendo $\alpha(t)$ la trayectoria dominante intercambiada, entonces habrá SCRs siempre que sea $M > \alpha(t) + 1$.

4) Reglas de suma de momento continuo (CMSR)

El factor cinemático $K(\nu)$ puede depender de uno o más parámetros reales, en cuyo caso se obtiene una familia continua de reglas de suma. Della Selva et al.⁽¹⁴⁾ propusieron las CMSR. Escribieron la regla de suma:

$$\oint \exp(-i \frac{\pi}{2} \gamma) \nu^{\gamma} F(\nu) d\nu = 0 \quad (\text{III.14})$$

donde la integración se realiza sobre cualquier curva cerrada en el semiplano superior.

Si se elige una amplitud antisimétrica ante el cruce, y se toma como camino de integración el de la figura III.1, entonces para w suficientemente grande como para que valga la expansión de Regge, se tiene:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{w^{\delta'+1}} \int_0^w dv v^{\delta'} \sum_m \left[\exp \left(-i \frac{\pi}{2} \delta' \right) F(v) \right] = \\
 &= \sum_m \frac{\beta_m}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \alpha_m \right)} \frac{\sin \left[\frac{\pi}{2} (\alpha_m + \delta' + 1) \right] w^{\alpha_m}}{\alpha_m + \delta' + 1} + O(w^{-1})
 \end{aligned}
 \tag{III.15}$$

La interpretación de la contribución del "background", $O(w^{-1})$, no es obvia; en la práctica es una especie de polo fijo con $\alpha = -1$.

Para que la integral a la izquierda de III.15 converja, debe ser $\delta' > -1$, pero no hay límite superior para δ' , ni cota para el comportamiento a alta $|v|$ de $F(v)$.

La ventaja de estas reglas de suma es que la forma de la función de δ' del segundo miembro de III.15 depende fuertemente del valor de α , de modo que en principio es posible una determinación precisa de este parámetro. Se obtuvo una tal determinación de los parámetros del ρ , usando una amplitud para la dispersión pión - nucleón, encontrándose que el término de "background" se puede suprimir si se elimina la contribución del polo del nucleón a la integral.

En el miembro derecho de III.15 entra la parte real de la amplitud, además de la parte imaginaria, siendo necesario obtenerla de relaciones de dispersión, en caso de carecer de datos experimentales.

Los mismos autores usaron una técnica análoga para el análisis de la amplitud simétrica ante el cruce ⁽¹⁵⁾. Construyeron una amplitud antisimétrica definida a través de la parte imaginaria de la amplitud física (a fin de eliminar la constante de sustracción) y escribieron la CMSR, que queda:

$$-w^{1-\delta'} \int_0^w dv v^{\delta'} \operatorname{Im} \left\{ \exp \left[-i \frac{\pi}{2} \delta' \right] \frac{F_S(v) - F_S'(0) \cdot v}{v^2} \right\} + \frac{F_S'(0) w \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \delta' \right)}{\delta'} = \sum_m \frac{\beta_m \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} (\alpha_m - \delta + \delta' - 1) \right] w^{\alpha_m - \delta}}{\alpha_m - \delta + \delta' - 1} + O(w^{-1}) \quad (\text{III.16})$$

donde

$$F_S(v) = \frac{v}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv' \frac{K'}{v'^2 - (v + i\epsilon)^2} \frac{\sigma_- + \sigma_+}{v\delta} \quad (\text{III.17})$$

El parámetro δ permite variar las contribuciones relativas de los polos P y P' .

La CMSR fue aplicada al proceso $\pi^- p \rightarrow \eta n$ ⁽¹⁶⁾ y a la dispersión hacia adelante de $K N$ ⁽¹⁷⁾. En la dirección no hacia adelante, tales reglas de suma fueron aplicadas con un factor de peso $(|v^2 - v_0^2|)^{\delta/2}$ en las integrales ⁽¹⁸⁾. García y Masperi ⁽¹⁹⁾ usaron CMSRs para las amplitudes de dispersión hacia adelante de mesones sobre bariones, y las saturaron con resonancias de ancho angosto.

5) Regla de Suma de García - Masperi

García y Masperi ⁽²⁰⁾ trataron de hallar un criterio para elegir las reglas de suma más convenientes. Consideremos una amplitud simétrica ante el cruce. Las reglas de suma usuales pueden obtenerse multiplicando la amplitud por alguna función de peso, que en general puede separarse de acuerdo a las propiedades de cruce en dos partes, obteniéndose las reglas de suma:

$$\int_0^w \operatorname{Re} \left\{ g_s(a, v) \left[F^+(v) - F_R^+(v) \right] \right\} dv = 0 \quad (\text{III.18})$$

$$\int_0^w \operatorname{Im} \left\{ g_a(a, v) \left[F^+(v) - F_R^+(v) \right] \right\} dv = 0 \quad (\text{III.19})$$

Cada parte de la función de peso puede expandirse en potencias de $i v$:

$$g_s(a, v) = \sum_n c_n(a) (i v)^n \quad g_a(a, v) = i \sum_n d_n(a) (i v)^n$$

$F_R^+(v)$ es la amplitud a alta energía, proveniente del modelo de Regge. Los autores también investigaron el efecto de un posible

"background", cuya contribución puede representarse como una integ-

ral sobre ν dependiente de un parámetro b . Para valores grandes de este parámetro la contribución a la regla de suma se hace pequeña.

Reglas de suma más generales, llamadas de Mellin (MSR), pueden hallarse multiplicando el integrando por una función real $h(a, \nu) = \sum_n c_n(a) \nu^n$.

Se debe requerir a las reglas de suma:

- i) contribuciones de polos cercanos bien separadas
- ii) contribuciones de polos secundarios menos importantes que la del dominante
- iii) pequeño "background" a bajo b .

Un ejemplo discutido por los autores es el de la regla de suma de momento oscilante (OMSR), obtenida haciendo

$$g_s(c, \nu) = \frac{c}{w} \exp\left(i \frac{c}{w} \nu\right) \quad (\text{III.20})$$

quedando la regla de suma (para un polo de Regge):

$$\frac{c}{w} \int_0^w \text{Re} \left\{ \exp\left(i \frac{c}{w} \nu\right) F^+(\nu) \right\} d\nu = - \frac{w^\alpha}{c^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right)} \Gamma(\alpha) \gamma(\alpha+1, ic) \quad (\text{III.21})$$

donde γ es la función gamma incompleta.

Esta regla de suma satisface los requerimientos i y ii (iii es difícil de comprobar). Además, la forma del miembro de la derecha varía con α (a diferencia de MSR, donde se corre para distintos α) y la contribución a la integral de la izquierda es del mismo orden de magnitud para distintas zonas de la energía, para cualquier valor de c .

6) Reglas de Suma Autoconsistentes

Ferrari y Violini ⁽²¹⁾ discutieron la importancia de la suposición de que se puede usar la parte real de la amplitud, determinada de relaciones de dispersión, en las reglas de suma. A fin de evaluar la relación de dispersión, es necesario asumir un comportamiento a alta energía para la parte imaginaria de la amplitud. Ferrari y Violini encontraron que:

- i) es posible escribir una regla de suma autoconsistente, equiva-

lente a la CMSR, que no requiere ninguna suposición acerca del comportamiento asintótico,

ii) el efecto del comportamiento asintótico asumido puede ser importante en la determinación de los parámetros de Regge usando CMSR convencionales,

iii) CMSRs son equivalentes a una superposición de FESR.

Supongamos una amplitud $f(\nu)$ antisimétrica ante el cruce. Introducimos una función con propiedad de cruce opuesta a la de $f(\nu)$, en este caso

$$G^+(\nu) = \frac{-1 - \exp(-i\pi x)}{\sin \pi x} \nu^x \quad (\text{III.22})$$

Escribiendo relaciones de dispersión para $G^+(\nu)$, se puede expresar la cantidad $\nu^x \cos(\frac{\pi x}{2})$ como una integral de dispersión, que puede insertarse en III.15. Intercambiando el orden de integración en la integral doble resultante, asumiendo una relación

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left\{ \int_w^\infty d\nu \nu^x \frac{2\nu}{\pi} \int_0^w \frac{\text{Im } f(\nu')}{\nu'^2 - \nu^2} d\nu' - \right. \\ & \quad \left. - \int_0^w d\nu \nu^x \frac{2\nu}{\pi} \int_w^\infty \frac{\text{Im } f(\nu')}{\nu'^2 - \nu^2} d\nu' \right\} = \\ & = \sum_i \beta_i \frac{w^{\alpha_i + x + 1}}{\alpha_i + x + 1} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(\alpha_i + x + 1)\right]}{\cos(x_i \pi/2)} \equiv R(w, x) \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

Si w representa el valor de la energía por encima del cual se puede considerar la amplitud reemplazada por la forma asintótica de Regge, se ve que la segunda integral en el miembro izquierdo de III.23 depende sólo de dicha forma asintótica, pudiendo ser evaluada en función de los parámetros de Regge. Luego:

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \int_w^\infty \nu^x d\nu \frac{2\nu}{\pi} \int_0^w \frac{\text{Im } f(\nu')}{\nu'^2 - \nu^2} d\nu' = \\ & = \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \beta \frac{w^{x + \alpha + 1}}{x + \alpha + 1} \left\{ \psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi\left(\frac{\alpha + 1}{2}\right) \right\} \equiv G(w, x) \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Desarrollando el denominador del miembro izquierdo de III.24 en potencias de $(\nu'/\nu)^2$, es posible mostrar que CMSR es una superposición de FESR:

$$G(w, x) = - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) w^{x+1} \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_{2k}(w)}{2k - x} \quad (\text{III.25})$$

$$S_n = \frac{1}{w^{n+1}} \int_0^w v^n \operatorname{Im} f(v) dv$$

Para la amplitud simétrica ante el cruce, se tiene:

$$\begin{aligned} & -\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \int_w^\infty v^x dv \frac{2}{\pi} \int_0^w \frac{v' \operatorname{Im} f(v') dv'}{v'^2 - v^2} = \\ & = -\frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \beta \frac{w^{x+\alpha+1}}{x+\alpha+1} \left\{ \psi\left(\frac{1-x}{2}\right) - \psi\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \right\} \equiv H(w, x) \end{aligned}$$

(III.26)

$$H(w, x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) w^{x+1} \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_{2k+1}(w)}{2k+1-x}$$

(III.27)

CAPITULO IV - DISPERSION COMPTON HACIA ADELANTE

1) Introducción

La amplitud para la dispersión Compton hacia adelante, en el sistema de laboratorio, se escribe (22):

$$f(\nu) = \chi_f^* \left[f_1(\nu) \vec{\epsilon}_2^* \cdot \vec{\epsilon}_1 + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{\epsilon}_2^* \wedge \vec{\epsilon}_1) f_2(\nu) \right] \chi_i \quad (\text{IV.1})$$

donde $\vec{\epsilon}_1$ y $\vec{\epsilon}_2$ son los vectores de polarización del fotón inicial y final, respectivamente, y χ_i , χ_f son los espinores del nucleón inicial y final, ambos en reposo en el sistema de laboratorio. Si se promedia sobre los espines del nucleón, sólo queda la contribución de $f_1(\nu)$.

Si σ_p (σ_a) es la sección eficaz total para fotón + nucleón $\rightarrow$ hadrones (trabajando sólo en orden e^2 en la amplitud), cuando el spin del fotón es paralelo (antiparalelo) al del nucleón, se tiene por el teorema óptico:

$$\text{Im } f_1(\nu) = \frac{\nu}{4\pi} \frac{1}{2} [\sigma_p(\nu) + \sigma_a(\nu)] = \frac{\nu}{4\pi} \sigma_T(\nu) \quad (\text{IV.2})$$

donde $\sigma_T(\nu)$ es la sección eficaz promediada sobre el spin, y:

$$\text{Im } f_2(\nu) = \frac{\nu}{4\pi} \frac{1}{2} [\sigma_a(\nu) - \sigma_p(\nu)] \quad (\text{IV.3})$$

Si ni el haz de fotones es circularmente polarizado ni los protones del blanco están polarizados, se tiene solamente la combinación de secciones eficaces correspondiente a $\text{Im } f_1(\nu)$, medida experimentalmente. $\text{Im } f_1(\nu)$ es positiva por encima del umbral de la fotoproducción de piones, mientras que $\text{Im } f_2(\nu)$ puede ser positiva o negativa.

Conociendo $\text{Im } f_1(\nu)$ y $\text{Im } f_2(\nu)$, se puede calcular las partes reales por medio de relaciones de dispersión. Usando el hecho de que f_1 es par y f_2 impar ante el cruce, se tiene. (2.2)

$$\text{Re } f_1(\nu) = f_1(0) + \frac{\nu^2}{\pi} P \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu'^2}{\nu'^2 - \nu^2} \frac{\text{Im } f_1(\nu')}{\nu'^2} \quad (\text{IV.4})$$

$$\text{y } \text{Re } f_2(\nu) = \frac{2\nu}{\pi} P \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu'}{\nu'^2 - \nu^2} \text{Im } f_2(\nu') \quad (\text{IV.5})$$

Ambas integrales comienzan en $\nu_0 = m_\pi + m_\pi^2 / 2 m_N$, el umbral de fotoproducción de un pión. La amplitud $f_1(\nu)$ requiere una sustracción, tanto debido al comportamiento observado para $\text{Im } f_1(\nu)$ a

ν grande, como debido a que una relación de dispersión no sustraída prediría $f_1(0) > 0$, contradiciendo el límite de Thomson, $f_1(0) = -e^2/(4\pi m_N)$. Cuando $\nu \rightarrow 0$, se tiene (23):

$$f_1(\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} f_1(0) = -e^2/(4\pi m_N)$$

$$f_2(\nu)/\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} -\frac{e^2}{4\pi} \frac{(\mu_{\text{anom.}})^2}{2m_N^2} \quad (\text{IV.6})$$

El segundo resultado, junto con IV.5, da lugar a la regla de suma de Drell - Hearn - Gerasimov (24);

$$\begin{aligned} (\mu_{\text{anom.}})^2 &= -\frac{m_N^2}{e^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu'}{\nu'^2} \operatorname{Im} f_2(\nu') = \\ &= \frac{2m_N^2}{\pi e^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu'}{\nu'} [\sigma_p(\nu') - \sigma_a(\nu')] \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

2) Desarrollo de Regge y polos fijos

La simple hipótesis de Regge no alcanza para describir la dispersión Compton. En la dirección hacia adelante se espera, en completa analogía con la dispersión elástica πp y $p p$, encontrar un pico de difracción correspondiente al intercambio del Pomeranchon. Sin embargo, un Pomeranchon que lleva a una sección eficaz constante a alta energía, tiene que tener una trayectoria con intersección $\alpha_p = 1$, y por lo tanto se comporta como un vector ante rotaciones tridimensionales. En la dirección hacia adelante el fotón no puede realizar un "flip" de helicidad. Simplemente por conservación de impulso angular, un fotón que incide polarizado circularmente a la derecha ($r h \gamma$), debe emerger como un $r h \gamma$. Cruzando al canal t , al proceso $\gamma + \gamma \rightarrow p + \bar{p}$, el $r h \gamma$ emergente se convierte en un $l h \gamma$ incidente, por cruce, y los dos gamas forman un sistema con 2 unidades de helicidad. Esto no puede "depositarse" sobre un Pomeranchon de spin unidad. Si el Pomeranchon no se acopla, o se asume un $\alpha_p < 1$, se pierde la predicción de una sección eficaz total constante a altas energías. A fin de restaurar dicho comportamiento, es necesario introducir un polo fijo en $J = 1$, o recurrir a un residuo singular para cancelar la anulación del acoplamiento descrita más arriba para $\alpha_p = 1$. Los argumentos usuales en contra de los polos fijos no son aplicables al efecto Compton, cuando se mantiene el orden e^2 , ya que no hay

unitariedad no lineal.

La amplitud de helicidad tiene la descomposición en ondas parciales (25):

$$A_{h=2}(s, t) = \frac{i}{4} \int_{\pi'} \frac{dJ(2J+1)}{\sin \pi J} a^+(J, t) [P_J''(z_t) + P_J''(-z_t)] \quad (\text{IV.8})$$

Si hay un polo móvil para $\alpha(0) = 1$ y un polo fijo en $J = 1$, la contribución del polo móvil será proporcional a:

$$\beta(t) \frac{(1 + e^{-i\pi\alpha(t)})}{\sin \pi\alpha(t)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \beta(0) i \quad (\text{IV.9})$$

Peró $\beta(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$

La contribución del polo fijo será proporcional a:

$$\sin \pi \cdot 1 \cdot \alpha_1(t) \left(-\cot g\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) + i \right) \quad (\text{IV.10})$$

Por II.17:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds' \operatorname{Im} A_{h=2}(s', t) = \\ &= \frac{k_1 e^2}{t} + \int_{s_0}^\infty ds' \operatorname{Im} A_{h=2}(s', t) \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

donde k_1 es una constante y s_0 el umbral inelástico. El $1/t$ se debe a que el fotón no tiene masa.

Si este residuo se anula, entonces el residuo del Pomeranchon es necesariamente singular, puesto que la integral en IV.11 debe compensar el $1/t$. Si el residuo no se anula, entonces G_T , proporcional a $s \operatorname{Im} A_{h=2}(s, t=0)$ tiende a un valor constante y se comporta como todas las secciones eficaces hadrónicas conocidas cuyos números cuánticos permiten el intercambio de la trayectoria del vacío.

Tal vez la innovación más interesante respecto a la física de acoplamiento fuerte es la posibilidad teórica de un polo fijo de signatura correcta en $J = 0$ (26), que es irrelevante con respecto a la sección eficaz a alta energía, pero cuya presencia modificaría la parte real de la amplitud $f_1(\nu)$.

Si asumimos que el comportamiento a alta energía

puede escribirse en la forma:

$$f_1(\nu) = \sum_{\alpha \leq 1} \frac{\beta_\alpha \nu^\alpha}{4\pi} \frac{-1 - e^{-i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} \quad (\text{IV.12})$$

y α es un entero par, podemos que $\beta_\alpha / \sin \pi\alpha$ sea finito. Entonces la parte imaginaria se anula para estos términos, y queda la parte real, dando la contribución de enteros pares:

$$C + D/\nu^2 + \dots$$

Como nos interesa el comportamiento a ν grande, sólo se considerará C distinto de 0, quedando:

$$f_1(\nu) = \sum_{\alpha \leq 1, \alpha \neq 0} \frac{\beta_\alpha \nu^\alpha}{4\pi} \frac{-1 - e^{-i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} + C \quad (\text{IV.13})$$

donde C nos dice cuánto del límite de Thomson sobrevive en el comportamiento asintótico como un polo fijo con $\alpha = 0$.

Creutz et al. (27) investigaron la contribución del polo en $\alpha = 0$ a la dispersión Compton hacia adelante, usando FESR. Pudieron determinar C y el residuo de la trayectoria P^1-A_2 usando datos sobre hidrógeno hasta 5,3 GeV. Aunque la calidad de los datos era pobre, pudo obtenerse evidencia definitiva contra la anulación de C . Es más, su signo y magnitud resultaron consistentes con el límite de Thomson.

Planteando la relación de dispersión para la amplitud $F_1(\nu) = f_1(\nu) - f_R(\nu)$, donde $f_R(\nu)$ es la forma asintótica, dada por los polos de Regge, se llega a:

$$-\frac{e^2}{4\pi m_N} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^N \tilde{\sigma}_T(\nu) d\nu + C \quad (\text{IV.14})$$

si N es una energía tan alta que, por encima de ella $\tilde{\sigma}_T(\nu)$ (igual a $\sigma_T(\nu)$ menos su comportamiento asintótico) se anula con suficiente exactitud. Damashek et al. (28) obtuvieron los parámetros

de alta energía de un ajuste directo a datos de SLAC, hasta $\nu = 16$ GeV y obtuvieron un valor de C de la evaluación de la integral en IV.14. Además, computaron la parte real de $f_1(\nu)$ a través de la relación de dispersión, y la compararon con la parte real del desarrollo en polos de Regge para energías superiores a 2 GeV, observando una discrepancia constante imputable al polo fijo en $J = 0$. En ambos casos

El resultado es compatible con el límite de Thomson de ~ 3 bGev. El mismo resultado se obtuvo en referencia⁽²⁹⁾ usando la regla de suma CMSR, modificada por Ferreri y Violini, aplicada a la amplitud $f_1(\nu)/\nu$, con el polo del nucleón sustraído. Las secciones eficaces de alta energía fueron ajustadas simultáneamente con las CMSR en un rango de momentos $-1 \leq x \leq 5$. De este modo, se asegura una buena conexión entre altas y bajas energías, así como la satisfacción de las primeras FESR de bajo momento.

CAPITULO V - DERIVACION SIMPLE Y GENERAL DE REGLAS DE SUMA CON-
SISTENTES DE PARAMETRO CONTINUO (30)

1) Introducción

En estos últimos años los parámetros de alta energía para las amplitudes de dispersión con interacción fuerte han sido determinados usando no sólo los datos experimentales de alta energía, sino también las condiciones provenientes de la analiticidad a través de las así llamadas reglas de suma de energía finita (FESR) (10, 31). Varias modificaciones de estas reglas de suma fueron también consideradas (32 - 35, 14, 15, 20), que a menudo requieren el conocimiento de la parte real de la amplitud, además de la parte imaginaria. Esta información se obtiene ya sea del análisis del corrimiento de fase, o mediante el uso de relaciones de dispersión. En trabajos recientes (21) se señala que, cuando se sigue el segundo procedimiento, el efecto sobre los parámetros calculados, de aquéllos usados para evaluar la cola de alta energía de la integral de dispersión, puede ser importante.

Así, a fin de construir consistentemente los parámetros es necesario modificar las reglas de suma. Se discutió explícitamente, en particular, el caso de las reglas de suma de momento continuo (CMSR) (32, 14, 15), y el de la regla de suma de Chan y Chavda (33) (CCSR). Un resultado importante del trabajo de la referencia (21) es que cualquier regla de suma es equivalente a cierta superposición de FESR. Este punto de vista fué seguido en el análisis por CMSR de la dispersión hacia adelante Compton (29), así como en el extenso reexamen de las FESR para πN y $K N$ (36).

En este trabajo se retoma el problema y se deriva una formulación consistente de las reglas de suma en una forma más general. Esta formulación es también más práctica con propósitos fenomenológicos. Se discute, por ejemplo, la aplicación a las CMSR (32, 14, 15) y a la regla de suma de momento oscilante (OMSR) de García y Masperi (20), considerando en particular el caso de la dispersión hacia adelante Compton.

Este último análisis, así como la esencial equivalencia de los resultados obtenidos por CMSR y FESR en referencia (21), crea dudas acerca de la utilidad de considerar reglas de suma sofisticadas en lugar de las más sencillas FESR, cuando la fase de una amplitud no está disponible a partir de la información experimental a baja energía.

2) Reglas de suma arbitrarias como superposición de FESR

Se recuerda el procedimiento general para construir, de la analiticidad, reglas de suma para los parámetros de alta energía.

Sea $f(z)$ una amplitud de dispersión, que por simplicidad se asume tiene propiedades de cruce definidas, analítica en el plano superior de z , y $w(z)$ una función de peso arbitraria con las mismas propiedades analíticas, pero carácter de cruce opuesto. La variable z es la energía de laboratorio del proyectil. Se asume que, asintóticamente, ($z \gtrsim N$), $f(z)$ se comporta como una función de Regge $\tilde{f}(z)$.

En lo que sigue resultará conveniente trabajar por separado con las partes real e imaginaria de estas funciones:

$$f = a + i b \quad \tilde{f} = \tilde{a} + i \tilde{b} \quad w = u + i v \quad (V.1)$$

de modo que la relación de dispersión queda:

$$\{a, \tilde{a}, u\} = \mathbb{D} \{b, \tilde{b}, v\} \quad (V.2)$$

donde $\mathbb{D}$ es el operador de dispersión, introducido de la siguiente forma:

$$a(\xi) = \mathbb{D} b(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(z)}{\xi - z} dz \quad (V.3)$$

donde el camino de integración yace sobre el eje real.

Por simplicidad, se supone un comportamiento en el infinito tal que no son necesarias sustracciones, y además una propiedad de cruce definida.

Se pueden presentar entonces dos alternativas:

i) Parte imaginaria par, $b(-z) = b(z)$, sobre el borde superior del eje real. En este caso:

$$a(\xi) = \frac{2\xi}{\pi} \int_0^\infty \frac{b(z)}{z^2 - \xi^2} dz = \mathcal{D} b(\xi) \quad (V.4)$$

ii) Parte imaginaria impar, $b(-z) = -b(z)$, sobre el borde superior del eje real. Entonces:

$$a(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{z b(z)}{z^2 - \xi^2} dz = \mathcal{D} b(\xi) \quad (V.5)$$

Si son necesarias sustracciones, se supone que están incluidas en $\mathcal{D}$.

Es conveniente usar la notación:

$$\langle g \rangle = \frac{1}{N} \int_0^N g(z) dz$$

Así, las reglas de suma para las funciones que consideramos son:

$$\langle \mathcal{I}m(f.w) \rangle = \langle \mathcal{I}m(\tilde{f}.w) \rangle \quad (V.6)$$

El miembro izquierdo de la ecuación V.6, usando las ecuaciones V.1 y V.2 es igual a:

$$\langle b \mathcal{D} v + v \mathcal{D} b \rangle$$

Resulta conveniente separar el operador integral en dos partes, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$, donde $\mathcal{D}_1$ es la integral sobre la zona de baja energía ($0 \leq z \leq N$) y $\mathcal{D}_2$ es su complemento ($z > N$). Entonces:

$$\langle \mathcal{I}m(f.w) \rangle = \langle b \mathcal{D}_1 v + v \mathcal{D}_1 b \rangle + \langle b \mathcal{D}_2 v + v \mathcal{D}_2 b \rangle \quad (V.7)$$

El primer término del miembro de la derecha de la ecuación V.7 se anula idénticamente debido a las propiedades de cruce opuestas de $f(z)$ y $w(z)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, ya que la relación es simétrica en b y v , que v es par y b es impar sobre el borde superior del eje real. Entonces:

$$\langle v \mathcal{D}_1 b \rangle = \frac{1}{N} \int_0^N d\xi v(\xi) \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{z b(z)}{z^2 - \xi^2} dz \quad (V.8)$$

$$\langle b \mathcal{D}_1 v \rangle = \frac{1}{N} \int_0^N d\xi b(\xi) \frac{2\xi}{\pi} \int_0^\infty \frac{v(z)}{z^2 - \xi^2} dz \quad (V.9)$$

Sustituyendo $z \longleftrightarrow \xi$ en la última ecuación, se prueba inmediatamente que:

$$\langle b D_1 v \rangle = - \langle v D_1 b \rangle \quad (V.10)$$

Luego:

$$\langle \text{Im} (f.w) \rangle = \langle b D_2 v + v D_2 b \rangle \quad (V.11)$$

Del mismo modo se encuentra que:

$$\langle \text{Im} (\tilde{f}.w) \rangle = \langle \tilde{b} D_2 v + v D_2 \tilde{b} \rangle \quad (V.12)$$

Puesto que, por hipótesis, por encima de N , $f(z)$ ha alcanzado su valor asintótico $\tilde{f}(z)$, sustituyendo V.11 y V.12 en V.6, se tiene:

$$\langle b D_2 v \rangle = \langle \tilde{b} D_2 v \rangle \quad (V.13)$$

En el caso de que sean necesarias sustracciones, se discute el caso de la amplitud par ante el cruce ($b(-z) = -b(z)$) (con modificaciones triviales el razonamiento se puede extender al caso de la amplitud impar): es necesario elegir como energía de sustracción un valor $M \gg N$. Así, la relación de dispersión para $f(z)$ y $\tilde{f}(z)$ queda:

$$a(\xi) = a(M) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{z b(z)}{z^2 - \xi^2} \frac{\xi^2 - M^2}{z^2 - M^2} dz \quad (V.14)$$

$$\tilde{a}(\xi) = \tilde{a}(M) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{z \tilde{b}(z)}{z^2 - \xi^2} \frac{\xi^2 - M^2}{z^2 - M^2} dz \quad (V.15)$$

con $a(M) = \tilde{a}(M)$ ya que $M \gg N$.

Estas ecuaciones pueden escribirse:

$$a(\xi) = \tilde{a}(M) + D^S b \quad \tilde{a}(\xi) = \tilde{a}(M) + D^S \tilde{b} \quad (V.16)$$

donde D^S es el operador de dispersión sustraído en M . La ecuación V.6 queda:

$$\langle b D v + v D^S b + a(M) v \rangle = \langle \tilde{b} D v + v D^S \tilde{b} + \tilde{a}(M) v \rangle \quad (V.17)$$

Los términos $a(M) v$ y $\tilde{a}(M) v$ obviamente cancelan, y se puede dividir, como antes $D = D_1 + D_2$, $D^S = D_1^S + D_2^S$. Así, puesto que:

$$\langle v D_1^S b \rangle = \langle v D_2^S \tilde{b} \rangle, \text{ se tiene:}$$

$$\langle b D_2 v \rangle + \langle b D_1 v \rangle + \langle v D_1^S b \rangle = \langle \tilde{b} D_2 v \rangle + \langle \tilde{b} D_1 v \rangle + \langle v D_1^S b \rangle \quad (V.18)$$

Observando que;

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \gg N}} D_1^S b(\xi) = D_1 b(\xi) \quad (V.19)$$

y usando V.10, se obtiene el resultado V.13 aún para el caso de la relación de dispersión sustraída.

Se desea subrayar que la derivación presentada es mucho más simple que la usual ⁽²¹⁾ y además es completamente general, en el sentido de que la fórmula V.13 es válida para cualquier función de peso. Al igual que en la referencia (21), la regla de suma presentada sólo explota la información contenida en la parte imaginaria de la amplitud de dispersión; así no aparecen problemas debido al uso de relaciones de dispersión para calcular la parte real.

Existe otro punto que vale la pena mencionar. La derivación convencional ⁽²¹⁾ lleva a la regla de suma, completamente equivalente a V.13:

$$\langle b D_2 v \rangle = \langle \text{Im}(\tilde{f} w) \rangle - \langle v D_2 \tilde{b} \rangle \quad (V.20)$$

En ambas formas existe una divergencia en el integrando para $z = z' = N$. Esta divergencia es integrable, pero la evaluación numérica resulta molesta. Ahora bien, usando la expresión V.13 y suponiendo que, para $|z| \sim N$, f es $\tilde{f}$, se puede restar a ambos lados de la ecuación la cantidad:

$$\frac{1}{N} \int_{N-\epsilon}^N b D_2 v dz$$

donde ϵ es una energía pequeña. Así se obtiene una forma modificada de la regla de suma:

$$\frac{1}{N} \int_0^{N-\epsilon} b D_2 v dz = \frac{1}{N} \int_0^{N-\epsilon} \tilde{b} D_2 v dz \quad (V.21)$$

donde el integrando ya no diverge. Es difícil seguir un procedimiento semejante a partir de V.20.

La función $\tilde{D}_2 v(z)$ puede expandirse en potencias de z^2 ⁽²¹⁾, llevando al resultado de que la regla de suma V.6 es siempre equivalente a una superposición de FESR.

3. Algunos Ejemplos

En esta sección se discutirá brevemente cómo las consideraciones de las anteriores se aplican a reglas de suma mencionadas en la literatura reciente. Se fija la atención en aquéllas que requieren explícitamente el conocimiento de la parte real, en el caso de amplitudes impares ante el cruce. El mismo procedimiento, con modificaciones, puede seguirse para el caso par frente al cruce.

3.1 Reglas de suma de momento continuo

En este caso la función de peso es:

$$w(z) = \exp(-i\pi x) \left(\frac{z}{N}\right)^x,$$

$$v(z) = -\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) \left(\frac{z}{N}\right)^x \quad z \text{ real}$$

Luego:

$$\langle b D_2 v \rangle = \int_0^N d\tilde{z} b(\tilde{z}) \left\{ -\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) \int_N^\infty \frac{(z/N)^{x+1}}{z^2 - \tilde{z}^2} dz \right\}$$

El desarrollo del denominador en la última integral permite la separación de las dos variables de integración, de modo que:

$$\langle b D_2 v \rangle = -\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_{2k}(N)}{2k-x} \quad (V.22)$$

donde

$$S_{2k}(N) = \frac{1}{N} \int_0^N d\tilde{z} b(\tilde{z}) \left(\frac{\tilde{z}}{N}\right)^{2k}$$

son las FESR usuales.

Por otro lado, la evaluación de $\langle \tilde{b} D_2 v \rangle$ realizada por simplicidad bajo la hipótesis de un sólo polo de Regge, lleva a:

$$\langle \tilde{b} D_2 v \rangle = -\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) \sum_{k=0}^{\infty} \beta \frac{N^\alpha}{2k+\alpha+1} \quad (V.23)$$

Se puede observar que este resultado sigue inmediatamente de V.22, sustituyendo el valor de S_{2k} calculado para un polo de Regge,

$\tilde{b}(z) = \beta z^\alpha$. La suma de la serie en ecuación V.23 da el resultado conocido (21):

$$-\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_{2k}(N)}{2k-x} = -\frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) \frac{\beta N^\alpha}{x+\alpha+1} - x \times \left\{ \psi\left[\frac{1}{2}(\alpha+1)\right] - \psi\left(-\frac{1}{2}x\right) \right\} \quad (V.24)$$

donde $\psi(x)$ es la derivada logarítmica de la función Γ .

3.2 Regla de suma de momento oscilante de García y Masperi

Esta regla de suma se obtiene usando la función de peso:

$$w(z) = x \exp(i x z/N),$$

$$v(z) = x \sin(x z/N)$$

Esta elección de la función de peso está motivada por el requerimiento de que la zona de alta energía en la integral de la regla de suma no sea necesariamente la más importante. La función de peso oscilante puede hacer que la relevancia de la contribución de cualquier región de la energía a la regla de suma, varíe sustancialmente. Para esta función de peso se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle b D_2 v \rangle &= \int_0^N d\zeta b(\zeta) \left\{ \frac{2x}{\pi N} \int_N^\infty \frac{z \sin(xz/N)}{z^2 - \zeta^2} dz \right\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^N d\zeta b(\zeta) \zeta^{2k} \frac{2x}{\pi N} \int_N^\infty \frac{\sin(xz/N)}{z} z^{-2k} dz = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} S_{2k}(N) x^{2k+1} \int_x^\infty \frac{\sinh z}{z} z^{-2k} dz \end{aligned} \quad (V.25)$$

Procediendo como en el ejemplo anterior, el miembro de la derecha de la última ecuación debe ser igual a:

$$\frac{2}{\pi} \beta N^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+\alpha+1} \int_x^\infty \frac{\sinh z}{z} z^{-2k} dz \quad (V.26)$$

Luego, en el ejemplo que estamos considerando, la cantidad relevante para evaluar es ⁽³⁷⁾:

$$\int_x^\infty \frac{\sinh z}{z} z^{-2k} dz = (-1)^{k+1} \Im_m \Gamma(-2k, ix) \quad (V.27)$$

(Se puede notar que en la referencia (37) la definición de la función gama incompleta está dada bajo una condición sobre α , que se satisface trivialmente en este caso):

$$\Gamma(\alpha, u) = \int_u^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (V.28)$$

Así, en el caso de la función de peso oscilante, la dependencia funcional de la regla de suma del parámetro continuo x está dada por algún tipo de función hipergeométrica confluen-

te; un resultado similar fué hallado en referencia (21) para diferentes funciones de peso. Sin embargo, se nota que en este caso no es obvio cual es la función más o menos elemental obtenida sumando la serie en la ecuación V.26. Por lo tanto se procederá a usar un método numérico, explotando algunas fórmulas de recurrencia.

4) Regla de suma para dispersión Compton

A fin de probar la efectividad y la equivalencia de las reglas de suma discutidas en la sección 3, se estudió su aplicación al caso de la dispersión Compton hacia adelante promediada sobre el spin. Una ventaja de esta elección es que las correspondientes CMSR han sido examinadas en referencia (29), computando término a término la serie de la ecuación V.24. Además, esta amplitud es interesante debido a la posibilidad de un polo fijo con $\alpha = 0$ (27), cuyo residuo está probablemente relacionado con el término de Born del nucleón (21, 29, 28, 38). Se puede esperar que una CMSR pueda investigar mejor el tamaño y la interpretación de este posible polo fijo, debido a su peso más uniformemente repartido.

Para sumar las series V.25 y V.26 se evalúa la parte imaginaria de la función gama incompleta para distintos valores enteros de k, mediante la fórmula de recurrencia:

$$E_{2k+1}(ix) = \frac{e^{-ix}}{2^k} \left(1 - \frac{ix}{2k-1}\right) - \frac{x^2}{2k(2k-1)} E_{2k-1}(ix) \quad (V.29)$$

donde

$$E_{2k+1}(ix) = (ix)^{2k} \Gamma(-2k, ix) ,$$

$$\text{Im } E_1(ix) = -\frac{1}{2} \pi + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)(2p-1)!}$$

Para truncar la serie se usó el mismo criterio que el seguido en la referencia (29), a la que se remite para la evaluación de las FESR y la elección de los valores de N.

Como un primer resultado, se encontró que los parámetros obtenidos en la referencia (29) (β en μbGev):

$$\beta_p = 7,8 \quad \beta_{p^*} = 5,8 \quad \alpha_{p^*} = 0,60 \quad \beta_{\text{PF}} = 0,0$$

donde β_{PF} mide la diferencia entre el residuo del polo fijo y el límite de Thomson ($-e^2/M = -3,0 \mu\text{bGev}$), da un ajuste satisfactorio

a las OWSR (computadas con un N de 2,26 GeV). De hecho, dejando variar el parámetro continuo x entre 0 y 2π en pasos de $\pi/25$, los parámetros arriba mencionados ajustan las 50 reglas de suma de García Masperi con un nivel de confianza del 12%. Se hace notar que, en referencia (29) estos mismos parámetros eran constreñidos a ajustar también las secciones totales de fotoabsorción a alta energía de Blom et al. ⁽³⁹⁾. Además, solo una pequeña variación de $\beta_p, \beta_{p^*}, \alpha_{p^*}$, menor que los errores hallados en referencia (29), es necesaria para producir un ajuste excelente a todos los OWSR, con un χ^2 extremadamente bajo (< 2). Típicamente (para $N = 2,26$ GeV):

$$\beta_p = 7,6 \quad \beta_{p^*} = 5,8 \quad \alpha_{p^*} = 0,56$$

Comenzando desde el principio, e ignorando parametrizaciones anteriores, se ha buscado ajustes simultáneos a las OWSR y a secciones eficaces totales de alta energía, permitiendo que el residuo del polo fijo varíe libremente. Todos estos intentos reproducen los mismos resultados de antes. Aparecen pequeñas diferencias si uno trata de imponer las secciones eficaces de referencia (39) o las más precisas obtenidas por el grupo de Santa Bárbara ⁽⁴⁰⁾ con contadores. Sin embargo, estas diferencias están dentro de la incerteza sistemática del 8% citada por Blom et al. ⁽³⁹⁾. Por ejemplo, con las secciones eficaces de referencia (40), una solución típica es (siempre para $N = 2,26$ GeV):

$$\beta_p = 6,9 \quad \beta_{p^*} = 6,5 \quad \alpha_{p^*} = 0,60$$

Los valores de χ^2 son muy pequeños. En cuanto al polo fijo, todos los ajustes intentados, con diferentes N y/o constreñimientos a alta energía, confirman los resultados básicos de referencia (28, 29), es decir que este residuo es compatible con el límite de Thomson. Las fluctuaciones alrededor de este valor resultaron siempre incluidas entre $+1,4 \mu\text{bGeV}$ y $-0,2 \mu\text{bGeV}$, de modo que la hipótesis de ausencia del polo fijo parece rechazada por el análisis en OWSR (la precisión mencionada para el residuo del polo fijo en referencia (29) es algo exagerada, debido a un error en el programa original de computadora. Un nuevo análisis de CMSR muestra las mismas fluctuaciones en β_{PF} que con OWSR, sin afectar los otros

parámetros ni las conclusiones esenciales de aquel trabajo).

Cuantitativamente, los resultados arriba mencionados están de acuerdo con el trabajo de Damashok y Gilman⁽²⁸⁾, quienes ajustaron sólo el FESR S_1 , junto con las secciones eficaces a alta energía. Ello apoya nuestra conclusión de que todos los tipos de regla de suma pueden ser expresados como una superposición de FESR. Nuestra coincidencia con los parámetros obtenidos en referencia (28) puede estar relacionada con el hecho de que S_1 domina fuertemente sobre los FESR de momentos más altos. Por ejemplo, usando $N = 2,26\text{GeV}$ la razón de $S_1 : S_2 : S_4$ es aproximadamente $6 : 2 : 1$. De esta forma cualquiera sea la regla de suma de parámetro continuo considerada, el desarrollo en serie de ecuación V.13 es dominado por sus primeros términos, y todos los análisis llevan a resultados cualitativamente similares.

5) Conclusiones

El resultado principal de este trabajo es la generalización de la afirmación que fué demostrada previamente para las OWSR⁽²¹⁾ a saber, que cualquier tipo de regla de suma de parámetro continuo de la especie de ecuación V.6, es equivalente a una superposición de FESR de momento entero.

Se presenta una derivación que es completamente general y mucho más simple y elegante que las anteriores. Estas reglas de suma, ecuación V.13, explotan sólo el conocimiento de la parte imaginaria de la amplitud y así se pueden aplicar cuando la información acerca de la parte real no está disponible, evitando el uso de relaciones de dispersión.

Algunos autores afirman que las reglas de suma de función de peso generalizada, que introducen interferencia entre la parte real e imaginaria de una amplitud, son más efectivas para una determinación exacta de los parámetros de alta energía, que las FESR usuales. El resultado de este trabajo parece contradecir esta afirmación, ya que hemos mostrado que toda la información contenida en las OWSR está finalmente provista por los FESR. En conexión con esto, se distingue dos casos:

i) No hay información experimental directa acerca de la parte real a baja energía, de modo que uno se ve obligado a extraerla de la parte imaginaria, a través de relaciones de dispersión. Las integrales dispersivas tienen una cola a alta energía, en la que es necesario asumir un comportamiento para la función integrando y resulta natural, como se hizo aquí, introducir los mismos parámetros que la regla de suma deberá revelar con la ayuda de la dualidad. De otro modo, se introducen hipótesis adicionales acerca del comportamiento a alta energía de las amplitudes, arruinándose la consistencia del proceso. Pero entonces se muestra que, no importa cuán sofisticada sea la regla de suma usada, es siempre equivalente a las simples FESR, que contienen exactamente toda la información a baja energía disponible. En otras palabras, este resultado es meramente una consecuencia del siguiente axioma: es imposible encontrar un procedimiento que provea más información que los experimentos mismos. En la sección 4 se sometieron estas ideas a una prueba numérica usando la amplitud Compton hacia adelante, promediada sobre el spin, y se encontró una total confirmación del punto de vista enunciado.

ii) Se puede extraer información acerca de la parte real a baja energía de experimentos de polarización, como en el análisis de corrimientos de fase. En este segundo caso se cree que es ventajoso usar una regla de suma de parámetro continuo específicamente construida para sacar el máximo provecho de esta nueva información. De hecho, se recuerda que los mayores logros de CMSR pertenecen a esta segunda categoría de datos ^(41, 18). Sin embargo, como fuera repetidamente subrayado ⁽⁴²⁾, es necesario tener cuidado ya que, al computar la parte real de análisis de corrimientos de fase, a impulso transferido fijo, se extrapola la serie de ondas parciales fuera de su rango de convergencia, que más o menos coincide con la zona física, y se introducen serias ambigüedades cerca del umbral.

Nota agregada

Después de completado este trabajo, aparecieron nuevos datos de dispersión Compton hacia adelante en el rango 0,29 - 4,15 GeV. Si en lugar de los de Blum et al. ⁽³⁹⁾ se usan estos datos para evaluar la integral de dispersión, se halla una desviación sistemática

de alrededor de 3%. Tait y White ⁽⁴⁴⁾ analizaron recientemente CMSR usando ambos datos. Ellos subrayaron que cualquier conclusión fuerte acerca de un posible polo fijo está fuertemente correlacionada con las suposiciones acerca de la trayectoria P' . Sin embargo, los resultados de este análisis están esencialmente de acuerdo con los de este trabajo ya que si se asume una intersección del P' de alrededor de 0,5, como sugieren las interacciones fuertes, el residuo del polo fijo es muy próximo al límite de Thomson, como debería serlo si se acepta lo propuesto en referencia (21).

PARTE B - DUALIDAD SEMILOCAL EN EL MODELO DE VENEZIANO Y APLICACIONES

A REACCIONES INCLUSIVAS

CAPITULO VI - REACCIONES INCLUSIVAS - CINEMATICA Y DEFINICIONES

1) Cinemática de las reacciones inclusivas

Una reacción inclusiva de una partícula consiste en la dispersión de una partícula b, proyectil, sobre otra partícula a, blanco, dando lugar a la producción de una partícula c, que se observa, y a cualquier número de otras partículas que no se observan, y que se englobarán bajo el nombre X.

En lo que sigue, se toma como dirección positiva del eje z la del impulso de b en el sistema de referencia en que a está en reposo (sistema de laboratorio). Se llamará:

p_a : cuadrimpulso de a	$\bar{p}_a$: triimpulso de a
p_b : cuadrimpulso de b	$\bar{p}_b$: triimpulso de b
q : cuadrimpulso de c	$\bar{q}$: triimpulso de c

El símbolo ^{c.m.} indicará magnitudes en el sistema de centro de masa de a y b, y los símbolos ^a y ^b indicarán magnitudes en el sistema de laboratorio y de reposo del proyectil, respectivamente.

La reacción inclusiva queda descrita por tres variables cinemáticas independientes, que pueden elegirse como las tres variables invariantes relativistas:

$$s = (p_a + p_b)^2 = (E_a^{c.m.} + E_b^{c.m.})^2 \quad (E: \text{energía})$$

$$t = (q - p_b)^2$$

$$M^2 = (p_a + p_b - q)^2$$

Definiendo, además

$$u = (q - p_a)^2$$

se tiene, de la relación de conservación de energía e impulso:

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + M^2$$

M representa una "masa efectiva" de las partículas no observadas, y depende del número de éstas, de sus masas y de sus impulsos. El valor mínimo de M corresponderá al caso en que existe un sistema de referencia en el que todas las velocidades de las partículas englobadas en X sean nulas. Este caso corresponde a que todas las partículas se muevan con la misma velocidad en

el sistema c.m., y entonces será:

$$M_{\min.} = \sum_X m_i \quad (\text{VI.2})$$

Evidentemente, el umbral en M^2 dependerá de los números cuánticos del canal s, y de los de c.

En cuanto al valor máximo de M^2 , se observa que:

$$M^2 = (\sqrt{s} - E_c^{\text{c.m.}})^2 - |\vec{q}^{\text{c.m.}}|^2 \quad (\text{VI.3})$$

es decir que corresponderá al caso de que $\vec{q}^{\text{c.m.}}$ sea nulo (siempre que X consista de dos o más partículas), y entonces:

$$M_{\max.} = \sqrt{s} - m_c \quad (\text{VI.4})$$

La transformación de Lorentz que lleva del sistema c.m. al sistema de laboratorio está dada por:

$$p_{i//}^a = p_{iz}^a = \text{Chu } p_{i//}^{\text{c.m.}} - \text{Shu } E_i^{\text{c.m.}}$$

$$E_i^a = \text{Chu } E_i^{\text{c.m.}} - \text{Shu } p_{i//}^{\text{c.m.}}$$

$$\text{donde } \text{Chu} = E_a^{\text{c.m.}}/m_a \quad \text{Shu} = p_{a//}^{\text{c.m.}}/m_a \quad (\text{VI.5})$$

La transformación de Lorentz que lleva del sistema del c.m. al del proyectil, está dada por las mismas fórmulas, pero ahora

$$\text{Chu}' = E_b^{\text{c.m.}}/m_b \quad \text{Shu}' = p_{b//}^{\text{c.m.}}/m_b$$

Para $s \gg m_a^2, m_b^2$, se tiene los valores aproximados:

$$\begin{aligned} E_a^{\text{cm}} &\sim \frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{(m_b^2 - m_a^2)}{2\sqrt{s}} & p_{a//}^{\text{cm}} &\sim - \left[\frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{(m_b^2 + m_a^2)}{2\sqrt{s}} \right] \\ E_b^{\text{cm}} &\sim \frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{(m_a^2 - m_b^2)}{2\sqrt{s}} & p_{b//}^{\text{cm}} &= - p_{a//}^{\text{cm}} \end{aligned} \quad (\text{VI.6})$$

2) Descripción en términos de variables relacionadas con el impulso longitudinal de c.

Uno de los hechos experimentales más generales de reacciones inclusivas, es que el número de partículas c producidas decrece muy rápidamente a medida que se observan impulsos de c transversales a la dirección del proyectil ($q_\perp$) mayores. Este decrecimiento es compatible con el ajuste por una exponencial o una Gauss'iana en $q_\perp$. El valor promedio de $q_\perp$ resulta del orden de 0,3 - 0,4 GeV/c, y es aproximadamente independiente de la energía, e incluso del tipo de la partícula incidente ⁽⁴⁵⁾. Estos hechos sugieren una descripción simplificada del proceso, en función de la componente lon-

gitudinal del impulso de la partícula c. Para ello se define una "masa longitudinal" de la partícula c, μ , dada por:

$$\mu = \sqrt{m_c^2 + q_{\perp}^2} \quad q_{\perp} = |\vec{q}_{\perp}| = q_x \vec{i} + q_y \vec{j}$$

que es invariante frente a las transformaciones de Lorentz "longitudinales" o sea según el ej z.

Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} E_c &= \sqrt{\mu^2 + q_{\parallel}^2} \\ q_{\parallel}^{c.m.} &= + \sqrt{\frac{s}{4} \left(1 - \frac{M^2 - m_c^2}{s} \right) - \mu^2} \\ E_c^{c.m.} &= \sqrt{\frac{s}{4} \left(1 - \frac{M^2 - m_c^2}{s} \right)} \end{aligned} \quad (VI.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{M^2}{s} &= 1 - \sqrt{\frac{4}{s} (\mu^2 + (q_{\parallel}^{c.m.})^2)} + m_c^2/s \\ q_{\parallel}^a &= q_{\parallel}^{c.m.} \text{Chu} - \sqrt{\mu^2 + (q_{\parallel}^{c.m.})^2} \text{Shu} \\ q_{\parallel}^b &= q_{\parallel}^{c.m.} \text{Chu} + \sqrt{\mu^2 + (q_{\parallel}^{c.m.})^2} \text{Shu} \end{aligned} \quad (VI.8)$$

Para $s \gg m_a^2, m_b^2$, se tiene, usando VI.6:

$$\begin{aligned} q_{\parallel}^a &= \frac{1}{m_a} \left\{ q_{\parallel}^{c.m.} \left(\frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{m_b^2 - m_a^2}{2s} \right) + \sqrt{\mu^2 + (q_{\parallel}^{c.m.})^2} \left(\frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{m_b^2 + m_a^2}{2s} \right) \right\} \\ q_{\parallel}^b &= \frac{1}{m_b} \left\{ q_{\parallel}^{c.m.} \left(\frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{m_a^2 - m_b^2}{2s} \right) - \sqrt{\mu^2 + (q_{\parallel}^{c.m.})^2} \left(\frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{m_b^2 + m_a^2}{2s} \right) \right\} \end{aligned} \quad (VI.9)$$

Zonas de fragmentación

Se llama zona de fragmentación de a (b), a la zona cinemática en que $q_{\parallel}^a$ ($q_{\parallel}^b$) se mantiene constante en un valor finito, a medida que s tiende a infinito, salvo términos del orden de s^{-1} . De las fórmulas VI.9 se ve que sólo es posible estar en la zona de fragmentación de a si se cumple:

$q_{\parallel}^{c.m.} \ll -\mu$ y $q_{\parallel}^{c.m.}$ proporcional a $-\sqrt{s}$, pues entonces

$$\sqrt{\mu^2 + (q_{\parallel}^{c.m.})^2} \sim |q_{\parallel}^{c.m.}| \left(1 + \frac{\mu^2}{2(q_{\parallel}^{c.m.})^2} \right)$$

y los términos proporcionales a $\sqrt{s} q_{//}^{c.m.}$ cancelan en la expresión de $q_{//}^a$, quedando:

$$q_{//}^a = \frac{m_b}{2} \left[\frac{2 q_{//}^{c.m.}}{\sqrt{s}} - \frac{\mu^2 \sqrt{s}}{2 q_{//}^{c.m.} m_a^2} \right] + O(s^{-1}) \quad (VI.10)$$

Análogamente, en la zona de fragmentación de b:

$$q_{//}^b = \frac{m_b}{2} \left[\frac{2 q_{//}^{c.m.}}{\sqrt{s}} - \frac{\mu^2 \sqrt{s}}{m_b^2 2 q_{//}^{c.m.}} \right] + O(s^{-1}) \quad (VI.10')$$

Se ve entonces, que en la zona de fragmentación de a (b), $q_{//}^a$ ($q_{//}^b$) depende sólo del valor de $\{2q_{//}^{c.m.}/\sqrt{s}\}$ y no de $q_{//}^{c.m.}$ o de s independientemente, siempre que s sea asintótico. Este hecho motivó la introducción por Feynmann ⁽⁴⁶⁾ de la variable x, que puede ser definida de distintas maneras, que difieren entre sí en términos del orden s^{-1} :

$$x = \frac{2 q_{//}^{c.m.}}{\sqrt{s}} \quad x = \frac{2 q_{//}^{c.m.}}{p_a^{c.m.}} \quad x = \frac{q_{//}^{c.m.}}{|q_{//}^{c.m.}|_{\max}}$$

La última definición tiene la ventaja de variar estrictamente entre -1 y 1, pero se usará la primera, que aparece naturalmente en las fórmulas. Se puede ver de VI.7 que, para $s \gg M_{\min}^2, \mu^2$

$$|q_{//}^{c.m.}|_{\max} = \frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{M_{\min}^2 - m_c^2 + 2\mu^2}{2\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{A}{\sqrt{s}}; \quad A > 0$$

o sea que los valores extremos de x son:

$$x_{\min} = -1 + A/s$$

$$x_{\max} = 1 - A/s$$

Se tiene las siguientes fórmulas exactas:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{s}} \left[q_{//}^a \operatorname{Ch} u + \sqrt{q_{//}^{a2} + \mu^2} \operatorname{Sh} u \right] \\ q_{//}^a &= \frac{\sqrt{s}}{2} \left[x \operatorname{Ch} u - \sqrt{x^2 + 4\mu^2/s} \operatorname{Sh} u \right] \end{aligned} \quad (VI.11)$$

Idem con $q_{//}^b$ y u' .

$$\frac{M^2}{s} = 1 - \sqrt{4\mu^2/s + x^2} + \frac{m_c^2}{s}$$

Para s asintótico y x cualquiera, se tiene:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{s}} \left\{ \frac{q_{//}^a}{m_a} \left[\frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{m_b^2 - m_a^2}{2\sqrt{s}} \right] + \frac{1}{m_a} \sqrt{\mu^2 + q_{//}^{a2}} \left[\frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{m_b^2 + m_a^2}{2\sqrt{s}} \right] \right\} \\ q_{//}^a &= \frac{\sqrt{s}}{2} \left\{ \frac{x}{m_a} \left[\frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{m_b^2 - m_a^2}{2\sqrt{s}} \right] + \frac{\sqrt{x^2 + 4\mu^2/s}}{m_a} \left[\frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{m_b^2 + m_a^2}{2\sqrt{s}} \right] \right\} \\ \frac{M^2}{s} &= 1 - \sqrt{4\mu^2/s + x^2} \end{aligned} \quad (VI.12)$$

Para s asintótico y zona de fragmentación de a ($-1 < x \ll -2\mu/\sqrt{s}$):

$$q_{||}^a = \frac{m_a}{2} \left[x - \frac{\mu^2}{x m_a^2} \right] + O(s^{-1})$$

$$x = \frac{1}{m_a} \left[q_{||}^a - \sqrt{(q_{||}^a)^2 + \mu^2} \right] + O(s^{-1}, \frac{q_{||}^a}{s})$$
(VI.13)

$$q_{||}^b = \frac{s x}{2 m_b} + O(1)$$

$$x = -1 + \frac{M^2}{s} + O\left(\frac{\mu^2}{x s}\right)$$
(VI.14)

$$u = m_a^2 + m_c^2 - 2 m_a \sqrt{\mu^2 + (q_{||}^a)^2}$$
(VI.15)

De las fórmulas VI.13 se ve que, dado x y μ constantes, se puede calcular $q_{||}^a$ y $|\vec{q}_\perp^a|$, también constantes.

De VI.13, VI.14 y VI.15, se ve que $q_{||}^a$ y $|\vec{q}_\perp^a|$ son funciones sólo de M^2/s y de u , de modo que fijar $\vec{q}^a$ implica fijar M^2/s y u , mientras s tiende a infinito. Lo dicho constituye la definición de la zona de fragmentación de a en función de las variables invariantes relativistas.

De $s + t + u = M^2 + m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$, resulta que:

$$t/s - M^2/s = -1 + O(s^{-1})$$
(VI.16)

o sea que, para M^2/s fijo, t es lineal en $-s$.

En la zona de fragmentación de b ($1 > x \gg 2\mu/\sqrt{s}$):

$$q_{||}^b = \frac{m_b}{2} \left[x - \frac{\mu^2}{x m_b^2} \right] + O(s^{-1})$$

$$x = \frac{1}{m_b} \left[q_{||}^b + \sqrt{(q_{||}^b)^2 + \mu^2} \right] + O(s^{-1}, \frac{q_{||}^b}{s})$$
(VI.13')

$$q_{||}^a = \frac{s x}{2 m_a} + O(1)$$

$$x = 1 - \frac{M^2}{s} + O\left(\frac{\mu^2}{x s}\right)$$
(VI.14')

$$t = m_b^2 + m_c^2 - 2 m_b \sqrt{\mu^2 + (q_{||}^b)^2}$$
(VI.15')

De manera que dados x y μ fijos, se tiene $\vec{q}^b$ fijo y M^2/s y t fijos, mientras s tiende a infinito, que son las maneras de indicar la zona de fragmentación de b .

$$(VI.16')$$

Zonas de Triple Regge

La zona de Triple Regge, o de fragmentación en el límite del espacio de las fases, corresponde, para fragmentación de a, a x muy próximo a -1 , o sea $M^2/s \ll 1$. En esta zona t es muy próximo a $-s$.

En la zona Triple Regge de fragmentación de b, x es muy próximo a 1 , $M^2/s \ll 1$, y u resulta muy próximo a $-s$.

Zona central o de pionización

Otra zona de interés es aquella, en que $|x|$ se hace mucho menor que 1 a medida que s tiende a infinito, es decir que $|q_{//}^{c.m.}|$ crece mucho más lentamente que $\sqrt{s}$. En este caso ni $q_{//}^a$ ni $q_{//}^b$ son constantes. Por ejemplo, si $q_{//}^{c.m.}$ se mantiene constante, tanto $q_{//}^a$ como $q_{//}^b$ crecen como $\sqrt{s}$. Evidentemente, en este caso x tiende a cero para s asintótico.

Para $s \gg m_a^2, m_b^2$, se ve de VI.6 y VI.7 que, para cualquier zona cinemática:

$$tu = s\mu^2 + \sqrt{s} \left[(-E_c^{c.m.} - q_{//}^{c.m.})(m_b^2 + m_c^2) + (-E_c^{c.m.} + q_{//}^{c.m.}) \times (m_a^2 + m_c^2) \right] + O(s^{-1/2})$$

Si $q_{//}^{c.m.}$ crece mucho más lentamente que $\sqrt{s}$, tanto u como t tienden a infinito con s , y además, en el mayor orden de s :

$$tu = s\mu^2 \quad (VI.15'')$$

$$M^2 \sim s + t + u \quad \frac{M^2}{s} \sim 1 + \frac{\mu^2}{t} + \frac{\mu^2}{u} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1 \quad (VI.17)$$

3) Variable y o "rapidez"

La variable x presenta el inconveniente de estar ligada a un sistema de referencia particular, el de c.m., en el sentido de que la descripción de un proceso físico tendría una forma muy distinta si se tomara, por ejemplo, la variable $x' = 2 q_{//}^a / \sqrt{s}$, con lo que el rango de variación de la variable se extendería entre un valor próximo a cero y $\sqrt{s}/m_a$, en lugar de un intervalo de longitud 2, como el que corresponde a x .

Este inconveniente se evita usando la variable y , introducida por Wilson (47), definida por:

$$y_i^a = \text{Sh}^{-1} (q_{i//}^a / \mu_i) = \frac{1}{2} \ln \left[(E_i^a + q_{i//}^a) / (E_i^a - q_{i//}^a) \right] \quad (VI.18)$$

donde $q_{i//}^a, E_i^a$, son el impulso y la energía de la partícula i 'ésima en el sistema de laboratorio.

La energía de la partícula i 'ésima vale μ_i en su sistema de referencia longitudinal, luego:

$$\begin{aligned} q_{i//}^a &= (\text{Sh } y_i^a) \mu_i \\ E_i^a &= \mu_i \text{Ch } y_i^a \\ q_i^a &= (\mu_i \text{Ch } y_i^a, q_{ix}, q_{iy}, \mu_i \text{Sh } y_i^a) \end{aligned} \quad (\text{VI.19})$$

Siendo y_i^a una variable que caracteriza la transformación de Lorentz para pasar del sistema de laboratorio al sistema longitudinal propio de la partícula, un cambio en el sistema de referencia caracterizado por u , altera los valores de todos los y , simplemente de la forma:

$$y_i' = y_i + u$$

es decir, que el único cambio que un cambio del sistema de referencia introduce en la descripción de un proceso físico hecha en base a los valores y , es un corrimiento del eje de las abscisas.

$$p_b^a = (m_b \text{Ch } y_b^a, 0, 0, m_b \text{Sh } y_b^a)$$

$$p_a^a = (m_a, 0, 0, 0)$$

Luego, para $s \gg m_a^2, m_b^2$;

$$s \sim m_a m_b \exp(y_b^a) \quad (\text{VI.20})$$

Los límites cinemáticos de y_i^a , dado un valor de $|q_{i//}|$, son:

$$\begin{aligned} y_{i \min}^a &= \ln(\mu_i/m_a) & y_{i \max}^a &= y_b^a + \ln(m_b/\mu_i) \\ y_{i \max} - y_{i \min} &= Y_i = \ln(s/\mu_i^2) \end{aligned} \quad (\text{VI.21})$$

es decir que la longitud del intervalo en y depende sólo de s y de la masa longitudinal de la partícula observada.

Las relaciones entre x, y_i^a e $y_i^{\text{c.m.}}$ son:

$$\begin{aligned} x_i &= 2\mu_i/\sqrt{s} \text{Sh } y_i^{\text{c.m.}} \\ x_i &= \exp(-Y_i/2 + y_i^{\text{c.m.}}) - \exp(-Y_i/2 - y_i^{\text{c.m.}}) \end{aligned} \quad (\text{VI.22})$$

donde

$$y_i^{\text{c.m.}} = \text{Sh}^{-1}(q_{i//}^{\text{c.m.}}/\mu_i)$$

En la zona en que $x_i \ll -2\mu_i/\sqrt{s}$:

$$y_i^a \sim \ln(-\mu_i/x_i m_a).$$

CAPITULO VII - ESPECTROS INCLUSIVOS - DEFINICIONES - CARACTERISTICAS

Si se tiene la reacción inclusiva $a + b \rightarrow c + X$, la función de interés es la sección diferencial de producción de la partícula c , en función de su impulso y de la energía de las partículas incidentes. Las partículas no observadas, denotadas por X , incluyen todo lo que se produce además de c , incluyendo partículas inestables (resonancias).

Debido a que la cantidad invariante relativista que describe el espacio de las fases de c es $d^3\bar{q}/E_c$, es preferible describir las reacciones inclusivas en términos de la función distribución:

$$F_{ab}^c(s, \bar{q}) = E_c \left(d^3\sigma(a + b \rightarrow c + X) / dq^3 \right) \quad (VII.1)$$

donde $d^3\sigma(a + b \rightarrow c + X) / dq^3$ es la sección diferencial inclusiva para producir la partícula c , de impulso $\bar{q}$, cuando la energía en centro de masa al cuadrado de las partículas incidentes es s .

En el caso de estudiar una reacción inclusiva de dos partículas: $a + b \rightarrow c + d + X$, la función distribución se toma:

$$F_{ab}^{cd}(s, \bar{q}_c, \bar{q}_d) = E_c E_d \left(d^6\sigma(a + b \rightarrow c + d + X) / dq_c^3 dq_d^3 \right) \quad (VII.1')$$

En algunos casos es interesante estudiar la función densidad de distribución, que se define como:

$$\rho_{ab}^c = (\sigma_{ab})^{-1} F_{ab}^c \quad (VII.2)$$

donde σ_{ab} es la sección eficaz total de dispersión de las partículas incidentes.

Como en un experimento inclusivo un evento con n partículas en el estado final se cuenta n veces (si se observa todas las partículas producidas), resulta que:

$$\int \frac{d^3q}{E_c} \rho(s, \bar{q}) = \frac{1}{\sigma_{ab}} \sum_{n=1}^{n_{\text{max}}(s)} n \sigma_n(s) = \langle n \rangle \quad (VII.3)$$

Mientras que en un experimento donde sólo se observan partículas cargadas, se tiene:

$$\int \frac{d^3q}{E_c} \rho_c(s, \bar{q}) = \langle n_c \rangle$$

donde $\langle n \rangle$ y $\langle n_c \rangle$ son, respectivamente, el número promedio de partículas y el número promedio de partículas cargadas producidas.

Los experimentos indican que $\langle n \rangle$ crece muy lentamente con la energía de las partículas incidentes. Dentro del rango de energías accesible actualmente, no es claro si el crecimiento es lineal en $\log s$, o en $s^{1/3}$, pero de todos modos es mucho menor de lo que permitiría la energía disponible.

En términos de la densidad de distribución, la conservación de energía queda expresada:

$$\sum_c \int d^2 q \, \rho_c(\vec{q}, s) = \sqrt{s}$$

$$\sum_c \int_{-1}^1 dx \int d^2 q_\perp \, \rho_c(x, q_\perp, s) = 2 \quad (\text{VII.4})$$

Fragmentación límite y "scaling"

Estas hipótesis se remontan a los trabajos de Amati, Fubini y Stanghellini ⁽⁴⁸⁾(1962) y Wilson ⁽⁴⁷⁾(1963), pero su importancia no fue apreciada hasta que Feynman ⁽⁴⁶⁾ y Benecke, Chou, Yang y Yen ⁽⁴⁹⁾ (B.C.Y.Y.) las redescubrieron en 1969.

La hipótesis de fragmentación límite fue propuesta por B.C.Y.Y. de la siguiente manera:

a) En la zona de fragmentación de a ($q_{//}^a$ fijo mientras s tiende a infinito), debe ser:

$$F_{ab}^C(s, q_{//}, \vec{q}_\perp) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} f(q_{//}^a, \vec{q}_\perp) \quad (\text{VII.5})$$

b) En la zona de fragmentación de b ($q_{//}^b$ fijo mientras s tiende a infinito), debe ser:

$$F_{ab}^C(s, q_{//}, \vec{q}_\perp) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} f(q_{//}^b, \vec{q}_\perp) \quad (\text{VII.5'})$$

Como se discutió en el capítulo VI, $q_{//}^a$ constante mientras s tiende a infinito, corresponde a x constante y mucho menor que $2\mu/\sqrt{s}$; mientras que $q_{//}^b$ constante mientras s tiende a infinito corresponde a x constante y mucho mayor que $2\mu/\sqrt{s}$.

La hipótesis de "scaling", propuesta por Feynman, queda expresada:

$$F_{ab}^C(s, q_{//}, \vec{q}_\perp) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \tilde{F}(x, \vec{q}_\perp) \quad (\text{VII.6})$$

para todo x , y además:

$$F_{ab}^C(s, q_{//}, \vec{q}_\perp) \xrightarrow{s \rightarrow \infty, |x| \ll 1} \tilde{f}(\vec{q}_\perp) \quad (\text{VII.6'})$$

Evidentemente, en las zonas de fragmentación las dos hipótesis son equivalentes, pero Feynman hace suposiciones adicionales para la zona $|x| \rightarrow 0$; predicciones que fueron halladas también por Amati, Fubini y Stanghellini ⁽⁴⁸⁾ y por Heisenberg ⁽⁵⁰⁾.

La variable x presenta el inconveniente de que, para s tendiendo a infinito, todos los valores de $q_{//}^{c.m.}$ que crecen menos rápidamente que s contribuyen a $x = 0$, con lo que se hace muy difícil observar experimentalmente el "scaling" en la zona central del espectro.

La variable y no presenta este inconveniente, como se puede observar de las fórmulas VI.20 a VI.22, para $s \gg m_a^2, m_b^2$. De la fórmula VI.22 se puede ver que, cuando $y^{c.m.}$ se hace suficientemente grande como para que $\exp(-|y^{c.m.}|^2) \ll 1$, entonces x es sólo función de la distancia de $y^{c.m.}$ a su extremo de variación más próximo (zonas de fragmentación).

La figura VII.1 muestra un espectro inclusivo en forma esquemática. La zona A es la zona de fragmentación de a , la zona C es la de pionización, o zona central, y la zona B es la de fragmentación de b . La fórmula VII.6' predice la existencia del "plateau" en la zona C, para s asintótico.

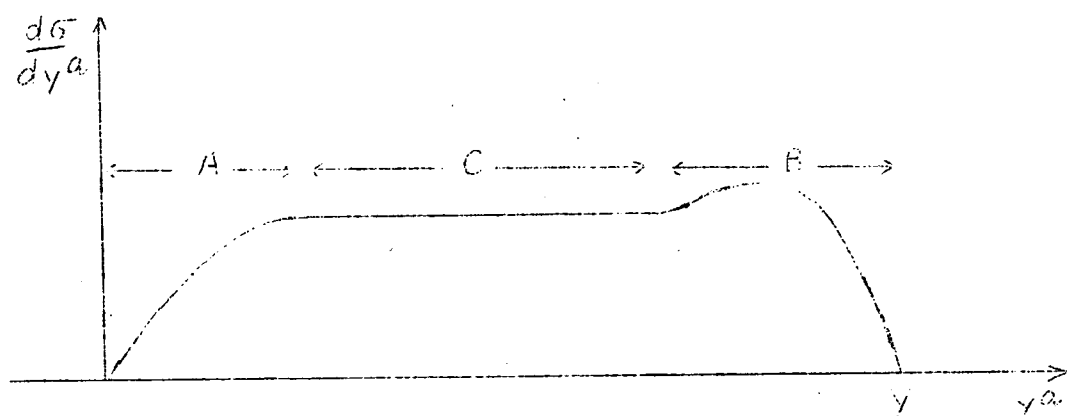


figura VII.1

Las hipótesis de fragmentación límite y "scaling" implican que, una vez alcanzada una energía suficientemente alta, las zonas A y B se mantendrán iguales al crecer la energía. La hipótesis de "scaling" predice además que la altura del "plateau" no variará, sólo que el mismo se hará más largo a medida que Y ($\sim \ln s/\sqrt{s}$) crece. Se ve que, en la zona de energías muy altas, donde la zona C domine al espectro, la multiplicidad $\langle n \rangle$ deberá crecer como $\log s$.

Los datos experimentales referentes a la zona de energías intermedias (< 30 Gev) han sido compilados por Lander ⁽⁵¹⁾. Como ejemplo, se

puede observar que, para $pp \rightarrow \pi^+ X$ las distribuciones en $q_{\perp}^2$ y en $q_{\perp}$ en la zona de fragmentación de a , varían poco entre 13 y 28 GeV, es decir que parece haberse alcanzado la fragmentación límite en esta región de energías. En cuanto al "plateau", la forma de las curvas indica que a 28,5 GeV recién se podría estar acercando a su aparición, observándose un achatamiento en x próximo a cero.

El funcionamiento de los I.S.R. del C.E.R.N. ha permitido obtener datos de la dispersión $p p$ hasta energías equivalentes, en el sistema de laboratorio, de alrededor de 2.000 GeV. Para $p p \rightarrow \pi^+ X$ se observa que entre 500 y 1.500 GeV (E_{lab} equivalente), la fragmentación límite se cumple dentro del error de las mediciones. Existe la sugerencia de un "plateau", pero no hay datos en la zona central (52).

Datos más recientes de I.S.R. (53) indican la existencia de un plateau para piones, si bien en un valor algo más alto del que se esperaba a partir de las mediciones realizadas con aceleradores. También se observa una dependencia de tipo $\log s$ de la multiplicidad.

En lo que respecta a la dependencia de $|q_{\perp}|$, la forma $\exp(-a q_{\perp}^2)$, con a del orden de 3 provee una buena representación de los datos para $p p \rightarrow h X$, cuando $q_{\perp}^2 > 0,2 \text{ (GeV/c)}^2$, para $h = \pi^{\pm}, K^{\pm}, p, \bar{p}$ y para energías entre 10 y 1.500 GeV/c (impulso del haz). Para valores de $q_{\perp}^2$ menores, a toma distintos valores, pudiendo ser aún de 15 ($p p \rightarrow \pi^{\pm} X$) (54).

En general, la función $\tilde{F}(x, q_{\perp})$ no puede descomponerse en una $g(x)$ por una $h(q_{\perp}^2)$.

Hipótesis de longitud de correlación

La hipótesis de longitud de correlación consiste en suponer que, si los valores de y_i para dos partículas difieren en más del valor de una "longitud de correlación", L , entonces la sección eficaz de dispersión no depende de esta diferencia, es decir que no hay correlación entre las dos partículas. Esta idea fué propuesta por Wilson (47) y aplicada en forma más completa por Wilson (55) y De Tar (56). La hipótesis contiene las predicciones de fragmentación límite y de "scaling", además de predicciones adicionales.

En el caso de espectros inclusivos de una partícula, la hipótesis predice que, en la zona de fragmentación de a , cuando la energía es

suficientemente grande para que sea

$y_b^a - y_c^a \gg L$ (o $Y_c - y_c^a \gg L$, que es equivalente), debe ser:

$$\frac{E_c}{\sigma_{ab}} \frac{d^3 \sigma(a + b \rightarrow c + X)}{dq^3} = \int_{ab}^c (q_{\perp}, y_c^a, Y_c - y_c^a) \rightarrow \int_a^c (q_{\perp}, y_c^a) \quad (\text{VII.7})$$

es decir que la sección eficaz inclusiva presenta fragmentación límite, ya que se hace independiente de Y_c , o sea de s , para Y_c suficientemente grande. Además, el espectro no depende de la naturaleza del haz en esta zona cinemática, salvo un factor contenido en σ_{ab} .

Análogamente, si y_c^a es próximo a y_b^a , y la energía es suficientemente grande para que sea $y_c^a \gg L$, debe ser:

$$\int_{ab}^c (q_{\perp}, y_c^a, Y_c - y_c^a) \rightarrow \int_b^c (q_{\perp}, Y_c - y_c^a) \quad (\text{VII.7'})$$

Ya que $Y_c - y_c^a$ constante a medida que s crece define la zona de fragmentación de b , esto implica una nueva manera de expresar la hipótesis de fragmentación límite de b . Además establece que, en esta zona, el espectro es independiente de la naturaleza del blanco, salvo el factor contenido en σ_{ab} .

Para Y suficientemente grande como para que la zona central tenga un y_c^a que esté a una distancia mayor que L de ambos extremos, $L \ll y_c^a \ll Y_c - L$, deberá ser:

$$\int_{ab}^c (q_{\perp}, y_c^a, Y_c - y_c^a) \rightarrow \int^c (q_{\perp}) \quad (\text{VII.8})$$

es decir que se tiene un "plateau", y además el espectro no depende ni de la naturaleza del blanco, ni del proyectil.

Cuando $Y_c \lesssim L$, ninguna zona del espectro se halla a una distancia mayor que L de ninguno de los extremos, y no hay razón para que se haya alcanzado la distribución límite. Cuando $Y_c \gg L$, los valores de y_c^a cercanos a un extremo se hallan a una distancia mayor que L del otro extremo del rango de variación, y la distribución se hace asintótica en las zonas de $|x|$ próximo a 1, extendiéndose hacia valores cada vez menores de $|x|$. Cuando $Y_c \gg 2L$, la distribución será asintótica en su totalidad y en la zona central aparecerá el "plateau". Como Y_c crece como $\log s$, se puede esperar que, si la fragmentación límite comienza en un valor s_F , el "plateau" aparecerá en un $s_P \sim s_F^2$.

CAPITULO VIII - ANALISIS DE MUELLER - FORMALISMO DE REGGE - REGLAS DE SUMA EN REACCIONES INCLUSIVAS

Análisis de Mueller

Mueller⁽⁵⁷⁾ introdujo un método de análisis de reacciones inclusivas basado en la generalización del teorema óptico⁽⁵⁸⁾, que relaciona la sección eficaz inclusiva de n partículas:

$$a + b \longrightarrow c_1 + c_2 + \dots + c_n + X$$

donde X representa cualquier número de partículas no observadas, con el límite hacia adelante de una discontinuidad de la amplitud para el proceso:

$$a + b + \bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \dots + \bar{c}_n \longrightarrow a + b + \bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \dots + \bar{c}_n$$

siendo $\bar{c}_i$ la antipartícula de c_i .

En el caso de una reacción inclusiva de una partícula, esta relación es de la forma:

$$s E_c \frac{d^3 \bar{\sigma}}{dq^3} = \sum_X \left| \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \text{Diagrama} \\ \leftarrow \bar{c} \end{array} \right|^2 = \quad \text{(VIII.1)}$$

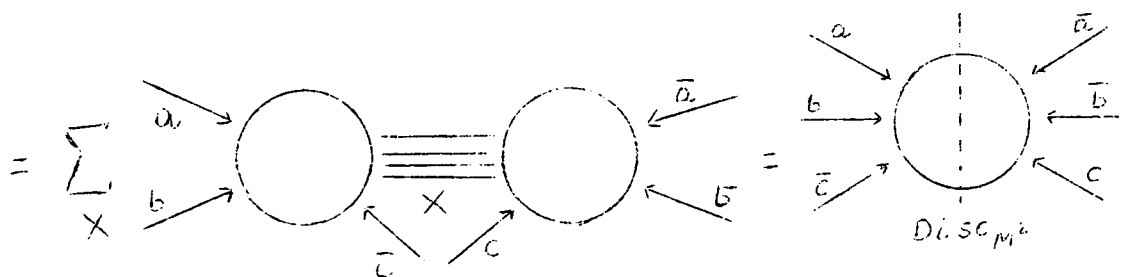


figura VIII.1

La discontinuidad en M^2 debe tomarse en la hoja de Riemann sobre la cual $s_{ab} = (p_a + p_b)^2$ está justo por encima de su discontinuidad, mientras que $s_{\bar{a}\bar{b}} = (p_{\bar{a}} + p_{\bar{b}})^2$ está justo debajo de su discontinuidad⁽⁵⁹⁾.

El límite hacia adelante implica que:

$$p_a = -p_{\bar{a}} \quad p_b = -p_{\bar{b}} \quad p_{\bar{c}} = -p_c = -q$$

siendo p_a , p_b y p_c cuadrimpulsos de energía positiva, es decir los correspondientes a la reacción $a + b \longrightarrow c + X$.

A la amplitud de 3 a 3 partículas, se le puede aplicar el desarrollo en las representaciones unitarias del grupo $O(2,1)$ (grupo de transformaciones de Lorentz que dejan una componente espacial invariante), según el análisis de Toller⁽⁶⁰⁾.

Desarrollo en $O(2,1)$ simple

Si se considera una reacción con N partículas, manteniendo fijo el impulso transferido entre dos grupos de ellas, como indica la figura VIII.2, entonces se puede elegir dos ternas de referencia, una para los impulsos a la izquierda de Q , y otra para los impulsos a la derecha (61).

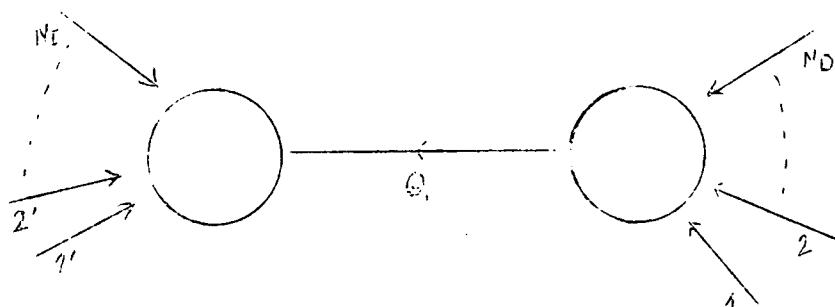


figura VIII.2

Cada una de las dos ternas se puede elegir de tal modo que

sea:

$$Q)_D = Q)_I = (0, 0, 0, \sqrt{-t}) \quad (\text{si } Q^2 < 0)$$

$$P1)_D = m_1 (Ch \alpha_1, 0, 0, Sh \alpha_1)$$

$$P2)_D = m_2 (Ch \alpha_2, 0, Sh \alpha_2 \sin \beta_2, Sh \alpha_2 \cos \beta_2)$$

$$P1')_I = m_1 (-Ch \alpha'_1, 0, 0, Sh \alpha'_1)$$

$$P2')_I = m_2 (-Ch \alpha'_2, 0, Sh \alpha'_2 \sin \beta'_2, Sh \alpha'_2 \cos \beta'_2)$$

El número de variables es:

$$3(N_D + 1) - 10 + 3(N_I + 1) - 10 + 1 = 3(N_D + N_I) - 13$$

más las tres variables del grupo $O(2,1)$ que definen la orientación relativa de las dos ternas que tienen el cuadrivector Q común.

Se puede parametrizar una transformación $O(2,1)$ de la forma: $R_z(\mu) B_x(\xi) R_z(\nu)$, donde $R_z(\alpha)$ es una rotación en un ángulo α alrededor del eje z , y $B_x(\xi)$ es un "boost" caracterizado por la velocidad ξ/c en la dirección x .

Llamando $D^{J \lambda_I \lambda_D}(g)$, con $J = -\frac{1}{2}$, a las representaciones unitarias del grupo $O(2,1)$ (60) se tiene las "proyecciones de onda parcial generalizadas":

$$A^{J \lambda_I \lambda_D}(v_I, t, v_D) = \int dq A(v_I, t, q, v_D) D^{J \lambda_I \lambda_D}(q) \quad (\text{VIII.2})$$

donde la integral se hace sobre el rango de variación de los parámetros del grupo y $v_I (v_D)$ contiene las componentes independientes de los impulsos a

la izquierda (derecha) de Q referidos a las ternas correspondientes.

La integral converge si

$$A(v_I, t, q, v_D) \leq (Ch \xi)^{-1/2 - \delta} \quad \delta > 0 \quad (VIII.3)$$

v_I, v_D, t, μ, v fijos, $Ch \xi \rightarrow \infty$

La amplitud queda expresada:

$$A(v_I, t, q, v_D) = \sum_{\lambda_D \lambda_I} \int_{-1/2 - i\infty}^{-1/2 + i\infty} dJ \frac{D^{J \lambda_D \lambda_I^*}(q)}{t q \pi J} A^{J \lambda_D \lambda_I}(v_I, t, v_D) \quad (VIII.4)$$

Si suponemos que para un cierto valor de t , VIII.2 converge y suponemos además que $A^{J \lambda_I \lambda_D}(v_D, t, v_I)$ es meromorfa en J , al variar t los polos en J pueden moverse y cruzar la línea $\text{Re } J = -1/2$. En tal caso la amplitud puede reexpresarse como una integral a lo largo de $\text{Re } J = -1/2$ más las contribuciones de los polos con $\text{Re } J > -1/2$. En el límite $Ch \xi \rightarrow \infty$ el comportamiento estará dominado por el polo en $J = \alpha(t)$ cuya parte real de α sea máxima.

$$A(v_I, t, q, v_D) \xrightarrow{Ch \xi \rightarrow \infty} (Ch \xi)^{\alpha(t)} \beta(v_I, v_D, \mu, v, t) \quad (VIII.5)$$

Se puede ver que el límite $Ch \xi \rightarrow \infty$ es el límite de Regge, calculando el producto escalar de P_1 y P_1' , para lo cual es necesario expresar ambos en un sistema de referencia común. Resulta ser:

$$(P_1 + P_1')^2 = S = m_1^2 + m_1'^2 + 2 m_1 m_1' [Ch \alpha_1' \times Ch \xi [Ch \alpha_1 + Sh \alpha_1' Sh \alpha_1]] \quad (VIII.6)$$

De modo que si α_1 y α_1' son constantes, S crece como $Ch \xi$.

En el caso de cuatro partículas, $Ch \xi$ se reduce a $-\cos \theta_t$, es decir que el desarrollo VIII.4 se reduce al desarrollo en ondas parciales y por lo tanto las singularidades de $A^{J \lambda_I \lambda_D}$ son las mismas que las de las amplitudes de onda parcial.

Para las amplitudes de muchas partículas se hace la hipótesis justificada por Mueller (57), de que las singularidades en el plano J de amplitudes de ondas parciales para cuatro partículas, aparecen también en el caso de n partículas.

Desarrollo en $O(2,1)$ doble

Si se considera ahora dos impulsos transferidos fijos, se tiene las dos ternas, derecha e izquierda con :

$$Q_D = (0, 0, 0, \sqrt{-t_D}) \quad Q_I = (0, 0, 0, \sqrt{-t_I})$$

respectivamente, y dos ternas asociadas a los impulsos de las partículas centrales (ver figura VIII.3), una de ellas, C, tiene $Q_D)_C = (0, 0, 0, \sqrt{-t_D})$, y la otra, C', tiene $Q_I)_C = (0, 0, 0, \sqrt{-t_I})$. Por supuesto, $Q_D)_C$ y $Q_I)_C$ tienen componentes temporales. Se pasa de C a C' por medio de un "boost" en la dirección $\bar{z}$.

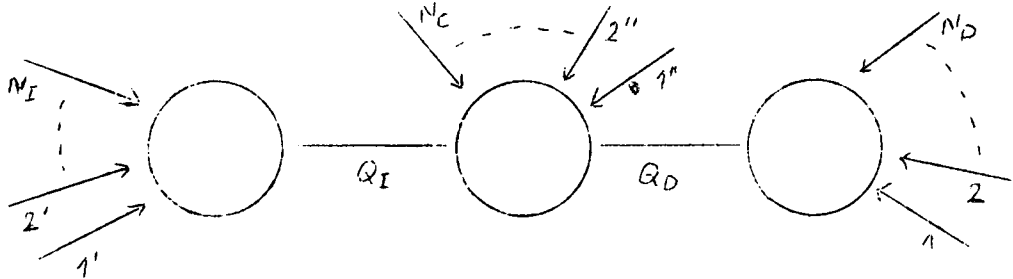


figura VIII.3

Análogamente al caso anterior, se eligen las cuatro ternas de modo que, en cada una de ellas, un impulso tenga sólo componente espacial según $\bar{z}$, y otro sólo según $\bar{z}$ e $\bar{y}$.

Tenemos entonces las variables:

$$3(N_D + 1) - 10 + 3(N_C + 2) - 10 + 3(N_I + 1) - 10 + 2 = 3N - 16$$

más dos grupos de tres parámetros de las transformaciones del grupo $O(2,1)$ g_I y g_D , que dan las orientaciones relativas de D y C y C' y I, respectivamente.

Se puede hacer entonces un desarrollo doble sobre las representaciones del grupo $O(2,1)$, funciones de g_D y g_I . Este desarrollo se verá en detalle para el caso de la amplitud de 3 a 3 partículas hacia adelante.

Es de hacer notar que, en algunos casos se pierde la dependencia de algunos parámetros, por ejemplo, si sólo concurren tres líneas a los vértices exteriores, se pierde la dependencia de ν_D y μ_I .

Aplicación a reacciones inclusivas de una partícula

En el caso de reacciones inclusivas de una partícula, la discontinuidad de la amplitud de 3 a 3 partículas a considerar es función sólo de tres variables, que se pueden elegir, para las amplitudes invariantes, como los productos escalares de los cuadrivectores p_a , p_b y q , o como las variables s , t y M^2 .

Eligiendo, para formar las ternas, las partículas de a pares,

de tal modo que para cada cuadrivector p pertenezca a la misma terna el cuadrivector $-p$, se tiene $Q = 0$, de modo que se puede elegir un par de cuadrivectores de la forma $m (1, 0, 0, 0)$, y el otro par también con componente según z nula.

Región Central

En esta región se puede hacer el análisis en $\theta (2,1)$ considerando el desarrollo doble, dado por la figura VIII.4. Tanto Q_I como Q_D es nulo, luego se puede elegir:

$$p_b)_D = m_b (1, 0, 0, 0) \quad p_a)_I = m_a (1, 0, 0, 0) \quad q)_C = m_c (1, 0, 0, 0)$$

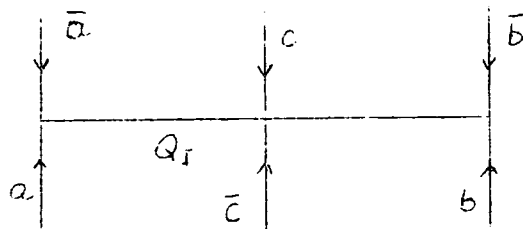


figura VIII.4

En la terna C, p_a y p_b quedan expresados:

$$\begin{aligned} p_b)_C &= R(g_D) p_b)_D = m_b (\text{Ch } \tilde{\xi}_1, \text{Sh } \tilde{\xi}_1 \cos \varphi, \text{Sh } \tilde{\xi}_1 \sin \varphi, 0) \\ p_a)_C &= R(g_I) p_a)_I = m_a (\text{Ch } \tilde{\xi}_2, -\text{Sh } \tilde{\xi}_2, 0, 0) \end{aligned} \quad (\text{VIII.6})$$

La amplitud, en función de $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varphi$, queda desarrollada:

$$\begin{aligned} A(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varphi) &= \sum_m \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} d\Lambda_2 \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} d\Lambda_1 A_m^{\Lambda_1 \Lambda_2} D_{0m}^{\Lambda_2}(\tilde{\xi}_2) e^{im\varphi} D_{00}^{\Lambda_1}(\tilde{\xi}_1) \\ &\text{donde se incluyen residuos de los polos en } \Lambda_2 \text{ y } \Lambda_1 \text{ de } A_m^{\Lambda_1 \Lambda_2} \text{ con } \text{Re } \Lambda_2, \Lambda_1 = -\frac{1}{2}. \\ A_m^{\Lambda_2 \Lambda_1} &= \frac{-ctg(\pi \Lambda_2) ctg[\pi(\Lambda_1 - m)] (2\Lambda_2 + 1)(2\Lambda_1 + 1)}{32\pi} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^\infty d(\text{Ch } \tilde{\xi}_2) \int_1^\infty d(\text{Ch } \tilde{\xi}_1) D_{0m}^{\Lambda_2}(\tilde{\xi}_2) e^{-im\varphi} D_{00}^{\Lambda_1}(\tilde{\xi}_1) A(\tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_1, \varphi) \end{aligned}$$

El comportamiento asintótico estará dado por las singularidades de mayor parte real en $\Lambda_1 = \chi_1(0)$ y $\Lambda_2 = \chi_2(0)$, ya que $Q_D = Q_I = 0$

$$A(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varphi) \xrightarrow{\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2 \rightarrow \infty} (\text{Ch } \tilde{\xi}_1)^{\chi_1(0)} (\text{Ch } \tilde{\xi}_2)^{\chi_2(0)} \beta(\varphi) \quad (\text{VIII.7})$$

Ahora bien,

$$t = (p_b - q)^2 = m_b^2 + m_c^2 - 2 p_b \cdot q = m_b^2 + m_c^2 - m_b m_c \text{Ch } \tilde{\xi}_1 \quad (\text{VIII.8})$$

$$u = (p_a - q)^2 = m_a^2 + m_c^2 - 2 p_a \cdot q = m_a^2 + m_c^2 - m_a m_c \text{Ch } \tilde{\xi}_2$$

Es decir que $\text{Ch } \tilde{\xi}_1, \text{Ch } \tilde{\xi}_2$ tendiendo a infinito, equivale a $t \rightarrow -\infty, u \rightarrow -\infty$.

A su vez, en la zona central:

$$t = -\mu \sqrt{s} \exp(-y^{c.m.})$$

$$u = -\mu \sqrt{s} \exp(y^{c.m.})$$

donde $y^{c.m.}$ se mantiene pequeño. Por lo tanto, la dependencia asintótica será:

$$A(\xi_1, \xi_2, \varphi) \underset{s \rightarrow \infty, y^{c.m.} \text{ fijo}}{\sim} (\sqrt{s})^{\alpha_1(0) + \alpha_2(0)} \beta'(\varphi) \quad (\text{VIII.9})$$

A fin de caracterizar la dependencia de s , falta hallar las variables de que depende φ . Para ello conviene expresar los cuadvectores en el sistema de centro de masa de a y b ; se obtiene entonces:

$$(p_b \cdot q)(p_a \cdot q) = (s/2)\mu^2 \quad (\text{VIII.10})$$

A su vez, de VIII.6:

$$(p_a \cdot q)(p_b \cdot q) = m_b m_a m_c^2 \text{Ch } \xi_1 \text{Ch } \xi_2 \quad (\text{VIII.11})$$

$$s \sim \text{Ch } \xi_1 \text{Ch } \xi_2 (1 + \cos \varphi) m_a m_b \quad (\text{VIII.12})$$

Comparando VIII.10 con VIII.11, teniendo en cuenta VIII.12, queda:

$$(1 + \cos \varphi) = 2 m_c^2 / \mu^2$$

es decir que φ depende solamente de $|\vec{q}_\perp|$, y:

$$F_{ab}^c(q_{||}, |\vec{q}_\perp|, s) = \frac{1}{s} A(\xi_1, \xi_2, \varphi) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} (\sqrt{s})^{\alpha_1(0) + \alpha_2(0) - 2} \times \underset{1 \times 1 \sim 0}{\sim} \tilde{f}_{ab}^c(|\vec{q}_\perp|) \quad (\text{VIII.13})$$

Si α_1 y α_2 corresponden ambos al polo de Pomeranchuk, con $\alpha_p(0) = 1$, se obtiene la propiedad de "scaling" para la zona central.

El resultado VIII.13 sugiere la interpretación de que, cuando una subenergía es grande (t y u en este caso), se puede aplicar a la amplitud el esquema del intercambio en el canal dual de una trayectoria de Regge (o varias). Es decir que la zona central aparece como la zona "doble Regge", con el gráfico correspondiente a la figura VIII.5:

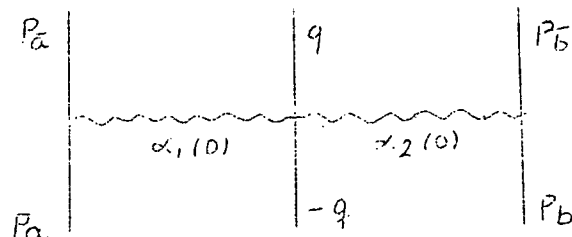


figura VIII.5

Si el polo de Pomeranchuk factoriza, se tendrá:

$$F_{ab}^c(q_{//}, |\vec{q}_\perp|, s) \xrightarrow[s \rightarrow \infty, |x| < 1]{\frac{1}{s}} \beta_a \bar{\alpha}_p(0) \beta_b \bar{b}_p(0) (\sqrt{s})^{\alpha_1(0) + \alpha_2(0) - 2} \times \gamma^c(\vec{q}_\perp) \quad (\text{VIII.14})$$

donde los β dependen sólo de las partículas en los vértices a $\bar{a}$ p y b $\bar{b}$ p y el impulso intercambiado (en este caso cero), y γ^c depende sólo de la naturaleza de la partícula c y de $|\vec{q}_\perp|$.

La sección eficaz de difusión total de a y b es proporcional asintóticamente a $\beta_a \bar{\alpha}_p \cdot \beta_b \bar{b}_p$, luego resulta:

$$\rho_{ab}^c = \sigma_{ab}^{-1} F_{ab}^c \xrightarrow[s \rightarrow \infty, |x| < 1]{} \gamma^c(|\vec{q}_\perp|) \quad (\text{VIII.15})$$

La descripción en términos de intercambio de trayectorias de Regge permite hacer predicciones acerca de la forma en que la sección eficaz inclusiva alcanza el límite asintótico. Si en la figura VIII.5 se considera la contribución del término que corresponde al intercambio de una trayectoria de Pomeranchuk de un lado, y una mesónica de otro, ésta resulta:

$$\rho_{ab}^c(q_{//}, |\vec{q}_\perp|, s) \sim \gamma^c(|\vec{q}_\perp|) + s^{-1/4} \left[\beta_{aPM}^c(|\vec{q}_\perp|) e^{-\frac{1}{2} Y^{c.m.}} + \beta_{bPM}^c(|\vec{q}_\perp|) e^{\frac{1}{2} Y^{c.m.}} \right] \quad (\text{VIII.16})$$

es decir que se obtendría una predicción para la velocidad con que se alcanza el "scaling", y además para la forma de ρ en función de $Y^{c.m.}$ para energías no asintóticas. Aparece el problema, sin embargo, de que experimentalmente el límite parece alcanzarse desde abajo y no desde arriba, como sucede con las secciones eficaces totales.

De la figura VIII.5 y de la fórmula VIII.14 se deduce que en la región central con doble Pomeranchon dominante, la sección inclusiva debe ser la misma para las reacciones $a + b \rightarrow c + X$ y $a + b \rightarrow \bar{c} + X$. Esta predicción no se cumple para energías del orden de las accesibles con aceleradores (62).

A pesar de que es necesario ir a energías muy altas, la zona doble Regge provee una prueba muy útil experimentalmente de la factorización del Pomeranchon, ya que, de VII.6^o:

$$\frac{F_{ab}^c}{F_{ab}^{c'}} = \frac{F_{a'b'}^c}{F_{a'b'}^{c'}} = \frac{\gamma^c(|\vec{q}_\perp|)}{\gamma^{c'}(|\vec{q}_\perp|)}$$

es decir que se tiene una predicción sobre las relaciones entre secciones eficaces inclusivas, sin necesidad de hacer mediciones absolutas. Por ejemplo

la relación de $\overline{M}/K$ debe ser la misma para las reacciones iniciadas por $\overline{M} p, K p, p p$.

Zona de Fragmentación de a

En esta zona solamente la subenergía correspondiente a $b\bar{c}$ tiende a infinito ($t \rightarrow -\infty$) mientras $a\bar{c}$ se mantiene fijo, luego el desarrollo en $O(2,1)$ corresponde al diagrama de la figura VIII.6, donde $Q = 0$.

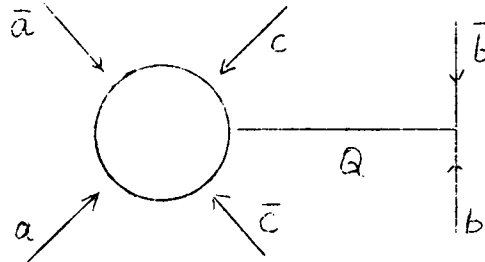


figura VIII.6

Siguiendo a Mueller ⁽⁵⁷⁾ se puede elegir las ternas de tal

modo que sea:

$$p_a)_I = m_a (1, 0, 0, 0)$$

$$q)_I = m_c (Ch \xi, -Sh \xi \cos \psi, Sh \xi \sin \psi, 0)$$

$$p_b)_D = m_b (1, 0, 0, 0)$$

$$p_b)_I = R(g) p_b)_D = m_b (Ch \eta, Sh \eta, 0, 0)$$

con la expansión de la amplitud:

$$A(\xi_1, \xi_2, \varphi) = A(\xi, \psi, \eta) = \sum_{m, \nu} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} d\lambda A_m^\lambda(\xi, \psi) D_{m\nu}^\lambda(\eta) \quad (VIII.17)$$

donde nuevamente se consideran incluidos los polos de A_m^λ con $\lambda = \frac{1}{2}$.

Para $Ch \eta \rightarrow \infty$ se tiene, si $\alpha(0)$ es la singularidad dominante en λ :

$$A(\xi, \psi, \eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} (Ch \eta)^{\alpha(0)} \beta(\xi, \psi)$$

ψ y ξ son parámetros de q en el sistema de reposo de a , y por lo tanto son fijos en la zona que se estudia. En cuanto al $Ch \eta$, se tiene:

$$s = m_a^2 + m_b^2 + 2 p_a \cdot p_b = m_a^2 + m_b^2 + 2 m_a m_b Ch \eta$$

es decir que $Ch \eta \rightarrow \infty$ corresponde a $s \rightarrow \infty$, y por lo tanto:

$$F_{ab}^c(q_{||}, |\bar{q}_\perp|, s) = \frac{1}{s} A(\xi, \psi, \eta) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \beta_{b\bar{b}p} \tilde{Y}_{ap}^c(q_{||}^a, |\bar{q}_\perp|)$$

Si se supone que α corresponde al polo de Pomeranchuk, y la factorización

del mismo. Dividiendo por σ_{ab} , proporcional a $\beta_{a\bar{a}P} \beta_{b\bar{b}P}$, se obtiene:

$$\rho_{ab}^c \xrightarrow[s \rightarrow \infty]{q''^a \text{ fijo}} \chi_a^c(q''^a, |\bar{q}_\perp|) \quad (\text{VIII.19})$$

En forma totalmente análoga se llega a que

$$\rho_{ab}^c \xrightarrow[s \rightarrow \infty]{q''^b \text{ fijo}} \chi_b^c(q''^b, |\bar{q}_\perp|) \quad (\text{VIII.19}')$$

Incluyendo trayectorias de Regge secundarias, se puede estudiar la forma en que la sección inclusiva se aproxima al límite asintótico.

Por ejemplo, en la zona de fragmentación de a se tendría la expresión:

$$F_{ab}^c(q''^a, |\bar{q}_\perp|, s) \underset{q''^a \text{ fijo}}{=} \beta_{b\bar{b}P} \tilde{\chi}_{aP}^c(q''^a, |\bar{q}_\perp|) + \beta_{b\bar{b}M} s^{\alpha_M(u)-1} \times \tilde{\chi}_{aM}^c(q''^a, |\bar{q}_\perp|) \quad (\text{VIII.20})$$

es decir que, si $\alpha_M(u) = \frac{1}{2}$, se aproximaría el "scaling" como $\sqrt{s}$.

Tomando diferencias de secciones inclusivas, se puede aislar las trayectorias secundarias; por ejemplo la diferencia entre las secciones correspondientes a $p + \pi^+ \rightarrow c + X$ y $p + \pi^- \rightarrow c + X$, en la zona de fragmentación del protón, aísla la contribución del mesón ρ intercambiado, ya que la signatura negativa de la trayectoria cambia el signo de $\beta_{\pi^+ \pi^- M}$:

$$\rho_{\pi^+ P}^c - \rho_{\pi^- P}^c = 2 \int^P(q''^a, |\bar{q}_\perp|) s^{\alpha_\rho(u)-1} \quad (\text{VIII.21})$$

Es posible extender los argumentos de la dualidad a fin de predecir las reacciones que alcanzan límites asintóticos a energías relativamente bajas. Chan, Hsue, Quigg y Wang ⁽⁶³⁾ (C.H.Q.W.), por analogía con las reacciones de dos a dos partículas, propusieron la hipótesis de que, para las reacciones inclusivas cuyo canal $ab\bar{c}$ es exótico, la contribución de las trayectorias mesónicas debe anularse, alcanzándose el límite asintótico, dominado por el polo de Pomeranchuk, a energías menores que en el caso de reacciones no exóticas.

El criterio de C.H.Q.W. ha recibido varias críticas ⁽⁶⁴⁾; en particular Ellis, Finkelstein, Frampton y Jacob ⁽⁶⁵⁾ (E.F.F.J.) hacen notar que si los números cuánticos de ab no son exóticos, entonces se debe esperar resonancias en el canal ab , lo que implica un término en la sección inclusiva que depende de s como $\sqrt{s}$. En consecuencia, E.F.F.J. sugieren la exotividad de $ab\bar{c}$ y de ab como condición suficiente para que se alcance el límite asintótico a energías relativamente bajas.

Einhorn, Green y Virasoro ⁽⁶⁶⁾ (E.G.V.) sugieren un cri-

terio distinto de los anteriores, proponiendo que el límite asintótico se alcanza a bajas energías para los casos: $a b$ y $b \bar{c}$ exóticos en la fragmentación de a ; ab y $a \bar{c}$ exóticos en la fragmentación de b .

En el capítulo X de esta tesis, se discutirá en detalle los criterios de "scaling" a baja energía, en términos del modelo dual.

Zona de "Triple Regge"

En la zona de fragmentación de b se tiene t finito y M^2/s finito, a medida que s tiende a infinito. El caso extremo en que M^2/s tiende a cero (o es muy pequeño), se puede describir con la condición de que M^2 se mantenga constante, con lo cual se hace apropiado un diagrama como el de la figura VIII.7, para describir la discontinuidad de la amplitud de 3 a 3 partículas:

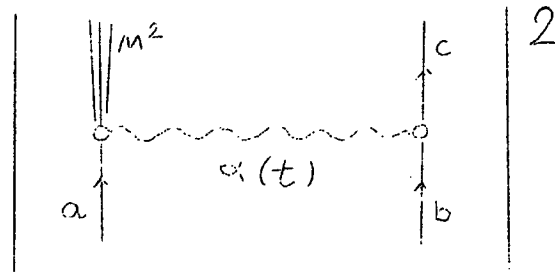


figura VIII.7

$$F_{ab}^c(q_{\parallel}, |\vec{q}_{\perp}|, s) = \frac{1}{s} \left(\frac{s}{M^2} \right)^{2\alpha(t)} \beta'(M^2, t) \quad (\text{VIII.22})$$

ya que el $\cos \theta_t$ es, para energías grandes, del orden de s/M^2 .

$$\frac{d^3 q}{E_c} = \pi dM^2 dt/s$$

luego resulta que:

$$\frac{d^2 \sigma_{ab}^c}{dt dM^2} = \frac{1}{s^2} \left(\frac{s}{M^2} \right)^{2\alpha(t)} \beta(M^2, t) \quad (\text{VIII.23})$$

$\alpha(t)$ es la trayectoria que tiene los números cuánticos de $b \bar{c}$.

Si además de las condiciones mencionadas se está a energía suficientemente alta como para que $M^2 \gg 1 \text{ GeV}^2$, se tiene:

$$\beta(M^2, t) \sim \tilde{\beta}_1(t) (M^2)^{\alpha_P(0)} \quad (\text{VIII.24})$$

$$\frac{d^2 \sigma_{ab}^c}{dt dM^2} = \tilde{\beta}_1(t) \left(\frac{s}{M^2} \right)^{2\alpha(t)} (M^2)^{\alpha_P(0)} \frac{1}{s^2} \quad (\text{VIII.25})$$

donde se llamó α_P a la trayectoria intercambiada con los números cuánticos

del vacío. Si es la trayectoria de Pomeranchuk, entonces

$$\frac{d^2 \sigma_{ab}^c}{dt dM^2} \sim \tilde{\beta}_1(t) \left(\frac{s}{M^2} \right)^{2\alpha(t)} M^2 \frac{1}{s^2} \quad (\text{VIII.26})$$

Es fácil observar que esta fórmula predice "scaling", ya que:

$$F_{ab}^c(q_{||}, |\bar{q}_\perp|, s) \sim \beta_1(t) \left(\frac{M^2}{s} \right)^{1-2\alpha(t)} = \beta(t) (1-x)^{1-2\alpha(t)} \quad (\text{VIII.27})$$

indicando, además, la forma de la distribución en x cerca del valor extremo.

Observando el gráfico de la figura VIII.8, que describe la zona Triple Regge para fragmentación de b , se ve que

$$\beta_1(t) \propto |\beta_{Rb\bar{c}}(t)|^2 \beta_{aP(0)} q_{RRP}(t)$$

donde q_{RRP} es el acoplamiento Reggeon - Reggeon - Pomeranchon.

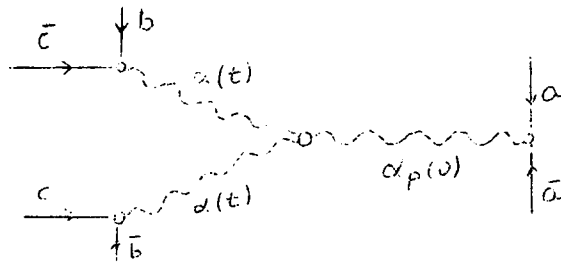


figura VIII.8

En la zona Triple Regge de fragmentación de a , se obtiene en forma similar:

$$F_{ab}^c(q_{||}, |\bar{q}_\perp|, s) \propto \beta'_1(u) (1+x)^{1-2\alpha(u)} \quad (\text{VIII.28})$$

Chen, Wang y Wong ⁽⁶⁷⁾ estudiaron las reacciones inclusivas $p p \rightarrow \pi^\pm X$, $p p \rightarrow K^\pm X$, $p p \rightarrow p X$, $p p \rightarrow \bar{p} X$, a 19.2 GeV/c en términos de la ecuación VII.27, graficando $\log F_{ab}^c$ en función de $\log M^2$ a t fijo, obteniendo un ajuste razonable por líneas rectas de pendiente $1 - 2\alpha(t)$. Es interesante notar que la dependencia en M^2 permite predecir la dependencia en s , a t fijo, y recíprocamente. Chliapnikov, Czyzewski, Finkelstein y Jacob ⁽⁶⁸⁾ analizaron la reacción inclusiva $K^+ p \rightarrow K^0 X$ en la zona de s entre 5 y 8,2 GeV, variando s a fin de extraer $\alpha(t)$, obteniendo valores que no están en desacuerdo con las parametrizaciones comunes del ρ , y obteniendo predicciones para la dependencia en M^2 consistentes con los datos entre $1,5 < M < 2,2$ GeV.

Las energías usadas en estos análisis son algo bajas como para aplicar estrictamente la fórmula Triple Regge, ya que s/M_2^2 debe ser mayor que 5 o 6, y M^2 debe ser mayor que 5 o 6 GeV².

Reglas de Suma de M^2 Finita

El teorma óptico generalizado (ecuación VIII.1), que relaciona la sección eficaz inclusiva $a + b \rightarrow c + X$ con una discontinuidad de la amplitud hacia adelante de $a + b + \bar{c} \rightarrow a + b + \bar{c}$ (o, lo que es lo mismo por la propiedad de cruce, $a + b + c \rightarrow a + b + c$), permite hallar reglas de suma de M^2 finita ⁽⁶⁹⁾. Siguiendo a Einhorn, Ellis y Finkelstein, se usarán las variables:

$$\begin{aligned} \nu &= p_a \cdot (p_b - p_c) = \frac{1}{2} (M^2 - t - m_a^2) \\ t &= (p_b - p_c)^2 \\ \eta &= p_a \cdot (p_b + p_c) = \frac{1}{2} (s_{ab} - s_{ac} - m_b^2 + m_c^2) \end{aligned} \quad (\text{VIII.29})$$

siendo $M^2 = (p_a + p_b - p_c)^2$, $s_{ab} = (p_a + p_b)^2$, $s_{ac} = (p_a + p_c)^2$

Se puede ver que, para $M^2 \gg |t|$, m_a^2 , $\nu \sim M^2/2$; y para $s_{ab} \gg |t|$, M^2 , m_a^2 , $\eta \sim s_{ab}$.

La condición de que la sección inclusiva está relacionada con la discontinuidad sobre los valores físicos de M^2 de la amplitud de 3 a 3 partículas, queda expresada en términos de ν y η , como:

$$F_{ab}^c \sim \frac{1}{i\pi} \text{Disc}_{\nu > 0} A(\eta, \nu, t) \quad (\text{VIII.30})$$

donde la discontinuidad se debe tomar sobre una hoja de Riemann donde

s_{ab} y s_{ac} tienen parte imaginaria de signo opuesto, por ejemplo $\text{Im } s_{ab} = i\epsilon$, $\text{Im } s_{ac} = -i\epsilon$.

La estructura analítica de $A(\eta, \nu, t)$ en el plano de Riemann que interesa, se puede estudiar recordando que la sección inclusiva para la reacción $a + c \rightarrow b + X$ estará relacionada con la discontinuidad en $M^2 = (p_a + p_c - p_b)^2$ de la misma amplitud, cuando s_{ac} y s_{ab} tienen partes imaginarias de signo opuesto.

$$\nu = \frac{1}{2} (-M^2 + m_a^2 + t) \quad (\text{VIII.31})$$

Es decir que la discontinuidad en la zona física de M^2 corresponde a la discontinuidad sobre los valores de ν negativos. Entonces:

$$F_{ac}^b \sim \frac{1}{i\pi} \text{Disc}_{\nu < 0} A(\eta, \nu, t) \quad (\text{VIII.32})$$

Si estas son las únicas singularidades en el plano complejo de ν , entonces en este plano la estructura analítica de $A(\eta, \nu, t)$ tiene la forma que indica la figura VIII.9, y el conocimiento del comportamiento

asintótico para $\sqrt{s}$ grande permite hallar reglas de suma en forma análoga a lo discutido en la parte A de este trabajo.

La expresión para la zona Triple Regge de fragmentación de b en función de $\sqrt{s}$, $\sqrt{t}$ y t , quedaría de la forma:

$$A_{TR}(\sqrt{s}, \sqrt{t}, t) \sim \sum_{i,j,k} \left(\frac{12}{\sqrt{s}} \right)^{\alpha_i(t) + \alpha_j(t) + \alpha_k(0)} f_{i,j,k}(\sqrt{t}, t) \times \text{(VIII.33)}$$

$$\times \left[\frac{\tilde{c} + \exp[i\pi(\alpha_k(0) - \alpha_i(t) - \alpha_j(t))]}{\sin(\alpha_k(0) - \alpha_i(t) - \alpha_j(t))\pi} \right] \tilde{\zeta}_i(t) \tilde{\zeta}_j^*(t) \times$$

$$\times \beta_{b\bar{c}}^i(t) \beta_{b\bar{c}}^{j*}(t) \beta_{a\bar{a}}^k(0) q_{i,j}^k(t)$$

donde los $\tilde{\zeta}(t)$ son los factores de signatura de trayectorias acopladas a $b\bar{c}$, α_k las trayectorias que se acoplan a $a\bar{a}$, los β son factores de acoplamiento partícula - partícula - trayectoria de Regge y $q_{i,j}^k(t)$ describe el vértice de las tres trayectorias $\alpha_i(t)$, $\alpha_j(t)$ y $\alpha_k(0)$. El "factor de signatura Triple Regge", $\tilde{c}$, se elige como $\tilde{c} = \tilde{c}_i \tilde{c}_j \tilde{c}_k$ en forma consistente con el resultado obtenido del modelo dual de resonancias (ver capítulo IX) al sumar las contribuciones de los diagramas "árbol" que contribuyen a la zona Triple Regge. La función $f_{i,j,k}(\sqrt{t}, t)$ se llama "amplitud de dispersión partícula - reggeón". Más precisamente, es la continuación analítica de la amplitud de máxima helicidad en el centro de masa del canal cruzado $b\bar{b} \rightarrow \alpha_i \alpha_j$.

La regla de suma que resulta tiene la forma:

$$\int_0^N d\nu \nu^n \left[F_{ab}^c + (-1)^n F_{a,c}^b \right] =$$

$$= \sum_{i,j,k} \left[1 + (-1)^{n+1} \tilde{c} \right] \left(\frac{12}{N} \right)^{\alpha_i(t) + \alpha_j(t) - 1} N^{\alpha_k(0) + n} \times \text{(VIII.34)}$$

$$\times \tilde{\zeta}_i(t) \tilde{\zeta}_j^*(t) \frac{\beta_{b\bar{c}}^i(t) \beta_{b\bar{c}}^{j*}(t) q_{i,j}^k(t) \beta_{a\bar{a}}^k(0)}{\alpha_k(0) + n + 1 - \alpha_i(t) - \alpha_j(t)}$$

El rango de integración debe ser tal, que predominen los intercambios de Regge en bc , es decir que debe ser $\sqrt{s} \gg N, |t|$. A fin de que predomine el intercambio de Regge en aa , a su vez, debe ser $N \gg m_a^2 \dots$ etc, tal como fué discutida al introducir la zona Triple Regge.

Estrictamente, las reglas de suma deben evaluarse para valores fijos de $\sqrt{s}$, de modo que, a medida que $\sqrt{t}$ varía, debería variarse el valor de la energía incidente en el sistema de laboratorio, ya que $p_a \cdot p_b = \frac{1}{2}(\sqrt{s} + \sqrt{t})$. Sin embargo, en la aproximación en que predominan los intercambios de Regge en los canales t , esta variación en la energía introduce un cambio relativo de la sección inclusiva del orden de $N/\sqrt{s}$.

Es decir que si se utilizan datos a energía incidente en el sistema de laboratorio fija, las reglas de suma deben seguir valiendo al orden N/η . De hecho, dentro de la misma precisión, no es necesario que las energías incidentes en el sistema de laboratorio de b y c (w_b y w_c) sean exactamente iguales, mientras $|w_b - w_c|$ sea del orden de N/m_a . Lo que sí es necesario tener en cuenta, es que los términos de orden inferior en $(N/\eta)^{-1}$ respecto al dominante en la expansión en polos de Regge, no pueden ser evaluados en forma confiable a partir de las reglas de suma. Por ejemplo, en procesos donde puede ser intercambiado tanto el polo de Pomeranchuk como trayectorias de Regge ordinarias, en el canal t; estas reglas de suma permitirán la determinación de las contribuciones Pomeranchon - Pomeranchon y Pomeranchon - Reggeon, pero no las Reggeon - Reggeon.

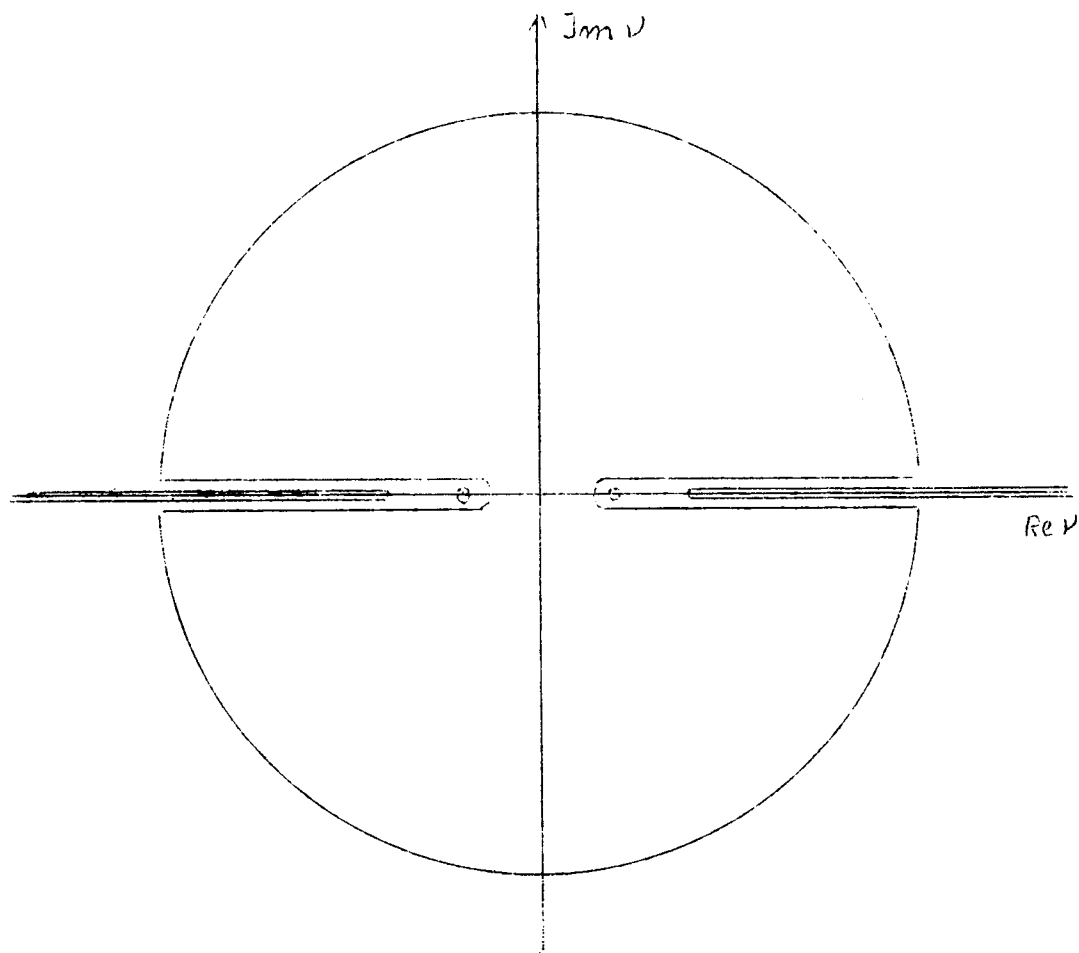


figura VIII.9

Teniendo en cuenta que $\nu \sim \frac{1}{2} M^2$ si $M^2 \gg |t|, m_a^2$ y $\eta \sim s$ si $\eta \gg |t|, M^2$, se puede expresar las reglas de suma de la forma equivalente a VII.34, pero con ν reemplazado por M^2 , y η reemplazado por s .

Las aplicaciones más interesantes de estas reglas de suma consistirán probablemente en la determinación de los vértices de Triple Regge (figura VIII.8) a partir de integrales sobre valores relativamente pequeños de N^2 .

Sería interesante también comprobar si la conjetura de Harari - Freund ⁽⁷⁰⁾ puede ser generalizada a la dispersión partícula - Reggeon, evaluando la contribución de las resonancias a la integral de la sección eficaz inclusiva, y viendo si genera intercambios de Regge en el canal $a\bar{a}$. Un análisis similar podría aplicarse a las propiedades de dualidad de la dispersión Pomeranchon - partícula. De la regla de suma de orden uno y de la propiedad de positividad de las secciones eficaces inclusivas, se deduce que debe haber alguna singularidad en el plano J de signatura positiva con $\alpha_K(0) > 0$ que se acopla a dos Pomerones, Para verlo basta considerar el caso en que c y b son idénticas, y entonces:

$$\int_0^N dv \sqrt{F_{ab}^b} \simeq \sum_K \left(\frac{n_K}{N} \right)^{2\alpha_P(t)-1} N^{\alpha_K(0)+1} \times \quad (VIII.35)$$

$$\times \frac{2 |\beta_{b\bar{b}}^P(t)|^2}{1 - \cos \pi \alpha_P(t)} \frac{g_{PP}^K(t) g_{a\bar{a}}^K(0)}{\alpha_K(0) + 2 - 2\alpha_P(t)}$$

La integral tiene una contribución proveniente del proceso exclusivo $a + b \rightarrow a + b$ que no puede ser cancelada debido a la propiedad de positividad de la sección eficaz inclusiva. Luego, para cualquier N , debe permanecer distinto de cero el coeficiente que multiplica a $s^{2\alpha_P(t)-1}$ del lado derecho de la regla de suma.

CAPITULO IX - MODELO DUAL DE RESONANCIAS ANGOSTAS - GENERALIZACION A
MUCHAS PARTICULAS

Veneziano ⁽⁷¹⁾ propuso una amplitud de dispersión de cuatro partículas escalares relativamente simple, que presenta resonancias en los tres canales s, u y t, comportamiento de Regge a alta energía, dualidad y simetría de cruce. La proposición consiste en formar la amplitud sumando términos del tipo:

$$F(x, y) = \frac{\beta \Gamma[m - \alpha(x)] \Gamma[n - \alpha(y)]}{\pi \Gamma[m + n + p - \alpha(x) - \alpha(y)]} + (m \leftrightarrow n) \quad (\text{IX.1})$$

donde β es una constante proporcional al cuadrado de la constante de acoplamiento, g; m, n y p son números enteros elegidos de tal modo, que la amplitud no presente polos dobles; $\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha' x$ es una trayectoria real lineal, que es la misma para todos los canales si se asume degeneración de intercambio.

El segundo miembro de la ecuación IX.1 puede ponerse como un polinomio (en el numerador o denominador) por una función beta, y constituye una generalización trivial de la misma:

$$V(x, y) = B_4(-\alpha(x), -\alpha(y)) = \frac{\Gamma(-\alpha(x)) \Gamma(-\alpha(y))}{\Gamma(-\alpha(x) - \alpha(y))} \quad (\text{IX.2})$$

Recordando que:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)} = x^{a-b} \quad (|\arg x| \leq \pi - \epsilon)$$

se ve que $V(s, t)$, para s tendiendo a infinito y t fijo, se comporta en la forma $s^{\alpha(t)}$, siempre que se evite el eje real positivo de s. Sobre este eje, la amplitud presenta polos en los valores enteros positivos de $\alpha(s)$, que constituyen la aproximación a las resonancias. La existencia de estos polos constituye la aproximación de ancho nulo que está en desacuerdo con la unitariedad.

El residuo del polo en $\alpha(s) = N$ se puede sacar de:

$$V(s, t) = \sum_n \frac{\Gamma(\alpha(t) + n + 1)}{\Gamma(\alpha(t) + 1) \Gamma(n + 1)} \frac{1}{n - \alpha(s)} \quad (\text{IX.3})$$

Este residuo es un polinomio de orden N en $\alpha(t)$. Como $\alpha(t)$ es lineal en t, y a su vez t es lineal en $\cos \theta_s$, este polinomio corresponde a una torre de resonancias en $\alpha(s) = N$, con impulsos angulares L menores o iguales a N.

Es de hacer notar que la parte imaginaria de la amplitud de Veneziano proviene de los polos de la misma, y está constituida por una sucesión de deltas, en lugar de la discontinuidad que se

observa sobre el corte en s mayor que el umbral, para la amplitud verdadera. Sin embargo, si se estudia la $V(s, t)$ en s tendiendo a menos infinito, y luego se prolonga analíticamente a s tendiendo a más infinito, fuera de un sector alrededor del eje real positivo, se observa una discontinuidad que vale:

$$\text{Disc} \left[\Gamma(-\alpha(t)) (-\alpha(t)s)^{\alpha(t)} \right] = \frac{\pi \alpha(s)^{\alpha(t)}}{\Gamma(\alpha(t)+1)}$$

de allí que la sección de dispersión total deducida de la amplitud de Veneziano vale:

$$\sigma_{ab} = g^2 \frac{\pi}{\Gamma(\alpha(0)+1)} \alpha_{ab}^{\alpha(0)-1} \quad (\text{IX.4})$$

si a y b son las partículas blanco y proyectil.

A fin de analizar el comportamiento de un bloque de Veneziano, en cuanto a la relación entre resonancias y el comportamiento de Regge, es decir en cuanto a la dualidad, tomemos como ejemplo $V(s, t)$: presenta polos cada vez que $\alpha(s)$ o $\alpha(t)$ toman valores enteros positivos, y ceros cada vez que $\alpha(s) + \alpha(t)$ toma un valor entero positivo, que cancelan los polos dobles en $\alpha(s)$ y $\alpha(t)$. Puesto que hay resonancias en los canales t y s , la amplitud para t grande y s fijo, o para s grande y t fijo, tiene una parte imaginaria en su comportamiento de Regge. Para u grande y t o s fijo, por otro lado, la amplitud de Regge asintótica resulta real, ya que no hay resonancias en el canal u . Para t o s grande y u fijo, la amplitud debe tender a cero más rápido que cualquier potencia, fuera de un sector alrededor del eje real positivo de la variable asintótica, ya que no hay polos de Regge intercambiados en el canal u .

Generalización de la amplitud de Veneziano para más de 4 partículas

Para el caso de 5 partículas, Bardakci y Ruegg, y Virasoro ⁽⁷¹⁾ hallaron una forma para la amplitud dual de resonancias angostas (N.R.P.A.). Poco después, varios autores hallaron la expresión para la amplitud de 6, 7 y n partículas escalares ⁽⁷²⁾.

Tal amplitud debe estar caracterizada por:

- a) Completa simetría de cruce con respecto a todos los canales
- b) Polos de multi-resonancias en un cierto conjunto de variables invariantes Lorentz, correspondientes a resonancias "compatibles" entre sí, siendo los residuos polinomios del orden debido en otras variables

invariantes; pero no polos múltiples en variables incompatibles entre sí.

c) Multi - Reggeización cuando un conjunto de variables correspondientes a resonancias compatibles entre sí se hace suficientemente grande, mientras las correspondientes a impulso transferido se mantienen finitas.

d) Se considera la misma aproximación de Veneziano de trayectorias reales, lineales e indefinidamente crecientes, y por lo tanto no se toma en cuenta la unitariedad. También se deja fuera de consideración los procesos difractivos o de intercambio del pomeranchon, así como mecanismos de doble intercambio.

El paso esencial en la extensión de la fórmula a n mesones escalares consiste en la identificación sistemática de conjuntos de resonancias compatibles e incompatibles, que se ve a continuación.

Cualquier diagrama simplemente conexo para una reacción de n mesones escalares se puede poner en la forma ilustrada en la figura IX. 1

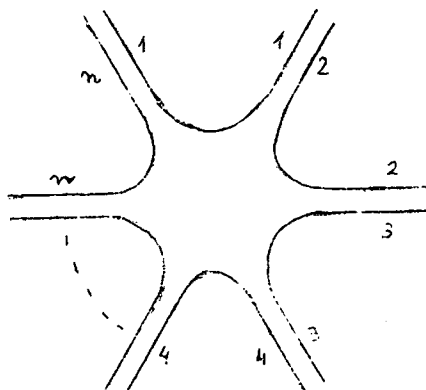


figura IX.1

Asignando índices $1, 2, \dots, n$ a las líneas de quark (en lugar de los mesones), se ve que un par de índices $(j, k) = (k, j)$ con $k = j \pm 1$ representa un mesón externo. Aquellos mesones (resonancias o polos de Regge) que aparecen en las líneas internas, están representados por pares de índices $(j, k) = (k, j)$ con $n - 2 \leq j - k \leq 2$.

La amplitud para una reacción específica consistirá en la suma de contribuciones de un número de tales diagramas. Considerando un sólo diagrama, las trayectorias de Regge involucradas presentarán siempre degeneración de intercambio, obteniéndose factores de signatura mediante la superposición de los diagramas.

La propiedad de interés de los diagramas de quark es que los mismos llevan a una simple y sistemática identificación de los estados internos de mesones (resonancias o polos de Regge) compatibles o incompatibles. Dos estados de mesones internos se llaman compatibles si pueden aparecer simultáneamente en un diagrama tipo árbol. Cualquier mesón interno (j, k) (con $n - 2 \geq |k - j| \geq 2$) puede ser representado por medio de una línea que conecta j con k . Se ve que dos mesones internos son compatibles si y sólo si las líneas correspondientes no se cruzan. Por ejemplo, en la figura IX.2, en el caso a) ambos mesones internos pueden estar simultáneamente en un diagrama, mientras que en el caso b) puede estar uno u otro, pero no ambos simultáneamente.

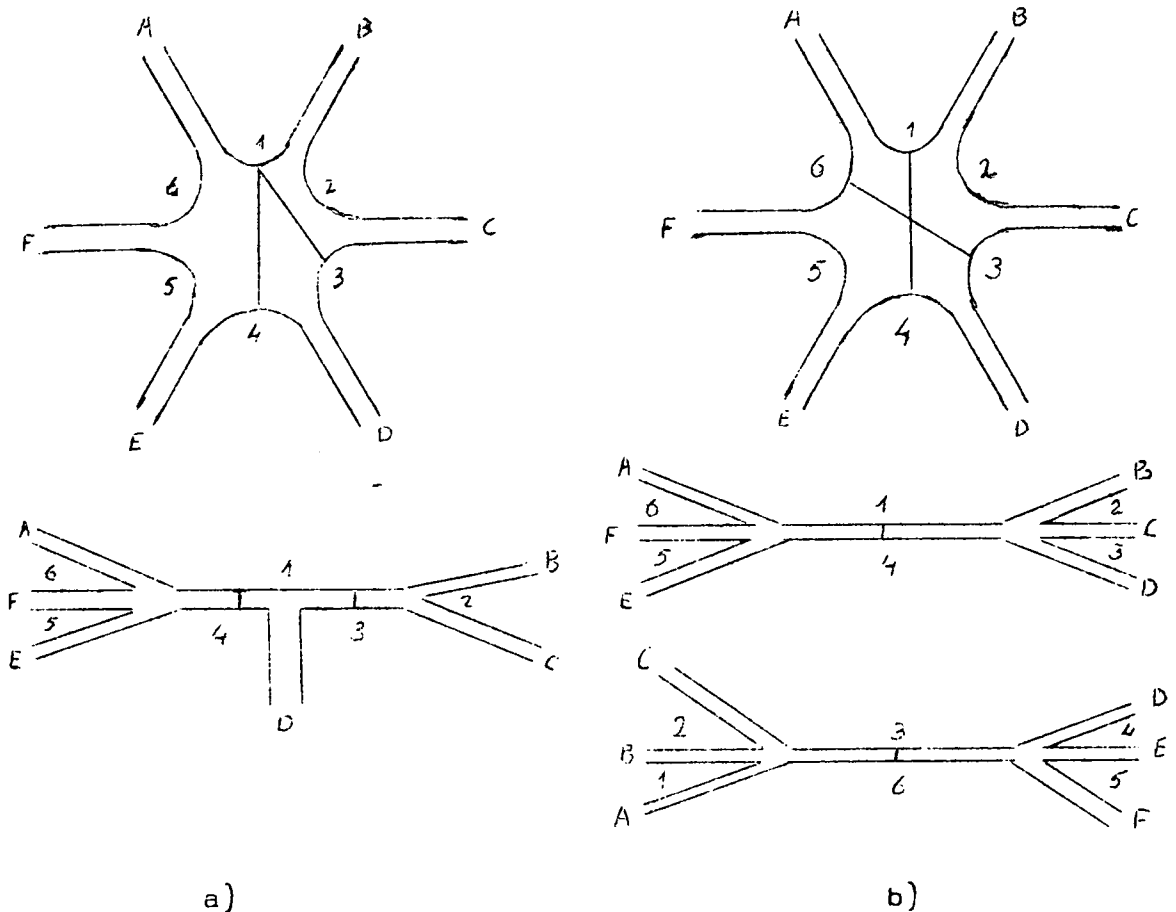


figura IX.2

El número de líneas posibles es $\frac{1}{2} n (n - 3)$, de ellas se puede elegir un conjunto de $(n - 3)$ que no se cruzan. Un conjunto conveniente de estas líneas está dado por:

$$(j, j + 2) (j, j + 3) \dots (j, j + n - 2) \quad (IX.5)$$

Esta elección corresponde a una colisión multiperiferal iniciada por las partículas incidentes $(j - 1, j)$ y $(j, j + 1)$.

Otras elecciones pueden resultar más cómodas según el tipo de reacción.

Se introducen las variables s_k^j que representan el cuad-

rada del cuadrivector impulso del mesón interno (j, k) , para cada uno de los pares (j, k) con $2 \leq |k - j| \leq n - 2$ del diagrama de quark:

$$s_k^j = (p(j, j+1) + p(j+1, j+2) + \dots + p(k-1, k))^2$$

donde p es el cuadrimpulso del meson exterior. Formalmente:

$$s_{j \pm 1}^j = m_{j, j \pm 1}^2 = \text{cte.}$$

A cada uno de estos s_k^j corresponde una trayectoria de Regge:

$$\alpha_k^j = (\alpha_k^j)_0 + (\alpha_k^j)_1 \cdot s_k^j \quad 2 \leq |k - j| \leq n - 2$$

$$\alpha_{j \pm 1}^j = 0 \text{ por ser mesones escalares.}$$

Se introducen $\sum n(n-3)$ variables de integración, u_k^j , a variar entre 0 y 1, cada una de ellas asociada a una variable s_k^j . La resonancia (j, k) provendrá de la región de integración donde u_k^j es próximo a cero. Tomando en cuenta el carácter mutuamente excluyente de las resonancias que corresponden a líneas que se cruzan, se puede elegir $n-3$ variables u independientes, quedando las demás expresadas en función de ellas de tal manera que nunca puedan ir a cero simultáneamente las variables asociadas a resonancias incompatibles.

Si se eligen las variables independientes:

$$u_{j+2}^j, u_{j+3}^j, \dots, u_{j+n-2}^j$$

con j arbitrario fijo, las otras u_m^j quedan expresadas por:

$$u_{j+q}^{j+p} = \frac{\omega_{j+p, j+q}^j \omega_{j+p+1, j+q-1}^j}{\omega_{j+p+1, j+q-1}^j \omega_{j+p+1, j+q}^j} \quad 2 \leq p+1 \leq q-1 \leq n-2 \quad (\text{IX.6})$$

donde:

$$\omega_{j+x, j+y}^j = 1 - \prod_{r=x}^y u_{j+r}^j \quad ; \quad u_{j \pm 1}^j = 0 \quad (\text{IX.7})$$

El diferencial invariante que corresponde a este conjunto de variables es:

$$dV^{(n-3)} = \frac{du_{j+2}^j du_{j+3}^j \dots du_{j+n-2}^j}{\omega_{j+2, j+3}^j \omega_{j+3, j+4}^j \dots \omega_{j+n-3, j+n-2}^j} \quad (\text{IX.8})$$

La expresión integral de la B_n , que difiere de la amplitud en una constante de normalización $N(n)$, se escribe:

$$B_n = \int_0^1 \dots \int_0^1 dV^{(n-3)} \prod_{2 \leq |k-j| \leq n-2} (u_k^j)^{-\alpha_k^j - 1}$$

En particular, tomando el juego de variables independientes IX.5, usando relaciones IX.6, IX.7 y IX.8, eligiendo $j = 0$ y lla-

mando a u_k^0 $w_{p,q}^0$ simplemente u_k y $w_{p,q}$, se obtiene:

$$B_n = \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{p=2}^{n-2} \frac{1}{\Gamma} \left\{ du_p (u_p) - \alpha_p^0 - 1 \right\} \times \quad (IX.9)$$

$$\times \prod_{p=2}^{n-2} \prod_{q=p}^{n-2} (w_{p,q})^{-(1-\delta_{p+1,q}-\delta_{p,q})\alpha_q^p - \alpha_{q+1}^{p-1} - \delta_{p,q} + (1-\delta_{p,q})(\alpha_q^{p+1} + \alpha_{q+1}^p)}$$

Esta es la forma para la B_n hallada por Koba y Nielsen. Otros autores hallaron expresiones equivalentes, en particular, Alessandrini et al. encontraron una manera de generar la amplitud para n partículas mediante una regla tipo Feynman (73).

Representación de Hopkinson - Plahte

Hopkinson y Plahte (74) proponen una fórmula de recurrencia para construir la amplitud para n partículas. Supongamos una permutación de las partículas exteriores dada por la figura IX.3:

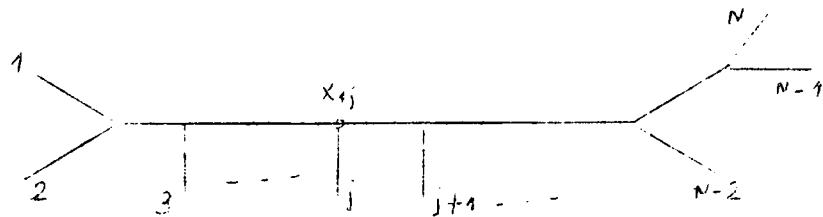


figura IX.3

Se definen las variables:

$$x_{ij} = -\alpha_{i,j} (s_{i,j}) \quad x_{1N} = x_{ii} = 0$$

En la figura IX.3 las líneas internas representan variables x_{1i} , y las variables entre partículas adyacentes son $x_{i,i+1}$.

$$B_N(x) = \sum_{K_{i,N-1}=0}^{\infty} \left\{ \prod_{i=2}^{N-3} (-1)^{K_{i,N-1}} \binom{z_{i,N-1}}{K_{i,N-1}} \right\} \times \quad (IX.10)$$

$$\times B_4(x_{N-2,N-1}, x_{N-1,N} + \sum_{i=2}^{N-3} K_{i,N-1}) B_{N-1}(x')$$

donde $B_4(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$. Las variables x'_{ij} están defini-

das por:

x'_{ij}	$j < N-2$	$j = N-2$	$j = N-1$
$i = 1$	$x_{ij} + \sum_{\alpha=2}^j K_{\alpha,N-1}$	$x_{ij} + \sum_{\alpha=2}^{j-1} K_{\alpha,N-1}$	—
$i > 1$	$x_{i,j}$	$x_{i,j}$	$x_{i,j+1}$

$$y_{z_{ij}} = x_{ij} - x_{i+1,j} - x_{i,j-1} + x_{i+1,j-1}$$

Esta representación pone en evidencia los polos de la amplitud; por ejemplo, se ve inmediatamente que puede haber polos en $x_{N-2,N-1}$ o en $x_{N-1,N}$, pero no simultáneamente en las dos. El residuo de los polos se puede hallar aplicando IX.3 al bloque B_4 correspondiente.

N.R.O.M. para seis partículas

A fin de analizar los espectros inclusivos de una partícula según el esquema de Mueller ⁽⁵⁷⁾, se necesitará la expresión explícita de la B_6 :

Sea un gráfico en árbol de la forma:



al mismo corresponde una contribución a la amplitud dada por:

$$A_6(p_1 \dots p_6) = g^4 B_6(p_1 \dots p_6)$$

donde g es la constante de acoplamiento y $B_6(p_1 \dots p_6)$ se puede sacar directamente de la fórmula obtenida por Koba y Nielsen, haciendo el cambio de notación:

$$\begin{aligned} \alpha_i^j &= \alpha_{i+1,j} = (\alpha_i^j)_0 + (\alpha_i^j)_1 (p_{i+1} + p_{i+2} + \dots + p_j)^2 \\ B_6(p_1 \dots p_6) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 du \, u^{-\alpha_{12}-1} dv \, v^{-\alpha_{13}-1} dw \, w^{-\alpha_{14}-1} \times \\ &\times (1-u)^{-\alpha_{23}-1} (1-v)^{-\alpha_{34}-1} (1-w)^{-\alpha_{45}-1} \times \\ &\times (1-uv)^{-\alpha_{24} + \alpha_{23} + \alpha_{34}} (1-vw)^{-\alpha_{35} + \alpha_{34} + \alpha_{45}} \times \\ &\times (1-uvw)^{-\alpha_{34} - \alpha_{25} + \alpha_{24} + \alpha_{35}} \end{aligned} \quad (IX.11)$$

Desarrollando los tres últimos factores del integrando por la fórmula del binomio, y realizando las integrales que resultan, se llega a:

$$\begin{aligned} B_6(p_1 \dots p_6) &= \sum_{j,k,l=0}^{\infty} (-1)^{j+k+l} \binom{-\alpha_{24} + \alpha_{13} + \alpha_{34}}{j} \times \\ &\times \binom{-\alpha_{35} + \alpha_{34} + \alpha_{45}}{k} \binom{-\alpha_{34} - \alpha_{25} + \alpha_{24} + \alpha_{35}}{l} B_4(-\alpha_{23}, -\alpha_{12} + j + l) \times \\ &\times B_4(-\alpha_{34}, -\alpha_{13} + j + k + l) B_4(-\alpha_{45}, -\alpha_{14} + k + l) \end{aligned}$$

Que es la expresión de Hopkinson - Flahte para la B_6 (IX.10).

Aplicación del N.R.D.M. a los espectros inclusivos

Varios autores, entre ellos De Tar et al; Gordon y Veneziano; y Virasoro, han usado el modelo para la amplitud hacia adelante de 3 a 3 partículas, a fin de obtener una forma explícita para la sección inclusiva a altas energías (59, 86). Aquí se seguirá el desarrollo hecho por De Tar et al. (59).

Antes de discutir sus resultados, sin embargo, es necesario analizar el concepto de "scaling" aplicado al N.R.D.M.. El hecho de que el intercambio del polo de Pomeranchuk no está contenido en el modelo, considerando solamente diagramas árbol, introduce una diferencia con lo discutido en el capítulo VII, donde se considera que σ_{ab} tiende a una constante cuando s tiende a infinito. Si el $\alpha(t)$ de IX.4 es distinto de uno (la elección más realista para el modelo sería la trayectoria P'), es necesario considerar que el "scaling" consiste en que:

$$\rho_{a,b}^c \xrightarrow{s \rightarrow \infty} f_a^c(x, t)$$

en la zona de fragmentación de a , y análogamente para b ;

$$\rho_{a,b}^c \xrightarrow{s \rightarrow \infty} f^c(q_1)$$

en la zona de pionización.

Como se puede ver, esto puede lograrse si se toma el "intercept" de la trayectoria acoplada a un par de partícula - anti partícula, igual al $\alpha(t)$ que aparece en IX.4. De este modo, no se obtiene el comportamiento asintótico correcto ni para la sección inclusiva, ni para la sección total (al estar ausente el polo de Pomeranchuk), pero sí se obtiene el comportamiento de "scaling".

En la región Triple Regge de fragmentación de a se tiene:

$$\rho_{a,b}^c \longrightarrow \left(\frac{M^2}{s} \right)^{\alpha(t) - 2\alpha(t)} h_a^c(t)$$

y análogamente para b .

El primer paso en el cálculo de la sección inclusiva asintótica en las distintas zonas cinemáticas, consiste en determinar los diagramas que contribuyen. Para la B_6 hay 60 diagramas distintos, de los cuales sólo los 18 que tienen a , b y $\bar{c}$ adyacentes pueden contribuir a la discontinuidad en M^2 . De ellos sólo 7 contribuirán en alguna de las zonas cinemáticas consideradas, en el límite asintótico. Para verlo, se usan las propiedades de simetría de amplitudes duales halladas por

Plahte (75). Por medio de ellas se puede expresar cada uno de los 18 diagramas como un factor por uno de los diagramas con algunos "intercept" modificados. Por ejemplo:

$$Disc_{M^2} \begin{bmatrix} a & \bar{a} \\ b & \bar{b} \\ c & \bar{c} \end{bmatrix} = \frac{\sin \pi (\alpha_{ab} + \alpha_{b\bar{c}} - \alpha_{ab\bar{c}}) \sin \pi (\alpha_{\bar{a}b} + \alpha_{\bar{b}c} - \alpha_{\bar{a}\bar{b}c})}{\sin \pi (\alpha_{ab} - \alpha_{ab\bar{c}}) \sin \pi (\alpha_{\bar{a}b} - \alpha_{\bar{a}\bar{b}c})} Disc_{M^2} \begin{bmatrix} a & \bar{a} \\ \bar{c} & c \\ b & \bar{b} \end{bmatrix}$$

Donde

$$\begin{bmatrix} u & z \\ v & y \\ w & x \end{bmatrix} = B_6 (P_u, P_v, P_w, P_x, P_y, P_z)$$

La importancia de estas relaciones es que, expresan todos los diagramas en función de

$$Disc_{M^2} \begin{bmatrix} a & \bar{a} \\ \bar{c} & c \\ b & \bar{b} \end{bmatrix}$$

En las regiones asintóticas de interés, la representación integral para este diagrama está definida y es real. Los factores que contienen los senos serían infinitamente oscilantes y no presentarían un límite asintótico definido. Es necesario asignar a las trayectorias una parte imaginaria, en el sentido de que la trayectoria tiende a infinito sobre un rayo que forma un ángulo con el eje real. Se toma la convención de que las fases de α_{ab} , $-\alpha_{a\bar{c}}$, $-\alpha_{b\bar{c}}$ (y $\alpha_{\bar{a}b}$, $-\alpha_{\bar{a}c}$, $-\alpha_{\bar{b}c}$) son las mismas para valores asintóticos. La necesidad de incluir estas fases es una característica desagradable del modelo, relacionada con la presencia de polos en la región física. Con esta convención resulta que los diagramas que contribuyen son:

Fragmentación de a:

$$\begin{bmatrix} a & \bar{a} \\ \bar{c} & c \\ b & \bar{b} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{c} & a \\ a & c \\ b & \bar{b} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & c \\ \bar{c} & \bar{a} \\ b & \bar{b} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{c} & c \\ a & \bar{a} \\ b & \bar{b} \end{bmatrix}$$

Fragmentación de b:

$$\begin{bmatrix} a & \bar{a} \\ \bar{c} & c \\ b & \bar{b} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & \bar{a} \\ b & c \\ \bar{c} & \bar{b} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & \bar{a} \\ \bar{c} & \bar{b} \\ b & c \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & \bar{a} \\ b & \bar{b} \\ \bar{c} & c \end{bmatrix}$$

Región central:

$$\begin{bmatrix} a & \bar{a} \\ \bar{c} & c \\ b & \bar{b} \end{bmatrix}$$

La contribución de los demás diagramas se anula exponencialmente debido a los factores seno, cuando las variables se llevan a infinito en el plano complejo.

Los diagramas que no se anulan son precisamente los que tienen el comportamiento de Regge necesario para producir distribuciones límite. Por ejemplo, los cuatro diagramas que contribuyen a la fragmentación de a , son los únicos que tienen una trayectoria de Regge en $b\bar{b}$. Los diagramas proveen los factores de signatura para las trayectorias en los canales $a\bar{c}$ y $\bar{a}c$ que entran en el vértice Triple Regge, ya que los factores seno se reducen a las fases de Regge usuales. En la región central, el único diagrama que contribuye es el que tiene comportamiento doble Regge.

A fin de hallar las expresiones para las distribuciones límite, salvo un factor constante que contiene a la constante de acoplamiento, se parte de la B_E . Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & \bar{a} \\ \bar{c} & c \\ b & \bar{b} \end{bmatrix} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx_1 dx_2 dy \ x_1^{-\alpha_{b\bar{c}}-1} (1-x_1)^{-\alpha_{a\bar{c}}-1} x \\ &\quad x_2^{-\alpha_{b\bar{c}}-1} (1-x_2)^{-\alpha_{a\bar{c}}-1} y^{-\alpha_{a\bar{c}}-1} (1-y)^{-\alpha_{a\bar{c}}-1} \\ &\quad \times (1-x_1 y)^{-\alpha_{a\bar{a}\bar{c}} + \alpha_{a\bar{c}} + \alpha_{a\bar{a}}} (1-x_2 y)^{-\alpha_{a\bar{a}c} + \alpha_{\bar{a}c} + \alpha_{a\bar{a}}} \\ &\quad \times (1-x_1 x_2 y)^{-\alpha_{a\bar{a}} - \alpha_{b\bar{b}} + \alpha_{a\bar{a}\bar{c}} + \alpha_{a\bar{a}c}} \end{aligned} \quad (IX.12)$$

La fórmula explícita de la integral correspondería, según IX.11, al ordenamiento:



que es idéntico al:



estando ambos relacionados por una permutación anticíclica de las partículas exteriores. Ello puede verse expresando la integral correspondiente al segundo diagrama, y dualizando las partes:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & \bar{c} \\ b & \bar{b} \\ c & \bar{a} \end{bmatrix} & \quad (76) \\ \text{mediante el esquema de Kikkawa, Sakita y Virasoro} \end{aligned}$$

En la zona de fragmentación de b , se toman las variab-

les en el límite asintótico $\alpha_{M^2}^2$, α_{ab} , $\alpha_{a\bar{c}} \longrightarrow -\infty$, y luego se prolonga analíticamente la discontinuidad sobre M^2 hasta la zona $\alpha_{M^2}^2$, $\alpha_{ab} \longrightarrow \infty$; $\alpha_{a\bar{c}} \longrightarrow -\infty$, que es la zona física.

Usando el cambio de variables $y = 1 + z/\alpha_{M^2}^2$ y tomando sólo los términos de orden dominante, se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Disc}_{M^2} \left[\frac{a}{\bar{c}} \frac{\bar{a}}{b} \right] &= \frac{\pi}{\Gamma(\alpha_{a\bar{a}} + 1)} \left(-\frac{\alpha_{a\bar{c}}}{\alpha_{M^2}^2} \right)^{\alpha_{b\bar{c}}} \left(-\frac{\alpha_{\bar{a}c}}{\alpha_{M^2}^2} \right)^{\alpha_{\bar{b}c}} \times \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty dy_1 dy_2 \theta(1-y_1-y_2) y_1^{-\alpha_{b\bar{c}}} y_2^{-\alpha_{\bar{b}c}} (1-y_1-y_2)^{\alpha_{a\bar{a}}} \times \\ &\times \left(1 - \frac{\alpha_{M^2}^2}{\alpha_{a\bar{c}}} y_1 \right)^{\alpha_{b\bar{c}} + \alpha_{b\bar{b}} - \alpha_{a\bar{a}c}} \left(1 - \frac{\alpha_{M^2}^2}{\alpha_{a\bar{c}}} y_1 - \frac{\alpha_{M^2}^2}{\alpha_{a\bar{c}}} y_2 \right)^{-\alpha_{a\bar{a}} - \alpha_{b\bar{b}} + \alpha_{a\bar{a}c}} \end{aligned} \quad (\text{IX.13})$$

Los detalles del cálculo son análogos a los presentados en el capítulo XI de este trabajo.

La contribución de los otros diagramas se puede obtener de IX.13, intercambiando b con c y/o b con c. El integrando es puramente real, y cualquier contribución a la parte imaginaria proviene de los factores:

$$\left(-\frac{\alpha_{a,b}}{\alpha_{M^2}^2} \right)^{\alpha_{b\bar{c}}} \quad \text{y/o} \quad \left(-\frac{\alpha_{b,b}}{\alpha_{M^2}^2} \right)^{\alpha_{\bar{b}c}}$$

que aparecen para los otros diagramas. Tomando la suma de los cuatro, la función f_b^c y h_b^c que se obtiene es puramente real.

De las expresiones asintóticas:

$$\frac{\alpha_{M^2}^2}{\alpha_{ab}} \longrightarrow \frac{M^2}{s_{ab}} \quad \frac{\alpha_{a\bar{c}}}{\alpha_{M^2}^2} \longrightarrow 1 - \frac{s_{ab}}{M^2} \quad \text{y} \quad \frac{\alpha_{\bar{a}c}}{\alpha_{M^2}^2} \longrightarrow 1 - \frac{s_{\bar{a}\bar{b}}}{M^2}$$

y recordando que en la zona de fragmentación de b, $x = 1 - M^2/s_{ab}$, se ve que f_b^c es una función de las variables correspondientes a la hipótesis de "scaling" si $\alpha(0) = \alpha_{a\bar{a}}$.

En la región Triple Regge de fragmentación de b, donde $s_{ab}/\alpha_{M^2}^2$ tiende a infinito, y recordando que $M^2 + m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 =$

$s_{ab} + s_{a\bar{c}} + s_{b\bar{c}}$, se obtiene, para la suma de los cuatro diagramas:

$$\begin{aligned} h_b^c &\propto \frac{\left[1 + \tilde{\tau}_{b\bar{c}} e^{-i\pi \alpha_{b\bar{c}}} \right] \left[1 + \tilde{\tau}_{\bar{b}c} e^{i\pi \alpha_{\bar{b}c}} \right] \times}{\Gamma(-\alpha_{b\bar{c}}) \Gamma(-\alpha_{\bar{b}c}) \Gamma(\alpha_{a\bar{a}} + 1)} \times \\ &\times \frac{\Gamma(-\alpha_{b\bar{c}} - \alpha_{\bar{b}c} + \alpha_{a\bar{a}} + 1)}{\Gamma(-\alpha_{b\bar{c}} - \alpha_{\bar{b}c} + \alpha_{a\bar{a}} + 1)} \end{aligned} \quad (\text{IX.14})$$

Las expresiones para f_a^c y h_a^c pueden hallarse permutando a con b y $\bar{a}$ con $\bar{b}$ en lo anterior.

En la región central, $\alpha_{b\bar{c}}, \alpha_{a\bar{c}} \rightarrow -\infty$ de tal

modo que

$$\frac{\alpha_{b\bar{c}} \alpha_{a\bar{c}}}{\alpha_{ab}} = K, \text{ fijo}$$

En este límite, $K = \mu^2$. Se obtiene:

$$f^c \propto \frac{\Gamma(\alpha(0)+1)}{\pi} K^{\alpha(0)} \int_0^1 dz z^{-\alpha_{a\bar{c}}-1} (1-z)^{-\alpha_{a\bar{c}}-1} \times$$

$$\times \left[\text{Disc}_x \psi(\alpha(0), \alpha(0), x = \frac{K}{z(1-z)}) \right] \quad (\text{IX.15})$$

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2, x) = \int_0^\infty \int_0^\infty dy_1 dy_2 y_1^{-\alpha_1-1} y_2^{-\alpha_2-1} \exp(-y_1 - y_2 + \frac{y_1 y_2}{x})$$

Donde nuevamente se tomó $\alpha_{a\bar{a}} = \alpha(0)$.

Cuando $q_\perp^2 \sim K \rightarrow \infty$, f^c tiene el comportamiento:

$$f^c \propto \sqrt{\pi} \Gamma(\alpha(0)+1) 2^{\alpha_{a\bar{c}} + \alpha_{a\bar{c}} - 4\alpha(0) - 2} (q_\perp^2)^{-2\alpha(0)-3} \times$$

$$q_\perp^2 \rightarrow \infty \quad \times e^{-4q_\perp^2} \quad (\text{IX.16})$$

es decir que se obtiene un decrecimiento exponencial en $q_\perp^2$, en acuerdo cualitativo con lo observado experimentalmente.

CAPITULO X - PROPIEDADES DE DUALIDAD Y "SCALING" A BAJA ENERGIA

Propiedades duales de amplitudes de cuatro partículas

La amplitud dual de cuatro partículas se puede describir por diagramas de quarks, que para mesones resultan:

$$B_4(s, t) = \frac{\Gamma(-\alpha_s) \Gamma(-\alpha_t)}{\Gamma(-\alpha_s - \alpha_t)}$$

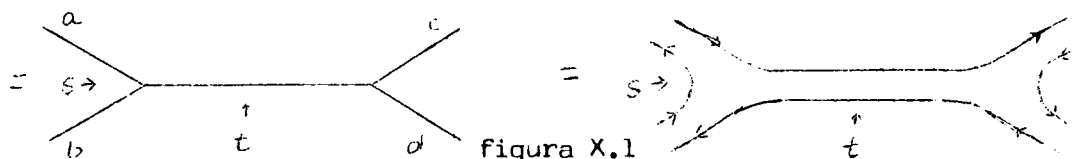


figura X.1

idéntico a:

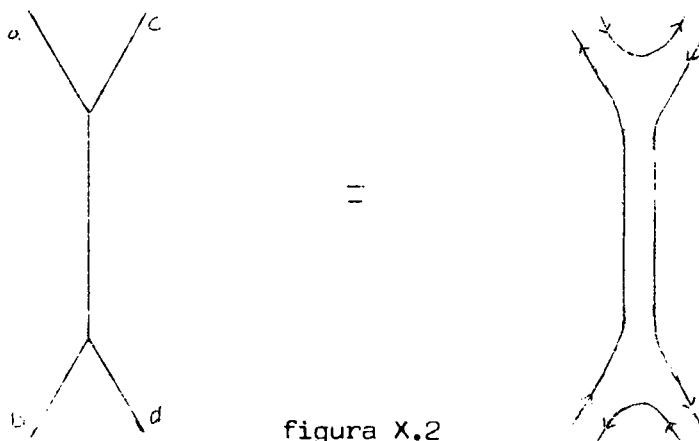


figura X.2

ya que las resonancias en el canal s corresponden al intercambio de una trayectoria de Regge en el canal t. Este diagrama se puede poner en forma simplificada, con todas las partículas conectadas a una línea de quark:

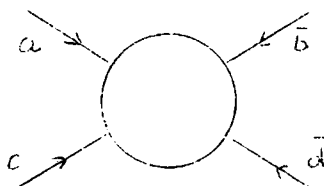


figura X.3

Este diagrama no puede describir la contribución del polo de Pomeranchuk, ni puede ser unitario. La unitarización del modelo se espera conseguir siguiendo el programa sugerido por Kikkawa, Sakita y Virasoro ⁽⁷⁶⁾, quienes observaron que la fórmula de Veneziano no viola la unitariedad exactamente de la misma manera que la aproximación de Born en la teoría de campos Lagrangeana. La fórmula de Veneziano (para N partículas), se considera que provee los diagramas árbol o "aproximación de Born" a la matriz de dispersión, y la unita-

riedad sería implementada en una forma perturbativa, donde se incluyen diagramas conteniendo lazos cerrados.

Ha sido sugerido ⁽⁸¹⁾ que el modelo dual de resonancias en la aproximación de diagramas árbol, ~~satisface~~ **satisface** la unitariedad si se considera los polos como resonancias de tipo Breit - Wigner angostas, promediadas.

Al calcular la sección eficaz total, es plausible pensar que no es necesario incluir gráficos del tipo de la figura X.4:

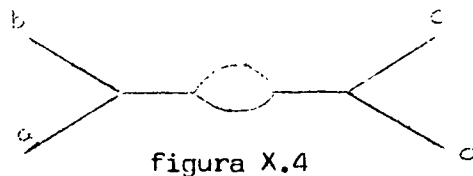


figura X.4

ya que los mismos corresponden simplemente a efectos de renormalización de la línea interna, y pueden ser tomados en cuenta al asignarle un cierto ancho a la resonancia correspondiente.

En cambio seguramente es necesario el gráfico de la figura X.5:

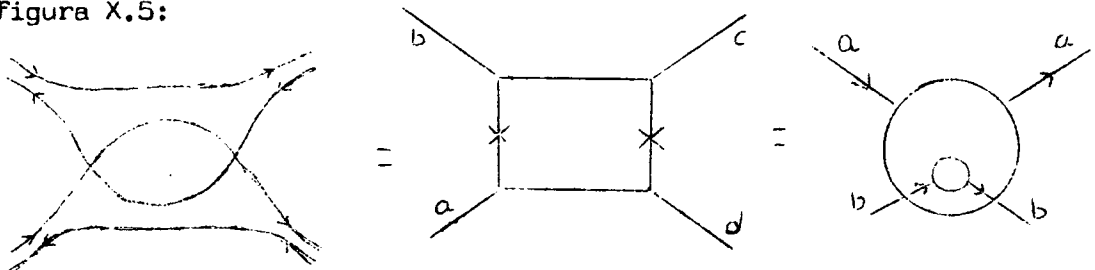


figura X.5

es decir, un lazo con dos "twist". Como en el canal t se intercambian los números cuánticos del vacío, se interpreta que el objeto intercambiado es el Pomeranchón (a pesar de que el "intercept" no resulta 1 sino $1/3$). Este gráfico es de orden g^4 , por lo que debería dar una contribución pequeña frente al árbol, pero debería llegar a dominar a alta energía debido a su intercept mayor ⁽⁷⁷⁾.

De modo que, interpretando que se agrega una parte imaginaria a los polos de las líneas internas para que las resonancias tengan un cierto ancho, la descripción de las secciones totales debe obtenerse sumando las contribuciones del gráfico de la figura X.3 y del de la figura X.5.

Según el esquema de Harari y Freund ⁽⁷⁰⁾, el gráfico de la figura X.3, que contiene un par de líneas quark - antiquark

en cada uno de los canales s y t , representa un componente que tiene resonancias en el canal directo duales al intercambio de una trayectoria de Regge en el canal cruzado. Contribuye, por lo tanto, un término que depende de la energía como $s^{-\alpha}$, si se considera un "intercept" $\frac{1}{2}$ para la trayectoria intercambiada.

El diagrama de la figura X.5, que tiene cuatro líneas de quark (antiquark) en el canal directo, y ninguna en el cruzado, representa un componente en el cual un fondo no resonante es dual al intercambio del Pomeranchon en el canal cruzado. Contribuye a la acción total de dispersión un término independiente de la energía.

Si el canal s es exótico, el diagrama de la figura X.3 no puede contribuir, obteniéndose el comportamiento asintótico a energías relativamente bajas.

Propiedades duales de los espectros inclusivos

Para la amplitud dual que describe el proceso $a b \bar{c} \longrightarrow a b \bar{c}$, relacionado con las reacciones inclusivas según el esquema de Mueller, se puede dibujar los siete tipos de diagramas de la figura X.6:

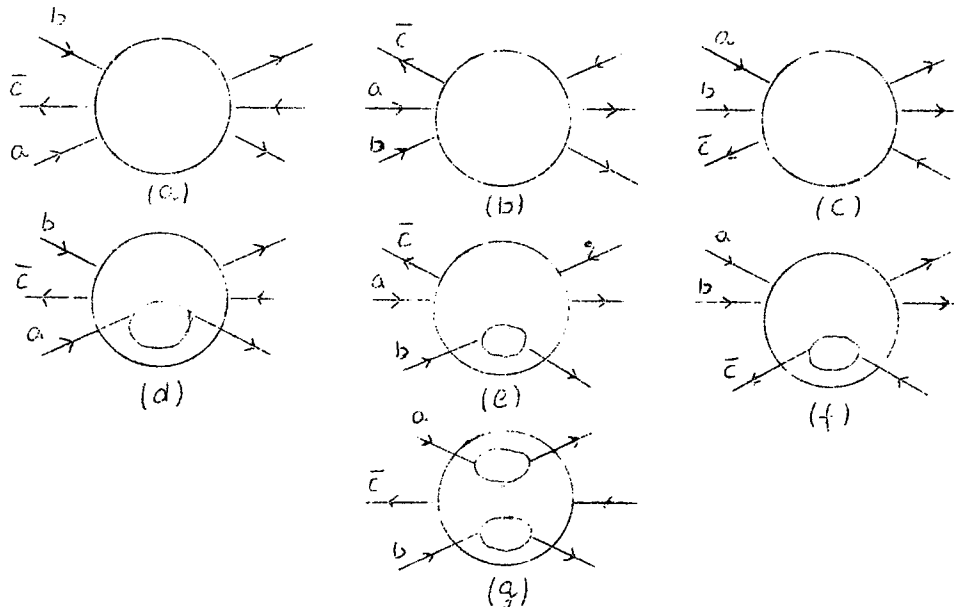


figura X.6

Donde los tres primeros incluyen los siete diagramas árbol que contribuyen a las zonas de fragmentación y pionización discutidos en el capítulo IX. Así, por ejemplo, para la zona de fragmentación de b , se tiene los diagramas árbol $a \bar{c} b \bar{b} c \bar{a}$, $a b \bar{c} \bar{b} c \bar{a}$, $a \bar{c} b c \bar{b} \bar{a}$ y

a b $\bar{c}$ c $\bar{b}$ $\bar{a}$, obteniéndose para la suma de los diagramas el factor de signatura. Para el cálculo de los diagramas con lazos cerrados con "twist", ver el trabajo de Gross et al ⁽⁷⁸⁾.

Se interpreta estos diagramas en forma análoga al caso de cuatro partículas, de tal modo que las partículas que yacen sobre distintos lazos de quark están conectadas por el intercambio del Pomeranchon, mientras que los que se hallan sobre la misma línea de quark, lo están por el intercambio de un Reggeon. La magnitud de los diagramas depende de la zona cinemática considerada y de los números cuánticos de las partículas exteriores.

Predicciones de "scaling" a baja energía

I) Esquema de Chan Hong Mo (C.H.Q.M.) (63, 79).

La magnitud de cada componente está dada por la regla básica de que, a pequeña subenergía s_{ij} , los diagramas que tienen las partículas i y j sobre el mismo lazo de quark y vecinas, son grandes comparados con los otros. Así, por ejemplo, cuando los números cuánticos de b $\bar{c}$ son no exóticos y $s_{b\bar{c}}$ es pequeña, las componentes a, c y d de la figura X.6 son dominantes respecto a los otros, y determinan las propiedades del espectro inclusivo.

Las propiedades duales de las componentes a, c y d son las siguientes: las componentes a y c tienen un par quark - antiquark tanto en el canal a b $\bar{c}$, como en el canal cruzado a $\bar{a} \rightarrow$ b $\bar{c}$ b $\bar{c}$, representando componentes de la sección inclusiva que tienen resonancias en el canal M^2 dual a los intercambios de Regge; el componente d tiene cuatro líneas de quark (antiquark) en el canal a b $\bar{c}$ y ninguna en el canal cruzado, representando un componente de la sección inclusiva en que un fondo no resonante es dual al intercambio del Pomeranchon.

La predicción es, entonces la siguiente: para la fragmentación de b con b $\bar{c}$ no exótico, los componentes a, c y d, dominantes son posibles. Si ahora a b $\bar{c}$ es exótico, los componentes a y c no pueden contribuir. El componente d restante es independiente de la energía, obteniéndose "scaling" a baja energía. En el caso a b $\bar{c}$ no exótico, el tamaño relativo de a, c y d no está predicho, quedando a determinar de los experimentos.

Para la fragmentación de b con $b\bar{c}$ exótico, a , c y d están prohibidos, y el espectro es dominado por los componentes b y $e - g$. El tamaño relativo de estos componentes "de segundo orden" no está predicho por el esquema. Se espera que el tamaño absoluto de la sección inclusiva sea menor que en el caso de fragmentación con $b\bar{c}$ no exótico.

En el límite doble - Regge, los componentes dominantes se consideran: d , e y g (figura X.6). El componente g constituye el término independiente de la energía, mientras que d y e proveen los términos dependientes de la energía más importantes. Si los números cuánticos de $a\bar{c}$ y $b\bar{c}$ son exóticos, los componentes d y e no están presentes, y se espera observar el "scaling" a baja energía.

Los mejores test de las predicciones anteriores son provistos por el proceso de fragmentación del protón: $p \longrightarrow \pi^-$. Para este proceso existen datos para por lo menos seis distintas partículas del haz, tres de los cuales producen un canal a $b\bar{c}$ exótico (K^+ , p , π^+) y tres que producen un $a\bar{b}c$ no exótico (K^- , $\bar{p}$, π^-). Los datos concuerdan muy bien con las predicciones del esquema.

Otros procesos de fragmentación del blanco para los que existen datos a diferentes energías, y para distintos haces son: $p \rightarrow \pi^+$, $p \rightarrow \Lambda^0$, $p \rightarrow K^0$ y $p \rightarrow p$. Los tres primeros dan buena concordancia con el análisis anterior. El proceso $p \rightarrow p$ necesita una discusión especial, ya que presenta un componente difractivo.

En la región de fragmentación del haz existen datos para varios procesos con el vértice de fragmentación no exótico. El proceso mejor estudiado es $K^- \xrightarrow{p} \bar{K}^0$, y para él los datos concuerdan bastante bien con las predicciones.

En cuanto a la región doble - Regge, la validez del desarrollo exige energías tan grandes, que los únicos datos disponibles provienen del I.S.R.. Estos datos, suplementados con una comparación cualitativa con los de baja energía, presentan el resultado de que, salvo para $p\bar{p} \rightarrow p + X$, el límite de "scaling" se alcanza por debajo. En el esquema de siete componentes (figura X.6), d y e son positivos, por lo que se esperaría que el "scaling" se

alcance desde arriba, y los datos experimentales ofrecen cierta dificultad para la teoría.

II) Criterio de Einhorn, Green y Virasoro (66)

El criterio propuesto por E.G.V. para el "scaling" a baja energía es semejante al de C.H.Q.W., pero más completo. Predice "scaling" a baja energía para fragmentación de b si a b y a $\bar{c}$ son exóticos.* Con esta predicción quedan eliminados los tres gráficos árbol (al igual que con la exigencia de a b $\bar{c}$ exótico), y también los gráficos e y f de la figura X.6 (a diferencia del criterio de C.H.Q.W.), quedando sólo el d y el g, ambos dominados por el intercambio del Pomeranchon en el canal a $\bar{a}$.

III) Esquema de Gallardo y Masperi (80)

Se ha hecho un intento (82) de saturar una regla de suma que relaciona las discontinuidades de las amplitudes de 4 y 6 partículas (83):

$$Disc_s A_4 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\bar{q}}{2w_q} \frac{\sqrt{w_q}}{\sqrt{s}} Disc_{M^2} A_6$$

donde $(w_q, \bar{q})$ es el impulso de la partícula detectada por el experimento inclusivo, y se encontró que no se puede obtener consistencia si se inserta del lado derecho de la regla de suma sólo la contribución de los diagramas árbol. Sí es posible saturar la regla de suma si se agrega contribuciones de diagramas con lazos. Esto parece sorprendente, ya que usualmente se considera que los lazos dan sólo correcciones de orden superior a las secciones eficaces relevantes. Lo que ocurre es que algunas potencias de la constante de acoplamiento son canceladas por potencias de anchos de resonancias: siguiendo la referencia (81), interpretando los polos como resonancias de Wigner angostas, se tiene, para el gráfico a de la figura X.7, por ejemplo:

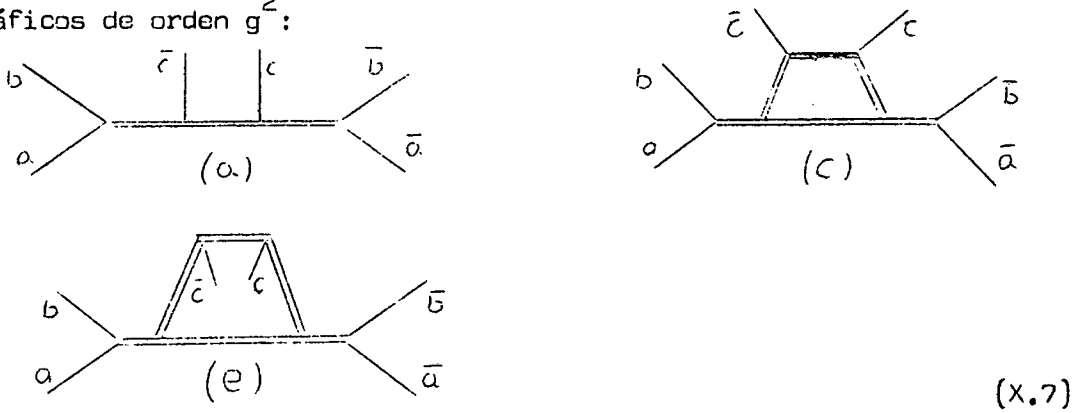
$$Disc_{M^2} A_6 = g^4 \sum_{R=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N(R)} R_R n^{(b)} \frac{1}{s - m_R^2 + i m_R \Gamma_R} \frac{-2i m_R \Gamma_R}{(M^2 - m_R^2) + m_R^2 \Gamma_R} \frac{1}{s - m_R^2 - i m_R \Gamma_R}$$

(las líneas gruesas indican resonancias en la capa de masa). Los polos en s pueden combinarse dando $\overline{\Gamma}/m_R \Gamma_R^*$, es decir que se obtiene un denominador Γ_R , ancho total de la torre de resonancias R que, siendo proporcional a g^2 , reduce el orden del gráfico a g^2 .
* $\propto \delta(s - m_R^2)$

Luego se puede aprovechar cualquier par de líneas internas que aparecen a ambos lados del gráfico, cercanas a la capa de masas, para reducir en g^2 el orden del mismo.

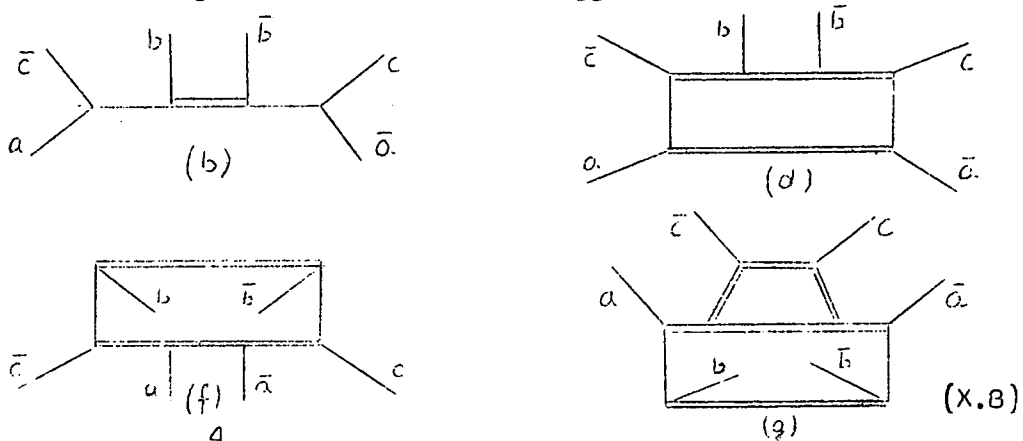
Con esta consideración, se tiene que los gráficos que contribuyen a la fragmentación de b son:

Gráficos de orden g^2 :

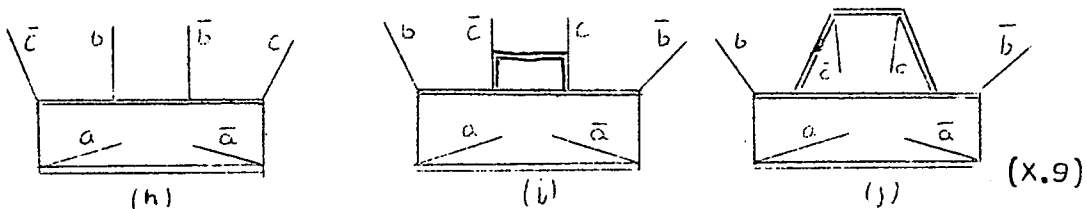


Todos estos gráficos deben tener intercambio de Regge en el canal $a \bar{a}$, por lo tanto contribuyen a la parte dependiente de la energía de la sección inclusiva.

Gráficos en orden g^4 con intercambio de Regge en $a \bar{a}$:



Gráficos en orden g^4 que contribuyen a la parte independiente de la energía:



Se piensa que el gráfico e (figura X.7) contribuye menos que a y c; y j (figura X.9) contribuye menos que los otros gráficos del mismo orden, debido al Pomeranchon en el vértice $b \bar{c}$, cuyo acoplamiento se espera que sea pequeño frente al acoplamiento del Reggeon para $s_{b\bar{e}}$ pequeño. Los gráficos h e i (figura X.9) se espera sean dominantes a alta energía debido al mayor "intercept" del Pome-

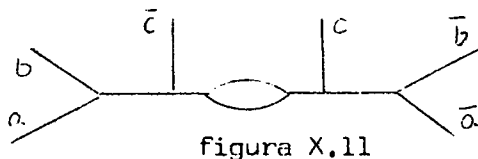
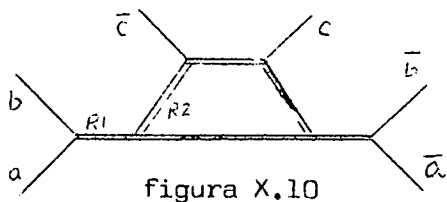
ranchon.

El análisis de los gráficos indica que, a fin de eliminar los gráficos dependientes de la energía más importantes, a y c de la figura X.7, es suficiente imponer el criterio ab o ab $\bar{c}$ exótico. Este criterio es probablemente suficiente para analizar los datos actuales, sin embargo, a fin de cancelar también los gráficos dependientes de la energía más débiles, el criterio correcto de "scaling" a baja energía coincide con el de E.G.V..

En el caso de que s sea exótico, M^2 no exótico, la predicción de Gallardo y Masperi difiere de la de C.H.Q.W. (y de la de E.F.F.J. ⁽⁶⁵⁾), en que predice "scaling" a baja energía. Observando la reacción $K^+ + p \rightarrow K^0 + X$ en 5,0, 8,2, y 12,7 GeV/c para la región de fragmentación de K^+ , se encuentra la confirmación de esta predicción dentro del error experimental.

El tratamiento de la amplitud consistente en reemplazar los polos de las resonancias del lado izquierdo y derecho del diagrama, por π/m_R Γ_R por una delta, merece una cierta discusión. En primer lugar, se puede ver en el capítulo XI de este trabajo, que el diagrama en árbol a b $\bar{c}$ c $\bar{b}$ $\bar{a}$ tratado de este modo, no da la contribución asintótica esperada, ni para la zona de fragmentación, ni para la de pionización. La explicación puede residir en el hecho de que a altas energías las resonancias no pueden considerarse como angostas, apareciendo efectos de interferencia entre resonancias sucesivas, con lo que el procedimiento correcto consiste en promediar por separado cada parte del diagrama mediante la fórmula de Stirling.

Por otro lado, un diagrama del tipo de la figura X.10 puede llevarse, por dualización, a la forma X.11:



Es decir que, al tomar el diagrama a de la figura X.7, asignando un ancho físico a la resonancia en M^2 , la contribución del lazo de la figura X.10 estaría contenida en a de X.7. Sin embargo, para poder realizar esta dualización, es necesario tener una gran cantidad de

le y el término más importante que quedaba para la dependencia de la energía desaparece. El criterio de E.F.F.J. recupera así una cierta validez. Es decir que desde el punto de vista del modelo dual el criterio exacto de "scaling" a baja energía es el de E.G.V., los demás tienen un grado de validez parcial.

Es de hacer notar, que la reacción $p \bar{p} \rightarrow \bar{p} X$ cumple todos los criterios para el "scaling" a baja energía, sin embargo éste no se observa ni siquiera en la región de energías del I.S.R. Ello se explica observando que a energías relativamente bajas se produce gran cantidad de partículas y antipartículas livianas (en especial piones), mientras que se producen muy pocos antiprotones. Por lo tanto, lo que es una zona de alta energía para piones no lo es para los antiprotones, alcanzándose zonas de "scaling" parciales, que están muy por encima del umbral para la producción de ciertas partículas; que dejan de ser de "scaling" cuando se alcanza un nuevo umbral de producción de partículas más pesadas.

CAPITULO XI - DUALIDAD SEMILOCAL Y PROBLEMAS DE F.E.S.R. EN EL
MODELO DE VENEZIANO ⁽⁸⁹⁾

Es bien sabido que los modelos duales de resonancias angostas presentan comportamiento de Regge cuando las variables asintóticas se toman fuera de un cono alrededor del eje real positivo. Obviamente, el comportamiento asintótico sobre el eje real carece de sentido, debido a la presencia de polos por encima de cualquier energía física. Una manera de dar un sentido a este comportamiento asintótico es tomar un promedio sobre las resonancias; se puede esperar que este promedio esté relacionado con la expansión en polos de Regge de la amplitud.

Una posibilidad de realizar el promedio es a través de la idea de dualidad global de reglas de suma de energía finita (F.E.S.R.) para la parte imaginaria de la amplitud. Resulta, sin embargo, que en el caso de cuatro partículas, aparece una discrepancia entre la integral sobre las resonancias y la integral sobre el desarrollo en polos de Regge ⁽⁸⁵⁾. Esta discrepancia aparece a nivel de la segunda y sucesivas hijas.

En el presente trabajo se estudia las propiedades de dualidad semilocal, analizadas por De Tar et al. ^(59,86), incluyendo contribuciones de hijas, de amplitudes de Veneziano aplicadas a secciones eficaces totales e inclusivas de una partícula. En consecuencia se aclara el origen de las arriba mencionadas discrepancias en las F.E.S.R..

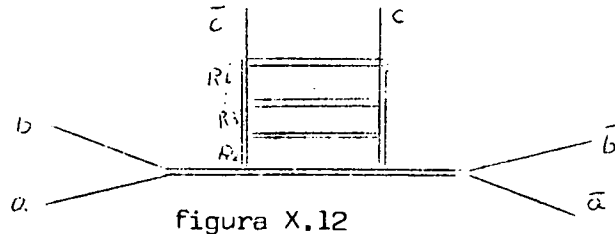
A fin de analizar el cumplimiento de la dualidad semi - local, se realiza el promedio de la parte imaginaria de la amplitud sobre una resonancia, y se compara su comportamiento asintótico con la expansión en polos de Regge evaluada en la posición de la resonancia.

Amplitud de cuatro partículas

Recordando que la amplitud puede ponerse:

$$A_4(s, t) = g^2 B_4(\alpha_s, \alpha_t) = g^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_t + N + 1)}{\Gamma(\alpha_t + 1) \Gamma(N + 1)} \frac{1}{N - \alpha_s - i\epsilon}$$

resonancias en R_2 , es decir muy alta energía en esta rama. Ello puede ser posible para s_{ab} suficientemente grande, pero también pueden observarse diagramas del tipo de la figura X.12:



que igualmente corresponderían a una renormalización de la rama interna en a de X.7 si se puede aplicar la dualidad. Sin embargo, para cualquier energía s_{ab} , se llegará a un R_i cuya energía es pequeña, luego no se cumplen las condiciones para la dualización. La contribución de estos diagramas puede hacerse, sin embargo, despreciable frente a todos los demás que intervienen. Pero a energías relativamente bajas las contribuciones de resonancias producidas según el diagrama X.12 pueden ser relevantes..Masperi y Rebbi ⁽⁸⁴⁾ computaron numéricamente la contribución al espectro inclusivo de resonancias intermedias producidas, a través de la discontinuidad de las amplitudes de un lazo, y encontraron una contribución menor que la del diagrama árbol, pero no despreciable.

Volviendo a las figuras X.7 a X.9, se observa que la predicción de "scaling" a baja energía para s exótico y M^2 no exótico proviene del hecho de que el diagrama b (figura X.8) es de orden g^4 y, por lo tanto de "segundo orden" frente a a, c y e (figura X.7), aunque e es pequeño. Si s fuera no exótico y M^2 exótico, el único diagrama de orden g^2 sería e, luego la dependencia de la energía sería pequeña. Si ni s ni M^2 es exótico, se puede esperar una contribución decreciente con la energía, por dos motivos: primero porque los diagramas de orden g^2 dependen de la energía, y segundo, porque a medida que aparecen resonancias no angostas, no se puede realizar el cambio de orden en g , y los diagramas a, c y e se volverían, en forma continua, del orden g^4 , es decir, su contribución iría disminuyendo.

Por ejemplo, si M^2 es exótico, sólo sobreviven los gráficos e (figura X.7) , f y g (figura V.8). De ellos e pasa de orden g^2 al orden g^4 , según la discusión anterior, al aumentar la energía. Si adicionalmente s es exótico, el gráfico e no es posib-

$$\text{Im } A_4(s, t) = g^2 \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_t + N + 1)}{\Gamma(\alpha_t + 1) \Gamma(N + 1)} \pi S(N - \alpha_s) \quad (\text{XI.1})$$

donde, para todos los canales, $\alpha_x = \alpha_0 + x$, y g es la constante de acoplamiento, se tiene:

$$\tilde{A}_4(N, t) = \int_{N-1/2}^{N+1/2} d\alpha_s \text{Im } A_4(s, t) = \pi g^2 \frac{\Gamma(\alpha_t + N + 1)}{\Gamma(\alpha_t + 1) \Gamma(N + 1)} \quad (\text{XI.2})$$

Cuando N tiende a infinito, usando la fórmula:

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b} \left\{ 1 + \frac{(a-b)(a+b-1)}{2z} + \frac{1}{24} \frac{\Gamma(a-b+1)}{\Gamma(a-b-1)} [3(a+b-1)^2 - a + b - 1] \frac{1}{z^2} + \dots \right\} \quad (\text{XI.3})$$

resulta:

$$\tilde{A}_4(N, t) = \pi g^2 N^{\alpha_t} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_t + 1)} + \frac{\alpha_t + 1}{2 \Gamma(\alpha_t)} \frac{1}{N} + \frac{3\alpha_t^2 + 5\alpha_t + 2}{24 N^2 \Gamma(\alpha_t - 1)} + \dots \right\} \quad (\text{XI.4})$$

Se compara este resultado con el desarrollo en polos de Regge que resulta de tomar la amplitud para $\alpha_s \rightarrow -\infty$ y luego continuarla analíticamente a $\alpha_s \rightarrow +\infty$:

$$A_4(s, t) = g^2 \int_0^1 t^{-\alpha_s-1} (1-t)^{-\alpha_t-1} dt \quad (\text{XI.5})$$

La zona que más contribuye es, evidentemente, la próxima a $t = 1$. luego se puede hacer el cambio de variables $\ln t = z/\alpha_s$, y quedarse con los primeros términos del desarrollo de la exponencial, obteniéndose:

$$A_4^{\text{Regge}}(s, t) = g^2 \int_0^{\infty} \frac{dz}{-\alpha_s} e^{-z} \left(\frac{z}{-\alpha_s} \right)^{-\alpha_t-1} \left\{ 1 + \frac{\alpha_t+1}{2} \left(\frac{z}{-\alpha_s} \right) + \frac{3\alpha_t^2 + 5\alpha_t + 2}{24} \left(\frac{z}{-\alpha_s} \right)^2 + \dots \right\}$$

Usando las fórmulas:

$$\int_0^{\infty} t^{u-1} e^{-kt} dt = k^{-u} \Gamma(u) \quad (\text{XI.6})$$

$$\Gamma(1-z) \Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (\text{XI.7})$$

se tiene:

$$\text{Im } A_4^{\text{Regge}}(s, t) = \pi g^2 \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_t + 1)} \alpha_s^{\alpha_t} + \frac{\alpha_t + 1}{2 \Gamma(\alpha_t)} \alpha_s^{\alpha_t-1} + \frac{3\alpha_t^2 + 5\alpha_t + 2}{24 \Gamma(\alpha_t - 1)} \alpha_s^{\alpha_t-2} + \dots \right\} \quad (\text{XI.8})$$

Es decir que los coeficientes de $\text{Im } A_4^{\text{Regge}}(s, t)$ resultan iguales a los de XI.4 para las potencias sucesivas de N , en $\alpha_s = N$. Se subraya que no se compara la integral sobre una resonancia con la integral sobre el desarrollo en polos de Regge, sino con su valor en la posición de la resonancia.

Resulta claro ahora porqué aparecen las discrepancias en las F.E.S.R.. Si se restan dos F.E.S.R. para la parte imaginaria cortadas respectivamente en $N + \frac{1}{2}$ y $N - \frac{1}{2}$, se obtiene, para la contribución en cualquier orden en α_s , $C(t) \alpha_s^\alpha$, siendo

$$\alpha = \alpha_t, \alpha_{t-1}, \alpha_{t-2} \dots \text{etc:}$$

$$\int_{N-1/2}^{N+1/2} C(\alpha_t) \alpha_s^\alpha d\alpha_s = \frac{C(\alpha_t)}{\alpha+1} \left[(N+1/2)^{\alpha+1} - (N-1/2)^{\alpha+1} \right] \sim C(\alpha_t) N^\alpha + O(N^{\alpha-2})$$

es decir que el término en $N^{\alpha-2}$ proveniente de la integral sobre la contribución de la trayectoria principal, no puede ser compensado por la integral sobre la contribución de la segunda hija. Análogamente para las contribuciones en órdenes superiores.

Procesos inclusivos de una partícula

Se considera el gráfico dual árbol de 6 partículas como la contribución más importante ^(59,86). Se generaliza aquí el tratamiento anterior, a fin de investigar el cumplimiento de las reglas de suma de referencia ⁽⁶⁹⁾.

Se considera la expansión de Hopkinson Plahte ⁽⁷⁴⁾ para la amplitud hacia adelante de seis partículas, para el gráfico de la figura XI.1:

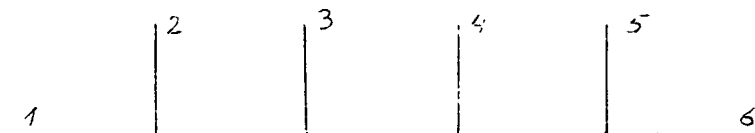


figura XI.1

$$A_6(s, t, M^2) = g^4 B_6 = g^4 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} (-1)^{1+k+j} \binom{z_{25}}{l} \binom{z_{35}}{k} \binom{z_{24}}{j} \times$$

$$\times B_4(-\alpha_{45}, -\alpha_{56} + 1 + k) B_4(-\alpha_{23}, -\alpha_{12} + 1 + j) \times$$

$$\times B_4(-\alpha_{34}, -\alpha_{13} + 1 + k + j)$$

$$z_{25} = -\alpha_{25} + \alpha_{35} + \alpha_{24} - \alpha_{34}$$

$$z_{35} = -\alpha_{35} + \alpha_{45} + \alpha_{34}$$

$$z_{24} = -\alpha_{24} + \alpha_{34} + \alpha_{23}$$

Se estudiará, en primer lugar, el ordenamiento de las partículas a $\bar{c}$ b $\bar{b}$ c $\bar{a}$, en la zona de fragmentación de b, para el caso, natural en modelos duales, en que se tiene la misma trayectoria en todos los canales. Se tiene:

$$z_{25} = -2\alpha_o \quad z_{35} = \alpha_o + \alpha_t \quad z_{24} = \alpha_o + \alpha_t$$

Tomando $(p_i)^2 = -\alpha_o$, ya que se trata de partículas escalares.

$$\alpha_{45} = \alpha_{23} = \alpha_t$$

$$\alpha_{56} = \alpha_{12} = \alpha_u$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{M^2} \quad \alpha_{34} = \alpha_o$$

Por lo tanto:

$$A_6(s, t, M^2) = g^4 \sum_{j,k,l=0}^{\infty} (-1)^{l+k+j} \frac{\Gamma(-2\alpha_o + 1)}{\Gamma(-2\alpha_o + 1 - l) \Gamma(l+1)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\alpha_o + \alpha_t + 1)}{\Gamma(\alpha_o + \alpha_t + 1 - k) \Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(\alpha_o + \alpha_t + 1)}{\Gamma(\alpha_o + \alpha_t + 1 - j) \Gamma(j+1)} \frac{\Gamma(-\alpha_t) \Gamma(-\alpha_u + l + k)}{\Gamma(-\alpha_t - \alpha_u + l + k)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(-\alpha_t) \Gamma(-\alpha_u + l + j)}{\Gamma(-\alpha_t - \alpha_u + l + j)} \frac{\Gamma(-\alpha_o) \Gamma(-\alpha_{M^2} + l + k + j)}{\Gamma(-\alpha_o - \alpha_{M^2} + l + k + j)}$$

(XI.9)

La amplitud presenta polos en los valores de $\alpha_{M^2}^2 = n$ tales que $-n + 1 + k + j$ es un entero negativo o cero, siendo la discontinuidad, usando XI.3:

$$\frac{\text{Disc}_{M^2} A_6(s, t, M^2)}{2i} \Big|_{\alpha_{M^2}^2 = n} = g^4 \frac{\Gamma(-2\alpha_o + 1) \Gamma(\alpha_o + \alpha_t + 1) \Gamma(-\alpha_t)^2}{\Gamma(\alpha_o + 1)} \int (\alpha_{M^2}^2 - n) \times$$

$$\times \sum_{j,k,l=0}^{\infty} (-1)^{j+k+l} \frac{\Gamma(\alpha_o + n - l - k - j)}{\Gamma(n - l - k - j + 1) \Gamma(-2\alpha_o + 1 - l) \Gamma(\alpha_o + \alpha_t + 1 - k) \Gamma(\alpha_o + \alpha_t + 1 - j)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(-\alpha_u + l + k) \Gamma(-\alpha_u + l + j)}{\Gamma(-\alpha_u - \alpha_t + l + k) \Gamma(-\alpha_u - \alpha_t + l + j)} \frac{1}{\Gamma(l+1) \Gamma(k+1) \Gamma(j+1)}$$

(XI.10)

En la zona de Triple Regge, donde $-\alpha_u \gg 1, k, j$
el bloque que contiene a $-\alpha_u$ se puede desarrollar usando XI.3:

$$\frac{\Gamma(-\alpha_u + l + k)}{\Gamma(-\alpha_u - \alpha_t + l + k)} = (-\alpha_u)^{\alpha_t} \left\{ 1 + \frac{\alpha_t}{-\alpha_u} \frac{(2L + 2k - \alpha_t - 1)}{2} + \dots \right\}$$

Idem para $\frac{\Gamma(-\alpha_u + l + j)}{\Gamma(-\alpha_u - \alpha_t + l + j)}$, quedando:

$$\frac{\Gamma(-\alpha_u + l + k) \Gamma(-\alpha_u + l + j)}{\Gamma(-\alpha_u - \alpha_t + l + k) \Gamma(-\alpha_u - \alpha_t + l + j)} = (-\alpha_u)^{2\alpha_t} + (-\alpha_u)^{2\alpha_t - 1} \alpha_t \times$$

$$\times (2L + k + j - \alpha_t - 1) + (-\alpha_u)^{2\alpha_t - 2} P_2(\alpha_t, l, k, j)$$

Donde P_2 es un polinomio de orden 2 en l, k, j . Queda entonces,
usando XI.7:

$$\left. \text{Disc}_{M^2} A_6(s, t, M^2) \right|_{\alpha_{M^2}^2 = n} = q^2 \pi \int (\alpha_{M^2}^2 - n) \frac{1}{\Gamma(2\alpha_0) \Gamma(\alpha_0 + 1)} \frac{\Gamma(-\alpha_t)^2}{\Gamma(-\alpha_t - \alpha_0)^2} \times$$

$$\times \sum_{l, k, j = -\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(l + 2\alpha_0) \Gamma(k - \alpha_t - \alpha_0) \Gamma(j - \alpha_t - \alpha_0) \Gamma(n - l - k - j + \alpha_0 + 1)}{\Gamma(l + 1) \Gamma(j + 1) \Gamma(k + 1) \Gamma(n - l - k - j + 1)} \times$$

$$\times \left\{ (-\alpha_u)^{2\alpha_t} + (-\alpha_u)^{2\alpha_t - 1} \alpha_t (2L + k + j - \alpha_t - 1) + (-\alpha_u)^{2\alpha_t - 2} P_2 \dots \right\} \quad (\text{XI.11})$$

ya que todos los términos con l, k o j menor que cero se anulan,
así como aquéllos en que $n - l - k - j$ es menor que cero.

La fórmula XI.12 (87):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(x+n) \Gamma(y+n)}{\Gamma(w+n) \Gamma(z+n)} = \frac{\pi^2}{\sin \pi x \sin \pi y} \frac{\Gamma(w+Z-X-Y-1)}{\Gamma(w-Z) \Gamma(Z-X) \Gamma(W-Y) \Gamma(Z-Y)} \quad (\text{XI.12})$$

permite calcular las sumatorias que aparecen para distintos órdenes
de $-\alpha_u$, teniendo en cuenta que, por ejemplo,

$$\frac{l}{\Gamma(l+1)} = \frac{1}{\Gamma(l)}; \quad \frac{l(l-1)}{\Gamma(l+1)} = \frac{1}{\Gamma(l-1)}, \text{ etc.}$$

y que cualquier polinomio en l, k, j se puede expresar de la forma:

$al(l-1)\dots + bl(l-1)\dots k(k-1)\dots + \dots + ck(k-1)\dots j(j-1)\dots$ etc.

es decir que la sumatoria es una combinación lineal de sumatorias

del tipo:

$$S(q, r, s, \alpha_0, \alpha_t, n) = \sum_{j, k, l = -\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(l + 2\alpha_0) \Gamma(k - \alpha_t - \alpha_0)}{\Gamma(l + 1 - q) \Gamma(k + 1 - r)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(j - \alpha_t - \alpha_0) \Gamma(n - l - k - j + \alpha_0 + 1)}{\Gamma(j + 1 - s) \Gamma(n - l - k - j + 1)}$$

Realizando las sumatorias queda:

$$F(q, r, s, \alpha_0, \alpha_t, n) = q^4 \pi \frac{\Gamma(-\alpha_t)^2 S(q, r, s, \alpha_0, \alpha_t, n)}{\Gamma(2\alpha_0) \Gamma(\alpha_0 + 1) \Gamma(-\alpha_t - \alpha_0)^2} =$$

$$= \frac{g^4 \pi \Gamma(-\alpha_t)^2 \Gamma(1-2\alpha_0, q) \Gamma(1+\alpha_t+\alpha_0, r) \Gamma(1-\alpha_t+\alpha_0, s) \Gamma(1-2\alpha_t+\alpha_0+n)}{\Gamma(1-2\alpha_t+\alpha_0) \Gamma(2\alpha_t-\alpha_0, q+r+s) \Gamma(1-q-r-s+n)}$$

$$\Gamma(\alpha, x) = \begin{cases} \frac{x}{\Gamma(\alpha)} (\alpha-1) & ; x > 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases} \quad (XI.13)$$

La contribución en $(-\alpha_u)^{2\alpha_t} t$ (correspondiente en Triple Regge a $s^{2\alpha_t} t$) vale, de XI.11 y XI.13:

$$s^{2\alpha_t} F(0, 0, 0, \alpha_0, \alpha_t, n) = s^{2\alpha_t} g^4 \pi \frac{\Gamma(-\alpha_t)^2}{\Gamma(1-2\alpha_t+\alpha_0)} \times \frac{\Gamma(1-2\alpha_t+\alpha_0+n)}{\Gamma(n+1)} \quad (XI.14)$$

La contribución a $s^{2\alpha_t-1} t$ vale (de XI.11 y XI.13):
 $s^{2\alpha_t-1} [2\alpha_t F(1, 0, 0, \alpha_0, \alpha_t, n) + \alpha_t F(0, 1, 0, \alpha_0, \alpha_t, n) + \alpha_t F(0, 0, 1, \alpha_0, \alpha_t, n) + \alpha_t (-\alpha_t - 1) F(0, 0, 0, \alpha_0, \alpha_t, n)]$

Los tres primeros términos dan:

$$s^{2\alpha_t} \frac{\Gamma(-\alpha_t)^2}{\Gamma(1-2\alpha_t+\alpha_0)} \frac{\Gamma(1-2\alpha_t+\alpha_0+n)}{\Gamma(n+1)} \frac{n}{s} \frac{2\alpha_t(\alpha_0-\alpha_t)}{1-2\alpha_t+\alpha_0}$$

El cuarto término da una contribución en:

$$s^{2\alpha_t-1} \frac{\Gamma(1-2\alpha_t+\alpha_0+n)}{\Gamma(n+1)}$$

es decir que, haciendo el desarrollo según XI.3 en potencias de n , daría una contribución a la primera hija en α_t y primera hija en α_0 .

Por lo tanto, hasta la primera hija en uno de los canales t , se tiene:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_6(s, t, n) = & \pi g^4 s^{2\alpha_t} \frac{\Gamma(-\alpha_t)^2}{\Gamma(-2\alpha_t+\alpha_0+1)} \frac{\Gamma(n-2\alpha_t+\alpha_0+1)}{\Gamma(n+1)} \times \\ & \times \left\{ 1 + \frac{n}{s} \frac{2\alpha_t(\alpha_0-\alpha_t)}{-2\alpha_t+\alpha_0+1} + O\left[\left(\frac{n}{s}\right)^2\right] \right\} \end{aligned} \quad (XI.15)$$

donde

$$\tilde{A}_6(s, t, n) = \int_{n-1/2}^{n+1/2} d\alpha_{M^2} \frac{\text{Disc}_{M^2} A_6(s, t, M^2)}{2i}$$

A fin de analizar el cumplimiento de las reglas de suma de M^2 finita, es de interés comparar las contribuciones de las sucesivas hijas en el canal a a $\bar{a}$ en el desarrollo en polos de Regge, con la contribución de las resonancias, que se puede sacar de la fórmula XI.14 usando el desarrollo XI.3. Se limitará el análisis a la trayectoria principal en el canal t , aunque indicando la forma en que el cálculo puede generalizarse a las hijas.

A fin de hallar la forma asintótica Reggeizada de la discontinuidad en M^2 de la amplitud, se sigue el tratamiento dado por De Tar et al. (59), pero incluyendo las contribuciones de trayectorias hijas en $\bar{a}$. Para el diagrama en árbol $a \bar{c} b \bar{b} c \bar{a}$, se tiene:

$$A_{\bar{a} a \bar{c} b} = g^4 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx_1 \frac{dy}{y} dx_2 (x_1 x_2)^{-\alpha_t-1} [(1-x_1)(1-x_2)]^{-\alpha_u-1} \times \\ \times y^{-\alpha_{M^2}} (1-y)^{-\alpha_0-1} [(1-x_1 y)(1-x_2 y)]^{\alpha_u+\alpha_0} \times \\ \times (1-x_1 x_2 y)^{-2\alpha_0} \quad (XI.16)$$

Se calcula la discontinuidad en la zona en que α_{M^2} , α_s , $\alpha_{\bar{s}}$, α_u , $\alpha_{\bar{u}} \rightarrow -\infty$, donde la representación integral está definida, y luego se continuará a α_{M^2} , α_s , $\alpha_{\bar{s}} \rightarrow \infty$; α_u , $\alpha_{\bar{u}} \rightarrow -\infty$, correspondiente a la zona de fragmentación de b. Haciendo, además, $\alpha_{M^2} - \alpha_u \rightarrow 0$, se obtiene el resultado para la zona Triple Regge de fragmentación de b.

Se observa que la contribución principal a la integral proviene de y próximo a 1, es decir que, haciendo el cambio de variables:

$$y = \exp\left(\frac{z}{\alpha}\right) \quad (\alpha \equiv \alpha_{M^2})$$

se puede tomar sólo los primeros términos en el desarrollo de la exponencial.

Resulta entonces:

$$(1-y)^{-\alpha_0-1} = \left(\frac{z}{-\alpha}\right)^{-\alpha_0-1} \left[1 + A_1 \left(\frac{z}{-\alpha}\right) + B_1 \left(\frac{z}{-\alpha}\right)^2 + \dots\right] \\ (1-x_1 x_2 y)^{-2\alpha_0} = (1-x_1 x_2)^{-2\alpha_0} \left[1 + A_2 \frac{z_1 z_2}{1+z_1+z_2} \left(\frac{z}{-\alpha}\right) + \right. \\ \left. + B_2 \left(\frac{z_1 z_2}{1+z_1+z_2}\right)^2 \left(\frac{z}{-\alpha}\right)^2 + \dots\right] \\ (1-x_{1,2} y)^{\alpha_0} = (1-x_{1,2})^{\alpha_0} \left[1 + A_3 z_{1,2} \left(\frac{z}{-\alpha}\right) + B_3 z_{1,2}^2 \left(\frac{z}{-\alpha}\right)^2 + \dots\right] \\ (1-x_{1,2} y)^{\alpha_u} = (1-x_{1,2})^{\alpha_u} \exp\left[\alpha_u z_{1,2} \left(\frac{z}{-\alpha}\right)\right] \left[1 + A(\alpha_u, z_{1,2}) \left(\frac{z}{-\alpha}\right)^2 + \right. \\ \left. + B(\alpha_u, z_{1,2}) \left(\frac{z}{-\alpha}\right)^3 + \dots\right] \quad (XI.17)$$

Donde $z_{1,2} = x_{1,2} / (1-x_{1,2})$; A_i , B_i son coeficientes función de α_0 ; $A(\alpha_u, z_{1,2})$ y $B(\alpha_u, z_{1,2})$ son de la forma $\alpha_u^i \cdot z_{1,2}^j$. La amplitud será, por lo tanto, de la forma:

$$\begin{aligned}
 A_{6a\bar{c}b} = & g^4 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty dz_1 \frac{dz}{-\alpha} dz_2 z_1^{-\alpha_t-1} z_2^{-\alpha_t-1} (1+z_1)^{\alpha_t+\alpha_u} \times \\
 & \times (1+z_2)^{\alpha_t+\alpha_u} (1+z_1+z_2)^{-2\alpha_u} \left(\frac{z}{-\alpha}\right)^{-\alpha_u-1} \times \\
 & \times \exp \left[-\frac{z}{-\alpha} (-\alpha - z_1 \alpha_u - z_2 \alpha_u) \right] \left[1 + A_1 \left(\frac{z}{-\alpha}\right) + B_1 \left(\frac{z}{-\alpha}\right)^2 + \dots \right] \times \\
 & \times \left[1 + A_2 \frac{z_1 z_2}{1+z_1+z_2} \left(\frac{z}{-\alpha}\right) + B_2 \left(\frac{z_1 z_2}{1+z_1+z_2}\right)^2 \left(\frac{z}{-\alpha}\right)^2 + \dots \right] \times \\
 & \times \left[1 + A_3 z_1 \left(\frac{z}{-\alpha}\right) + B_3 z_1^2 \left(\frac{z}{-\alpha}\right)^2 + \dots \right] \left[1 + A_3 z_2 \left(\frac{z}{-\alpha}\right) + B_3 z_2^2 \left(\frac{z}{-\alpha}\right)^2 + \dots \right] \times \\
 & \times \left[1 + A(\alpha_u, z_1) \left(\frac{z}{-\alpha}\right)^2 + B(\alpha_u, z_1) \left(\frac{z}{-\alpha}\right)^3 + \dots \right] \left[1 + A(\alpha_u, z_2) \left(\frac{z}{-\alpha}\right)^2 + \right. \\
 & \left. + B_3(\alpha_u, z_2) \left(\frac{z}{-\alpha}\right)^3 + \dots \right]
 \end{aligned}
 \tag{XI.18}$$

La contribución de los términos sucesivos de los desarrollos alterarán el exponente de los términos en $z/-\alpha$ y/o en $z_{1,2}$ y/o en $(1+z_{1,2})$ y/o en $(1+z_1+z_2)$. A fin de deducir cuáles de los términos del desarrollo contribuirán a las distintas hijas en t y/o en a , se calculará el resultado de un término genérico, dado por:

$$\begin{aligned}
 A = & g^4 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty dz_1 \frac{dz}{-\alpha} dz_2 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2'} (1+z_1)^{\alpha_2} (1+z_2)^{\alpha_2'} \times \\
 & \times (1+z_1+z_2)^{\alpha_3} \left(\frac{z}{-\alpha}\right)^{\alpha_4} \exp \left[-\frac{z}{-\alpha} (-\alpha - \alpha_u z_1 - \alpha_u z_2) \right]
 \end{aligned}$$

Para ello se aplica la fórmula XI.6 a fin de calcular la integral sobre $dz/-\alpha$, dando:

$$\begin{aligned}
 A = & g^4 \int_0^\infty \int_0^\infty dz_1 dz_2 z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2'} (1+z_1)^{\alpha_2} (1+z_2)^{\alpha_2'} \times \\
 & \times (1+z_1+z_2)^{\alpha_3} \Gamma(\alpha_4+1) (-\alpha - \alpha_u z_1 - \alpha_u z_2)^{-(\alpha_4+1)}
 \end{aligned}$$

El último término desarrolla una parte imaginaria al continuar α , α_s y $\alpha_{\bar{s}}$ a sus regiones físicas. Sacando $\alpha^{-(\alpha_4+1)}$ factor común y haciendo el cambio de variables $y_1 = -\frac{\alpha_u}{\alpha} z_1$, $y_2 = -\frac{\alpha_u}{\alpha} z_2$, se

tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{Disc}_{M^2} A}{2i} = & \frac{\pi g^4}{\Gamma(-\alpha_4)} \alpha^{-(\alpha_4+1)} \left(-\frac{\alpha_u}{\alpha}\right)^{-(\alpha_1+\alpha_1')-2} \int_0^\infty \int_0^\infty dy_1 dy_2 y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_1'} \\
 & (1-\frac{\alpha}{\alpha_u} y_1)^{\alpha_2} (1-\frac{\alpha}{\alpha_u} y_2)^{\alpha_2'} \left(1-\frac{\alpha}{\alpha_u} y_1 - \frac{\alpha}{\alpha_u} y_2\right)^{\alpha_3} (1-y_1-y_2)^{-(\alpha_4+1)} \times \\
 & \times \Theta(1-y_1-y_2)
 \end{aligned}
 \tag{XI.13}$$

En la zona Triple Regge, se puede despreciar $\frac{\alpha}{\alpha_u} Y_{1,2}$ frente a 1, y las integrales restantes se pueden calcular haciendo

$$u = \frac{Y_2}{1 - Y_1}, \text{ con el resultado:}$$

$$\frac{Disc_{M^2} A}{2i} \Big|_{T.R.} = I(\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_4) = \pi q^4 \alpha^{-(\alpha_4+1)} \left(-\frac{\alpha_u}{\alpha}\right)^{-(\alpha_1+\alpha'_1)-2} \times \\ \times \frac{\Gamma(\alpha_1+1) \Gamma(\alpha'_1+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha'_1-\alpha_4+2)} \quad (XI.20)$$

Observando que en este caso $-\alpha_u \sim s$, se puede hallar los valores de α_1 , α'_1 y α_4 que corresponden a las contribuciones de sucesivas hijas en t y en $\bar{a}$, y deducir cuáles términos en los polinomios es necesario conservar.

Así, la contribución de orden cero en t y a $\bar{a}$ se obtendrá cuando $-(\alpha_4+1) = \alpha_0$ y $-(\alpha_1+\alpha'_1)-2 = 2\alpha_t$, es decir que corresponde al primer término, o sea el 1 en los polinomios.

Resulta entonces:

$$\frac{Disc_{M^2} A_{0,0}^{Regge}}{2i} \Big|_{T.R.} = \pi q^4 (M^2)^{\alpha_0} \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_t} \frac{\Gamma^2(-\alpha_t)}{\Gamma(-2\alpha_t+\alpha_0+1)} \quad (XI.21)$$

donde el supraíndice 0,0 implica trayectoria padre en ambos canales t y trayectoria padre en $\bar{a}$.

Este resultado concuerda con el valor obtenido para la amplitud de resonancias promediada (fórmula XI.15) para el primer término del desarrollo de

$$\frac{\Gamma(n_2 - 2\alpha_t + \alpha_0 + 1)}{\Gamma(n_2 + 1)}$$

confirmando la dualidad semilocal en este orden.

A fin de estudiar el comportamiento de las reglas de suma en M^2 finito, interesa estudiar la contribución de las trayectorias hijas en $\bar{a}$. La contribución de la primera hija tendrá la dependencia $\left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_t} (M^2)^{\alpha_0-1}$; es decir que provendrá de los términos en $-(\alpha_1+\alpha'_1)-2 = 2\alpha_t$, $-(\alpha_4+1) = \alpha_0 - 1$; y de los términos en $-(\alpha_1+\alpha'_1)-2 = 2\alpha_t - 1$, $-(\alpha_4+1) = \alpha_0 - 2$ que estén multiplicados por $(-\alpha_u)$. La contribución de la segunda hija en $\bar{a}$ tendrá la dependencia $\left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_t} (M^2)^{\alpha_0-2}$; provendrá de los términos en $-(\alpha_1+\alpha'_1)-2 = 2\alpha_t$, $-(\alpha_4+1) = \alpha_0 - 2$; de los términos en $-(\alpha_1+\alpha'_1)-2 = 2\alpha_t - 1$, $-(\alpha_4+1) = \alpha_0 - 3$ mul-

tiplicados por $(-\alpha_u)$; y de los términos en $-(\alpha_t + \alpha'_t) - 2 = 2\alpha_t - 2$, $-(\alpha_0 + 1) = \alpha_0 - 4$ multiplicados por $(-\alpha_u)^2$.

Se puede observar que estos términos provienen del desarrollo de $(1 - y)^{-\alpha_u - 1}$, y del de $(1 - x_{1,2} y)^{\alpha_u}$, mientras que los otros desarrollos contribuyen a hijas en el canal t y a $\bar{a}$ simultáneamente.

Realizando los desarrollos que interesan hasta el orden que puede contribuir a la segunda hija, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Disc}_{M^2} A_{6\text{a}\bar{c}b}^{\text{Regge}}}{2i} \Big|_{T.R.}^{0,1} &= \frac{\alpha_0 + 1}{2} I(-\alpha_t - 1, -\alpha_t - 1, -\alpha_0) - \\ &- \frac{\alpha_u}{2} I(-\alpha_t, -\alpha_t - 1, -\alpha_0 + 1) - \\ &- \frac{\alpha_u}{2} I(-\alpha_t - 1, -\alpha_t, -\alpha_0 + 1) = \quad (\text{XI.22}) \end{aligned}$$

$$= \pi g^4 \frac{-2\alpha_t + \alpha_0 + 1}{2} \frac{\Gamma(-\alpha_t)^2}{\Gamma(-2\alpha_t + \alpha_0)} \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_t} (M^2)^{\alpha_u - 1} \quad (\text{XI.23})$$

Comparando con el término en $\left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_t} M^{\alpha_0 - 1}$ del desarrollo correspondiente a la trayectoria padre en t de XI.15, se ve que a nivel de la primera hija en $\bar{a}$ se cumple la dualidad semilocal.

Para la segunda hija en $\bar{a}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Disc}_{M^2} A_{6\text{a}\bar{c}b}^{\text{Regge}} \Big|_{T.R.}^{0,2} &= \pi g^4 \left\{ (-\alpha_u) \left(-\frac{1}{3} + \frac{\alpha_0 + 1}{2}\right) I(-\alpha_t - 1, \alpha_t, -\alpha_0 + 2) + \right. \\ &+ \frac{3\alpha_0^2 + 5\alpha_0 + 2}{24} I(-\alpha_t - 1, -\alpha_t - 1, -\alpha_0 + 1) + \\ &+ \frac{1}{4} (-\alpha_u)^2 I(-\alpha_t + 1, -\alpha_t - 1, -\alpha_0 + 3) + \\ &+ \frac{1}{4} (-\alpha_u)^2 I(-\alpha_t, -\alpha_t, -\alpha_0 + 3) \Big\} = \\ &= \pi g^4 \frac{3(-2\alpha_t + \alpha_0 + 1)^2 + 2\alpha_t - \alpha_0 - 1}{24} \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_t} (M^2)^{\alpha_0 - 2} \quad (\text{XI.24}) \end{aligned}$$

Comparando con el término correspondiente del desarrollo en XI.15 (trayectoria padre en t), se observa que también la segunda hija cumple con la dualidad semilocal. Se tiene entonces la misma situación que para el caso de cuatro partículas, pudiendo aplicarse el mismo razonamiento a fin de explicar porqué las reglas de suma presentan una discrepancia a nivel de la segunda y sucesivas hijas. Estas reglas de suma son del tipo:

$$\int_0^N d\alpha_{m^2} \frac{\text{Disc}_{m^2} A_0(s, t, m^2)}{2i} \sim \sum_n \frac{\beta_n(t) \left(\frac{s}{N}\right)^{2\alpha_t} N^{\alpha_0 - n + 1}}{\alpha_0 - 2\alpha_t + 1 - n} \quad (\text{XI.25})$$

Otras permutaciones del gráfico en árbol

Se espera que estas permutaciones produzcan simplemente el factor de signatura de los polos de Regge del canal t . Considerando el orden $a \bar{c} c \bar{b} \bar{a}$ se tiene el problema adicional de promediar sobre las resonancias en el canal s ^(82,88) a fin de comparar con la asíntota de Regge. Una posibilidad es de promediar independientemente sobre las resonancias de $a \bar{b}$ y las de $\bar{a} \bar{b}$. El resultado para la región Triple Regge es entonces el mismo que para el orden $a \bar{c} b \bar{b} c \bar{a}$ multiplicado por el factor de fase correspondiente a los Regge'ones del canal t . Sin embargo, otra elección parece correcta para resonancias angostas, a saber, considerar el producto de las resonancias en los canales $a \bar{b}$ y $\bar{a} \bar{b}$, que dan:

$$\frac{1}{s - m_R^2 + i m_R \Gamma_R} \frac{1}{s - m_R^2 - i m_R \Gamma_R} \sim \frac{\pi}{m_R \Gamma_R} \delta(s - m_R^2) \quad (\text{82,88})$$

y luego promediar sobre un pequeño rango de s ^(82,88). Ello implica despreciar la interferencia entre las resonancias de distinta masa, lo cual es correcto sólo si los anchos son pequeños aún a altas energías. La segunda elección resulta insatisfactoria asintóticamente, ya que, por ejemplo para la región Triple Regge, se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{A}_6^{a \bar{b} \bar{c}}(R, t, n) &= \int_{R^{-1/2}}^{R^{+1/2}} d\alpha_s \tilde{A}_6^{a \bar{b} \bar{c}}(s, t, n) = \\ &= y^4 \frac{\sin^2 \pi \alpha_t}{m_R \Gamma_R} \frac{\Gamma(-\alpha_t)^2}{\Gamma(-2\alpha_t + \alpha_0 + 1)} R^{2\alpha_t} \frac{\Gamma(n - 2\alpha_t + \alpha_0 + 1)}{\Gamma(n + 1)} \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{n}{R} \frac{2\alpha_t(\alpha_0 - \alpha_t)}{-2\alpha_t + \alpha_0 + 1} + O\left(\frac{n^2}{R^2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{XI.26})$$

Es decir que se viola el "scaling", salvo que $m_R \Gamma_R$ sea independiente de R , y en todo caso no coincide con la correspondiente forma asintótica de Regge.

En cuanto a la zona de pionización, aplicando el criterio de tomar resonancias simultáneas en los canales $a \bar{b}$ y $\bar{a} \bar{b}$ al gráfico con orden $a \bar{b} c \bar{b} \bar{a}$, se encuentra:

$$\frac{\text{Disc}_{M^2} A_6 a b \bar{c}}{2i} \left| \begin{array}{l} \alpha_0 = R \\ \alpha_{M^2} = m \end{array} \right. = \frac{q^4}{m_R \Gamma_R} \frac{1}{\Gamma(2\alpha_0) \Gamma(\alpha_0 + 1)} \frac{\sin^2 \pi \alpha_t}{\Gamma(-\alpha_t)^2} \frac{\Gamma(-\alpha_t)^2}{\Gamma(-\alpha_t - \alpha_0)^2} \times$$

$$\times \sum_{l, k, j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(l+2\alpha_0)}{\Gamma(l+1)} \frac{\Gamma(k-\alpha_t-\alpha_0)}{\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(j-\alpha_t-\alpha_0)}{\Gamma(j+1)} \frac{\Gamma(n-l-k-\alpha_0+1)}{\Gamma(n-l-k-\alpha_0-\alpha_t+1)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(-l-j+n-\alpha_0+1)}{\Gamma(n-l-j-\alpha_0-\alpha_t+1)} \frac{\Gamma(n-l-k-j+\alpha_0+1)}{\Gamma(n-l-k-j+1)} \quad (\text{XI.27})$$

Donde ahora α_u y α_t son comparables, y no se puede considerar j, k, l pequeños frente a $-\alpha_u$. En general:

$$\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)} \rightarrow e^{b-a} \frac{(x+a)^{x+a-1/2}}{(x+b)^{x+b-1/2}} =$$

$$= e^{b-a} x^{a-b} \frac{\exp[(x+a-1/2) \ln(1+a/x)]}{\exp[(x+b-1/2) \ln(1+b/x)]} =$$

$$= e^{b-a} x^{a-b} \frac{\exp[(x+a-1/2)(a/x - 1/2 a^2/x^2 + \dots)]}{\exp[(x+b-1/2)(b/x - 1/2 b^2/x^2 + \dots)]}$$

Haciendo $j = n z_1$, $k = n z_2$, $l = n z_3$ y observando que $0 \leq j, k, l \leq n$

se puede poner:

$$\frac{\text{Disc}_{M^2} A_6 a b \bar{c}}{2i} \left| \begin{array}{l} \alpha_0 = R \\ \alpha_{M^2} = m \end{array} \right. = \frac{q^4}{m_R \Gamma_R} \frac{1}{\Gamma(2\alpha_0) \Gamma(\alpha_0 + 1)} \sin^2 \pi \alpha_t (-t)^{2\alpha_0} m^{\alpha_0} \times$$

$$\times \int_0^1 dz_3 \int_0^{1-z_3} dz_2 \int_0^{1-z_3-z_2} dz_1 \frac{z_1^{-\alpha_t-\alpha_0-1} z_2^{-\alpha_t-\alpha_0-1} z_3^{2\alpha_0-1}}{z_1^{-\alpha_t-\alpha_0-1} z_2^{-\alpha_t-\alpha_0-1} z_3^{2\alpha_0-1}} \times$$

$$\times (1-z_1-z_3)^{\alpha_t} (1-z_2-z_3)^{\alpha_t} (1-z_1-z_2-z_3)^{\alpha_0} \times$$

$$\times \exp \left[-\beta \left(\frac{1}{1-z_1-z_3} + \frac{1}{1-z_1-z_3} \right) + \frac{\alpha_t^2}{2m} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} - \frac{1}{1-z_1-z_3} - \frac{1}{1-z_1-z_3} \right) \right] \quad (\text{XI.28})$$

Donde $\beta = \frac{\alpha_0 \alpha_t}{m}$. En el caso en que $t \sim \sqrt{s}$, $\frac{\alpha_t^2}{m} \sim \beta$. Haciendo

$x = z_1/(1-z_3)$, $y = z_2/(1-z_3)$, $u = x/(1-y)$, $v = 1-y$, $w = 1-u$,

la integral queda:

$$\int_0^1 dz_3 z_3^{2\alpha_0-1} (1-z_3)^{-\alpha_0} \int_0^1 \int_0^1 dv dw (1-v)^{-\alpha_t-\alpha_0-1} (1-w)^{-\alpha_t-\alpha_0-1} \times$$

$$\times w^{\alpha_0} (1-v+wv)^{\alpha_t} \exp \left\{ \frac{\beta}{2(1-z_3)} \left[\frac{1}{1-v} + \frac{1}{v(1-w)} - \frac{3}{1-v+vw} - \frac{3}{v} \right] \right\}$$

$$(\text{XI.29})$$

Desarrollando la exponencial, el primer término de la misma da:

$$I_0 = \int_0^1 dz_3 z_3^{2\alpha_0-1} (1-z_3)^{-\alpha_0} \int_0^1 \int_0^1 dv du u^{-\alpha_t-\alpha_0-1} (1-u)^{\alpha_0} \times$$

$$\times (1-v)^{-\alpha_t-\alpha_0-1} (1-uv)^{\alpha_t}$$

La integral sobre $du dv$ se puede identificar con la B_5 de Bardakci-Ruegg ⁽⁷¹⁾, haciendo $\alpha_t + \alpha_o = \alpha_{12}$, $-\alpha_o - 1 = \alpha_{23}$, $\alpha_t + \alpha_o =$

α_{34} , $-1 = \alpha_{45}$, $-1 = \alpha_{15}$. Usando la expansión de Hopkinson

Plahte para la B_5 , resulta:

$$I_0 = \frac{\Gamma(2\alpha_o)\Gamma(-\alpha_o+1)}{\Gamma(-\alpha_t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-\alpha_t+k)(-\alpha_t-\alpha_o+k)}$$

Como

$$\int_0^{\infty} dk \frac{1}{(k+a)(k+b)} = \frac{1}{b-a} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-\alpha_t+k)(-\alpha_t-\alpha_o+k)} \sim \frac{1}{\alpha_o} \ln \left(\frac{-\alpha_t}{-\alpha_t-\alpha_o} \right)$$

y con esta aproximación:

$$\frac{\text{Disc}_{M^2} A_{6ab\bar{c}}^0}{2i} \Big|_{\substack{\alpha_s=R \\ \alpha_{M^2}=n}} = \frac{g^4}{m_R \Gamma_R} \frac{\Gamma(-\alpha_o+1)}{\Gamma(\alpha_o+1)} \frac{\sin^2 \pi \alpha_t}{\alpha_o} (-t)^{\alpha_o} n^{\alpha_o} \times$$

$$\times \ln \frac{-\alpha_t}{-\alpha_t-\alpha_o} \longrightarrow \frac{g^4}{m_R \Gamma_R} \frac{\Gamma(-\alpha_o+1)}{\Gamma(\alpha_o+1)} \sin^2 \pi \alpha_t (-t)^{\alpha_o-1} n^{\alpha_o} \quad (\text{XI.30})$$

Donde se ve que, aparte del factor $1/(m_R \Gamma_R) \sin^2 \pi \alpha_t$, se obtiene "scaling" solamente con la elección de Virasoro ⁽⁸⁶⁾: $\alpha_o = 1$.

Tomando ahora el segundo término en la expansión de la exponencial, se tiene cuatro contribuciones, que se pueden evaluar mediante la expansión de Hopkinson Plahte para la B_5 :

i) en $1/(1-v)$:

$$\frac{\delta L}{2} \int_0^1 dz_3 z_3^{2\alpha_o-1} (1-z_3)^{-\alpha_o-1} \int_0^1 \int_0^1 du dv u^{-\alpha_t-\alpha_o-1} (1-u)^{\alpha_o} \times$$

$$\times (1-v)^{-\alpha_t-\alpha_o-2} (1-uv)^{\alpha_t} = \frac{\delta L}{2} B_4(2\alpha_o, -\alpha_o) \Gamma(\alpha_o+1) \frac{\Gamma(-\alpha_t-\alpha_o+1)}{\Gamma(-\alpha_t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(-\alpha_t) k - \alpha_t}$$

ii) Análogamente, el término en $1/(v u)$ contribuye con:

$$\frac{\delta L}{2} B_4(2\alpha_o, -\alpha_o) \Gamma(\alpha_o+1) \frac{\Gamma(-\alpha_t-\alpha_o)}{\Gamma(-\alpha_t)} \frac{1}{(-\alpha_t-\alpha_o-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-\alpha_t-\alpha_o-1} \right)$$

iii) el término en $1/(1-uv)$ con:

$$3 \frac{\delta L}{2} B_4(2\alpha_o, -\alpha_o) \frac{\Gamma(-\alpha_t-\alpha_o)}{\Gamma(-\alpha_t+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k - \alpha_t - \alpha_o}$$

iv) y el término en $1/v$ con:

$$-3 \frac{\delta L}{2} B_4(2\alpha_o, -\alpha_o) \frac{\Gamma(-\alpha_t-\alpha_o)}{\Gamma(-\alpha_t)} \frac{1}{-\alpha_t} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-\alpha_t} \right)$$

A fin de analizar las sumatorias, notamos que la

función zeta generalizada:

$$\zeta(r, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+v} \right)^r$$

tiene un polo con residuo 1 en el plano r para $r = 1$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \zeta(r, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+v} = \frac{1}{r-1} - \psi(v) \quad \text{Re } v > 0$$

donde la función ψ es meromorfa con polos en $v = 0, -1, -2, \dots$

$$\begin{aligned}\psi(v) &= \frac{d \ln \Gamma(v)}{dv} \xrightarrow{v \rightarrow \infty} \ln v - \frac{1}{2v} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+v} &\xrightarrow{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v-1} - \ln v + \frac{1}{2v} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k-\alpha_t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k-\alpha_t-\alpha_0-1} = -\frac{\alpha_0+1}{-\alpha_t} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k-\alpha_t-\alpha_0} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k-\alpha_t} = \frac{\alpha_0}{-\alpha_t}\end{aligned}$$

El residuo de ψ en $v = 0$ vale -1 , luego la integral en primer orden en $\mathcal{JL}$ vale:

$$I_1 = \frac{\mathcal{JL}}{2} B_4(2\alpha_0, -\alpha_0) \Gamma(\alpha_0+1) (-t)^{\alpha_0-1} \left[\frac{2}{v-1} + \frac{2}{\varepsilon} + \frac{4\alpha_0+1}{-\alpha_t} \right]$$

De modo que, tomando los dos primeros términos en el desarrollo de la exponencial, resulta:

$$\begin{aligned}\frac{Disc_{n^2} A_{6abc}}{2^L} \Big|_{\substack{\alpha_s=R \\ \alpha_{n^2}=n}} &= \frac{g^4}{m_R \Gamma_R} \frac{\Gamma(-\alpha_0+1)}{\Gamma(\alpha_0+1)} \sin^2 \pi \alpha_t (-t)^{\alpha_0-1} m^{\alpha_0} \times \\ &\times \left\{ 1 + \mathcal{JL} \left(\frac{1}{v-1} + \frac{1}{\varepsilon} \right) + 2 \mathcal{JL} \frac{\alpha_0+1/4}{-t} \right\} \quad (XI.31)\end{aligned}$$

De donde se ve que el término de orden $\mathcal{JL}$ introduce polos independientes de t y términos de orden inferior en $(-t)$.

Esta dependencia contrasta con el decrecimiento exponencial que se espera, ya que el orden $a b \bar{c} c \bar{b} \bar{a}$ no presenta polos de Regge en el canal $b \bar{b}$.

Este caso se puede comparar con el comportamiento de la amplitud de cuatro partículas

$$\begin{aligned}V(s, u) &= \frac{\Gamma(-\alpha_s) \Gamma(-\alpha_u)}{\Gamma(-\alpha_s - \alpha_u)} \\ &\text{que no presenta polos de Regge en el canal } t. \text{ Haciendo } \alpha_0 = \mu^2 \\ &(\mu \text{ masa de las partículas exteriores}), \text{ resulta:} \\ Res. V(s, u) \Big|_{\alpha_s=n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} &\frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha_0 + \alpha_t)} m^{\alpha_t + \alpha_0 - 1} \quad (XI.32)\end{aligned}$$

El factor $(-1)^n$ impide que se trate de un comportamiento tipo Regge, dando resonancias de signos alternados.

Si se ignora el factor $(-1)^n$, se tiene una forma asintótica correspondiente a un comportamiento tipo Regge, pero multiplicado por la variable asintótica elevada a $(\alpha_0 - 1)$. Al tratar la amplitud A_{6abc} haciendo el producto de la resonancia en $a b$ y $\bar{a} \bar{b}$, se pierde el signo alternado que puede presentar cada

uno de los bloques, y se observa un comportamiento asintótico que corresponde al "scaling", multiplicado por una de las variables asintóticas, $-t$, elevada a $(\alpha_0 - 1)$.

Estas dificultades podrían resolverse si los anchos de las resonancias crecen con la energía, de modo que las interferencias entre distintas resonancias se vuelven importantes. De este modo se pasaría, para energías crecientes, de un modo de promediar al otro, restableciendo el comportamiento debido a alta energía y la validez de la dualidad semilocal.

Agradecimientos

En primer lugar agradezco muy especialmente la paciente y generosa ayuda, consejos, correcciones y explicaciones que recibí de L. Masperi, tanto durante la realización de uno de los trabajos, como durante la preparación de este manuscrito.

También agradezco a R. Page, G. Violini y C. Ferro Fontán la labor en común al realizar los trabajos que componen esta tesis, y al último el haber aceptado ser mi asesor científico.

Quedo particularmente en deuda con las autoridades y personal del Centro Atómico Bariloche por la hospitalidad que repetidamente me fuera otorgada durante la realización de uno de los trabajos, y la redacción de esta tesis; y con las autoridades del Departamento de Física de la F.C.E.N. de la U.B.A., por la licencia otorgada a fin de concluir este trabajo.

Finalmente, agradezco a mi madre y a mi esposo, quienes hicieron posible mi prolongada estadía en el Centro Atómico Bariloche, por su constante estímulo y ayuda durante la realización de este manuscrito.

Referencias

- (1) B.E.Y. Svensson, Proceedings of the 1967 School of Physics,
CERN 67 - 24 Vol II.
- (2) J. Bros, H. Epstein y V. Glaser, Comm. in Math. Phys. 1, 240 (1965)
- (3) S. Mandelstam, Phys. Rev. 112, 1344 (1958)
- (4) T. Regge, Nuovo Cimento 14, 951 (1959)
- (5) E. J. Squires, "Complex Angular Momenta and Particle Physics"
Benjamin (1963)
- (6) R. Jengo, Suppl. Nuovo Cimento, 6, 638 (1968)
- (7) M. Jacob y G. C. Wick, Ann. Phys. 7, 404 (1959)
- (8) M. E. Rose, "Elementary Theory of Angular Momentum" Wiley (1957)
- (9) P. D. B. Collins y E. J. Squires, Springer Tracts in Modern
Physics Vol 45 (1958)
- (10) R. Dolen, D. Horn y C. Schmid, Phys. Rev. Lett. 19, 402 (1967)
- (11) C. Ferro Fontán, N. M. Queen y G. Violini, Rivista del Nuovo
Cimento 2, 357 (1972)
- (12) T. L. Trueman, Phys. Rev. Lett. 17, 1198 (1966)
- (13) J. H. Schwarz, Phys. Rev. 159, 1269 (1967)
- (14) A. Della Selva, L. Masperi y R. Odorico, Nuovo Cimento 54A,
978 (1968)
- (15) A. Della Selva, L. Masperi y R. Odorico, Nuovo Cimento 55A,
602 (1968)
- (16) J. Botke y J. R. Fulco, Phys. Rev. 182, 1837 (1969)
- (17) C. Ferro Fontán, M. Lusignoli, R. Odorico, M. Restignoli y
G. Violini, Nuovo Cimento 57A, 442 (1968)
- (18) C. Ferro Fontán, R. Odorico y L. Masperi, Nuovo Cimento 58A,
534 (1968)
- (19) A. García y L. Masperi, Lett. Nuovo Cimento 1, 379 (1969)
- (20) A. García y L. Masperi, Nucl. Phys. 158, 560 (1970)

- (21) E. Ferrari y G. Violini, Phys. Lett. 28B, 684 (1969)
- (22) M. Gell - Mann, M. L. Goldberger y W. Thirring, Phys. Rev. 95,
1612 (1954)
- (23) M. Gell - Mann y M. L. Goldberger, Phys. Rev. 96, 1433 (1954)
- (24) S. D. Drell y A. C. Hearn, Phys. Rev. Lett. 16, 908 (1966)
- S. B. Gerasimov, Soviet J. Nucl. Phys. 2, 430 (1966)
- (25) H.D. I. Abarbanel, Irvine Conf. on Regge Poles, Irvine (1969)
- (26) H. R. Rubinstein, G. Veneziano y M. A. Virasoro, Phys. Rev.
167, 1441 (1968)
- (27) M. J. Creutz, S. D. Drell y E. A. Paschos, Phys. Rev. 178,
2300 (1969)
- (28) M. Damashek y F. J. Gilman, Phys. Rev. D1, 1319 (1970)
- (29) C. A. Dominguez, C. Ferro Fontán y R. Suaya, Phys. Lett. 31B,
365 (1970)
- (30) M. Czekalski de Achterberg, C. Ferro Fontán y G. Violini,
Nucl. Phys. B40, 397 (1972)
- (31) A. Lagunov, L. Soloviev y A. Tavkhelidza, Phys. Lett. 24B,
181 (1967)
- K. Igi y S. Matsuda, Phys. Rev. Lett. 18, 625 (1967)
- R. Gatto, Phys. Rev. Lett. 18, 803 (1967)
- R. Dolen, D. Horn y C. Schmid, Phys. Rev. 166, 1768 (1968)
- (32) A. Della Selva, L. Masperi y R. Odorico, Nuovo Cimento 52A,
1357 (1967)
- M. G. Olsson, Phys. Lett. 26B, 310 (1968); Nuovo Cimento 57A,
420 (1968); Phys. Rev. 171, 1681 (1968)
- (33) C. H. Chan y L. K. Chavda, Phys. Rev. Lett. 22, 1228 (1969)
- (34) L. K. Chavda, Nuovo Cimento Lett. 3, 622 (1970)
- (35) J. Fisher, J. Pisut, P. Presnadjer y J. Sebesta, Czech J.
Phys. 19, 1486 (1969)
- W. C. Parke, R. G. Ponzini y H. T. Williams, Phys. Rev. D1,
134 (1970)

- (36) D. Schiff y G. Violini, Nuovo Cimento Lett. 1, 309 (1971)
E. Ferrari y G. Violini, Nuovo Cimento Lett. 4, 483 y 1015
(1970)
M. Restignoli, D. Schiff y G. Violini, Nuovo Cimento 7, 856
(1972)
- (37) M. Abramowitz y I. A. Stegun, Handbook of Math. Funct., Dover
p. 260 (1965)
- (38) L. K. Chavda, "On Dynamic Origin of Fixed Regge Poles in Weak,
Electromagnetic and Strong Interactions, Univ. of Alberta
preprint (1971)
A. García y G. Violini, Nuovo Cimento Lett. 2, 826 (1971)
- (39) E. D. Bloom, R. L. Cottrell, D. H. Coward, H. De Staebler,
J. Drees, G. Miller, L. W. Mo, R. E. Taylor, J. I. Friedman,
G. C. Hartman y H. W. Kendall, "Determination of the total
Photon - Proton Cross Section from High Energy Inelastic
Electron Scattering", SLAC - PUB - 653 (1969)
- (40) D. O. Caldwell, V. B. Ellings, W. P. Hesse, R. J. Morrison,
F. V. Murphy, B. W. Worster y D. E. Yount, Phys. Rev. Lett.
25, 609 (1970)
- (41) V. Barger y R. J. N. Phillips, Phys. Rev. 187, 2210 (1968)
- (42) J. Hamilton y W. S. ... , Rev. Mod. Phys. 35, 737 (1963)
C. Ferro Fontán, Tesis (1969) no publicada
J. E. Bowcock y P. H. Ng, Phys. Lett. 31B, 541 (1970)
F. Steiner, Phys. Lett. 32B, 294 (1970)
- (43) T. A. Armstrong, W. R. Hogg, G. M. Lewis, A. M. Robertson,
G. R. Brookes, A. S. Clough, J. H. Freeland, W. Galbraith,
A. F. King, W. R. Rawlinson, N. R. S. Tait, J. C. Thompson,
y D. W. L. Tolfree, "The Total Hadronic Cross Section of Gamma
rays in Hydrogen", submitted to Phys. Rev.
- (44) N. R. S. Tait y J. N. J. White, "An Analysis of Forward Compton
Scattering", Daresbury preprint DNPL/P 96, submitted to Nucl.
Phys. B.
- (45) J. W. Elbert et al. Phys. Rev. Lett. 20, 124 (1968)

- D. B. Smith, Phys. Rev. Lett. 23, 1064 (1969)
- (46) R. P. Feynman, Phys. Rev. Lett. 23, 1415 (1969)
- (47) K. G. Wilson, Acta Phys. Austr. 17, 37 (1963)
- (48) D. Amati, S. Fubini y A. Stanghellini, Nuovo Cimento 26, 896
(1962)
- (49) J. Benecke et al., Phys. Rev. 188, 2159 (1969)
- (50) W. Heisenberg, "Theory of Multiple Meson Production", en
"Vorträge über Kosmische Strahlung", Springer (1963)
- (51) R. L. Landier, Proc. of the APS Division of Particles and Fields
Meeting, Rochester (1971)
- (52) A. Krisch, Proc. of the APS Division of Particles and Fields
Meeting, Rochester (1971)
C. Ratner, R. Ellis, G. Vannini, B. Babcock, A. Krisch y J.
Roberts, Phys. Rev. Lett. 27, 68 (1971)
- (53) D. Amati, Proc. Symposium on Elementary Particles and Fields,
S. C. de Bariloche (1973)
- (54) E. L. Berger, ANL/HEP 7148 (1971)
- (55) K. G. Wilson, Cornell preprint CLNS - 31 (1970)
- (56) C. E. De Tar, Phys. Rev. D3, 128 (1971)
- (57) A. H. Mueller, Phys. Rev. D2 2963 (1970)
- (58) C. E. De Tar, Phys. Rev. D3, 128 (1971)
Chung - I. Tan, Brown Univ. preprint NYO - 2262TA - 240 (1971)
H. P. Stapp, Phys. Rev. D3, 3177 (1971)
- (59) C. E. De Tar, K. Kang, Chung - I. Tan y J. H. Weiss, Phys. Rev.
D4, 425 (1971)
- (60) A. Toller, Nuovo Cimento 37, 631 (1965)
- (61) A. Pignotti, IIº Simposio Argentino de Física Teórica de Partí-
culas y Campos, S. C. de Bariloche (1973)
- (62) E. L. Berger, ANL/HEP 7134 (1971)

- (63) H. M. Chan, C. S. Hsue, C. Quigg y J. M. Wang, Phys. Rev. Lett. 26, 672 (1971)
- (64) H. M. Chan y P. Hoyer, Phys. Lett. 36B, 79 (1971)
M. S. Chen, F. E. Paige, Phys. Rev. D4, 3163 (1971)
M. Kugler, H. Lipkin y V. Rittenberg, Argonne National Lab. prepr.
- (65) J. Ellis, J. Finkelstein, P. H. Frampton y M. Jacob, Phys. Lett. 35B, 227 (1971)
- (66) M. B. Einhorn, M. B. Green y M. A. Virasoro, Phys. Lett. 37B, 292 (1971)
- (67) M. S. Chen et al., Phys. Rev. Lett. 26, 1585 (1971)
- (68) P. Chliapnikov, O. Czyzewski, J. Finkelstein y M. Jacob, Phys. Lett. 35B, 581 (1971)
- (69) A. I. Sanda, NAL - THY - 25 (1971)
M. B. Einhorn, J. Ellis y J. Finkelstein, SLAC - PUB - 1006 (1971);
Phys. Rev. D5, 2063 (1972)
S. D. Ellis, A. I. Sanda, NAL - THY - 49 (1972)
J. Kwiecinski, Cracow Report 752/ PH (1971)
P. Olsen, CERN preprint TH - 1375 (1971)
- (70) P. G. O. Freund, Phys. Rev. Lett. 20, 235 (1968)
H. Harari, Phys. Rev. Lett. 20, 1395 (1968)
- (71) G. Veneziano, Nuovo Cimento 57A, 190 (1968)
K. Bardakci y H. Ruegg, Phys. Lett. 28B, 342 (1968)
M. A. Virasoro, Phys. Rev. Lett. 22, 37 (1969)
- (72) K. Bardakci y H. Ruegg, Phys. Rev. 181, 1884 (1969)
Can Hong - Mo y Tsou Sheung - Tsun, Phys. Lett. 28B, 485 (1969)
C. J. Goebel y B. Sakita, Phys. Rev. Lett. 22, 257 (1969)
Z. Koba y H. B. Nielsen, Nucl. Phys. 81D, 633 (1969)
- (73) A. Alessandrini, D. Amati, M. Le Bellac y D. Olive, TH 1160 - CERN (1970)
- (74) J. F. L. Hopkinson y E. Plahte, Phys. Lett. 28B, 489 (1969)
- (75) E. Plahte, Nuovo Cimento 66A, 713 (1970)

- (76) K. Kikkawa, B. Sakita y M. A. Virasoro, Phys. Rev. 184, 1701 (1969)
K. Kikkawa, S. Klein, B. Sakita y M. A. Virasoro, Wisconsin
preprint CON - 248 (1969)
- (77) V. Alessandrini, D. Amati y B. Morel, CERN preprint TH 1406 (1971)
- (78) D. J. Gross, A. Neveu, J. Scherk y J. H. Schwarz, Phys. Rev.
D2, 697 (1970)
- (79) Chan Hong - Mo, Proceedings of the IVth International Conference
on High Energy Collisions, Oxford (1972)
- (80) J. C. Gallardo y L. Masperi, Lettere al Nuovo Cimento 3, 261 (1972)
- (81) A. Di Giacomo, S. Fubini, L. Sertorio y G. Veneziano, Phys.
Lett. 33B, 171 (1970)
- (82) F. Arbab, J. C. Gallardo, L. Masperi y C. Rebbi, Lettere al
Nuovo Cimento 2, 1245 (1971)
- (83) T. Chou, C. Yang, Phys. Rev. Lett. 25, 1072 (1970)
K. J. Biebl y J. Wolf, preprint PHE 71 - 4 Berlin Zeuthen (1971)
C. E. De Tar, D. Z. Friedman y G. Veneziano, Phys. Rev. D4,
906 (1971)
E. Predazzi y G. Veneziano, CERN preprint TH - 1378 (1971)
- (84) L. Masperi y C. Rebbi, Nuovo Cimento A13, 689 (1973)
- (85) A. Della Selva y L. Masperi, Progr. Theor. Phys. 46, 190 (1971)
- (86) D. Gordon y G. Veneziano, Phys. Rev. D3, 2116 (1971)
M. A. Virasoro, Phys. Rev. D3, 2834 (1971)
R. J. Biebl, D. Bebel y D. Ebert, Berlin Zeuthen preprint PHE 71 -
9 (1971)
- (87) Bateman Manuscript Project, Higher Transcendental Functions
Vol 1, New York (1954)
- (88) J. C. Gallardo, L. Masperi y C. Rebbi, Trieste Internal Report
IC/ 71/ 151
- (89) M. C. de Achterberg, A. Della Selva, L. Masperi y R. Page,
Lettere al Nuovo Cimento 6, 211 (1973)

- 90) M. L. Goldberger y K. M. Watson, "Collision Theory", Wiley (1964)
- 91) S. Gasiorowicz, "Elementary Particle Physics" Wiley (1966)

