

C.N.E.A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
NO 1	AÑO 1978

00.78.30

CNEA - NT. 4/78

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION

RESOLUCION DE LA ECUACION DE HELMHOLTZ EN SISTEMAS DE
SIMETRIA PLANA ARBITRARIA POR EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

(PROGRAMA AUTEF1)

G. SANCHEZ SARMIENTO* Y MARIA E. OLIVETO**

Centro Atómico Bariloche, C.N.E.A.
Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo
San Carlos de Bariloche

*Centro Atómico Bariloche, C.N.E.A.
8400.- San Carlos de Bariloche (Río Negro)

**Instituto "Dr. J.A. Balseiro", Univers. Nac. de Cuyo
8400.- San Carlos de Bariloche (Río Negro).

BUENOS AIRES
Marzo de 1978.

RESUMEN

En el presente trabajo se expone la deducción de las ecuaciones algebraicas mediante las cuales el Programa AUTEF1 resuelve la ecuación de Helmholtz bidimensional en sistema de simetría plana arbitraria, empleando una formulación en elementos finitos del tipo nodal variacional, y se describen sus características y las especificaciones para su uso.

Implementado en lenguaje FORTRAN IV para una computadora de aproximadamente 100 Kbytes de memoria rápida disponible y con empleo de archivos auxiliares de datos en disco, el programa AUTEF1 usa elementos triangulares trinodales y polinomios de primer grado para la variación de la incógnita dentro de ellos. Se obtienen los principales autovalores de la ecuación y las autofunciones correspondientes mediante una combinación de los métodos de la potencia inversa y del cociente de iteración de Rayleigh.

Se presentan algunos ejemplos resueltos, y se comparan los resultados con soluciones analíticas exactas y con los obtenidos por otros métodos aproximados.

INDICE

Resumen	1.
Indice	2.
A. INTRODUCCION	3.
B. FORMULACION MATEMATICA	5.
C. APROXIMACION NUMERICA POR ELEMENTOS FINITOS	7.
D. OBTENCION DE LOS PRINCIPALES AUTOVALORES Y AUTOFUNCIONES	12.
E. DESCRIPCION DEL PROGRAMA AUTEF1	18.
E.1.- Subrutinas	18.
E.2.- Especificaciones para la entrada de datos	24.
E.3.- Limitaciones del programa	26.
F. ALGUNOS PROBLEMAS RESUELTOS	26.
F.1.- Guía de onda simple rectangular	26.
F.2.- Modos normales de vibración transversal de un cierto tipo de membranas	27.
F.3.- Modos normales de vibración de membra- nas octogonales rectangulares	29.
F.4.- Vibraciones transversales de placas triangulares equiláteras	31.
F.5.- Guía de onda de sección doblemente conexa	32.
G. CONCLUSIONES	33.
Agradecimientos	34.
Referencias	37.

A. INTRODUCCION

Como es sabido, la ecuación de Helmholtz con apropiadas condiciones de contorno de Neumann y/o de Dirichlet, es el sistema diferencial gobernante de un vasto conjunto de problemas de la mecánica del continuo. Mencionaremos sólo algunos de ellos de importancia práctica:

- a) Determinación de la frecuencia de corte en guías de onda (acústicas o electromagnéticas).
- b) Análisis de vibraciones de membranas (importante en el diseño de transductores).
- c) Análisis de vibraciones de placas de bordes rectilíneos simplemente apoyadas (de aplicación en el diseño de plaquetas de circuitos impresos).
- d) Obtención del laplaciano ("buckling") de un sistema en el que existe un campo de neutrones sin fuente externa, que verifica la ecuación de difusión neutrónica de un grupo (reactor nuclear, "pila exponencial", etc).
- e) Determinación de períodos naturales de oscilación horizontal de la masa de agua en puertos y lagos. (En numerosos puertos se producen serios inconvenientes en las operaciones de carga y amarre de buques cuando ondas de período largo excitan dichas frecuencias naturales).
- f) Vibraciones longitudinales en cohetes de combustible sólido ("axial shear vibrations"), etc.

Soluciones analíticas exactas de la ecuación de Helmholtz son fácilmente obtenidas cuando los contornos del recinto son naturales a los sistemas comunes de coordenadas. En cambio, si los bordes tienen configuraciones más complicadas, son en general empleados exitosamente numerosos métodos analíticos aproximados, tales como: a) transformación conforme [1-5]; b) Rayleigh-Ritz [6-7]; c) Galerkin [8]; d) Método de los momentos [9], etc. Pero cuando el contorno es totalmente arbitrario, es imprescindible recurrir a métodos numéricos aproximados que requieren el empleo de computadoras digitales para su implementación, tales como el de diferencias finitas [10,11] y el de elementos finitos [12-14], siendo este último más ventajoso en algunos aspectos que el de

diferencias finitas [12] (en este tipo de problemas).

Se expone aquí la deducción de las ecuaciones algebraicas mediante las cuales se resuelve la ecuación de Helmholtz bidimensional en sistemas de simetría plana arbitraria, empleando una formulación en elementos finitos del tipo nodal variacional, y se describen las características del programa AUTEF1 realizado al efecto y las especificaciones para su uso.

Implementado en lenguaje FORTRAN IV para una computadora (*) de aproximadamente 100 Kbytes de memoria rápida, con empleo de archivos adicionales de datos en disco, el programa AUTEF1 emplea elementos triangulares trinodales y polinomios de primer grado para la variación de la incógnita dentro de cada uno de ellos. Se obtienen los principales autovalores de la ecuación y las autofunciones correspondientes reduciendo la matriz del problema discretizado a la forma tridiagonal, y empleando para esta última una combinación de los métodos de la potencia inversa y del cociente de iteración de Rayleigh.

El presente trabajo tiene como objetivo poner a disposición de los interesados en resolver problemas de los tipos citados, una nueva herramienta de cálculo elaborada en el Centro de Cómputos del Centro Atómico Bariloche (CNEA). Además se presentan algunos ejemplos resueltos, y se comparan los resultados con soluciones analíticas exactas y con los obtenidos por otros métodos aproximados.

(*) Computadora IBM 360/Mod.44 del Centro Atómico Bariloche, Comisión Nacional de Energía Atómica.

B. FORMULACION MATEMATICA

B.1. La ecuación de Helmholtz que se quiere resolver es

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\epsilon_d} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\epsilon_d} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + k^2 \phi = 0 \quad (1)$$

en todo punto (x, y) de un recinto plano Ω , con las siguientes condiciones de contorno sobre la frontera Γ de Ω :

$$\text{Tipo Dirichlet: } \phi = 0 \text{ sobre } \Gamma^* \quad (2)$$

$$\text{Tipo Neumann: } \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma' \quad (3)$$

donde n es la dirección normal a la frontera, y Γ^* y Γ' son porciones de la frontera Γ tales que

$$\begin{aligned} \Gamma^* \cup \Gamma' &= \Gamma \\ \Gamma^* \cap \Gamma' &= \emptyset \quad (\text{conjunto vacío}) \end{aligned}$$

El coeficiente ϵ_d puede ser función de ambas variables independientes.

B.2. En el caso en que (1) sea la ecuación gobernante de un problema general de guía de onda, ϵ_d es la permitividad dieléctrica del medio [12], y:

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \quad (4)$$

donde:

ω es la frecuencia circular propia del sistema,

μ_0 es la permeabilidad del vacío, y

ϵ_0 es la permitividad del vacío.

Para ondas E la ecuación debe satisfacer la condición (2) sobre todo la frontera Γ , mientras que para ondas H la condición satisfecha en todo Γ debe ser la (3).

B.3. Para el caso de placas de bordes rectilíneos simplemente apoyadas, el problema de la determinación de los modos normales de vibración (de pequeña amplitud) se reduce [2,15] a la resolución de la ecuación:

$$\nabla^2 M_1 + \Omega M_1 = 0 \quad (5)$$

con la condición $M_1 = 0$ sobre todo el contorno. La (5) es un caso particular de la (1) en que $\epsilon_d = \text{cte} = 1$, y donde:

$$M_1 = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} e^{-i\omega t} \quad (5.a)$$

$$\Omega^2 = \frac{3\rho(1-\nu^2)\omega^2}{Eh^2} \quad (5.b)$$

M_x, M_y = momentos flectores por unidad de longitud en las direcciones x, y .

ω = frecuencia circular de vibración.

ρ = densidad del material.

E = módulo de Young del material.

ν = factor de Poisson del material.

h = espesor de la placa.

B.4. Las suposiciones usuales que se hacen [16] en modelos de movimiento ondulatorio lineal, de períodos largos, de la masa de agua en un puerto o lago son que: a) la fricción puede ser despreciada; b) las aceleraciones convectivas son pequeñas, y c) que las velocidades son esencialmente independientes de la profundidad.

Bajo estas suposiciones, la ecuación diferencial gobernante para dichas oscilaciones armónicas libres es la (1), donde

$$k^2 = \frac{4\pi^2}{gT^2} \quad (7)$$

y $h = 1/\epsilon_d$ es la profundidad, dependiente de x e y ;

$\phi = \eta(x, y)$ es la elevación de la superficie del agua con respecto al nivel medio;

g es la aceleración de la gravedad; y

T es el período de oscilación.

La condición de nulidad de la componente normal de la velocidad de la masa de agua en la superficie, sobre los bordes sólidos, nos da la condición de contorno para η :

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0$$

sobre todo el borde (costas o muelles).

B.5. Haciendo uso de las ecuaciones de Euler del Cálculo Variacional puede demostrarse que la función u que hace mínimo al funcional:

$$J(u) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{1}{\epsilon_d} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} k^2 u^2 dx dy \quad (6)$$

satisface idénticamente la ecuación (1) con las condiciones de contorno (2) y (3). Puesto que la condición de Neumann (3) está incluida en el funcional, solo la condición de Dirichlet (2) debe ser tenida en cuenta en la determinación de la función que minimiza a (6).

C.- APROXIMACION NUMERICA POR ELEMENTOS FINITOS

Obtendremos un mínimo aproximado del funcional (6) subdividiendo el recinto Ω en un conjunto adecuado de "elementos finitos" triangulares y suponiendo que la función aproximada $\phi^h(x, y)$ varía linealmente dentro de cada uno de ellos respecto de ambas coordenadas x, y . En dicho elementos e , ϕ^h dependerá entonces linealmente de los valores ϕ_r^h que toma sobre los tres nodos i, j, m que lo definen, llamados "nodos" de la discretización:

$$\phi^h(x,y) = N_i(x,y)\phi_i^h + N_j(x,y)\phi_j^h + N_m(x,y)\phi_m^h \quad \forall (x,y) \in e \quad (7)$$

donde las $N_r(x,y)$ son a su vez funciones lineales de x e y , llamadas "funciones de desplazamiento".

Sea n el número total de nodos de la red así formada, y $n-m$ el número de ellos que caen sobre la frontera con condiciones de contorno tipo Dirichlet. El problema continuo (1-3) se reduce entonces a la determinación de un número finito m de incógnitas ϕ_r^h . Obtenidas éstas, queda conocida la función $\phi^h(x,y)$ que aproxima a la solución exacta del problema (1-3), en todo el recinto Ω .

Como el funcional aproximado $J'(\phi^h)$ que resulta de reemplazar u por ϕ^h en (6), dependerá de las M incógnitas ϕ_r^h , su mínimo deberá verificar el siguiente sistema de m ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_r^h} J'(\phi_1^h, \dots, \phi_m^h) = \\ = \iint_{\Omega} \frac{1}{E_d(x,y)} \left[\frac{\partial \phi^h}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_r^h} \left(\frac{\partial \phi^h}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi^h}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi_r^h} \left(\frac{\partial \phi^h}{\partial y} \right) \right] dx dy - \\ - k^2 \iint_{\Omega} \phi^h \frac{\partial \phi^h}{\partial \phi_r^h} dx dy = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Reemplazando (7) en (8) y descomponiendo las integrales sobre Ω en sumas de integrales sobre cada elemento finito e , definido genéricamente por sus nodos i, j, m , el sistema de ecuaciones (8) queda expresado en la forma:

$$\begin{aligned} \sum_e (\delta_{ir} + \delta_{jr} + \delta_{mr}) \iint_e \frac{1}{E_d(x,y)} \left[\left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \phi_i^h + \frac{\partial N_j}{\partial x} \phi_j^h + \frac{\partial N_m}{\partial x} \phi_m^h \right) \frac{\partial N_r}{\partial x} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \phi_i^h + \frac{\partial N_j}{\partial y} \phi_j^h + \frac{\partial N_m}{\partial y} \phi_m^h \right) \frac{\partial N_r}{\partial y} \right] dx dy - \dots \end{aligned} \quad (8)$$

$$-k^2 \sum_e (\delta_{ir} + \delta_{jr} + \delta_{mr}) \iint_e (N_i \phi_i^h + N_j \phi_j^h + N_m \phi_m^h) N_r dx dy = 0 \quad (9)$$

$$(r=1, 2, \dots, m)$$

donde las δ_{sr} son las delta de Kroneker.

La contribución de cada elemento finito en el sistema (9) puede escribirse en notación matricial:

$$S_e \phi_e^h = k^2 M_e \phi_e^h \quad (10)$$

donde:

$$S_e = \iint_e \frac{1}{E_d} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^2 & \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} & \left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)^2 & \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} \end{pmatrix} dx dy$$

$$\phi_e^h = \begin{pmatrix} \phi_i^h \\ \phi_j^h \\ \phi_m^h \end{pmatrix} \quad M_e = \iint_e \begin{pmatrix} N_i^2 & N_j N_i & N_m N_i \\ N_i N_j & N_j^2 & N_m N_j \\ N_i N_m & N_j N_m & N_m^2 \end{pmatrix} dx dy \quad (11)$$

Obsérvese que la formulación hecha hasta aquí puede generalizarse para cualquier otro tipo de elementos con mayor número de nodos.

Las funciones de desplazamiento $N_r(x, y)$ propias del tipo de elemento que nos ocupa, son [17]:

$$N_i = \frac{1}{2\Delta} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \quad (12.a)$$

$$N_j = \frac{1}{2\Delta} (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) \quad (12.b)$$

$$N_m = \frac{1}{2\Delta} (\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y) \quad (12.c)$$

donde:

$$\alpha_i = x_j y_m - x_m y_j \quad (13.a)$$

$$\beta_i = y_j - y_m \quad (13.b)$$

$$\gamma_i = x_m - x_j \quad (13.c)$$

y el resto de los coeficientes (13) resulta de permutar cíclicamente los índices i, j, m en las ecuaciones (13).

Reemplazando las (12) y (13) en (10) y (11) resulta:

$$S_e = \frac{1}{(2\Delta)^2} \begin{pmatrix} \beta_i^2 + \gamma_i^2 & \beta_j \beta_i + \gamma_j \gamma_i & \beta_m \beta_i + \gamma_m \gamma_i \\ \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j & \beta_j^2 + \gamma_j^2 & \beta_m (\beta_j + \gamma_m \gamma_j) \\ \beta_i \beta_m + \gamma_i \gamma_m & \beta_j \beta_m + \gamma_j \gamma_m & \beta_m^2 + \gamma_m^2 \end{pmatrix} \iint_e \frac{1}{E_d(x, y)} dx dy \quad (14)$$

$$M_e = M_e^0 + M_e^x + M_e^y + M_e^{xx} + M_e^{yy} + M_e^{xy} \quad (15)$$

$$M_e^0 = \frac{1}{4\Delta} \begin{pmatrix} \alpha_i^2 & \alpha_i \alpha_j & \alpha_i \alpha_m \\ \alpha_j \alpha_i & \alpha_j^2 & \alpha_j \alpha_m \\ \alpha_m \alpha_i & \alpha_m \alpha_j & \alpha_m^2 \end{pmatrix} \quad (16-1)$$

$$M_e^x = \frac{\gamma_c}{4\Delta} \begin{pmatrix} 2\alpha_i \beta_i & \alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i & \alpha_i \beta_m + \alpha_m \beta_i \\ \alpha_j \beta_i + \alpha_i \beta_j & 2\alpha_j \beta_j & \alpha_j \beta_m + \alpha_m \beta_j \\ \alpha_m \beta_i + \alpha_i \beta_m & \alpha_m \beta_j + \alpha_j \beta_m & 2\alpha_m \beta_m \end{pmatrix} \quad (16-2)$$

$$M_e^y = \frac{\gamma_c}{4\Delta} \begin{pmatrix} 2\alpha_i \gamma_i & \alpha_i \gamma_j + \alpha_j \gamma_i & \alpha_i \gamma_m + \alpha_m \gamma_i \\ \alpha_j \gamma_i + \alpha_i \gamma_j & 2\alpha_j \gamma_j & \alpha_j \gamma_m + \alpha_m \gamma_j \\ \alpha_m \gamma_i + \alpha_i \gamma_m & \alpha_m \gamma_j + \alpha_j \gamma_m & 2\alpha_m \gamma_m \end{pmatrix} \quad (16-3)$$

$$M_e^{xx} = \frac{1}{4\Delta} \left[\frac{X_i^2 + X_j^2 + X_m^2}{12} + x_c^2 \right] \begin{pmatrix} \beta_i^2 & \beta_i \beta_j & \beta_i \beta_m \\ \beta_j \beta_i & \beta_j^2 & \beta_j \beta_m \\ \beta_m \beta_i & \beta_m \beta_j & \beta_m^2 \end{pmatrix} \quad (16-4)$$

$$M_e^{yy} = \frac{1}{4\Delta} \left[\frac{Y_i^2 + Y_j^2 + Y_m^2}{12} + y_c^2 \right] \begin{pmatrix} \delta_i^2 & \delta_i \delta_j & \delta_i \delta_m \\ \delta_j \delta_i & \delta_j^2 & \delta_j \delta_m \\ \delta_m \delta_i & \delta_m \delta_j & \delta_m^2 \end{pmatrix} \quad (16-5)$$

$$M_e^{xy} = \frac{1}{4\Delta} \left[\frac{X_i Y_i + X_j Y_j + X_m Y_m}{12} + x_c y_c \right] \begin{pmatrix} 2\beta_i \delta_i & \beta_i \delta_j + \beta_j \delta_i & \beta_i \delta_m + \beta_m \delta_i \\ \beta_j \delta_i + \beta_i \delta_j & 2\beta_j \delta_j & \beta_j \delta_m + \beta_m \delta_j \\ \beta_m \delta_i + \beta_i \delta_m & \beta_m \delta_j + \beta_j \delta_m & 2\beta_m \delta_m \end{pmatrix} \quad (16-6)$$

siendo x_c , y_c las coordenadas del centroide del elemento e,

$$X_i = x_i - x_c ; \quad Y_i = y_i - y_c$$

y análogamente para los otros dos nodos.

Si ahora se acoplan todos los sistemas lineales (9-10) correspondiente a cada uno de los elementos, resulta el siguiente problema algebraico:

$$S' \underline{\phi}' = k^2 M' \underline{\phi}' \quad (17)$$

que es la expresión matricial representativa del sistema (8).

Las matrices S' y M' , ambas de orden $m \times n$, resultan de sumar ordenadamente por nodo cada uno de los elementos de las matrices S_e y M_e , y $\underline{\phi}'$ es el vector formado por los valores ϕ_i^h en el interior del recinto y sobre la frontera.

Ahora bien, como $n-m$ de éstos son nulos, correspondientes a las condiciones de contorno de Dirichlet, si enumeramos los nodos de manera que aquéllos sean los últimos elementos de $\underline{\phi}'$, el sistema (17) deriva en un

problema algebraico de autovalores y autovectores generalizado:

$$S\phi^h = k^2 M\phi^h \quad (18)$$

en que ambas matrices S y M son cuadradas de orden $m \times m$, de tipo banda, simétricas y definidas positivas, y ϕ^h es un vector formado por todos los valores incógnitas ϕ_i^h ($i=1, \dots, m$).

Al acoplar las matrices S_e y M_e , por consiguiente, no se deben incorporar a S y M los elementos matriciales de filas y columnas que corresponden a los nodos sobre la frontera con condiciones de contorno de Dirichlet.

Por otra parte, como las condiciones de contorno de Neumann $\partial\phi/\partial n=0$ sobre la porción de frontera Γ' están incluidas en el funcional (4), no deben ser tomadas en cuenta explícitamente para formar el sistema (18).

D. -OBTENCION DE LOS PRINCIPALES AUTOVALORES Y AUTOFUNCIONES.

La ecuación matricial (18) no representa, obviamente, un problema típico de autovalores y autovectores. Estos en general se expresan en la forma:

$$A\psi = \lambda \psi \quad (19)$$

A fin de emplear algoritmos convencionales de resolución del problema (19), reduciremos a esta forma la ecuación (18). Primeramente, obsérvese que una simple pre-multiplicación de S por M^{-1} no es satisfactoria pues conduce a una matriz no simétrica.

Seguiremos un procedimiento generalmente adoptado [13, 16, 18]:

Descomponemos primero M según la factorización de Cholesky:

$$M = LL^T \quad (20)$$

donde L es una matriz triangular inferior tipo banda. Sustituyendo (20) en (18):

$$S\phi^h = k^2 LL^T \phi^h \quad (21)$$

y premultiplicando (21) por L , se tiene:

$$L^{-1}S\phi^h = k^2 L^T \phi^h \quad (22)$$

$$\text{Llamando:} \quad \psi = L^T \phi^h \quad (23)$$

la (22) queda:

$$L^{-1}S(L^T)^{-1}\psi = k^2 \psi \quad (24)$$

Luego, comparando (24) con (19), resulta:

$$A = L^{-1}S(L^T)^{-1}; \quad \lambda = k^2 \quad (25)$$

y ψ está dado por la (23).

Es fácil ver que la matriz A tiene la ventaja de ser simétrica, y también puede demostrarse que es definida positiva. Desafortunadamente, A no es por otra parte una matriz del tipo banda, como lo son S y M , por lo cual no pueden aprovecharse las ventajas que éstas tienen para su almacenamiento en la memoria rápida de la computadora (como ocurre en los típicos problemas de equilibrio y evolución por elementos finitos).

La matriz A de (25) se obtiene resolviendo sucesivamente los dos siguientes conjuntos de sistemas de ecuaciones lineales de matriz triangular inferior:

$$\begin{cases} LB = S \\ LA = B^T \end{cases} \quad (26)$$

donde B es una matriz auxiliar llena y no simétrica.

Para el cálculo de los autovalores y autovectores de la matriz A, por cualquier método que se emplee, es altamente ventajoso reducir primero aquella a la forma tridiagonal, mediante una sucesión de transformaciones de similitud, que como es sabido y puede verse fácilmente, preservan los autovalores (aunque no los autovectores). En el programa que aquí se presentará se emplea un tipo de transformaciones unitarias llamadas reflectores elementales U_k , que hacen que la matriz A_{m-1} dada por

$$A_{m-1} = U_{m-2} U_{m-3} \dots U_1 A U_1 \dots U_{m-3} U_{m-2} \quad (27)$$

sea tridiagonal. En la sección E.1.7 se da el algoritmo usado para obtener dichas transformaciones y de ellas los elementos de la matriz A_{m-1} .

Es fácil ver que los autovectores $\underline{\varphi}$ de A_{m-1} que corresponden a los autovalores buscados k^2 :

$$A_{m-1} \underline{\varphi} = k^2 \underline{\varphi} \quad (28)$$

están relacionados con los autovectores $\underline{\psi}$ de A mediante:

$$\underline{\varphi} = U_{m-2} U_{m-3} \dots U_1 \underline{\psi}$$

y de aquí:

$$\underline{\varphi} = U_{m-2} U_{m-3} \dots U_1 L^T \underline{\phi}^h \quad (29)$$

Como para los problemas que se pretende resolver sólo interesan uno o algunos pocos autovalores $\lambda = k^2$ de A ó A_{m-1} , es apropiado usar aquí una combinación de los conocidos métodos de la "potencia inversa" y del "cociente de iteración de Rayleigh", que para matrices tridiagonales son muy recomendables. Damos aquí una ligera descripción de éstos con su aplicación al caso de matriz tridiagonal.

Sean $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \dots, \underline{\varphi}_m$ los autovectores de la matriz A_{m-1} , y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sus correspondientes autovalores (no necesariamente en algún orden especial).

En general, de acuerdo con el problema físico que se trate, los λ_i son todos distintos, por lo cual el conjunto $\{\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \dots, \underline{\varphi}_m\}$ formará una base en el espacio vectorial m -dimensional R^m . Sean $\underline{\varphi}_1$ y λ_1 los que se quiere calcular, y supongamos que se conoce una buena aproximación λ_a de λ_1 , en el sentido que

$$|\lambda_a - \lambda_1| \ll |\lambda_a - \lambda_i| \quad \forall i \neq 1. \quad (30)$$

Sea además $\underline{\varphi}_q = (\varphi_q^1, \varphi_q^2, \dots, \varphi_q^m)$ un vector cualquiera de R^m , que por lo visto puede expresarse como:

$$\underline{\varphi}_q = C_1 \underline{\varphi}_1 + C_2 \underline{\varphi}_2 + \dots + C_m \underline{\varphi}_m \quad (31)$$

De acuerdo a su definición, es fácil ver que $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \dots, \underline{\varphi}_m$ son también autovectores de la matriz $(I\lambda_a - A_{m-1})^{-1}$ con respectivos autovalores:

$$(\lambda_a - \lambda_1)^{-1}, (\lambda_a - \lambda_2)^{-1}, \dots, (\lambda_a - \lambda_m)^{-1}$$

Entonces, el vector $\underline{\varphi}_a$ definido por

$$\underline{\varphi}_a = (\lambda_a I - A_{m-1})^{-1} \underline{\varphi}_q \quad (32)$$

podrá expresarse como:

$$\underline{\varphi}_a = \frac{1}{\lambda_a - \lambda_1} C_1 \underline{\varphi}_1 + \frac{1}{\lambda_a - \lambda_2} C_2 \underline{\varphi}_2 + \dots + \frac{1}{\lambda_a - \lambda_m} C_m \underline{\varphi}_m \quad (33)$$

luego, por (30), salvo que C_1 sea excesivamente pequeño respecto del resto de los C_i , $\underline{\varphi}_a$ será una buena aproximación de $\underline{\varphi}_1$ (como sólo interesa la dirección de los autovectores, los

factores de escala no interesan). Si se calcula ahora otro vector:

$$\underline{\varphi}'_a = (\lambda_a I - A_{m-1})^{-1} \underline{\varphi}_a \quad (34)$$

éste será entonces una mejor aproximación a $\underline{\varphi}_1$ que $\underline{\varphi}_a$, y este proceso iterativo, llamado de "la potencia inversa", puede ser repetido cuántas veces se quiera.

Se ve de (33) que la velocidad de convergencia depende de la proximidad de λ_1 a λ_a . Esta puede ser fuertemente acelerada, si se combina el método de "la potencia inversa" con el método llamado del "cociente de iteración de Rayleigh", que consiste en lo siguiente:

Supongamos que no tenemos una buena aproximación λ_a de λ_1 , pero se sabe que un cierto vector $\underline{\varphi}_a$ es una buena aproximación de $\underline{\varphi}_1$. Entonces una elección razonable para λ_a es el "cociente de Rayleigh":

$$\lambda_a = \frac{\underline{\varphi}_a^T A_{m-1} \underline{\varphi}_a}{\underline{\varphi}_a^T \underline{\varphi}_a} \quad (35)$$

que para matrices tridiagonales representa un número de operaciones relativamente muy reducido.

Si el método de la potencia inversa es aplicado ahora con éste nuevo valor de λ_a resultará un nuevo vector $\underline{\varphi}'_a$, aproximación de $\underline{\varphi}_1$. El proceso puede ser ahora iterado calculando un nuevo cociente de Rayleigh con $\underline{\varphi}'_a$ y así sucesivamente. Esta es la variante que hemos adoptado, comenzando con un vector $\underline{\varphi}_a$ representativo de una autofunción aproximada de partida. Esta debe elegirse considerando el problema físico particular a resolver, aplicando luego la (29).

Para el cálculo de los sucesivos vectores $\underline{\varphi}'_a$ según (34), por supuesto que no se calcula la matriz $(\lambda_a I - A_{m-1})^{-1}$. Lo que se hace es resolver el sistema lineal:

$$(\lambda_a I - A_{m-1}) \underline{\varphi}'_a = \underline{\varphi}_a \quad (36)$$

que como su matriz es también tridiagonal, puede realizarse

de manera simple y directa mediante la clásica factorización para matrices simétricas:

$$\lambda_a I - A_{m-1} = L_1 D^{-1} L_1^T \quad (37)$$

donde L_1 y D son matrices triangular superior y diagonal respectivamente.

Llamemos:

$$\lambda_a I - A_{m-1} = \begin{pmatrix} \lambda_a & & & 0 \\ & \lambda_a & & \\ & & \lambda_a & \\ 0 & & & \ddots & \lambda_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta_1 & \gamma_1 & & 0 \\ \gamma_1 & \delta_2 & \gamma_2 & \\ & \gamma_2 & \delta_3 & \ddots & \gamma_{m-1} \\ 0 & & & \gamma_{m-1} & \delta_m \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ c_1 & d_2 & & \\ & c_2 & d_3 & \\ 0 & & & \ddots & c_{m-1} & d_m \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & d_3 & \ddots & \\ 0 & & & & d_m \end{pmatrix}$$

Sustituyendo ahora las (38) en la (37) encontramos la siguiente recurrencia para el cálculo de los elementos c_i y d_i :

$$\begin{aligned} c_i &= -\gamma_i & (i=1, 2, \dots, m-1) \\ d_1 &= \lambda_a - \delta_1 \\ d_i &= (\lambda_a - \delta_i) - c_{i-1}^2 / d_{i-1} & (i=2, 3, \dots, m) \end{aligned} \quad (39)$$

Conocidos éstos, se resuelve primero el sistema lineal intermedio

$$L_1 \underline{\varphi}_{int} = \underline{\varphi}_a \quad (40)$$

y luego el sistema

$$D^{-1} L_1^T \underline{\varphi}'_a = \underline{\varphi}_{int} \quad (41)$$

de una manera obviamente directa, obteniéndose el vector $\underline{\varphi}'_a$.

El proceso iterativo descripto se continúa hasta que dos cocientes de Rayleigh (35) consecutivos difieren en menos de una cierta cantidad ε prefijada. Finalmente, por (29), se obtiene el autovector buscado $\underline{\varphi}^h$ del problema (18) en término del último $\underline{\varphi}'_a$ así hallado, resolviendo el sistema lineal:

$$L^T \underline{\varphi}^h = U_1 U_2 \dots U_{m-2} \underline{\varphi}'_a \quad (42)$$

E.- DESCRIPCION DEL PROGRAMA AUTEF1.

El método de cálculo expuesto en este trabajo se ha implementado en lenguaje FORTRAN IV, constituyendo el Programa AUTEF1. Tiene una estructura similar a la del resto de programas en elementos finitos desarrollados en el Centro de Cómputos del Centro Atómico Bariloche (C.N.E.A.), como por ejemplo el CUARM [19], el CTR [20] y los que pertenecen al sistema ELASTE F [21].

Está compuesto por un conjunto de subrutinas que realizan los sucesivos pasos necesarios para el cálculo propuesto; y de un programa principal breve cuya única finalidad es llamar ordenadamente a dichas subrutinas.

En la figura 1 se muestra un diagrama de flujo esquemático del programa completo.

E.1.- SUBROUTINAS.

Las subrutinas, algunas de las cuales pertenecen también a otros de los programas mencionados, son descriptas sucintamente a continuación. Sus designaciones guardan relación con el resto de dichos programas.

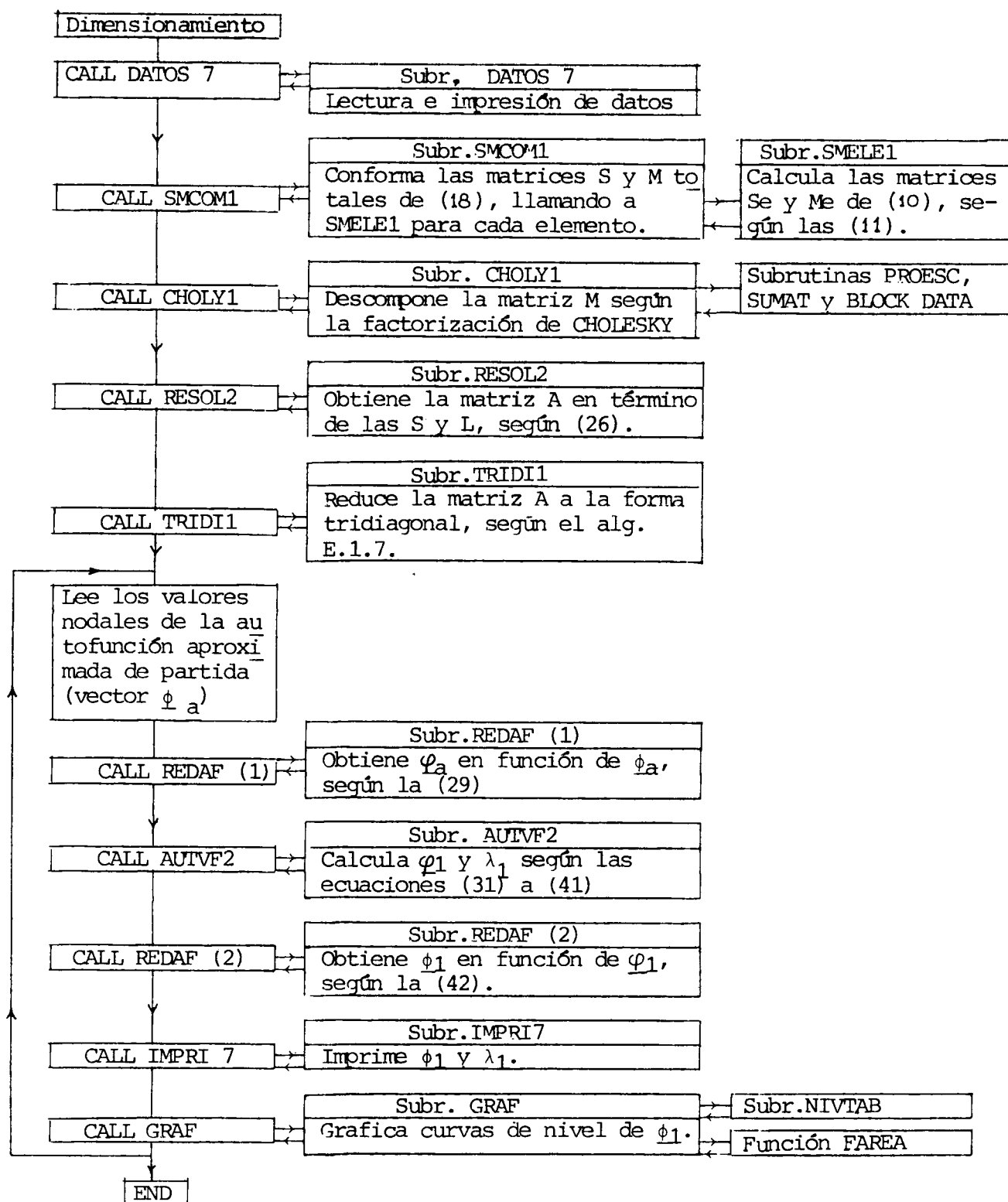


Figura 1.- Diagrama de flujo del programa AUTEF1.

E.1.1.-Subrutina DATOS7

Realiza la lectura e impresión de los datos físicos y geométricos del problema a resolver, de acuerdo con las especificaciones de la entrada de datos que se darán más adelante, en E.2.

E.1.2.-Subrutina SMELE1

Calcula las matrices S_e y M_e correspondientes a cada elemento, de acuerdo a las expresiones (14-16).

E.1.3.-Subrutina SMCOM1

Conforma las matrices S y M de la ecuación (18), acoplando las matrices S_e y M_e correspondientes a cada elemento, según lo expresado en C. Llama sucesivamente a la subrutina SMELE1.

E.1.4.-Subrutina CHOLY1

Esta subrutina calcula, a partir de la matriz banda $M = [m_{ij}]$, la matriz $L = [l_{ij}]$ de la factorización de Cholesky: $M = L \cdot L^T$, almacenándose como matriz banda en las mismas locaciones reservadas a M , de acuerdo con el siguiente algoritmo:

Para $k=1,2,\dots,m$:

1) Para $i=1,2,\dots,k-1$:

$$m_{ki} \leftarrow l_{ki} = l_{ii}^{-1} \left(m_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} l_{kj} \right)$$

$$2) m_{kk} \leftarrow l_{kk} = \sqrt{m_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

Los productos internos de vectores son calculados por las subrutinas PROESC, SUMAT y BLOCK DATA.

E.1.5.-Subrutinas PROESC, SUMAT Y BLOCK DATA.

Estas subrutinas se usan para calcular el producto escalar o interno de dos vectores en precisión simple. Los sucesivos productos parciales se acumulan en doble precisión en 45 acumuladores, y recién el resultado final se devuelve al programa principal en precisión simple.

La subrutina BLOCK DATA tiene como única función la de inicializar los acumuladores en tiempo de compilación.

E.1.6.-Subrutina RESOL2

Resuelve los dos conjuntos de sistemas lineales de ecuaciones algebraicas (26), de solución trivial. Al resolver el primero de ellos, va almacenando en un archivo de un disco auxiliar, las sucesivas columnas de la matriz B. Luego almacena en su segundo archivo las columnas de B^T , y en los lugares de éstas las sucesivas columnas (o filas) de A a medida que se va resolviendo el segundo conjunto de las (26).

E.1.7.-Subrutina TRIDI1

Esta subrutina reduce la matriz $A = [\alpha_{ij}]$, cuyas filas ya están almacenadas en disco, a la forma tridiagonal mediante la transformación de similaridad

$$A_{m-1} = U_{m-2} U_{m-3} \dots U_1 A U_1 \dots U_{m-3} U_{m-2} \quad (27)$$

donde A_{m-1} es tridiagonal y los U_k son, como se dijo en D., un tipo especial de matrices unitarias y simétricas ($U_k \cdot U_k = I$) llamadas reflectores elementales. Estos se expresan generalmente en la forma:

$$U_k = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & R_k \end{pmatrix} \quad (43)$$

donde I_k es la matriz unidad de orden k ;

$$R_k = (I_{m-k} - \pi_k^{-1} \underline{u}_k \underline{u}_k^T) ; \quad (44)$$

I_{m-k} es la matriz unidad de orden $m-k$; y $\underline{u}_k$ un vector que lo expresamos por

$$\underline{u}_k = (v_{k+1,k}, v_{k+2,k}, \dots, v_{nk})^T$$

El siguiente algoritmo calcula los coeficientes δ_i ($i=1, \dots, m$) y γ_i ($i=1, \dots, m-1$) por los cuales se expresa A_{m-1} según (38), los números π_k , y los elementos v_{ik} de los vectores $\underline{u}_k$. Cada uno de estos últimos queda almacenado en disco en un archivo distinto al de las filas de A , a fin de poder ser luego utilizados para aplicar las expresiones (29) y (42) en la subrutina REDAF. La mitad inferior de la matriz A es destruída y la mitad superior queda inalterada.

Algoritmo:

- 1) Para $k=1, 2, \dots, n-2$:
 - 1.1) Lectura de la fila k de la matriz A grabada en disco (en archivo "A").
 - 1.2) $\delta_k = \alpha_{kk}$
 - 1.3) Obtención de los números que definen al reflector elemental $\underline{u}_k$, y de la componente γ_k :
 - 1.3.1) Para $i=k+1, \dots, m$:
 - 1.3.1.1) Lectura de disco de la fila i , archivo "A",
 - 1.3.1.2) Análisis de $|\alpha_{ik}|$ para determinar:

$$\eta = \max \{ |\alpha_{ik}| : i=k+1, \dots, m \}$$
 - 1.3.2) Si $\eta=0$:
 - 1.3.2.1) $\pi_k = 0$
 - 1.3.2.2) $\gamma_k = 0$
 - 1.3.2.3) Va a 1.4.6.
 - 1.3.3) Para $i=k+1, \dots, m$: $v_{ik} = \alpha_{ik} / \eta$

$$1.3.4) \sigma = \text{signo}(v_{k+1,k}) \cdot \sqrt{v_{k+1,k}^2 + \dots + v_{nk}^2}$$

$$1.3.5) v_{k+1,k} \leftarrow v_{k+1,k} + \sigma$$

$$1.3.6) \pi_k = \sigma v_{k+1,k}$$

$$1.3.7) \gamma_k = -\sigma \eta$$

1.4) Aplicación del reflector elemental U_k a la matriz A:

$$1.4.1) \sigma = 0$$

1.4.2) Para $i=k+1, \dots, m$:

1.4.2.1) Lectura de disco de la fila i , archivo "A".

$$1.4.2.2) S_1 = \sum_{j=k+1}^i \sigma_{ij} v_{jk}$$

1.4.2.3) Lectura de disco de la columna i , archivo "B".

$$1.4.2.4) S_2 = \sum_{j=i+1}^m \alpha_{ji} v_{jk}$$

$$1.4.2.5) \gamma_i \leftarrow \rho_i = S_1 + S_2$$

$$1.4.2.6) \sigma \leftarrow \sigma + \rho_i v_{ik}$$

$$1.4.3) \sigma \leftarrow \sigma \cdot \pi_k^{-1}$$

1.4.4) Para $i=k+1, \dots, m$:

$$\gamma_i \leftarrow \tau_i = \pi_k^{-1} [\rho_i - (\sigma/2) v_{ik}]$$

1.4.5) Para $i=k+1, \dots, m$:

1.4.5.1) Lectura de disco de la fila i , archivo "A".

1.4.5.2) Para $j=k+1, \dots, i$

$$\alpha_{ij} \leftarrow \alpha_{ij} - v_{ik} \pi_j - v_{jk} \tau_i$$

1.4.5.3) Grabado de la fila i en disco, archivo "A".

1.4.6) Para $j=k+1, \dots, m$

1.4.6.1) Lectura de disco de la columna j , archivo "B".

1.4.6.2) Para $i=j, \dots, m$

$$\alpha_{ij} \leftarrow \alpha_{ij} - v_{ik} \pi_j - v_{jk} \tau_i$$

1.4.6.3) Grabado de la columna j en disco, archivo "B".

1.4.7) Grabado de los números $v_{k+1}, \dots, v_{nk}$ en disco, en la columna k de la matriz A (archivo "B").

- 2) Lectura de disco de la fila m-1.
- 3) $\delta_{m-1} = \alpha_{m-1,m-1}$
- 4) Lectura de disco de la fila m.
- 5) $\delta_m = \alpha_{mm}$
- 6) $\gamma_{m-1} = \alpha_{m,m-1}$
- 7) END.

E.1.8.- Subrutina REDAF(I)

Llamándola con el parámetro $I=1$, calcula un autovector φ de la matriz A_{m-1} , en término del correspondiente autovector ϕ de A , según la (29). Con $I=2$, realiza la transformación inversa (42).

E.1.9.- Subrutina AUTVF2

Calcula un autovalor λ y su correspondiente autovector φ de la matriz tridiagonal A_{m-1} , a partir de los valores nodales de una aproximación ϕ_s de una autofunción del problema físico a resolver. Emplea una combinación de los métodos de la potencia inversa y del cociente de iteración de Rayleigh, de acuerdo con las ecuaciones (31) a (41).

E.1.10.- Subrutina IMPRI7

Imprime los resultados del problema: ϕ y su autovalor correspondiente $\lambda = k^2$.

E.1.11.- Subrutinas GRAF y NIVTAB y función FAREA.

Llamando a NIVTAB y FAREA, la subrutina GRAF hace imprimir un gráfico de curvas de nivel de la autofunción ϕ resultante, por la impresora de la máquina.

E.2.- Especificaciones para la entrada de datos.

TARJETA	DESIGNACION	FORMATO	COLUMNAS	DESCRIPCION
1	NPRINT, IR IG	315	1 a 15 6 a 10 11 a 15	=1: Imprime los datos; =0: no imprime. =1: Imprime resultados; =0: no imprime. =1: Grafica; =0: no grafica.
2	TIT	20A4	1 a 80	Comentarios o título del problema.
3	NPI MPE NELEM	315	1 a 5 6 a 10 11 a 15	Número de nodos incógnita. Número de nodos frontera. Número de elementos.
4	((XY(I,J), J=1,2), I= 1,NPI+MPE)	8E10.4	1 a 80	Coordenadas de todos los <u>no</u> dos (interiores más <u>exterior</u> es) J=1:x; J=2:y
5	((IJM(I,J), J=1,3), I= 1,NELEM)	1515	1 a 75	Los tres elementos de cada fila son los tres nodos que definen cada elemento J, en cualquier orden.
6	(EPSD(I), I=1,NELEM)	8E10.4	1 a 80	Coefficientes ϵ_d , constantes dentro de cada elemento I.
7	DELTA	E10.4	1 a 10	Parámetro de precisión. El cálculo iterativo finaliza cuando la diferencia entre dos valores consecutivos del autovalor, es menor o igual que DELTA.
8	NAUT	I5	1 a 5	Número de autovalores a calcular.
Repetir 9 y 10 para cada uno de los NAUT autovalores:				
9	(PHI(I), I=1,NPI)	8E10.4	1 a 80	Valores nodales de la <u>auto</u> función aproximada de <u>par-</u> tida.
10	NC FOC	15, E10.4	1 a 5 6 a 15	Número de franjas del grá- fico. Foco de las franjas (para bordes de las fran- jas equidistantes, debe ponerse FOC=0.25).

E.3.- Limitaciones del Programa

Para una máquina de unos 100 Kbytes de memoria rápida, empleando además dos archivos adicionales en disco, pueden resolverse problemas de hasta unos 320 nodos incógnita (interiores) y unos 600 elementos triangulares.

F.- ALGUNOS PROBLEMAS RESUELTOS

Se muestran a continuación los resultados y comparaciones con otros métodos de los principales problemas resueltos con el programa AUTEF1:

F.1.- Guía de onda simple rectangular

Dada su simplicidad e ínfimo número de elementos, y por conocerse su solución exacta, para la puesta en operación del programa, se eligió el problema cuyo recinto de cálculo y condiciones de contorno se muestran en la figura 2. Se trata de la sección transversal de una guía de onda simple rectangular, con $E_d=1$, de la que se calcularon los autovalores y autofunciones de varios modos H ($d\psi/dn=0$ sobre todo el recinto), elegidos de manera que sus autofunciones sean independientes de la dirección y, y que una línea nodal coincidiera con ese eje.

La solución exacta del problema es:

$$\phi = \text{sen } \frac{n\pi}{A} x ; \quad k = \frac{n\pi}{A} \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (45)$$

Dada la simetría de éste, bastó con tomar la red de elementos

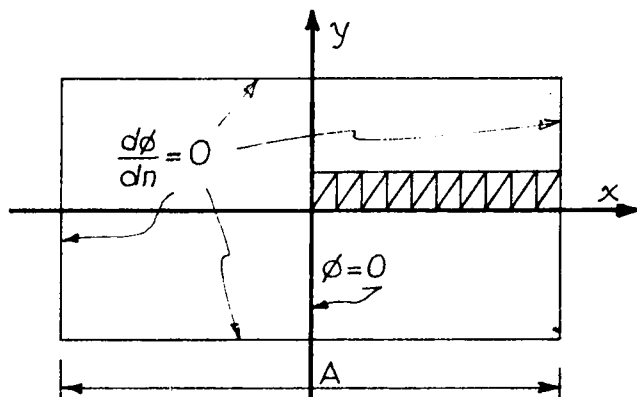


Figura 2.- Guía de onda simple rectangular. Recinto de cálculo y red de elementos finitos.-

Este Trabajo	Exacto	Diferencias finitas (Ref. (22))	Elementos finitos (Ref. (12))
9.856	$\pi^2 = 9.8696$	9.79	9.9
90.44	$(3\pi)^2 = 88.83$		
258.9	$(5\pi)^2 = 246.7$		
529.6	$(7\pi)^2 = 483.6$		

Tabla I.- Autovalores $(Ak)^2$ de la guía de onda de la figura 2, correspondientes a modos H con autofunciones independientes de y .

finitos mostrada en la misma figura 2. En la Tabla I se muestran los principales autovalores obtenidos, junto con los correspondientes en la solución exacta, y al autovalor fundamental ($n=1$) obtenido por diferencias finitas [22], y también mediante elementos finitos [12], por otros autores.

El valor de aquél aquí calculado, difiere del exacto en menos del 0.15%, pero a medida que n aumenta los resultados son menos satisfactorios, dado que el número de nodos de la red se hace cada vez más insuficiente.

F.2.- Modos normales de vibración transversal de un cierto tipo de membranas.-

El movimiento transversal de una membrana delgada y perfectamente flexible está gobernado por la ecuación de onda bidimensional:

$$\nabla^2 \psi(x, y, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, y, t) \quad (46)$$

la cual para modos normales se reduce a la resolución de la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 U(x,y) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 U(x,y) = 0 \quad (47)$$

donde ω es la frecuencia natural de vibración y c es la velocidad de la luz.

Se calcularon los dos primeros modos normales de vibración de un tipo especial de membranas previamente estudiadas por CASARELLA Y LAURA [23] y posteriormente por LAURA y ROMANELLI [24]. Se trata de membranas aproximadamente circulares con perturbaciones periódicas en el contorno tales que éste pueda ser transformado en círculo de radio unitario en el plano mediante una función holomorfa:

$$z = \frac{a}{1+m} \xi (1 + m\xi)$$

donde $\xi = re^{i\theta}$, a es el radio del círculo circunscrito, n es el número de ejes de simetría y m un número real tal que $m \leq 1/(n+1)$. En la figura 3 se muestran las conformaciones correspondientes a $m=1/6$; $n=4$, y a $m=1/16$; $n=12$ (De ref. [24]).

En la figura 4 se muestra la red de elementos finitos empleada, de 153 nodos y 256 elementos, para el caso $m=1/6$; $n=4$. Los autovalores adimensionalizados obtenidos para tres casos distintos correspondientes al modo fundamental 01 y al siguiente 02, se muestran en la TABLA II, donde $\Omega_{om} = \omega_{om} a/c$, y se comparan con los obtenidos en las dos referencias últimamente mencionadas.

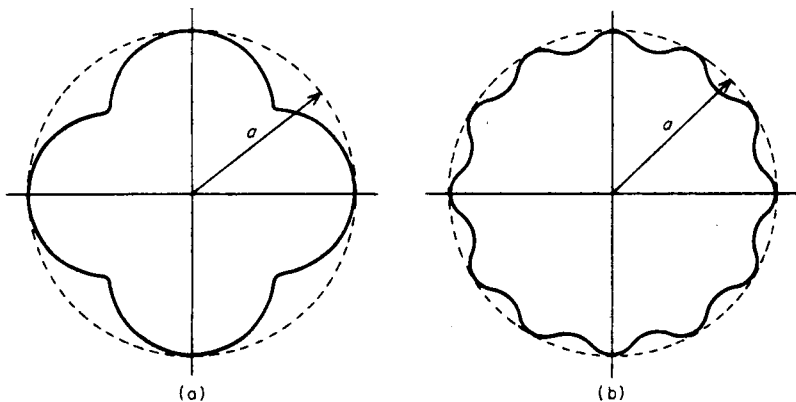


Figura 3.- Dos casos de membranas delgadas estudiadas en F.2. (De Ref. [24]).

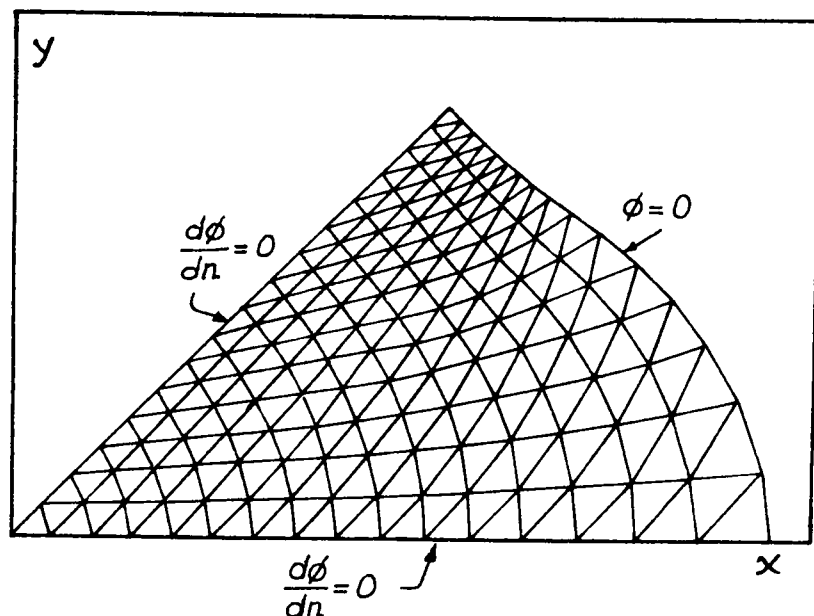


Figura 4.- Red de elementos finitos tipo para las membranas de la fig. 3.

m	n	Autovalores	Este trabajo	Ref. [23]	Ref. [24]
1/6	4	Ω_{01}	2.691	2.786	2.792
		Ω_{02}	6.092	6.30	6.36
1/9	7	Ω_{01}	2.593	2.668	2.667
		Ω_{02}	6.004	6.10	6.11
1/16	12	Ω_{01}	2.536	2.555	2.5554
		Ω_{02}	5.846	5.86	5.87

Tabla 2.- Resultados numéricos obtenidos para el problema F.2.-

F.3.- Modos normales de vibración de membranas octogonales regulares.

Se resolvió este otro problema de membranas para comparar los resultados obtenidos por nuestro programa con los calculados por

varios otros autores por diferentes métodos, publicados con anterioridad [14,25,26].

El problema está gobernado por la misma ecuación de Helmholtz (46) anterior. Aprovechando las propiedades de simetría se empleó la red de elementos finitos mostrada en la figura 5, de 153 nodos y 256 elementos. Los autovalores Ω_{01} y Ω_{02} obtenidos se muestran en la TABLA III, comparados con los de otros autores.

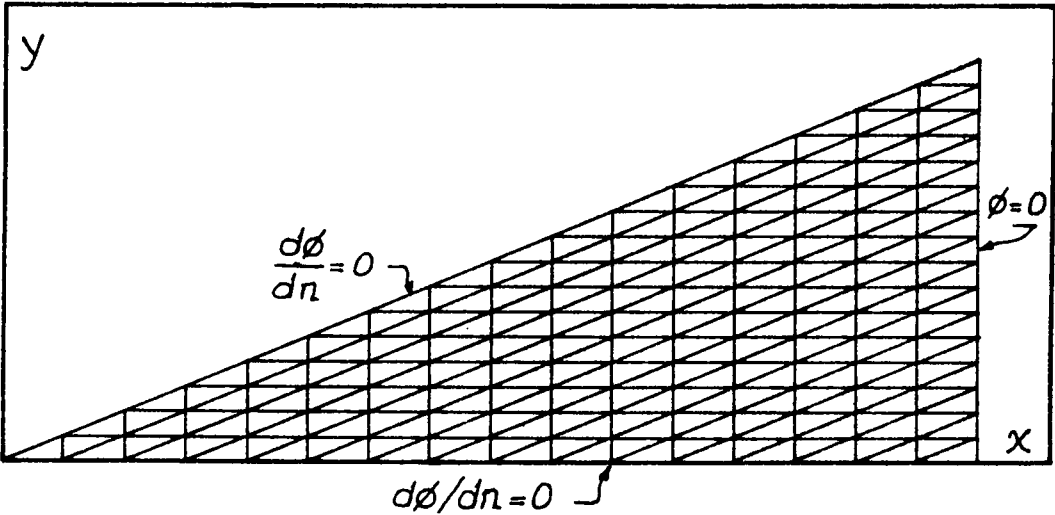


Figura 5.- Red de elementos finitos empleada para la membrana octogonal.-

METODO	Ω_{01}	Ω_{02}
Transformación conforme y método de Galerkin [25].	2.547	5.850
Transformación conforme y colocación a lo largo de los arcos [25].	2.549	
Cota superior [26].	2.547	
Elementos finitos [14].	2.554	
Elementos finitos (este trabajo)	2.492	

TABLA III

F.4.- Vibraciones transversales de placas triangulares equiláteras.

Para una placa de bordes rectilíneos simplemente apoyados dijimos en B.3. que el problema de la determinación de los modos normales de vibración transversal (de pequeña amplitud), se reduce a la resolución de la ecuación de Helmholtz (5) con condiciones de Dirichlet sobre todo el contorno.

Se calcularon los dos primeros modos de vibración de una placa triangular equilátera de dichas características, problema resuelto previamente por WILLIAMS, YEOW y BRINSON [27] y posteriormente por LAURA y LUISONI [28]. Los autovalores de la ecuación (5) están relacionados con las propiedades del material de la placa mediante (5.b.).

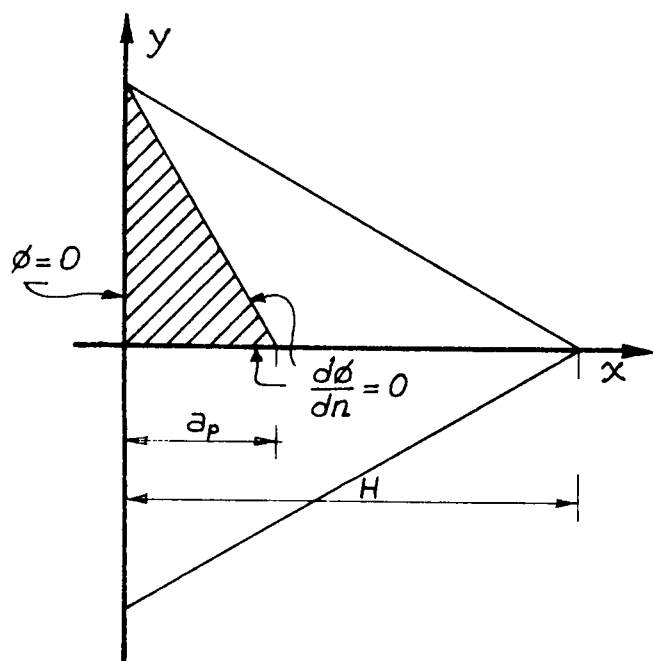


Figura 6.- Placa triangular y recinto de cálculo empleado.

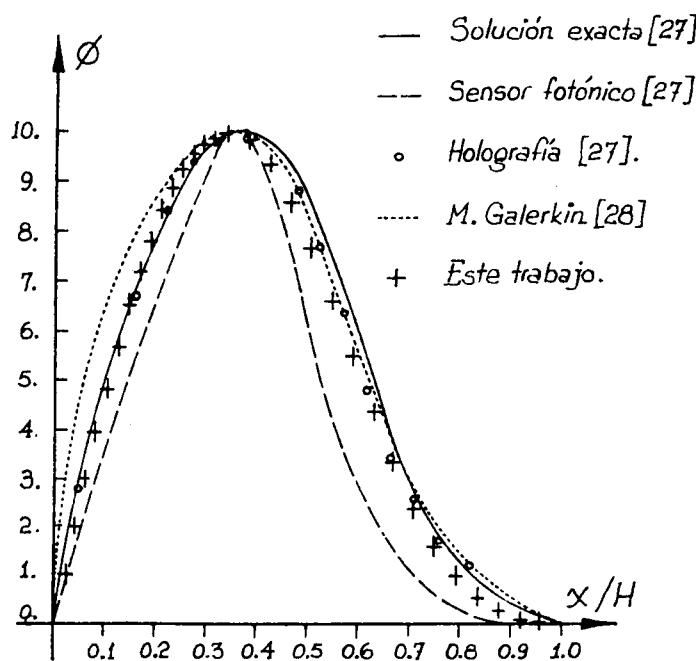


Figura 7.- Comparación del modo fundamental medido y calculado por otros autores y en este trabajo, en la sección $y=0$.

Dada la simetría del problema, basta con considerar solamente el recinto de cálculo mostrado en la figura 6. La red de elementos finitos empleada es similar a la de la figura 4. En la figura 7 y en la

TABLA IV se muestran los resultados obtenidos, comparados con los de otros autores.

F.5.- Guía de onda de sección doblemente conexa.

En referencias [4],[29] y [31], LAURA y colaboradores han obtenido

Método	$K_{01}^2 H^2$	$K_{02}^2 H^2$
Transformación conforme y método de Galerkin [28] .	39.72	
Cota superior [28] .	40.61	
Este trabajo.	39.52	160.38

TABLA IV

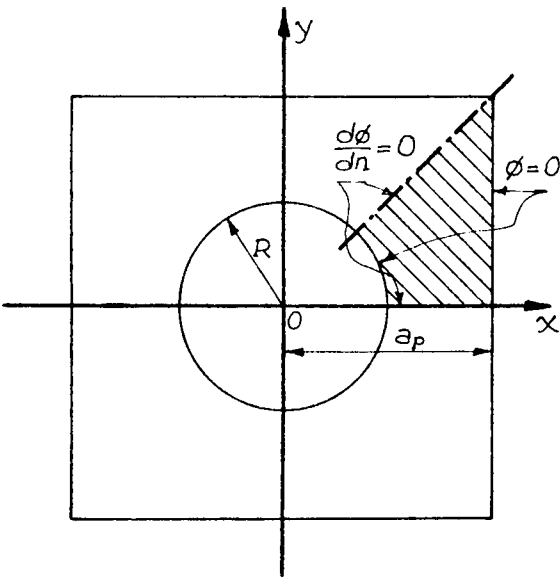


Figura 8.- Sección transversal de la guía de onda analizada en F.5.

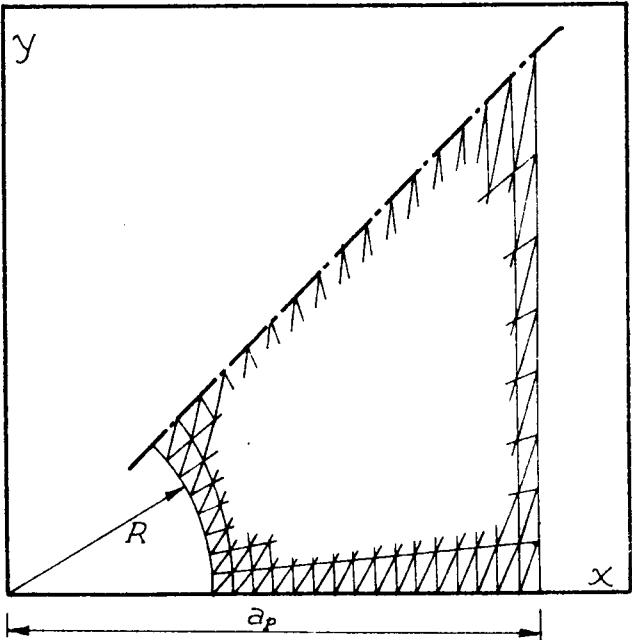


Figura 9.- Red de elementos finitos para el recinto de cálculo indicado en la figura 8.-

por diversos métodos (transformación conforme con aproximación variacional y técnicas empíricas), valores aproximados de las frecuencias

de corte K_{01} y K_{02} de guías de ondas acústicas "blandas" de sección cuadrada con contorno circular interno (figura 8). El problema, dado por la ecuación (1) con $\epsilon_d=1$ y $\phi=0$ sobre todo el contorno, es matemáticamente equivalente a la determinación de modos TM en guías de onda electromagnéticas.

Se calcularon con el programa AUTEF1 las frecuencias de corte mencionadas y sus respectivas autofunciones, para varios valores de R/a_p (ver figura 8). En la TABLA V se muestran los resultados obtenidos para las primeras, y en la figura 10 se los compara con los calculados en las referencias anteriormente citadas. Finalmente, la figura 11 reproduce una salida gráfica del programa para las curvas de nivel de las autofunciones del modo K_{01} correspondientes a $R/a_p = 0.3$. Los bordes de cada franja representan curvas de nivel equiespaciadas.

R/a_p	$K_{01} \cdot a_p$	$K_{02} \cdot a_p$
0.108	3.038	6.066
0.2	3.418	6.441
0.3	3.882	6.721
0.4	4.439	6.988
0.5	5.104	7.440
0.6	5.902	8.375
0.7	6.858	10.179
0.8	8.082	12.923
0.9	9.780	16.395

TABLA V

G. CONCLUSIONES.

El algoritmo computacional aquí expuesto, a través de su implementación en FORTRAN IV, constituye una eficaz herramienta para resolver problemas físicos de diversa índole gobernados por la ecuación de Helmholtz bidimensional, en dominios de geometría y heterogeneidad arbitrarias. A través de los ejemplos resueltos más representativos, se ha mostrado el grado de exactitud de los resultados que con él se

alcanzan, y la versatilidad que posee.

Para un problema con unos 320 nodos y 600 elementos triangulares, el programa no requiere más de unos 100 Kbytes de memoria rápida disponible, además de un disco convencional de 1 Mbyte para almacenamiento auxiliar. En esta situación el tiempo típico de corrida es apreciable, pero puede reducirse radicalmente si se implementa el programa en un computador de mayor memoria rápida, tal que no se requiera almacenamiento auxiliar.

AGRADECIMIENTOS:

Los autores expresan aquí su reconocimiento al Dr. Patricio A.A. Laura por proponerles la realización de este trabajo para la resolución de algunos de los problemas expuestos. Quedan también muy agradecidos con el Ing. F.G. Basombrío y con el Dr. Sergio Pissanetzky por la revisión crítica del original y por sus valiosas indicaciones y sugerencias.-

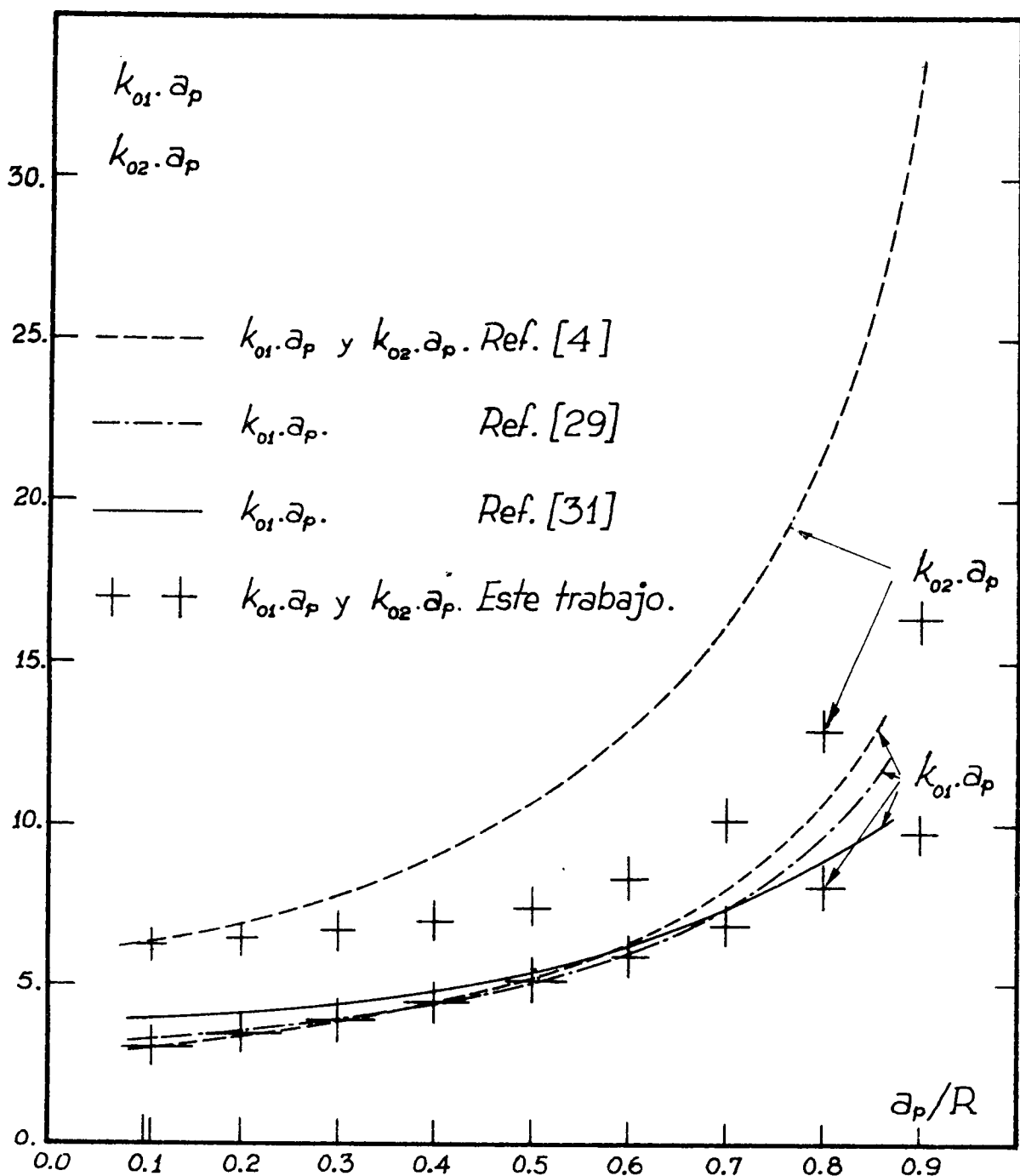


Figura 10.- Frecuencias de corte k_{01} y k_{02} de modos TM de la guía de onda de la figura 8, obtenidos en este trabajo y por otros autores.

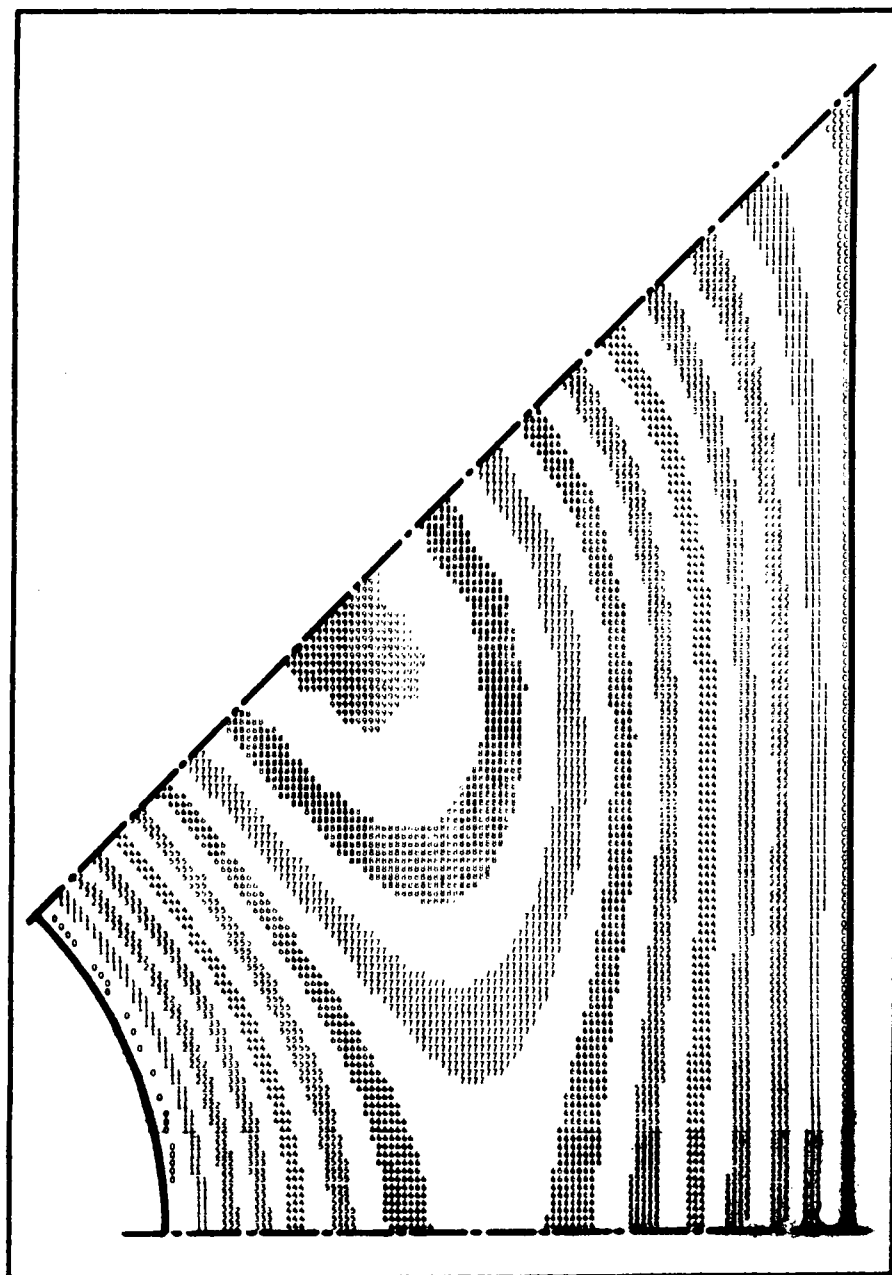


Figura 11

REFERENCIAS.-

- [1] CHI,M., y LAURA,P.A.: "Approximate method of determining the cutoff frequencies of waveguides of arbitrary cross-section" IEEE Trans.,1965, MTT-13, pp 248-257.
- [2] SHAHADY,P.A.;PASSARELLI,R. y LAURA,P.A.: "Application of complex-variable theory to the determination of the fundamental frequency of vibrating plates". The Journal of The Acoustical Soc. of America, Oct.1967, Vol.42, N°4, pp. 806-809.
- [3] HINE,M.J.: "Eigenvalues for a uniform fluid waveguide with an eccentric-annulus cross section". Journal of Sound and Vibration,1971,15,pp 295-305.
- [4] LAURA,P.A.,ROMANELLI, E. y MAURIZI,M.J.: "On the analysis of waveguides of doubly-connected cross-section by the method of conformal mapping". Journal of Sound and Vibration, 1972,20 (1), pp 27-38.
- [5] LAURA,P.A. y ROMANELLI,E. "Determination of eigenvalues in a class of waveguides of doubly connected cross section". Journal of Sound and Vibration, 1973, 26 (3). pp 395-400.
- [6] BULLEY, R.M. y DAVIES,J.B., "Computation of approximate polynomial solutions to TE modes in an arbitrarily shaped waveguides". IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. 1969. MTT-17, pp. 440-446.
- [7] HARRINGTON,R.F.: "Time-harmonic Electromagnetic Fields". 1961. New York: Mc Graw Hill.
- [8] LAURA,P.A.: "A simple Method for the calculation of cutoff frequencies of waveguides with arbitrary cross section". Proc. of the Institution of Electrical and Electronic Engineers, 1966,54, pp 1495-1497.

- [9] BRISTOL,T.W.: "Waveguides of arbitrary cross section by moment methods". Syracuse University Electrical Engineering Department. Nov. 1967. Technical Report TR-67-16, Syracuse, New York, U.S.A.
- [10] DAVIES,J.B. y MUILOWYK,C.A.: "Numerical solution of uniform hollow waveguides with boundaries of arbitrary shape". Proc. of the Institution of Electrical and Electronic Engineers, 1966, 113, pp. 277-284.
- [11] STEELE,C.W.: "Numerical computation of electric and magnetic fields in a uniform waveguide of arbitrary cross section". Journal of Computational Physics, 1968, 3, pp 148-153.-
- [12] ARLETT,P.L.,BAHRANI, A.K. y ZIENKIEWICZ, O.C.: "Application of finite elements to the solution of Helmholtz's equation", Proc. of the Institution of Electrical and Electronic Engineers, 1968, 115, pp 1762-1766.
- [13] ZIENKIEWICZ,O.C.,IRONS, B. y NATH,B.: "Natural frequencies of complex, free or submerged structures by the finite element method", Symp. on Vibrations in Civil Eng., Inst.Civ.Eng., London (Butterworth 1965, Session II, Paper 7, pp. 83,90.
- [14] MILSTED,M.G. y HUTCHINSON,J.R.: "Use of trigonometric terms in the finite element method with application to vibrating membranes", Journal of Sound and Vibration 1974, 32, pp 327-346.
- [15] CONWAY, H.D.: "The bending, buckling, and flexural vibrations of simply supported polygonal plates by Point Matching" J. Appl. Mech., 1960, 28, pp 288-291.
- [16] DESAI, Ch. S. y ABEL,J.F.: "Introduction to the finite element method", 1972, Van Nostrand Reinhold Company.
- [17] ZIENKIEWICZ, O.C.: "The finite element method in engi-

neering science", 1971, London: Mc Graw-Hill.

- [18] FELIPPA, C.A.: "Refined finite element analysis of linear and nonlinear two-dimensional structures", Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1966.
- [19] BASOMBRIIO, F.G. y CRUZ, B.: "Resolución por elementos finitos de la ecuación cuasiarmónica bidimensional. (Programas CUARM, NOLICUARM y AXICUARM)". CAB/1976/2. Centro Atómico Bariloche, C.N.E.A., Octubre de 1976.
- [20] BASOMBRIIO, F.G. y CRUZ, B.: "CTR: Un código general para la resolución de la ecuación cuasiarmónica con derivada temporal, usando el método de elementos finitos". A ser publicado en el Boletín del Primer Simposio sobre Métodos Numéricos en la Mecánica del Continuo, Buenos Aires, 18/22 julio 1977(Editorial EUDEBA).
- [21] BASOMBRIIO, F.G y SANCHEZ, G.: "El método numérico de elementos finitos y su aplicación a problemas de física del continuo. Desarrollo adquirido y trabajos realizados en el Centro Atómico Bariloche". Informe CNEA-NT 13 /77. Abril de 1977.
- [22] COLLINS, S.H. y DALY, P.: "Calculations for guided electromagnetic waves using finite difference methods", J. Electron. Control, 1963, 14, pp.361-364.
- [23] CASARELLA, M.J. y LAURA, P.A.: "Determination of cutoff frequencies of grooved wave guides". Proceedings of the Institute of Electrical and Electronic Engineers. 1967. 55, pp. 1096-1097.
- [24] LAURA, P.A. y ROMANELLI, E.: "A note on the fundamental frequency of circular membranes with a class of bounda-

ry disturbances". Journal of Sound and Vibration, 1974, 36 (1), pp. 69-75.

- [25] LAURA, P.A.A. y FAULSTICH, A.J.Jr.: "Cutoff frequencies of uniform waveguides of regular polygonal cross section" Proceedings of the Institute of Electrical and Electronic Engineers. 1967. 55, pp. 410-413.
- [26] LAURA, P.A.A. y MAURIZI, M.J.: Comments on "Use of trigonometric terms in the finite element method with application to vibrating membranes" (ref. 14). Journal of Sound and Vibration. 1974. 37 (1), pp. 137-139.
- [27] WILLIAMS, R.; YEOW, Y.T. y BRINSON, H.F.: "An Analytical and experimental study of vibrating equilateral triangular plates". Experimental Mechanics. Sept. 1975. pp.339-346.
- [28] LAURA, P.A.A. y LUISONI, L.E.: Discussions on "An analytical and experimental study of vibrating equilateral triangular plates" (ref.[27]). Experimental Mechanics. July 1976. pp. 279-280.
- [29] DIEZ, L., GIANETTI, C. y LAURA, P.A.A.: "Aproximate determination of the lowest cutoff frequency of a square coaxial waveguide". Journal of Sound and Vibration. 1977. Vol.51 (2) pp. 311-313.
- [30] LAURA, P.A.A., DIEZ, L., GIANETTI, C., LUISONI, L.E. y GROSSI, R.: "Calculation of the fundamental frequency in a case of wave guides of doubly connected cross section". Proceedings of the IEEE, 1977.
- [31] GIANETTI, C.E., LAURA, P.A.A., DIEZ, L. SANCHEZ, S.G., BASOMBRI, F.G. y GUTIERREZ, R.H.: "Numerical experiments on the solution Poisson's and Helmholtz equation in doubly connected domains". Instituto de Mecánica Aplicada, SENID-CO NICET. 1977. Publicación 77-29.

