Publicado en la
Revista de la Unión Matemática Argentina
Vol. XVII - Año 1956 - Pág. 53
*Volumen en homenaje a Bepo Levi*

COMISION NACIONAL DE LA ENERGIA ATOMICA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

# NOTA SOBRE LA FORMULA

$$v.\,p.\,\frac{1}{x}\,.\,\delta = -\frac{1}{2}\,\delta'$$

*por*

*A. González Domínguez y R. Scarfiello*

BUENOS AIRES
1956

# NOTA SOBRE LA FORMULA

$$v.p.\frac{1}{x}.\delta = -\frac{1}{2}\delta'$$

por A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ y R. SCARFIELLO

Homenaje a Beppo Levi, matemático ilustre y querido amigo

Nos proponemos en esta nota aclarar el sentido y precisar las condiciones de validez de la fórmula

$$v.p.\frac{1}{x}\delta = -\frac{1}{2}\delta', \qquad (A)$$

importante en teoría cuántica de los campos. Tiene sentido plantearse tal cuestión, pues es sabido que el producto multiplicativo de distribuciones no está en general definido.

Ello nos ha conducido a estudiar un cierto tipo de núcleos singulares que se originan multiplicando un núcleo singular usual por su transformada de Hilbert. En el § 1 demostramos los respectivos teoremas. El § 2 lo dedicamos a ejemplos (núcleos de Dirichlet, Fejèr, Poisson y Weierstrass multiplicados por sus transformadas de Hilbert). En el § 3 generalizamos los teoremas del § 1 (derivadas de orden $k$ de núcleos singulares, multiplicadas por sus transformadas de Hilbert). En el § 4 consignamos la versión simbólica de estos teoremas en términos de la medida $\delta$ y sus derivadas. Queda con ello completamente precisado el sentido de la fórmula $(A)$ y de sus generalizaciones.

## 1. *Dos teoremas sobre integrales singulares*

Sea $g_n(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, un núcleo singular que cumple las condiciones siguientes.

a) $$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\, dx = 1; \tag{1,0}$$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty} |g_n(x)|\, dx < M; \tag{1,1}$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \int_{I} |g_n(x)|\, dx = 0 \tag{1,2}$$

para cada intervalo I que no contiene el origen.

Además de estas condiciones usuales, admitiremos que $g_n(x)$ tiene derivada acotada para cada *n*, y que se cumple la condición

d) $$|x\, h_n(x)| < N; \tag{1,3}$$

donde hemos puesto

$$h_n(x) = g_n(x) * v\,.\,p\,.\,\frac{1}{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n(x)dy}{x-y}\,. \tag{1,4}$$

Las letras $v\,.\,p\,.$ significan «valor principal» y el símbolo $*$ denota la convolución; entendiéndose desde ahora en adelante que toda integral cuyo integrando tenga por denominador $x-y$ es el valor principal de la integral.

Consideremos la sucesión

$$K_n(x) = g_n(x)\, h_n(x). \tag{1,5}$$

Vale entonces el

*Lema 1.* La sucesión $K_n(x)$ verifica las relaciones

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\, K_n(x)\, dx = \frac{1}{2}\,; \tag{1,6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x)\, dx = 0. \tag{1,7}$$

Demostración. Escribimos (admitiendo que las integrales existen)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, g_n(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n(y) dy}{x-y} = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y g_n(y) dy}{x-y} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} g_n(y)\, dy. \tag{1,8}$$

Pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y g_n(y)}{x-y}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\, g_n(y) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n(x)\, dx}{x-y}\,, \tag{1,9}$$

pues la inversión del orden de integración es lícita en virtud de la derivabilidad de $g_n(x)$. Permutando $x$ e $y$ en el segundo miembro de $(1,9)$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\, dx \int_{\infty-}^{\infty} \frac{y g_n(y) dy}{x-y} = - \int_{-\infty}^{\infty} x\, g_n(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n(y) dy}{x-y}\,; \tag{1,10}$$

o sea, substituyendo (1, 10) en el segundo miembro de (1, 8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, g_n(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n(y)dy}{x-y} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} g_n(y)\, dy. \qquad (1,11)$$

Tomando límites en esta igualdad para $n \to \infty$, la relación (1, 6) queda demostrada. De igual manera se prueba la (1, 7).

*Teorema 1.* Para toda función acotada en $(-\infty, \infty)$, continua en el origen, vale la fórmula

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\, K_n(x)\, f(x)\, dx = \frac{1}{2} f(0). \qquad (1,12)$$

En efecto

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, K_n(x)\, [f(x)-f(0)]\, dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x\, K_n(x)\, [f(x)-f(0)] +$$

$$+ \int_{|x|>\varepsilon} x\, K_n(x)\, [f(x)-f(0)]\, dx; \qquad (1,13)$$

la primera integral del segundo miembro puede hacerse arbitrariamente pequeña, eligiendo $\varepsilon$ de modo que la oscilación de $f(x)$ en el intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$ sea suficientemente pequeña, v por otra parte, llamando $C$ una cota de $f(x)$ en $[-\infty, \infty]$,

$$\left| \int_{|x|>\varepsilon} (f(x)-f(0)\, x\, K_n(x)\, dx \right| \leqq 2\, C \int_{|x|>\varepsilon} |g_n(x)|\, |x\, h_n(x)|\, dx <$$

$$< 2\, C\, N \int_{|x|>\varepsilon} |g_n(x)|\, dx \to 0, \qquad (1,14)$$

con lo cual (1, 12) queda demostrada.

*Teorema* 2. Para toda función acotada en $[-\infty, \infty]$, con derivada continua en el origen, vale la fórmula

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, K_n(x)\, dx = \frac{1}{2} f'(0). \tag{1,15}$$

Demostración. Bastará probar (en virtud de una acotación análoga a (1, 14)), la fórmula

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\, K_n(x)\, dx = \frac{1}{2} f'(0). \tag{1,16}$$

Escribamos

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + x\, a(x), \tag{1,17}$$

donde la función $a(x)$ es continua y nula en el origen.

Tenemos pues

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, K_n(x)\, dx = f(0) \int_{-a}^{a} K_n(x)\, dx + f'(0) \int_{-a}^{a} x\, K_n(x)\, dx + \\ + \int_{-a}^{a} x\, K_n(x)\, a(x)\, dx. \tag{1,18}$$

Las relaciones (1,6) y (1, 7) en conjunción con una acotación análoga a la utilizada en (1, 14) y el teorema 1 (aplicado al último sumando de (1, 18)), conducen a la demostración del Teorema 2.

2. *Ejemplos.*

*A*. $$g_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1-\cos nx}{nx^2} \quad \text{(Fejèr)}. \tag{2,0}$$

$$h_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{\operatorname{sen} nx}{nx^2}\,. \tag{2,1}$$

$$K_n(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{x} - \frac{\operatorname{sen} nx}{nx^2}\right)\frac{1-\cos nx}{nx^2}. \tag{2,2}$$

B. $$g_n(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{n}{1+n^2x^2} \quad \text{(Poisson)}. \tag{2,3}$$

$$h_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^2x^2}. \tag{2,4}$$

$$K_n(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{n^3x}{(1+n^2x^2)^2}. \tag{2,5}$$

C. $$g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,n\,e^{-n^2x^2} \quad \text{(Weierstrass)}. \tag{2,6}$$

$$h_n(x) = -2\,n\,e^{-n^2x^2}\int_0^{nx} e^{u^2}\,du. \tag{2,7}$$

$$K_n(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,2\,n^2\,e^{-2n^2x^2}\int_0^{nx} e^{u^2}\,du. \tag{2,8}$$

D. $$g_n(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\operatorname{sen} nx}{x} \quad \text{(Dirichlet)}. \tag{2,9}$$

$$h_n(x) = \frac{1-\cos nx}{x}. \tag{2,10}$$

$$K_n(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\operatorname{sen} nx}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos nx}{x}\right). \tag{2,11}$$

Nótese que los cuatro núcleos (2, 0), (2, 3), (2, 6) y (2, 9) satisfacen a la condición (1, 3), que resulta, pues, menos restrictiva de lo que a primera vista parece; observemos también que las relaciones (1, 6), (1, 7) son válidas para estos cuatro ejemplos (que son los más importantes), sin necesidad de anteponer en ellas las letras «lím». El Lema 1 y el Teorema 1 son válidas para los núcleos (2, 2), (2, 5) y (2, 8), pues cumplen todas las condiciones impuestas. No así el núcleo (2, 11) para el cual esos teoremas no se cumplen sin imponer restricciones adicionales a la función a la cual se aplican. Una versión posible del Teorema 1 para este núcleo es la siguiente.

*Teorema 3.* Para toda función integrable en $(-\infty, \infty)$, continua y de variación acotada en un entorno del origen, vale la fórmula

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\operatorname{sen} nx}{x} (1-\cos nx)\, dx = \frac{1}{2} f(0). \qquad (2,12)$$

Demostración. Basta mostrar que tiende a cero la integral

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} (f(x)-f(0)) \frac{\operatorname{sen} nx}{x} (1-\cos nx)\, dx, \qquad (2,13)$$

pues la integral $\int\limits_{|x|>a} (\quad)\, dx$ puede hacerse arbitrariamente pequeña eligiendo $|a|$ suficientemente grande. Escribamos

$$I_n = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{a} \right]. \qquad (2,14)$$

La integral extendida al intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$ se acota utilizando el segundo teorema de la media y se demuestra, como en el caso del núcleo singular de Dirichlet, que puede hacerse arbitrariamente pequeña eligiendo $\varepsilon$ suficientemente pequeño. También es fácil demostrar la tendencia a cero de las otras dos integrales. En efecto, en la integral

$$\int_{\varepsilon}^{a} \frac{f(x)}{x} \operatorname{sen} nx (1-\cos nx)\, dx \qquad (2,15)$$

la función $\dfrac{f(x)}{x}$ es integrable; además las funciones

$$\operatorname{sen} nx (1-\cos nx)$$

son uniformemente acotadas en $(\varepsilon, a)$, y vale, para todo $c$

$(\varepsilon \leqq c \leqq a)$, la relación

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\varepsilon}^{c} \operatorname{sen} nx(1-\cos nx)\, dx = 0.$$

Por lo tanto, en virtud de un clásico teorema de Lebesgue, la integral (2, 15) tiende a cero para $n \to \infty$. Como el mismo razonamiento vale para el intervalo $(-a, -\varepsilon)$, el teorema está demostrado.

De igual manera se demuestra el

*Teorema 4.* Si $f(x)$ es integrable en $(-\infty, \infty)$, y tiene derivada continua y de variación acotada en un entorno del origen, es válida la fórmula

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\, \frac{1-\cos nx}{x}\, dx = \frac{1}{2} f'(0). \qquad (2, 16)$$

3. *Generalización de los teoremas anteriores*

3; 0. Admitamos que nuestro núcleo $g_n(x)$ satisface a las condiciones adicionales siguientes:

e) $g_n^{(2k+2)}(x)$ es continua y acotada en $(-\infty, \infty)$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} g_n^{(m)}(x) = 0 \quad (0 \leqq m \leqq 2k+1)$, uniformemente en cada intervalo que no contiene el origen;

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x^r g_n^{(s)}(x)|\, dx < L$ para todo $n$ y $0 \leqq r \leqq 2k+1$, $0 \leqq s \leqq 2k+1$;

g) $\displaystyle\int_{I} |x^k g_n^{(k)}(x)|\, dx \to 0$ para cada intervalo $I$ que no contiene el origen. En lo que sigue, $k$ será un entero $\geqq 0$, fijo.

Pondremos

$$H_{n,k}(x) = g_n^{(k)}(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n^{(k)}(y)dy}{x-y}, \qquad (3,0;0)$$

$$I_{m,n,k} = \int_{-\infty}^{\infty} H_{n,k}(x)\, x^m\, dx. \qquad (3,0;1)$$

*Lema* 2. Si $g_n(x)$ cumple las relaciones recién enunciadas es válida la fórmula

$$\lim_{n\to\infty} I_{m,n,k} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad m = 0, 1, \ldots, 2k, \\ \dfrac{(k!)^2}{2} & \text{si} \quad m = 2k+1. \end{cases} \qquad (3,0;2)$$

Demostración. Comencemos por observar que de las condiciones impuestas a $g_n(x)$ se deducen, por repetidas integraciones por partes, estas otras:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i g_n^{(m)}(x)\, dx = 0, \quad \text{si} \quad i < m \leqq 2k+1; \qquad (3,0;3)$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i g_n^{(i)}(x)\, dx = (-1)^i (i!), \quad 0 \leqq i \leqq 2k+1. \qquad (3,0;4)$$

Consignemos también la fórmula $(r \geqq 1)$,

$$x^r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(y)dy}{x-y} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^r h(y)dy}{x-y} + \sum_{\nu=1}^{r} x^{r-\nu} \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, y^{\nu-1}\, dy, \qquad (3,0;5)$$

que se obtiene por reiteración de esta otra, evidente:

$$x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(y)dy}{x-y} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yh(y)dy}{x-y} + \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, dy.$$

Poniendo en $(3,0;5)$ $r=m$ $(0 \leqq m \leqq 2k)$, y $h(y)=g_n^{(k)}(y)$ obtenemos, reemplazando en $(3,0;1)$

$$I_{m,n,k}=\int_{-\infty}^{\infty} g_n^{(k)}(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^m g_n^{(k)}(y)\,dy}{x-y} + A_{m,n,k}, \qquad (3,0;6)$$

donde hemos puesto $A_{m,n,k}=0$ si $m=0$ y

$$A_{m,n,k}=\sum_{\nu=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} g_n^{(k)}(x)\,x^{m-\nu}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} g_n^{(k)}(y)\,y^{\nu-1}\,dy \qquad (3,0;7)$$

si $m \geqq 1$.

Por otra parte (la inversión del orden de integración es lícita en virtud de las condiciones impuestas)

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n^{(k)}(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^m g_n^{(k)}(y)\,dy}{x-y} = \int_{-\infty}^{\infty} y^m g_n^{(k)}(y)\,dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n^{(k)}(x)\,dx}{x-y} =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} x^m g_n^{(k)}(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n^{(k)}(y)dy}{x-y} = -I_{m,n,k}. \qquad (3,0;8)$$

De $(3,0;6)$ y $(3,0;8)$ deducimos

$$2I_{m,n,k}=A_{m,n,k}. \qquad (3,0;9)$$

Pero de $(3,0;3)$ se concluye que los sumandos del segundo miembro de $(3,0;7)$ tienen límite nulo para $n \to \infty$, con lo que la primera igualdad $(3,0;2)$ queda demostrada.

De manera análoga se procede para demostrar la segunda. En este caso se llega a la fórmula

$$I_{2k+1,n,k}=\int_{-\infty}^{\infty} g_n^{(k)}(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^{2k+1} g_n^{(k)}(y)\,dy}{x-y} + A_{2k+1,n,k}, \qquad (3,0;10)$$

donde hemos escrito

$$A_{2k+1,n,k}=\sum_{\nu=1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty} g_n^{(k)}(x)\, x^{2k+1-\nu}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} g_n^{(k)}(y)\, y^{\nu-1}\, dy +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} g_n^{(k)}(x)\, x^k\, dx \int_{-\infty}^{\infty} g_n^{(k)}(y)\, y^k\, dy + \sum_{k+2}^{2k+1}\int_{-\infty}^{\infty} g_n^{(k)}(x)\, x^{2k+1-\nu}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n^{(k)}(y)\, y^{\nu-1}\, dy\,. \qquad (3,0;\,11)$$

Tomando límites en esta igualdad deducimos de (3, 0; 3) y (3, 0; 4) que

$$\lim_{n\to\infty} A_{2k+1,n,k}=(k!)^2. \qquad (3,0;\,12)$$

Por otra parte, procediendo como en (3, 0; 8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n^{(k)}(x)\, dx \int_{-\infty} \frac{y^{2k+1}\, g_n^{(k)}(y)dy}{x-y}=\int_{-\infty}^{\infty} y^{2k+1}\, g_n^{(k)}(y)\, dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n^{(k)}(x)dx}{x-y}=$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+1}\, g_n^{(k)}(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n^{(k)}(y)dy}{x-y}=-I_{2k+1,n,k}. \qquad (3,0;\,13)$$

La segunda igualdad (3, 0; 2) es consecuencia inmediata de (3, 0; 10), (3, 0; 12) y (3, 0; 13).

3, 1. Del teorema anterior se deduce el siguiente

*Corolario.* Admitamos que $g_n(x)$ cumple la condición adicional

$$\left| x^{k+1}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n^{(k)}(y)dy}{x-y}\right| < C_1. \qquad (3,1;\,0)$$

*Teorema 6.* Para toda función acotada en $(-\infty, \infty)$, dotada de $2k+1$ derivadas continuas en el origen, vale la fórmula

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2k+1)!}{(k!)^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, H_{n,k}(x)\, dx = \frac{1}{2} f^{(2k+1)}(0). \qquad (3,1;\, 6)$$

Demostración. En virtud de $(3,0;\, 2)$ y $(3,1;\, 2)$, bastará limitarse a probar la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(2k+1)!}{(k!)^2} \int_{-a}^{a} f(x)\, H_{n,k}(x)\, dx = f^{(2k+1)}(0). \qquad (3,1;\, 7)$$

Para ello escribamos

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \dots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(0) + x^{2k+1} \varphi(x), \qquad (3,1;\, 8)$$

donde $\varphi(x)$ es acotada en $(-a, a)$, continua en el origen, y

$$\varphi(0) = 0. \qquad (3,1;\, 9)$$

Substituyendo en $(3,1;\, 7)$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(2k+1)!}{(k!)^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, H_{n,k}(x)\, dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} f^{(2k+1)}(0) \frac{2}{(k!)^2} \int_{-a}^{a} x^{2k+1} H_{n,k}(x)\, dx +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{2k} f^{(m)}(0) \frac{2(2k+1)!}{(m!)(k!)^2} \int_{-a}^{a} f(x)\, x^m H_{n,k}(x)\, dx +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{2(2k+1)!}{(k!)^2} \int_{-a}^{a} x^{2k+1} H_{n,k}(x)\, \varphi(x)\, dx. \qquad (3,1;\, 10)$$

En virtud de (3, 1; 2) el segundo sumando del segundo miembro de (3, 1; 10) es nulo; también lo es el tercero, como consecuencia del teorema 5 y de (3, 1; 9); y el primer sumando, de acuerdo con (3, 0; 2) y (3, 1; 3), vale $f^{(2k+1)}(0)$, con lo cual (3, 1; 7), y por lo tanto el teorema, queda demostrado.

## 4. *Expresión simbólica de los teoremas anteriores*

La fórmula (1, 15) puede escribirse, teniendo en cuenta (1, 4) (el límite se entiende en el sentido de Schwartz)

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)\left(g_n(x) * v\,.\,p\,.\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}\,\delta'; \qquad (4,0)$$

y como

$$g_n(x) \longrightarrow \delta, \quad g_n(x) * v\,.\,p\,.\frac{1}{x} \longrightarrow v\,.\,p\,.\frac{1}{x}, \qquad (4,1)$$

puede convenirse en escribir (4, 0) más brevemente

$$\delta\,.\,v\,.\,p\,.\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}\,\delta'. \qquad (4,2)$$

La fórmula (4, 2) es correcta, si se la interpreta como una abreviatura de la fórmula (4, 0), que es a su vez la expresión simbólica del Teorema 2; no lo será sin esta convención, pues la demostración del Teorema 2 se basa esencialmente en la aparición del *mismo* núcleo singular en ambos factores del primer miembro de (4, 0).

Los físicos justifican formalmente la (4, 2), que desempeña importante papel en electrodinámica cuántica (cfr. W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation, Oxford, 1954, pp. 158 y 309), multiplicando el núcleo de Poisson por su conjugado (cfr. Heitler, op. cit., pág. 70). Ante tal procedimiento cabe la duda —origen de esta nota—, de que la fórmula (4, 2) traduzca meramente una propiedad del núcleo de Poisson. Que ello no es así, y que la validez de (4, 2) (entendida como acabamos de decirlo) es perfectamente general, es precisamente lo que afirma nuestro Teorema 2.

Consignemos finalmente la fórmula (las letras p. f. significan «parte finita»)

$$\delta^{(k)} . \text{ p. f. } \frac{1}{x^{k+1}} = \frac{1}{2} (-1)^{k+1} \frac{k!}{(2k+1)!} \delta^{(2k+1)} \tag{4, 3}$$

(que para $k=0$ se convierte en la (4, 2)), que es perfectamente rigurosa si se interpreta como una forma breve de escribir la aserción del Teorema 6.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES DE BUENOS AIRES
DIRECCIÓN NACIONAL DE LA ENERGÍA ATÓMICA.