

04.86.04

METODOS NODALES CON REALIMENTACION NO LINEAL
PARA LA RESOLUCION TRIDIMENSIONAL DE LAS ECUACIONES
MULTIGRUPO DE DIFUSION

C. N. E. A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº	AÑO
1	1986

Aldo Alberto Ferri

Tesis presentada ante el Instituto Balseiro, Universidad Nacional
de Cuyo, para optar al título de Doctor en Ingeniería Nuclear.

San Carlos de Bariloche

1986

METODOS NODALES CON REALIMENTACION NO LINEAL
PARA LA RESOLUCION TRIDIMENSIONAL DE LAS ECUACIONES
MULTIGRUPO DE DIFUSION

Aldo Alberto Ferri

Tesis presentada ante el Instituto Balseiro, Universidad Nacional
de Cuyo, para optar al título de Doctor en Ingeniería Nuclear.

San Carlos de Bariloche

1986

METODOS NODALES CON REALIMENTACION NO LINEAL
PARA LA RESOLUCION TRIDIMENSIONAL DE LAS
ECUACIONES MULTIGRUPO DE DIFUSION

Tesis presentada ante el Instituto Balseiro,
Universidad Nacional de Cuyo, para optar al título de
Doctor en Ingeniería Nuclear



Dr. Rudi Stamm'ler
Asesor Científico



Ing. Aldo Ferri
Doctorando

San Carlos de Bariloche

R E S U M E N

En los últimos años han sido desarrollados una gran variedad de métodos para calcular la distribución de potencia en el núcleo de un reactor, entre los cuales los métodos nodales se han destacado por producir resultados de buena precisión requiriendo bajos tiempos de procesamiento.

Los esquemas nodales actuales contienen varias incógnitas por nodo y por grupo. En los métodos presentados en este trabajo se ha introducido una realimentación no lineal en los coeficientes de acoplamiento, con objeto de reducir el número de incógnitas a una sola por nodo y por grupo. El algoritmo resultante es una fórmula de 7 puntos y el proceso iterativo ha demostrado ser estable en el esquema de matrices de respuesta, mientras que en el esquema de malla gruesa es necesario en general la subrelajación de los factores de realimentación para lograr convergencia.

La forma del flujo dentro de cada nodo está determinada por la integración parcial de las ecuaciones de difusión sobre dos de las coordenadas, conduciendo a un conjunto de tres ecuaciones unidimensionales acopladas cuya solución se obtiene en base a un desarrollo polinómico y también en forma analítica. La fuga neta transversal es la responsable del acoplamiento entre las direcciones espaciales y para su modulación se presentan dos métodos alternativos.

La eficiencia de los métodos desarrollados es ilustrada con resultados numéricos que incluyen su aplicación al problema benchmark bidimensional de la IAEA.

A B S T R A C T

A wide variety of methods to calculate the power distribution in a nuclear reactor core have been developed in the past few years. Among them, nodal methods have received special attention, because they yield accurate results in short computing times.

Present nodal schemes contain several unknowns per node and per group. In the methods presented here, non-linear feedback of the coupling coefficients has been applied to reduce this number to only one unknown per node and per group. The resulting algorithm is a 7-points formula, and the iterative process has proved stable in the response matrix scheme. Under-relaxation of the feedback factors has been found necessary to achieve convergence in the coarse mesh scheme.

The intranodal flux shape is determined by partial integration of the diffusion equations over two of the coordinates, leading to a set of three coupled one-dimensional equations. These, in turn, can be solved either by using a polynomial approximation for the flux or by integration (analytic solution). The transverse net leakage is responsible for the coupling between the spacial directions, and two alternative methods are presented to evaluate its shape.

Numeric results, which include the IAEA two-dimensional benchmark problem illustrate the efficiency of the developed methods.

I N D I C E

I N D I C E G E N E R A L

RESUMEN.	2
ABSTRACT	3
I. INTRODUCCION	11
II. EL PROBLEMA LOCAL. PASO 1.	16
III. LA FUGA NETA TRANSVERSAL	20
III.1 Aproximación parabólica directa.	26
III.2 Expansión en momentos locales.	30
IV. METODOS DE EXPANSION POLINOMICA.	36
IV.1 El problema local.Paso 2.	37
IV.2 Modulación de la fuente	43
Expansión alternativa de cuarto grado	44
IV.3 El problema global con matrices de respuesta	45
La ecuación de respuesta nodal.	45
Realimentación no lineal y sintetización.	51
Acoplamiento y fórmula de 7 puntos.	55
Condiciones de contorno	58
Sumario del algoritmo	59
IV.4 El problema global con métodos de malla gruesa	60
IV.4.a Método del flujo total.	61
Relación corriente neta-gradiente de flujo.	61
Acoplamiento y fórmula de 7 puntos.	63
Condiciones de contorno	65
IV.4.b Método de separación.	67
Solución local.	68
El flujo transitorio.	69
El flujo asintótico	70
Relación corriente neta-gradiente de flujo.	71
Acoplamiento y fórmula de 7 puntos.	72
Condiciones de contorno	75

IV.4.c Comparación de ambos métodos.	76
El caso del slab.	76
Comportamiento iterativo.	78
Subrelajación	79
Expresiones límites	81
Conclusiones.	83
V. METODO ANALITICO	87
V.1 Análisis modal	88
V.2 El problema local.	90
V.3 La fuga transversal en la representación del buckling.	92
V.4 El problema global	93
La derivada en la representación del buckling. .	94
La ecuación de respuesta nodal	96
VI. APROXIMACION DE LA REALIMENTACION ISOTROPICA	104
VI.1 El caso de nodos cúbicos.	107
VII. RESULTADOS NUMERICOS	111
VII.1 Elementos de respuesta	111
VII.2 El problema benchmark de la IAEA	113
VII.3 Análisis y discusión general	115
Precisión del método de residuos ponderados. .	115
Influencia de la modulación de la fuga neta transversal.	116
Influencia de la realimentación.	119
VIII. CONCLUSIONES	121
APENDICE I: Polinomios de Legendre	123
APENDICE II: Expresiones polinómicas y analíticas para los factores t_u y x_u	124
APENDICE III: Autovalores y autovectores de la matriz de buckling	129

APENDICE IV: Elementos de respuesta que incluyen la modulación de las corrientes parciales salientes.	131
FIGURAS Y TABLAS	137
REFERENCIAS.	153
AGRADECIMIENTOS.	156

INDICE DE FIGURAS Y TABLAS

FIGURA 1: Diagrama de la ecuación $f^{(t)} = \alpha(\Omega) + \beta(\Omega) f^{(t-1)}$ mostrando un camino espiral convergente y otro divergente. 138

FIGURA 2: El problema benchmark de la IAEA. 139

FIGURA 3: Solución del problema benchmark de la IAEA. 140

FIGURA 4: Errores relativos porcentuales en la distribución de potencia. Nodos de 20 cm y fuga transversal según APD 141

FIGURA 5: Errores relativos porcentuales en la distribución de potencia. Nodos de 20 cm y fuga transversal según EML(L). 142

TABLA I: Método polinómico con APD versus NEM. 117

TABLA II: Método analítico con APD versus NIM 118

TABLA III: Elementos de la matriz $\{b_{p1}\}$ 123

TABLA IV: Valores numéricos de t_u y x_u para un nodo de 20 cm con $D=1.5$ cm y $\Sigma_a=0.03012$ cm⁻¹ 128

TABLA V: Valores de las magnitudes de respuesta calculadas por los métodos polinómicos y analítico para tres tamaños de nodo 143

TABLA VI: Errores en las magnitudes de respuesta calculadas en P_6 para tres tamaños de nodo y ambas representaciones de la fuga neta transversal 144

TABLA VII:	Resultados problema IAEA con nodos de 20 cm . .	145
TABLA VIII:	Resultados problema IAEA con nodos de 10 cm . .	146
TABLA IX:	Resultados problema IAEA con nodos de 20 cm y la aproximación de la realimentación isotrópica	147
TABLA X:	Resultados problema IAEA con nodos de 10 cm y la aproximación de la realimentación isotrópica	148
TABLA XI:	Influencia del orden de la fuga neta transversal según el método EML	149
TABLA XII:	Resultados del problema de la IAEA para varios métodos.	150
TABLA XIII:	Comparación con el código PUMA.	151

C A P I T U L O I :

INTRODUCCION

I. INTRODUCCION

El cálculo preciso de la distribución de potencia en el núcleo de un reactor durante un transitorio, ó también en estado estacionario, es un problema importante desde el punto de vista del diseño, el análisis de seguridad y la gestión de combustible. Esta distribución se obtiene resolviendo las ecuaciones de difusión en pocos grupos de energía (generalmente 2) en todo el volumen del reactor, que en esta etapa del cálculo se lo supone compuesto de grandes regiones homogeneizadas, **nodos** de ahora en más, que generalmente son secciones verticales de un elemento combustible con su refrigerante y moderador. Las secciones eficaces que representan las propiedades neutrónicas de cada nodo se obtienen de una secuencia de cálculos previos de transporte con buen detalle espacial y energético. En todo este trabajo estas magnitudes se suponen conocidas y los errores obtenidos en las distribuciones de potencia calculadas por los métodos aquí desarrollados, están asociados únicamente al método en cuestión. De esta manera no se tienen en cuenta los errores producidos por el proceso de homogenización, el cual constituye de por sí un amplio tema aparte.

Una gran variedad de métodos han sido desarrollados para resolver este problema. El más conocido y directo es el método de diferencias finitas, que necesita de una malla fina (del orden de una longitud de difusión) para obtener resultados precisos. Pero el uso de una malla fina para calcular los grandes núcleos de los reactores de potencia incrementa sensiblemente las necesidades de memoria y tiempo de procesamiento. Dado que generalmente el interés está centrado en conocer los valores promedio de la potencia por trozo de elemento combustible, el cálculo de la distribución fina significa un esfuerzo innecesario.

Existen otros métodos que en base a ciertas aproximaciones evitan el cálculo de esta distribución fina; entre ellos se

distinguen los llamados métodos nodales. En estos métodos el problema original de hallar la distribución de flujo y potencia en todo el núcleo del reactor es resuelto en dos etapas, que consisten en:

- 1) encontrar una solución general al problema **local** de difusión dentro del nodo en función de un número de parámetros libres que se ajustarán más tarde,
- 2) acoplar las soluciones locales de todos los nodos del sistema para definir los parámetros libres de la solución general. Esto constituye el problema **global** de los métodos nodales.

Una presentación general de la teoría de los métodos nodales y sus aplicaciones más conocidas puede encontrarse en el capítulo XI de la referencia 10. Métodos más avanzados están desarrollados en las referencias 1, 2, 3, 6 y 9, que junto con la 10 constituyeron la bibliografía básica de los métodos desarrollados y presentados en este trabajo.

Dados los valores del flujo y sus derivadas sobre los contornos del nodo, la solución local $\phi(\underline{r})$ debe satisfacer la ecuación de difusión dentro del volumen V del mismo:

$$-D \nabla^2 \phi(\underline{r}) + \Sigma_r \phi(\underline{r}) = Q(\underline{r}) \quad (I.1)$$

Existe una ecuación para cada grupo de energía y el término de fuente viene dado, para el grupo g , por la expresión:

$$Q_g(\underline{r}) = \sum_{g' \neq g} \Sigma_{sg'g} \phi_{g'}(\underline{r}) + \frac{1}{k_{eff}} \chi_g \sum_{g'} \nu \Sigma_{fg'} \phi_{g'}(\underline{r}) \quad (I.2)$$

donde $\Sigma_{sg'g}$ es la sección eficaz de transferencia del grupo g' al g . Para claridad de notación, el subíndice del grupo será omitido en aquellas expresiones que relacionen magnitudes pertenecientes a un mismo grupo, caso de la ecuación (I.1).

Una vez conocida la solución del problema local, resta establecer el acoplamiento entre los nodos del sistema, para lo cual existen al menos dos alternativas: utilizar la continuidad sobre las interfases nodales del flujo (ϕ) y la corriente neta (J), lo que conduce a las ecuaciones de **malla gruesa**; ó utilizar como variables de acople las corrientes parciales entrantes (j^-) y salientes (j^+) con lo cual las ecuaciones resultantes son del tipo de **matrices de respuesta**. Ambas formulaciones son equivalentes desde el punto de vista de los resultados que de ellas se obtienen, ya que en el marco de la teoría de difusión estas magnitudes están relacionadas entre sí por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \phi &= 2(j^+ + j^-) & \text{ó} & & j^+ &= \frac{\phi}{4} + \frac{J}{2} \\ J &= j^+ - j^- & & & j^- &= \frac{\phi}{4} - \frac{J}{2} \end{aligned} \quad (I.3)$$

Las ecuaciones resultantes en cualquiera de los dos esquemas se caracterizan por tener tres incógnitas por nodo y por grupo, una correspondiente a cada dirección espacial. Introduciendo una realimentación no lineal en los coeficientes de acoplamiento es posible reducir el número de incógnitas a una sola por nodo y por grupo, y llegar así a una ecuación de 7 puntos para el problema global. Este tipo de ecuaciones pueden ser resueltas rápidamente por métodos iterativos bien establecidos, como por ejemplo el de Gauss-Seidel. La actualización de los factores de realimentación no lineal, y consecuentemente de los coeficientes de acoplamiento, se produce en un lazo exterior que puede coincidir con la actualización de otras cantidades, por ejemplo la fuente de fisión en el método de iteración de fuente para las iteraciones multigrupo.

La manera en que la realimentación no lineal es introducida hace que surjan diferencias importantes en las características de convergencia de las ecuaciones resultantes, según se aplique al esquema de malla gruesa ó al de matrices de respuesta. Este aspecto se trata detalladamente en el capítulo IV.

El capítulo II describe la parte del tratamiento del problema local que es común a los métodos desarrollados en los capítulos IV y V. En el capítulo III se detallan las aproximaciones hechas sobre esa importante magnitud que es la fuga neta transversal, definida en el capítulo II. El capítulo VI contiene la descripción de un método aproximado de matrices de respuesta que se obtiene eliminando la realimentación en las ecuaciones. Los resultados numéricos obtenidos con los métodos desarrollados en sus diversas aproximaciones, son presentados y analizados en el capítulo VII. El capítulo VIII cierra este trabajo con las conclusiones obtenidas de la presentación de todo el material.

C A P I T U L O I I :

EL PROBLEMA LOCAL. PASO 1

II. EL PROBLEMA LOCAL. PASO 1

La tarea principal del problema local consiste en determinar la forma del flujo dentro del nodo, la cual se necesita para calcular los coeficientes de acoplamiento que caracterizan las fórmulas del problema global.

La obtención de una solución al problema local se logra en dos pasos sucesivos; el primero de ellos consiste en aplicar el método de los semimomentos [12] a la ecuación (I.1) y transformarla en un conjunto de tres ecuaciones unidimensionales acopladas, una para cada dirección espacial. Estas ecuaciones se obtienen promediando la (I.1) sobre dos de las coordenadas nodales. En el método general de los semimomentos esta integración se hace en sentido de residuos ponderados con ciertas funciones de peso W_k , con $k=0, \dots, K$. Trabajando con nodos rectangulares en geometría cartesiana, se tiene para la dirección x la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{h_y h_z} \int_0^{h_y} \int_0^{h_z} W_k(y,z) \left\{ -D \nabla^2 \phi(r) + \sum_r \phi(r) - Q(r) \right\} dy dz = 0 \quad (\text{II.1})$$

La aplicación de este método en el presente trabajo utiliza sólo el orden más bajo de la aproximación, $k=0$, para el cual las funciones de peso correspondientes son $W_0=1$. Se habla entonces de semimomentos de orden cero. En este caso la ecuación anterior se reduce a:

$$-D \frac{d^2}{dx^2} \phi_x(x) + \sum_r \phi_x(x) + DL_x(x) - Q_x(x) = 0 \quad (\text{II.2})$$

donde:

$$\phi_x(x) = \frac{1}{h_y h_z} \int_0^{h_y} \int_0^{h_z} \phi(r) dy dz \quad (\text{II.3.a})$$

$$Q_x(x) = \frac{1}{h_y h_z} \int_0^{h_y} \int_0^{h_z} Q(r) dy dz \quad (\text{II.3.b})$$

$$L_x(x) = - \frac{1}{h_y h_z} \int_0^{h_y} \int_0^{h_z} \left\{ \frac{\partial^2 \phi(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(r)}{\partial z^2} \right\} dy dz \quad (\text{II.3.c})$$

son los semimomentos de orden cero (en la dirección x) del flujo, la fuente y la fuga neta transversal, respectivamente. El semimomento de orden cero $\phi_x(x)$ es el valor del flujo en la posición x promediado sobre las otras coordenadas nodales; si éste a su vez es promediado sobre x, se obtiene el valor promedio nodal del flujo:

$$\phi = \frac{1}{h_x} \int_0^{h_x} \phi_x(x) dx$$

La resolución de las ecuaciones unidimensionales resultantes para los $\phi_x(x)$ constituye el paso 2 de la solución al problema local y se ataca de dos maneras distintas originando los métodos de expansión polinómica y analítico, descriptos en detalle en los capítulos IV y V respectivamente. Para entonces conviene tener las ecuaciones unidimensionales expresadas en coordenadas u, v y w, definidas en el intervalo [-1,1] según:

$$u = \frac{z}{h_x} x - 1 \quad v = \frac{z}{h_y} y - 1 \quad w = \frac{z}{h_z} z - 1$$

Las expresiones resultantes en términos de estas coordenadas son:

$$- \frac{4D}{h_u^2} \frac{d^2 \phi_u(u)}{du^2} + \sum_r \phi_u(u) + DL_u(u) - Q_u(u) = 0 \quad (\text{II.4})$$

$$\phi_u(u) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(u,v,w) dv dw \quad (\text{II.5.a})$$

$$Q_u(u) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q(u,v,w) dv dw \quad (\text{II.5.b})$$

$$L_u(u) = -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{4}{h_v^2} \frac{\partial^2 \phi(u,v,w)}{\partial v^2} + \frac{4}{h_w^2} \frac{\partial^2 \phi(u,v,w)}{\partial w^2} \right\} dv dw \quad (\text{II.5.c})$$

Las tres ecuaciones (II.4), también llamadas ecuaciones direccionales de aquí en adelante, están acopladas por medio de la fuga neta transversal $DL_u(u)$, que actúa como un término de fuente heterogénea.

El método de los semimomentos está considerado como una de las técnicas más eficientes para generar algoritmos nodales y en él están basados los más exitosos métodos nodales actuales/2,3, 6,9/. Su función es la generación de las ecuaciones direccionales (II.4), cuya solución será obtenida del desarrollo finito de $\phi_u(u)$ en polinomios de Legendre en el capítulo IV, ó en el tratamiento riguroso detallado en el capítulo V. Para poder resolver estas ecuaciones es necesario primero conocer la dependencia funcional de $L_u(u)$, que puede ser obtenida por algún camino independiente, con lo cual, desde este punto de vista, el método tiene características de "abierto". Esto constituye la parte esencial del algoritmo, más allá del método que se utilice en la resolución de las ecuaciones direccionales.

C A P I T U L O I I I :

LA FUGA NETA TRANSVERSAL

III. LA FUGA NETA TRANSVERSAL

Una de las características del método de los semimomentos es que permite hacer aproximaciones independientes sobre la magnitud $L_u(u)$. Cualquier prescripción acerca de cómo hallar esta dependencia funcional constituye una aproximación al problema del acoplamiento entre las direcciones espaciales, que tendrá efectos sobre las distribuciones de flujo y potencia calculadas, especialmente en problemas cuya solución no es espacialmente separable.

Establecer la distribución de la fuga neta transversal $L_u(u)$ a partir de su definición, ecuación (II.5.c), requiere el conocimiento de la solución local $\phi(\underline{r})$ y su diferenciación sobre las interfases nodales. Aunque $\phi(\underline{r})$ puede ser reconstruido a partir de los semimomentos $\phi_u(u)$, esta solución está caracterizada por tener grandes errores en las cercanías de los contornos, especialmente en el orden cero del método. Además el proceso de diferenciación amplifica estos errores en un orden de magnitud /12/, con lo cual las distribuciones resultantes están lejos de ser precisas.

Existen otros métodos a partir de los cuales la distribución $L_u(u)$ puede ser determinada utilizando información de los nodos vecinos. La gran mayoría de los métodos nodales actuales construyen $L_u(u)$ directamente de los valores promedios de esta magnitud sobre tres nodos consecutivos, sobre los cuales se ajusta una expresión cuadrática en base a ciertas condiciones aproximadas de continuidad en las interfases. De esta manera $L_u(u)$ resulta en una parábola dentro de cada nodo. Por esta razón se los llama métodos de Aproximación Parabólica Directa (APD) /3/.

La solución al problema global suministra el valor promedio del flujo nodal y el promedio de las corrientes (parciales y netas) sobre las interfases nodales. El valor promedio de

$L_u(u)$ se obtiene a partir de estas magnitudes, de la siguiente manera:

$$L_u(u) = - \int_{-1}^1 \frac{2}{h_v^2} \frac{\partial^2 \phi_{(u,v)}}{\partial v^2} dv - \int_{-1}^1 \frac{2}{h_w^2} \frac{\partial^2 \phi_{(u,w)}}{\partial w^2} dw \quad (\text{III.1})$$

donde la desaparición de una variable (u,v,w) corresponde a haber tomado el valor promedio sobre la misma, por ejemplo:

$$\phi_{(u,v)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \phi_{(u,v,w)} dw$$

Reconociendo que:

$$- \int_{-1}^1 \frac{2}{h_v^2} \frac{\partial^2 \phi_{(u,v)}}{\partial v^2} dv = \frac{1}{h_v} \left\{ - \frac{2}{h_v} \frac{\partial \phi_{(u,v)}}{\partial v} \Big|_{v=+1} + \frac{2}{h_v} \frac{\partial \phi_{(u,v)}}{\partial v} \Big|_{v=-1} \right\}$$

y definiendo las corrientes netas sobre las interfases como positivas en la dirección normal saliente:

$$J_v(u, \pm 1) = - \frac{2D}{h_v} \frac{\partial \phi_{(u,v)}}{\partial h_v} \Big|_{v=\pm 1} \quad (\text{III.2})$$

la ecuación (III.1) se transforma en:

$$L_u(u) = \frac{1}{D} \sum_{v \neq u} \frac{1}{h_v} \left\{ J_v(u, +1) + J_v(u, -1) \right\} \quad (\text{III.3})$$

Con el fin de compactar la notación, se introducen la convención:

$$J_{v\pm}(u) = J_v(u, \pm 1) \quad (\text{III.4})$$

y los conceptos de componente simétrica ($J_v(u)$) y antisimétrica ($J_v^*(u)$) según:

$$J_v(u) = J_{v+}(u) + J_{v-}(u) \quad (\text{III.5.a})$$

$$J_v^*(u) = J_{v+}(u) - J_{v-}(u) \quad (\text{III.5.b})$$

con los cuales, utilizando las expresiones (I.3), se tiene para $L_u(u)$:

$$L_u(u) = \frac{1}{D} \sum_{v \neq u} \frac{1}{h_v} (j_v^+(u) - j_v^-(u)) \quad (\text{III.6})$$

Promediando esta ecuación se llega finalmente a la relación:

$$L_u = \frac{1}{D} \sum_{v \neq u} \frac{1}{h_v} (j_v^+ - j_v^-) \quad (\text{III.7})$$

con las cantidades:

$$j_v^\pm = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 j_v^\pm(u) du$$

representando el valor promedio de las corrientes salientes (+) ó entrantes (-) al nodo por ambas caras de la dirección v , transversal a la u .

La ecuación (III.2) corresponde a la definición de la corriente neta en la dirección v transversal a la u . Para el caso de la corriente neta longitudinal, corresponde la siguiente expresión:

$$J_u(u,v) = - \frac{2D}{h_u} \frac{\partial \phi_{(u,v)}}{\partial u}$$

la cual, al ser promediada sobre v , conduce a:

$$J_u(u) = - \frac{2D}{h_u} \frac{d\phi_u(u)}{du} \quad (\text{III.8})$$

Es decir que el semimomento de orden cero de la corriente neta longitudinal en una determinada dirección está relacionado directamente por la ley de Fick con el correspondiente semimomento del flujo en esa dirección. Esta relación será utilizada en los capítulos IV y V.

En este capítulo se describen dos métodos desarrollados para determinar la distribución $L_u(u)$ en base a la siguiente aproximación sobre la forma del flujo intranodal:

$$\phi_{(u,v,w)} = \sum_{m,n=0}^2 A_{mn}(u) P_m(v) P_n(w) \quad (\text{III.9})$$

con los coeficientes de expansión definidos por:

$$A_{mn}(u) = \frac{(2m+1)(2n+1)}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi_{(u,v,w)} P_m(v) P_n(w) dv dw$$

En particular, para $A_{00}(u)$ resulta:

$$A_{00}(u) = \phi_u(u) \quad (\text{III.10})$$

es decir que el desarrollo (III.9) reproduce correctamente el semimomento de orden cero del flujo en la dirección u , mientras que constituye una aproximación de segundo grado para las direcciones transversales v y w .

Promediando la ecuación (III.9) sobre una de las coordenadas transversales, la w por ejemplo, se obtiene:

$$\phi_{(u,v)} = \phi_u(u) + \sum_{m=1}^2 A_{m0}(u) P_m(v) \quad (\text{III.11})$$

Utilizando las relaciones (I.3) se tiene para los extremos $v=\pm 1$:

$$\phi_{(u,\pm 1)} = \mathcal{L} (j_{v\pm}^+(u) + j_{v\pm}^-(u)) = \phi_u(u) \pm A_{10}(u) + A_{20}(u)$$

de donde se puede despejar $A_{10}(u)$ y $A_{20}(u)$ como:

$$A_{10}(u) = j_v^{+*}(u) + j_v^{-*}(u) \quad (\text{III.12.a})$$

$$A_{20}(u) = j_v^+(u) + j_v^-(u) - \phi_u(u) \quad (\text{III.12.b})$$

Derivando la ecuación (III.11) sobre los extremos $v=\pm 1$, se obtiene:

$$-\frac{2D}{h\nu} \left. \frac{\partial \phi_{(u,v)}}{\partial n_v} \right|_{v=\pm 1} = j_{v\pm}^+(u) - j_{v\pm}^-(u) = -\frac{2D}{h\nu} \left(\pm A_{10}(u) + 3A_{20}(u) \right)$$

Reemplazando $A_{10}(u)$ y $A_{20}(u)$ por sus expresiones (III.12), el sistema resultante se resuelve para $j_{v\pm}^+(u)$ llegandose, después de un poco de álgebra, a la expresión:

$$j_{v\pm}^+(u) = P_v j_{v\pm}^-(u) + T_v j_v^-(u) + \frac{1}{4} A_v \phi_u(u) \quad (\text{III.13})$$

con las definiciones:

$$d_v = \frac{2D}{h\nu} \quad ; \quad A_v = \frac{12 d_v}{1+6 d_v} \quad (\text{III.14.a})$$

$$P_v = \frac{1-2 d_v}{1+2 d_v} \quad ; \quad T_v = \frac{1}{2} (1-P_v-A_v) \quad (\text{III.14.b})$$

La ecuación (III.13) muestra que en cualquier plano normal a la dirección u , la corriente promedio que abandona el nodo por el lado $v=\pm 1$ ($j_{v\pm}^+(u)$) se compone de tres contribuciones que son proporcionales a la corriente promedio entrante por ese mismo lado ($j_{v\pm}^-(u)$), a la suma de las dos corrientes promedio entrantes por los lados $v=\pm 1$ ($j_v^-(u)$), y al valor promedio del flujo en dicho plano ($\phi_u(u)$).

La corriente saliente $j_v(u)$ se obtiene sumando el par de ecuaciones contenido en la (III.13) para dar:

$$j_v^+(u) = (1 - A_v) j_v^-(u) + \frac{1}{2} A_v \phi_u(u) \quad (\text{III.15})$$

De esta ecuación y la (III.6) se obtiene:

$$L_u(u) = \frac{1}{D} \sum_{v \neq u} \frac{A_v}{h_v} \left\{ \frac{\phi_u(u)}{L} - j_v^-(u) \right\} \quad (\text{III.16})$$

La aproximación (III.9) para la forma del flujo está contenida en los coeficientes A_v , ρ_v y T_v , por lo que la ecuación (III.16) resulta a su vez una aproximación a la (III.6) para calcular $L_u(u)$. Por este motivo la (III.16) será utilizada para determinar la forma de $L_u(u)$, mientras que su valor promedio L_u será obtenido directamente de la solución global según la ecuación (III.7).

A partir de este punto, el tratamiento es diferente para cada uno de los dos métodos presentados en este capítulo. En el primero de ellos se establece la continuidad de las corrientes parciales sobre los contornos de cada interfase nodal paralela a la dirección u . Estas dos condiciones por dirección y por cara, más la continuidad del valor promedio de las corrientes parciales sobre cada interfase, hacen posible una expansión de segundo orden (parabólica) para $L_u(u)$. Es inmediata la similitud entre este método y los previamente descriptos como APD, con la diferencia que aquí la continuidad de las corrientes parciales tiene

un sentido físico preciso que está ausente en los APD originales. Dejando éstos de lado y para distinguirlo del que a continuación se describe, en toda sucesiva referencia a este método se retendrá el nombre APD.

En el segundo método presentado aquí, se postulan n ecuaciones de continuidad en cada una de las dos direcciones pertenecientes a una dada interfase nodal. Estas n ecuaciones corresponden a la continuidad de los n primeros momentos locales, en cada dirección, de las corrientes parciales normales a dicha interfase. Esto sugiere el nombre de Expansión en Momentos Locales, que será escrito abreviadamente como EML(n), siendo n el orden de la expansión.

III.1 Aproximación parabólica directa:

La distribución de la fuga neta transversal se supone aquí representada por la siguiente expansión cuadrática dentro del nodo N:

$$L_{uN}(u) = L_{uN} P_0(u) + \frac{1}{2} (L_{u+N} - L_{u-N}) P_1(u) + \left\{ \frac{1}{2} (L_{u+N} + L_{u-N}) - L_{uN} \right\} P_2(u) \quad \text{(III.17)}$$

donde:

$$L_{uN} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_{uN}(u) du$$

es el valor promedio de la distribución

$$L_{u\pm N} = L_{uN} (\pm 1)$$

son los valores extremos

$$P_l(u) \quad l = 0, 1, 2$$

es el l -ésimo polinomio de Legendre

De la ecuación (III.7) se obtiene el valor L_{uN} ; las otras dos constantes de expansión $L_{u\pm N}$ se obtienen planteando la

continuidad de las corrientes parciales sobre los lados de las caras $u=\pm 1$. Así, si K es un nodo vecino a N en la dirección v y B indica la cara $u=\pm 1$, se tiene sobre la arista unión de las caras NK y B, las ecuaciones:

$$j_{NKB} = j_{V+BN}^+ = j_{V-BK}^-$$

$$j_{KNB} = j_{V+BN}^- = j_{V-BK}^+$$

Planteando la ecuación (III.13) sobre dicha arista e introduciendo las ecuaciones de continuidad se puede resolver el sistema resultante, obteniendo para j_{KNB} la expresión:

$$j_{KNB} = \frac{T_{VK} j_{VBK}^- + P_{VK} T_{VN} j_{VBN}^-}{1 - P_{VK} P_{VN}} + \frac{1}{4} \frac{A_{VK} \phi_{BK} + P_{VK} A_{VN} \phi_{BN}}{1 - P_{VK} P_{VN}}$$

En el lado izquierdo de esta ecuación la dirección v está implícita en el doble índice KN. Los flujos ϕ_{BK} y ϕ_{BN} que en ella aparecen son los flujos promedio sobre las caras B de ambos nodos, conocidos de la solución al problema global.

Sumando j_{KNB} para ambos vecinos K en la dirección v, se llega a la siguiente ecuación para la corriente parcial entrante a la cara B del nodo N a través de la dirección v:

$$j_{VBN}^- = \sum_{K(v)} a_{KN} j_{VBK}^- + S_{VBN} \quad (\text{III.18})$$

con:

$$a_{KN} = \alpha_{VN} \frac{T_{VK}}{1 - P_{VK} P_{VN}} \quad \alpha_{VN} = \left[1 - T_{VN} \sum_{K(v)} \frac{P_{VK}}{1 - P_{VK} P_{VN}} \right]^{-1} \quad (\text{III.19.a})$$

$$S_{vBN} = \frac{\alpha_{vN}}{4} \sum_{K(v)} \frac{A_{vK} \phi_{BK} + P_{vK} A_{vN} \phi_{BN}}{1 - P_{vK} P_{vN}} \quad (\text{III.19.b})$$

La ecuación global (III.18) de tres puntos para resolver \bar{j}_{vBN} es la equivalente al sistema tridiagonal del método utilizado por Finneinan /2/ para determinar la modulación de la fuga neta transversal.

Una vez resuelta la (III.18) se calculan los valores $L_{u \pm N}$ a partir de la ecuación (III.16) como:

$$L_{u \pm N} = \frac{1}{D_N} \sum_{V \neq u} \frac{A_{vN}}{h_v} \left(\frac{\phi_{BN}}{2} - \bar{j}_{vBN} \right) \quad (\text{III.20})$$

Para los próximos capítulos conviene tener la expresión (III.17) escrita en forma compacta como (omitiendo el índice del nodo):

$$L_u(u) = L_u + \underline{d}_u^T \cdot \underline{P}(u) \quad (\text{III.21})$$

con:

$$\underline{d}_u = \text{col}(L_{u1}, L_{u2}) \quad \underline{P}(u) = \text{col}(P_1(u), P_2(u)) \quad (\text{III.22.a})$$

$$L_{u1} = \frac{1}{2}(L_{u+} - L_{u-}) \quad L_{u2} = \frac{1}{2}(L_{u+} + L_{u-}) - L_u \quad (\text{III.22.b})$$

Usando las ecuaciones (III.7) y (III.20) se tiene para \underline{d}_u :

$$\underline{d}_u = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \sum_{V \neq u} \frac{A_v}{2 h_v} \left(\frac{\phi_u^*}{2} - I_v^{-*} \right) \\ \sum_{V \neq u} \frac{1}{h_v} \left\{ \frac{A_v}{2} \left(\frac{\phi_u}{2} - I_v^- \right) - (j_v^+ - j_v^-) \right\} \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

donde:

$$\phi_u = \phi_{u+} + \phi_{u-} \qquad \bar{I}_v = j_v^-(+1) + j_v^-(-1)$$

$$\phi_u^* = \phi_{u+} - \phi_{u-} \qquad \bar{I}_v^{-*} = j_v^-(-1) - j_v^-(-1)$$

son las componentes simétricas y antisimétricas respectivamente de los semimomentos del flujo y la corriente transversal entrante a la dirección u por la dirección v.

El vector $\underline{\alpha}_u$ puede ser descompuesto en la diferencia $\underline{\alpha}_u^+ - \underline{\alpha}_u^-$, siendo $\underline{\alpha}_u^-$ proporcional a la modulación de la componente entrante de la fuga neta transversal. Esta separación resultará útil en el capítulo VII cuando se analicen los métodos presentados en base a resultados numéricos obtenidos con ellos. Así se tiene:

$$\underline{\alpha}_u^+ = \frac{1}{D} \left[\begin{array}{c} \sum_{v \neq u} \frac{A_v}{h_v} \frac{\phi_u^*}{4} \\ \sum_{v \neq u} \frac{1}{h_v} \left\{ A_v \frac{\phi_u}{4} - j_v^+ + (1-A_v) j_v^- \right\} \end{array} \right] \qquad \text{(III.24.a)}$$

$$\underline{\alpha}_u^- = \frac{1}{D} \left[\begin{array}{c} \sum_{v \neq u} \frac{A_v}{h_v} \frac{\bar{I}_v^{-*}}{2} \\ \sum_{v \neq u} \frac{A_v}{h_v} \left(\frac{\bar{I}_v^-}{2} - j_v^- \right) \end{array} \right] \qquad \text{(III.24.b)}$$

En particular, si las corrientes transversales entrantes a la dirección u tienen una distribución plana, entonces se cumple que $\bar{I}_v^{-*} = 0$ y $\bar{I}_v^- = 2 j_v^-$, con lo cual $\underline{\alpha}_u^-$ se anula.

Antes de pasar a la próxima sección, donde se desarrolla el método EML, conviene resumir los pasos para obtener $L_u(u)$ en el siguiente algoritmo:

- 1) dados los datos del problema se calculan A_{vN} , ρ_{vN} y T_{vN} de las ecuaciones (III.14), y a_{KN} y α_{vN} de las (III.19.a), en todos los grupos y para todos los nodos;
- 2) con los valores más recientes de ϕ_{BN} y de j_{vN}^{\pm} se construye la fuente S_{vBN} según la (III.19.b) y L_{uN} con la (III.7);
- 3) se resuelve j_{vBN}^{-} de la ecuación (III.18);
- 4) se calculan $L_{u\pm N}$ según la (III.20);
- 5) se construyen los elementos de \underline{L}_{uN} de las ecuaciones (III.22).

El paso 1) se hace una sola vez al principio del cálculo y los pasos 2) a 5) se ejecutan antes de calcular la fuente (en cada grupo) de las iteraciones interiores.

III.2 Expansión en momentos locales:

En este método la distribución de la fuga neta transversal está representada por el siguiente desarrollo en polinomios de Legendre:

$$L_{uN}(u) = \sum_{\lambda=0}^L L_{u\lambda N} P_{\lambda}(u) \quad (\text{III.25})$$

Aquí L indica el orden de expansión, que en la convención adoptada se lee $EML(L)$. Los coeficientes $L_{u\lambda N}$ son los momentos locales de la distribución $L_{uN}(u)$, definidos como:

$$L_{u\lambda N} = \frac{2\lambda+1}{2} \int_{-1}^1 P_{\lambda}(u) L_{uN}(u) du \quad (\text{III.26})$$

Introduciendo la ecuación (III.6) para $L_{uN}(u)$ se llega a la siguiente:

$$L_{u|N} = \frac{1}{D_N} \sum_{v \neq u} \frac{1}{h_v} (j_{v|N}^+ - j_{v|N}^-) \quad (\text{III.27})$$

donde la definición de los momentos locales $j_{v|N}^{\pm}$ es similar a la de los $L_{u|N}$. En particular el momento de orden cero viene dado por:

$$j_{v|N}^{\pm} = j_{vN}^{\pm}$$

las cuales son conocidas de la solución al problema global.

Multiplicando las ecuaciones (III.13) por $0.5 \cdot (2l+1) \cdot P_l(u)$ e integrando sobre u , se obtienen las siguientes relaciones entre los l -ésimos momentos locales del flujo y las corrientes transversales:

$$j_{v \pm l}^+ = P_v j_{v \pm l}^- + T_v j_{v l}^- + \frac{1}{4} A_v \phi_{ul} \quad (\text{III.28})$$

Las condiciones de continuidad localizadas sobre las aristas, propias del método APD, son sustituidas aquí por condiciones de tipo integral al requerir que cada momento local de las corrientes transversales sea continuo al atravesar la interfase NK entre los nodos N y K vecinos en la dirección v . Así, para el l -ésimo momento, éstas quedan expresadas como:

$$j_{NKl} = j_{v+lN}^+ = j_{v-lK}^-$$

$$j_{KNl} = j_{v+lN}^- = j_{v-lK}^+$$

Utilizando estas ecuaciones en el sistema (III.28) planteado sobre dicha interfase, se resuelve para j_{KNl} dando:

$$j_{KNL} = \frac{T_{VK} j_{VK}^- + P_{VK} T_{VN} j_{VN}^-}{1 - P_{VK} P_{VN}} + \frac{1}{4} \frac{A_{VK} \phi_{uLK} + P_{VK} A_{VN} \phi_{uLN}}{1 - P_{VK} P_{VN}}$$

Sumando j_{KNL} sobre ambos vecinos K en la dirección v, se obtiene la ecuación de tres puntos para j_{vLN}^- :

$$j_{vLN}^- = \sum_{K(v)} a_{KN} j_{VK}^- + S_{vLN} \quad (III.29)$$

Los coeficientes a_{KN} son los mismos de la ecuación (III.19.a) pues no dependen del grado l del momento local.

El término de fuente viene dado por:

$$S_{vLN} = \frac{\alpha_{vN}}{4} \sum_{K(v)} \frac{A_{VK} \phi_{uLK} + P_{VK} A_{VN} \phi_{uLN}}{1 - P_{VK} P_{VN}} \quad (III.30)$$

con α_{vN} definido en la ecuación (III.19.a).

Una vez calculados los j_{vLN}^- , los momentos locales $L_{u|N}$ de la expansión (III.25) se obtienen a partir de la (III.16) como:

$$L_{u|N} = \frac{1}{D_N} \sum_{v \neq u} \frac{A_{vN}}{h_v} \left(\frac{\phi_{u|N}}{2} - j_{vLN}^- \right) \quad (III.31)$$

Esta expresión será usada para los momentos locales $l=1, \dots, L$, mientras que el momento L_{u0N} será obtenido directamente de la solución global según la ecuación (III.7).

La expresión vectorial equivalente a la (III.21) viene dada ahora por:

$$L_u(u) = L_u + \underline{d}_u^T \cdot \underline{P}(u) \quad (\text{III.32})$$

con:

$$\underline{d}_u = \text{col} (L_{u1}, \dots, L_{uL}) \quad (\text{III.33.a})$$

$$\underline{P}(u) = \text{col} (P_1(u), \dots, P_L(u)) \quad (\text{III.33.b})$$

De la ecuación (III.31) se obtiene:

$$\underline{d}_u = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \sum_{v \neq u} \frac{A_v}{h_v} \left(\frac{\phi_{uv}}{Z} - j_{v1}^- \right) \\ \vdots \\ \sum_{v \neq u} \frac{A_v}{h_v} \left(\frac{\phi_{uv}}{Z} - j_{vL}^- \right) \end{bmatrix} \quad (\text{III.34})$$

el cual puede ser escrito como antes en $\underline{d}_u^+ - \underline{d}_u^-$ según:

$$\underline{d}_u^+ = \frac{1}{ZD} \sum_{v \neq u} \frac{A_v}{h_v} \phi_u \quad (\text{III.35.a})$$

$$\underline{d}_u^- = \frac{1}{D} \sum_{v \neq u} \frac{A_v}{h_v} \underline{j}_v^- \quad (\text{III.35.b})$$

con:

$$\underline{\phi}_u = \text{col} (\phi_{u1}, \dots, \phi_{uL})$$

$$\underline{j}_v^- = \text{col} (j_{v1}^-, \dots, j_{vL}^-)$$

Nuevamente en el caso particular de una distribución plana de las corrientes transversales entrantes a la dirección u , se tiene $j_{v1}^- = 0$ ($1=1, \dots, L$) lo que resulta en $\underline{d}_u^- = \underline{0}$.

Finalmente, el algoritmo para calcular $L_u(u)$ según el método EML consiste en los siguientes pasos:

- 1) calcular los coeficientes A_{vN} , ρ_{vN} , T_{vN} , a_{KN} y α_{vN} de la misma manera que en el paso 1) del método APD;
- 2) con los valores más recientes de $\phi_{u|N}$ ($l=1, \dots, L$) se calcula la fuente $S_{v|N}$ según la ecuación (III.30). En el próximo capítulo se verá cómo calcular los momentos locales $\phi_{u|N}$ a partir de la solución global;
- 3) con los valores más recientes de j_{vN}^{\pm} se calcula L_{uN} según la (III.7);
- 4) se resuelven los $j_{v|N}^{\pm}$ de la ecuación (III.29);
- 5) se calculan de la ecuación (III.31) los momentos $L_{u|N}$, que son directamente los elementos de $\underline{\mathcal{L}}_u$.

Tal como en el método APD, el paso 1) se realiza una sola vez al comienzo del cálculo, mientras que los pasos 2) a 5) son ejecutados dentro de cada grupo antes de calcular la fuente de las iteraciones interiores.

C A P I T U L O I V :

METODOS DE EXPANSION POLINOMICA

IV. METODOS DE EXPANSION POLINOMICA

En este capítulo se describen tres métodos nodales cuya característica común es la manera en que se ataca la resolución de las ecuaciones direccionales (II.4). La técnica consiste en expresar la solución como un desarrollo finito en funciones polinómicas (polinomios de Legendre en este caso), cuyos coeficientes indeterminados serán obtenidos aplicando el método general de residuos ponderados. La solución así obtenida constituye una aproximación a la solución rigurosa que será determinada en el capítulo V.

Las ecuaciones (II.4) contienen, además de la fuga neta transversal, el término heterogéneo de la fuente $Q_u(u)$, el cual será evaluado en base a desarrollos similares a los del flujo en la sección IV.2.

En el tratamiento del problema global es donde se manifiestan las diferencias entre los métodos mencionados. El primero de ellos, desarrollado en la sección IV.3, corresponde a un método de matrices de respuesta obtenido al utilizar las corrientes parciales como variables de acople. Los otros dos restantes en cambio son métodos de malla gruesa, donde las corrientes netas reemplazan a las parciales en el papel del acoplamiento. Dentro de esta similitud, ambos métodos difieren en que en uno de ellos, el llamado método $\psi + \eta$, se intenta explotar la linealidad de la ecuación de transporte para separar en el flujo las contribuciones debidas a fuentes propias del nodo, de las provenientes de las corrientes netas entrantes sobre las interfases.

En todos los métodos se aplica la realimentación no lineal con objeto de reducir el número de incógnitas a una sola por nodo y por grupo. Esta realimentación se introduce de manera diferente en cada uno de los tres métodos, obteniéndose ecuaciones cuyas propiedades de convergencia son analizadas en cada caso.

IV.1 El problema local. Paso 2:

Se trata de encontrar una solución de las ecuaciones direccionales (II.4) basada en las siguientes suposiciones:

$$\phi_u(u) = \sum_{l=0}^L \phi_{ul} P_l(u) \quad (IV.1.a)$$

$$L_u(u) = \sum_{l=0}^{LL} L_{ul} P_l(u) \quad LL \leq L \quad (IV.1.b)$$

$$Q_u(u) = \sum_{l=0}^L q_{ul} P_l(u) \quad (IV.1.c)$$

Estas expresiones representan los desarrollos en momentos locales de las magnitudes respectivas. Estos momentos están definidos formalmente por ecuaciones análogas a la (III.26) para la fuga neta transversal. Los momentos q_{ul} se suponen conocidos por ahora; su derivación se detallará en la sección IV.2.

La solución a las ecuaciones (II.4) debe cumplir con dos condiciones de contorno sobre las caras $u=\pm 1$ del nodo. En condiciones de tipo Dirichlet esto implica conocer los valores $\phi_{u\pm}$; además el momento local de orden cero ϕ_{u0} es el flujo promedio nodal, conocido de la solución al problema global. Por lo tanto hacen falta ecuaciones extra, en número $(L+1)-3 = L-2$, para poder determinar todos los momentos ϕ_{ul} . Estas ecuaciones son obtenidas por el Método General de Residuos Ponderados /12,2/ que en el esquema de Galerkin consiste en anular los momentos superiores de la ecuación (II.4), usando como funciones de peso las mismas de la expansión, es decir los polinomios de Legendre. Así se tiene:

$$\int_{-1}^1 P_p(u) \left\{ -\frac{4D}{h_u^2} \frac{d^2 \phi_u(u)}{du^2} + \sum_r \phi_u(u) + D L_u(u) - Q_u(u) \right\} du = 0 \quad (IV.2)$$

con $p=1, \dots, L-2$. Insertando las expresiones (IV.1) esta ecuación se convierte en:

$$\sum_{l=1}^L \phi_{ul} b_{pl} - \frac{1}{K_u^2} \sum_{l=1}^L \phi_{ul} e_{pl} - \frac{h_u^2}{4} \sum_{l=1}^{L-1} \mathcal{L}_{ul} e_{pl} + \frac{h_u^2}{4D} \sum_{l=1}^L q_{ul} e_{pl} = 0 \quad (\text{IV.3})$$

con el parámetro adimensional K_u^2 definido según:

$$K_u^2 = \frac{4D}{h_u^2 \Sigma_r} \quad (\text{IV.4})$$

y los elementos b_{pl} y e_{pl} dependiendo sólo del conjunto de funciones de peso y expansión:

$$b_{pl} = \int_{-1}^1 P_p(u) \frac{d^2}{du^2} P_l(u) du \quad (\text{IV.5.a})$$

$$e_{pl} = \int_{-1}^1 P_p(u) P_l(u) du = \frac{2}{2l+1} \delta_{pl} \quad (\text{IV.5.b})$$

Valores numéricos de la expresión (IV.5.a) para los primeros órdenes se exponen en el Apéndice I.

Introduciendo notación matricial el sistema de ecuaciones (IV.3) se puede poner:

$$\underline{B} \cdot \underline{\phi}_u - \frac{1}{K_u^2} \underline{E} \cdot \underline{\phi}_u - \frac{h_u^2}{4} \underline{E} \cdot \underline{I}^{(u)} \cdot \underline{\mathcal{L}}_u + \frac{h_u^2}{4D} \underline{E} \cdot \underline{q}_u = \underline{0} \quad (\text{IV.6})$$

con:

$$\underline{B} : \{b_{pl}\} \quad \text{matriz de } [L-2 \times L] \quad (\text{IV.7.a})$$

$$\underline{\phi}_u : \text{col}(\phi_{u1}, \dots, \phi_{uL}) \quad (\text{IV.7.b})$$

$$\underline{\underline{E}} : \{e_{pl}\} \quad \text{matriz de } [L-2 * L] \quad (\text{IV.7.c})$$

$$\underline{\underline{I}}^{(LL)} : \{\delta_{ij}\} \quad \text{matriz de } [L * LL] \quad (\text{IV.7.d})$$

$$\underline{\underline{L}}_u : \text{col}(L_{u1}, \dots, L_{uL}) \quad (\text{IV.7.e})$$

$$\underline{\underline{q}}_u : \text{col}(q_{u1}, \dots, q_{uL}) \quad (\text{IV.7.f})$$

definiendo ahora:

$$\underline{\underline{H}}_u = \underline{\underline{B}} - \frac{1}{K_u^2} \underline{\underline{E}} \quad (\text{IV.8.a})$$

$$\underline{\underline{S}}_u = \underline{\underline{I}}^{(LL)} \cdot \underline{\underline{L}}_u - \frac{1}{D} \underline{\underline{q}}_u \quad (\text{IV.8.b})$$

la ecuación (IV.6) queda expresada:

$$\underline{\underline{H}}_u \cdot \underline{\underline{\phi}}_u - \frac{h_u^2}{4} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{S}}_u = \underline{\underline{0}} \quad (\text{IV.9})$$

La matriz $\underline{\underline{H}}_u$ depende de las propiedades y dimensiones del nodo a través del parámetro K_u^2 ; el vector $\underline{\underline{S}}_u$ contiene el detalle la modulación de la fuente y de la fuga neta transversal.

Escribiendo el vector $\underline{\underline{\phi}}_u$ como $\underline{\underline{\phi}}_{ua} \oplus \underline{\underline{\phi}}_{ub}$, donde $\underline{\underline{\phi}}_{ua} = \text{col}(\phi_{u1}, \phi_{u2})$ y $\underline{\underline{\phi}}_{ub} = \text{col}(\phi_{u3}, \dots, \phi_{uL})$, y separando la matriz $\underline{\underline{H}}_u$ según:

$$\underline{\underline{H}}_u = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{H}}_{ua} & \underline{\underline{H}}_{ub} \end{array} \right]$$

con $\underline{\underline{H}}_{ua}$ de dimensión $[L-2 * 2]$ y $\underline{\underline{H}}_{ub}$ de $[L-2 * L-2]$, la condición de residuos ponderados, ecuación (IV.9), queda expresada de la siguiente manera:

$$\underline{H}_{ua} \cdot \underline{\phi}_{ua} + \underline{H}_{ub} \cdot \underline{\phi}_{ub} - \frac{h_u^2}{4} \underline{E} \cdot \underline{S}_u = 0$$

de la cual es posible despejar $\underline{\phi}_{ub}$ en términos de $\underline{\phi}_{ua}$ como:

$$\underline{\phi}_{ub} = \frac{h_u^2}{4} \underline{N}_u \cdot \underline{S}_u - \underline{M}_u \cdot \underline{\phi}_{ua} \quad (\text{IV.10.a})$$

con las matrices \underline{M}_u y \underline{N}_u definidas según:

$$\underline{N}_u = \underline{H}_{ub}^{-1} \cdot \underline{E} \quad [L-2 * L] \quad (\text{IV.10.b})$$

$$\underline{M}_u = \underline{H}_{ub}^{-1} \cdot \underline{H}_{ua} \quad [L-2 * 2] \quad (\text{IV.10.c})$$

El vector $\underline{\phi}_u$ contiene los momentos locales $l=1, \dots, L$ de la distribución $\phi_u(u)$. De estos L momentos solamente dos son independientes, son los momentos básicos ϕ_{u1} y ϕ_{u2} contenidos en $\underline{\phi}_{ua}$. Los $L-2$ restantes, agrupados en $\underline{\phi}_{ub}$, constituyen los momentos superiores y están vinculados con los básicos por la ecuación (IV.10.a).

La expansión (IV.1.a) para $\phi_u(u)$ puesta en forma vectorial es:

$$\phi_u(u) = \phi_u + \underline{\phi}_u^T \cdot \underline{P}(u)$$

La partición de $\underline{\phi}_u$ en $\underline{\phi}_{ua} \oplus \underline{\phi}_{ub}$ implica una partición similar de $\underline{P}(u)$ en $\underline{P}_a(u) \oplus \underline{P}_b(u)$ tal que:

$$\phi_u(u) = \phi_u + \underline{\phi}_{ua}^T \cdot \underline{P}_a(u) + \underline{\phi}_{ub}^T \cdot \underline{P}_b(u)$$

Eliminando de esta expresión $\underline{\phi}_{ub}$ con ayuda de la ecuación (IV.10.a) se llega a:

$$\phi_u(u) = \phi_u + \underline{\phi}_{ua}^T \cdot \underline{g}_u(u) + \underline{F}_u(u) \quad (\text{IV.11})$$

donde:

$$\underline{g}_u(u) = \underline{P}_a(u) - \underline{M}_u^T \cdot \underline{P}_b(u) = \text{col}(g_{1u}(u), g_{2u}(u)) \quad (\text{IV.12.a})$$

$$F_u(u) = \frac{h_u^2}{4} \underline{S}_u^T \cdot \underline{N}_u^T \cdot \underline{P}_b(u) \quad (\text{IV.12.b})$$

El último paso consiste en relacionar los momentos $\phi_u (= \phi_{u0})$, ϕ_{u1} y ϕ_{u2} con las condiciones de contorno $\phi_{u\pm}$ y el flujo promedio del nodo ϕ . Este último es directamente ϕ_{u0} y para los otros dos momentos vale:

$$\phi_{u\pm} = \phi + \underline{\phi}_{ua}^T \cdot \underline{g}_u(\pm 1) + F_u(\pm 1)$$

Notando que la función $g_{1u}(u)$ es impar en u y que $g_{2u}(u)$ es par (ver Apéndice II), se resuelve para $\underline{\phi}_{ua}$ y después de introducirlo en la ecuación (IV.11) se llega finalmente a:

$$\phi_u(u) = \phi + \frac{1}{2}(\phi_{u+} - \phi_{u-}) G_{1u}(u) + \left\{ \frac{1}{2}(\phi_{u+} + \phi_{u-}) - \phi \right\} G_{2u}(u) + \Delta\phi_u(u) \quad (\text{IV.13.a})$$

$$\Delta\phi_u(u) = F_u(u) - \frac{1}{2}(F_{u+} - F_{u-}) G_{1u}(u) - \frac{1}{2}(F_{u+} + F_{u-}) G_{2u}(u) \quad (\text{IV.13.b})$$

donde $F_{u\pm} = F_u(u=\pm 1)$ y las funciones $G_{1/2u}(u)$ son las $g_{1/2u}(u)$ normalizadas al valor que toman sobre la coordenada $u=+1$. Así:

$$G_{1u}(u) = \frac{g_{1u}(u)}{g_{1u+}} \qquad G_{2u}(u) = \frac{g_{2u}(u)}{g_{2u+}}$$

El término $\Delta\phi_u(u)$ es un término de corrección que, por el vector \underline{S}_u en la definición de $F_u(u)$, tiene en cuenta la distribución de la fuente dentro del nodo y la modulación de la fuga neta transversal a la dirección u . Este término se anula sobre los bordes $u=\pm 1$ del nodo.

La ecuación (IV.13.a) es entonces la solución al problema local. Ella expresa el flujo $\phi_u(u)$ como función de magnitudes conocidas de la solución al problema global.

El conocimiento de los momentos locales del flujo puede ser necesario para evaluar la distribución de la fuga neta transversal, si se usa el método EML, ó para determinar la modulación de la fuente, según se verá en la sección IV.2. De la solución al problema global uno conoce los valores del flujo promedio nodal, ϕ , y del promedio sobre las interfases nodales, $\phi_{u\pm}$. La determinación de los momentos locales a partir de estas cantidades y de las distribuciones conocidas de la fuente y la fuga neta transversal se presenta a continuación.

La ecuación (IV.11) planteada sobre los extremos $u=\mp 1$ queda:

$$\phi_{u\mp} = \phi + \underline{\phi_{ua}}^T \cdot \underline{g_u(\mp 1)} + F_{u\mp}$$

la cual se puede expresar vectorialmente como:

$$\underline{\phi_{uB}} = \phi \underline{U} + \underline{g_u} \cdot \underline{\phi_{ua}} + \underline{F_{uB}} \quad (IV.14)$$

donde:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \text{col}(1, 1) \\ \underline{\phi_{uB}} &= \text{col}(\phi_{u-}, \phi_{u+}) \\ \underline{F_{uB}} &= \text{col}(F_{u-}, F_{u+}) \end{aligned} \quad \underline{g_u} = \begin{bmatrix} \leftarrow \underline{g_u^{(-1)}} \rightarrow \\ \leftarrow \underline{g_u^{(+1)}} \rightarrow \end{bmatrix}$$

Despejando $\underline{\phi_{ua}}$ de la ecuación (IV.14) se obtiene:

$$\underline{\phi_{ua}} = \underline{g_u}^{-1} \cdot (\underline{\phi_{uB}} - \phi \underline{U}) - \underline{g_u}^{-1} \cdot \underline{F_{uB}} \quad (IV.15)$$

Esta es la relación buscada. De ella se obtienen los momentos locales básicos, mientras que los momentos superiores están relacionados con éstos por la condición (IV.10.a) de los residuos ponderados.

IV.2 Modulación de la fuente:

Para hallar la solución al problema local se introdujo, para la fuente $Q_u(u)$, un desarrollo en polinomios de Legendre del mismo orden (L) que para el flujo. La evaluación de los coeficientes q_{u1} del desarrollo se reduce a multiplicar la ecuación direccional para $Q_u(u)$ por $0.5 \cdot (2l+1) \cdot P_l(u)$, e integrarla entre -1 y 1 transformándola en un conjunto de L+1 ecuaciones que relacionan los coeficientes q_{u1} con los momentos locales del flujo ϕ_{u1} . De las ecuaciones (I.2) y (II.5.b) se tiene:

$$Q_{ug}(u) = \sum_{g' \neq g} \Sigma_{sg'g} \phi_{ug'}(u) + \frac{1}{K_{eff}} \chi_g \sum_{g'} \nu \Sigma_{fg'} \phi_{ug'}(u) \quad (IV.16)$$

que será escrita abreviadamente como:

$$Q_{ug}(u) = \sum_{g'} \Sigma_{g'g}^{eff} \phi_{ug'}(u) \quad (IV.17.a)$$

con:

$$\Sigma_{g'g}^{eff} = (1 - \delta_{g'g}) \Sigma_{sg'g} + \frac{1}{K_{eff}} \chi_g \nu \Sigma_{fg'} \quad (IV.17.b)$$

Operando con la ecuación (IV.17.a) según se explicó más arriba, se llega a:

$$q_{ugl} = \sum_{g'} \Sigma_{g'g}^{eff} \phi_{ug'l} \quad (IV.18)$$

Por lo tanto la evaluación de los momentos locales de la fuente en una determinada dirección requiere el conocimiento de los momentos locales del flujo en esa dirección y en todos los grupos.

Expansión alternativa de cuarto grado:

Si no se desea evaluar explícitamente los momentos locales del flujo, es posible expandir la fuente en un desarrollo de cuarto grado, usando directamente la solución del problema global. Este desarrollo es exacto siempre que el orden L de expansión del flujo sea < 4 . Las magnitudes necesarias para el desarrollo son el flujo promedio nodal ϕ y valores sobre los contornos que, según el esquema en que se resuelva el problema global, serán el flujo y la corriente neta ó las corrientes parciales entrantes y salientes. La idea es reproducir los valores de la fuente y sus derivadas sobre los contornos, y el promedio nodal.

Se tiene entonces:

$$Q_g = \sum_{g'} \Sigma_{g'g}^{eff} \phi_{g'} \quad (IV.19.a)$$

$$Q_{u\pm g} = \sum_{g'} \Sigma_{g'g}^{eff} \phi_{u\pm g'} = 2 \sum_{g'} \Sigma_{g'g}^{eff} (j_{u\pm}^+ + j_{u\pm}^-)_{g'} \quad (IV.19.b)$$

$$\begin{aligned} Q'_{u\pm g} &= \left. \frac{d Q_{ug}(u)}{d h_u} \right|_{u=\pm 1} = -\frac{h_u}{2} \sum_{g'} \Sigma_{g'g}^{eff} \frac{J_{u\pm g'}}{D_{g'}} \\ &= \frac{h_u}{2} \sum_{g'} \Sigma_{g'g}^{eff} \frac{(j_{u\pm}^- - j_{u\pm}^+)_{g'}}{D_{g'}} \end{aligned} \quad (IV.19.c)$$

En términos de estas magnitudes el desarrollo queda expresado:

$$Q_u(u) = \sum_{l=0}^4 q_{ul} P_l(u) \quad (IV.20)$$

con:

$$q_{u0} = Q \quad (\text{IV.21.a})$$

$$q_{u3} = \frac{1}{10} \left\{ (Q'_{u+} - Q'_{u-}) - (Q_{u+} - Q_{u-}) \right\} \quad (\text{IV.21.b})$$

$$q_{u4} = \frac{1}{7} \left\{ \frac{1}{2} (Q'_{u+} + Q'_{u-}) + 3 \left(Q - \frac{1}{2} (Q_{u+} + Q_{u-}) \right) \right\} \quad (\text{IV.21.c})$$

$$q_{u1} = \frac{1}{2} (Q'_{u+} - Q'_{u-}) - 6 q_{u3} \quad (\text{IV.21.d})$$

$$q_{u2} = \frac{1}{6} \left\{ (Q'_{u+} + Q'_{u-}) - 20 q_{u4} \right\} \quad (\text{IV.21.e})$$

IV.3 El problema global con matrices de respuesta:

El esquema de matrices de respuesta para resolver el problema global resulta de utilizar las corrientes parciales promediadas sobre las interfases, como variables de acople entre los distintos nodos del sistema. Por lo tanto primero es necesario determinar la relación entre las corrientes parciales entrantes y salientes de cada nodo, a partir de la solución al problema local, ecuación (IV.13.a). La expresión matemática que refleja esta relación se llama ecuación de respuesta, y su deducción se describe a continuación.

La ecuación de respuesta nodal:

De las ecuaciones (I.3) y la ley de Fick, expresada según la ecuación (III.8), se obtiene:

$$j_{u\pm}^+ - j_{u\pm}^- = - \frac{2D}{h_u} \left. \frac{d\phi_u(u)}{du} \right|_{u=\pm l} \quad (\text{IV.22})$$

con la derivada en el sentido de la normal saliente. Tomando la solución al problema local, ecuación (IV.13.a), la anterior se convierte en:

$$j_{u\pm}^+ - j_{u\pm}^- = - d_u \left\{ \pm (j_u^{+*} + j_u^{-*}) t_u + (j_u^+ + j_u^- - \phi) x_u \right\} - d_u \left. \frac{d \Delta \phi_u(u)}{dn_u} \right|_{u=\pm 1} \quad (\text{IV.23})$$

donde se han utilizado las relaciones (I.3) para expresar los flujos sobre los contornos en función de las corrientes parciales, la definición (III.14.a) del coeficiente de difusión dimensional d_u , la convención de corrientes simétricas j_u^\pm y antisimétricas $j_u^{*\pm}$ introducida en las ecuaciones (III.5), y las propiedades de paridad de las funciones $G_{1/2u}$, que definen las magnitudes t_u y x_u de la siguiente manera:

$$t_u = \left. \frac{d G_{1u}(u)}{dn_u} \right|_{u=+1} = - \left. \frac{d G_{1u}(u)}{dn_u} \right|_{u=-1} \quad (\text{IV.24.a})$$

$$x_u = \left. \frac{d G_{2u}(u)}{dn_u} \right|_{u=+1} = \left. \frac{d G_{2u}(u)}{dn_u} \right|_{u=-1} \quad (\text{IV.24.b})$$

El término en $\Delta \phi_u(u)$ de la ecuación (IV.23) puede ser evaluado según las ecuaciones (IV.12) y (IV.13) con la introducción del vector \underline{W}_u , de L-2 componentes, definido por:

$$\underline{W}_u(\pm 1) = - \frac{D h_u}{2} \tilde{N}_u^T \left\{ \left. \frac{d P_b(u)}{dn_u} \right|_{u=\pm 1} \mp \frac{(P_b(1) - P_b(-1))}{2} t_u - \frac{(P_b(1) + P_b(-1))}{2} x_u \right\} \quad (\text{IV.25})$$

para dar:

$$- d_u \left. \frac{d \Delta \phi_u(u)}{dn_u} \right|_{u=\pm 1} = \underline{S}_u^T \cdot \underline{W}_u(\pm 1) \quad (\text{IV.26})$$

La ecuación de balance nodal establece la siguiente relación entre los valores promedio del flujo, las fuentes y las corrientes sobre las interfases:

$$\sum_v \frac{1}{h_v} (j_v^+ - j_v^-) + \sum_r \phi = Q \quad (\text{IV.27})$$

Esta ecuación puede obtenerse promediando la ecuación (II.4) sobre u y utilizando las relaciones (III.7) y (III.8). Con ella se puede eliminar el flujo ϕ de la ecuación (IV.23) obteniéndose:

$$j_{u\pm}^+ - j_{u\pm}^- = \mp d_u t_u (j_u^{+*} + j_u^{-*}) - d_u X_u (j_u^+ + j_u^-) + \frac{d_u X_u}{\Sigma_r} Q - \frac{d_u X_u}{\Sigma_r} \sum_v \frac{1}{h_v} (j_v^+ - j_v^-) + \underline{S_u^T} \cdot \underline{W_u}(\pm 1) \quad (\text{IV.28})$$

Estas son dos ecuaciones para las corrientes parciales en $u=+1$ y $u=-1$. Sumándolas y restándolas se llega al siguiente par de ecuaciones para las componentes simétrica y antisimétrica en la dirección u :

$$j_u^+ - j_u^- = -\beta_u j_u^+ - \beta_u j_u^- + \frac{\beta_u}{\Sigma_r} Q - \frac{\beta_u}{\Sigma_r} \sum_v \frac{1}{h_v} (j_v^+ - j_v^-) + \underline{S_u^T} \cdot \underline{W_u} \quad (\text{IV.29.a})$$

$$j_u^{+*} - j_u^{-*} = -\alpha_u j_u^{+*} - \alpha_u j_u^{-*} + \underline{S_u^T} \cdot \underline{W_u}^* \quad (\text{IV.29.b})$$

con las magnitudes adimensionales α_u y β_u definidas por:

$$\alpha_u = 2 d_u t_u \quad \beta_u = 2 d_u X_u \quad (\text{IV.30})$$

y las componentes simétrica y antisimétrica para $\underline{W_u}(u)$ convencionalmente según:

$$\underline{W_u} = \underline{W_u}(+1) + \underline{W_u}(-1) \quad \underline{W_u}^* = \underline{W_u}(+1) - \underline{W_u}(-1)$$

La ecuación (IV.29.a) muestra que la componente simétrica la corriente neta (J_u) está formada por las contribuciones simétricas del flujo sobre los contornos ($\beta_u \phi_u / 2$), de las fuentes del nodo (Q), de las corrientes netas en todas las direcciones ($\sum_v \frac{1}{h_v} J_v$) y de una componente heterogénea simétrica ($\underline{S}_u \cdot \underline{W}_u$) que tiene en cuenta la modulación de las fuentes y de las corrientes sobre las interfaces nodales. En el caso de la ecuación (IV.29.b), a la componente antisimétrica de la corriente neta (J_u^*) no contribuyen la fuente promedio ni las corrientes netas en otras direcciones.

Las ecuaciones (IV.29) valen para cada dirección espacial; para resolver el sistema y obtener las corrientes salientes (simétricas y antisimétricas) en función de las entrantes, conviene introducir la notación matricial. Así:

$$\underline{j}^+ - \underline{j}^- = -\underline{B} \cdot \underline{j}^+ - \underline{B} \cdot \underline{j}^- + 2Q\underline{x} - \underline{K} \cdot \underline{j}^+ + \underline{K} \cdot \underline{j}^- + \underline{W} \cdot \underline{S} \quad (IV.31.a)$$

$$\underline{j}^{+*} - \underline{j}^{-*} = -\underline{A} \cdot \underline{j}^{+*} - \underline{A} \cdot \underline{j}^{-*} + \underline{W}^* \cdot \underline{S} \quad (IV.31.b)$$

donde:

$$\underline{j}^\pm = \text{col} (j_u^\pm, j_v^\pm, j_w^\pm) \quad \underline{j}^{\pm*} = \text{col} (j_u^{\pm*}, j_v^{\pm*}, j_w^{\pm*}) \quad (IV.32.a)$$

$$\underline{x} = \text{col} \left(\frac{\beta_u}{2\Sigma_r}, \frac{\beta_v}{2\Sigma_r}, \frac{\beta_w}{2\Sigma_r} \right) \quad \underline{S} = \text{col} (\underline{S}_u, \underline{S}_v, \underline{S}_w) \quad (IV.32.b)$$

$$\underline{A} = \text{diag} (\alpha_u, \alpha_v, \alpha_w) \quad \underline{B} = \text{diag} (\beta_u, \beta_v, \beta_w) \quad (IV.32.c)$$

$$\underline{K} = \frac{1}{\Sigma_r} \underline{B} \cdot \frac{1}{\underline{h}} \cdot \underline{h}^{-1} \quad \underline{h} = \text{diag} (h_u, h_v, h_w) \quad (IV.32.d)$$

$$\underline{W}^* = \begin{bmatrix} \underline{W}_u^{*T} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{W}_v^{*T} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{W}_w^{*T} \end{bmatrix} \quad \underline{W} = \begin{bmatrix} \underline{W}_u^T & 0 & 0 \\ 0 & \underline{W}_v^T & 0 \\ 0 & 0 & \underline{W}_w^T \end{bmatrix} \quad (IV.32.e)$$

Resolviendo ahora el sistema (IV.31) se llega a:

$$\underline{j}^+ = \underline{B} \cdot \underline{j}^- + 2Q\underline{\pi} + \underline{j}^o \quad (\text{IV.33.a})$$

$$\underline{j}^{+*} = \underline{P} \cdot \underline{j}^{-*} + \underline{j}^{o*} \quad (\text{IV.33.b})$$

con:

$$\underline{B} = (\underline{I} + \underline{B} + \underline{K})^{-1} \cdot (\underline{I} - \underline{B} + \underline{K}) \quad \underline{I} = \text{diag}(1, 1, 1) \quad (\text{IV.34.a})$$

$$\underline{P} = (\underline{I} + \underline{A})^{-1} \cdot (\underline{I} - \underline{A}) \quad (\text{IV.34.b})$$

$$\underline{\pi} = (\underline{I} + \underline{B} + \underline{K})^{-1} \cdot \underline{X} \quad (\text{IV.34.c})$$

$$\underline{j}^o = (\underline{I} + \underline{B} + \underline{K})^{-1} \cdot \underline{W} \cdot \underline{S} \quad (\text{IV.34.d})$$

$$\underline{j}^{o*} = (\underline{I} + \underline{B} + \underline{K})^{-1} \cdot \underline{W}^* \cdot \underline{S} \quad (\text{IV.34.e})$$

Las ecuaciones (IV.33) son las ecuaciones de respuesta para las corrientes simétricas y antisimétricas respectivamente. Las corrientes parciales sobre una determinada cara se obtienen a partir de estas magnitudes, de la siguiente manera:

$$\underline{j}_{\mp}^+ = \frac{1}{2} (\underline{j}_{\mp}^+ + \underline{j}_{\mp}^{+*}) \quad (\text{IV.35})$$

Introduciendo en esta ecuación las expresiones (IV.33) resulta:

$$\underline{j}_{\mp}^+ = \underline{P} \cdot \underline{j}_{\mp}^- + \underline{Q} \cdot \underline{j}^- + \underline{\pi} \cdot Q + \underline{j}_{\mp}^o \quad (\text{IV.36})$$

siendo ζ resultado de la combinación de las matrices de reflexión de las corrientes simétrica y antisimétrica:

$$\zeta = \frac{1}{2} (\tilde{R} - \tilde{P}) \quad (\text{IV.37})$$

Como los elementos de respuesta se definen por neutrón entrante y por neutrón nacido en el sistema (y no por unidad de corriente entrante y de fuente), las transmisiones y la probabilidad de escape se expresan como:

$$\underline{t} = \underline{h}^{-1} \zeta \underline{h} \quad (\text{IV.38.a})$$

$$\underline{p} = \underline{h}^{-1} \underline{\pi} \quad (\text{IV.38.b})$$

En términos de estas magnitudes, la ecuación (IV.36) queda:

$$\underline{j}_{\mp}^{+} = \underline{p} \cdot \underline{j}_{\mp}^{-} + \underline{h} \cdot \underline{t} \cdot \underline{h}^{-1} \underline{j}_{\mp}^{-} + \underline{h} \cdot \underline{p} \underline{Q} + \underline{j}_{\mp}^{\circ} \quad (\text{IV.39})$$

Esta es la buscada ecuación de respuesta nodal. La corriente promedio saliente por una determinada cara del nodo está formada por:

- a) los neutrones que entrando al nodo por dicha cara son directamente reflejados en ella (\underline{p}),
- b) los que entrando por cualquier cara son transmitidos a través del nodo y salen por la cara en cuestión (\underline{t}),
- c) los que nacen en el nodo de una fuente uniformemente distribuída y fugan de él (\underline{p}),
- d) una contribución heterogénea $\underline{j}_{\mp}^{\circ}$ actuando como un término de corrección que tiene en cuenta la distribución de las fuentes dentro del nodo, y la modulación de las corrientes sobre las interfases nodales.

Los elementos \underline{p} , \underline{t} y \underline{p} no se corresponden con la teoría de matrices de respuesta de orden cero /5,10,13/ como pareciera sugerir la ecuación (IV.39). La razón de esta diferencia es porque estos elementos son insensibles a la modulación de las corrientes parciales salientes, la cual está incluida junto con la de las corrientes entrantes en el término heterogéneo \underline{j}_T^0 . En base a la descomposición hecha en el capítulo III del vector \underline{d}_u (conteniendo la modulación de la fuga neta transversal) en $\underline{d}_u^+ - \underline{d}_u^-$, es posible derivar las magnitudes \underline{p} , \underline{t} y \underline{p} incluyendo la modulación \underline{d}_u^+ . De esta manera ante una irradiación plana sobre cualquiera de las caras se tiene $\underline{d}_u^- = 0$, el término de corrección correspondiente \underline{j}_T^0 se anula (suponiendo que la distribución de las fuentes en el nodo es plana) y la respuesta es solamente función de \underline{p} , \underline{t} y \underline{p} , que ahora sí son las verdaderas magnitudes de respuesta de orden cero. La razón por la cual no se ha derivado de esta manera la ecuación (IV.39), es porque la inclusión de la modulación \underline{d}_u^+ en los elementos de respuesta es diferente según el modelo que se utilice para la fuga neta transversal, mientras que la presente derivación es válida para cualquier modelo. De todas maneras, cuando en el capítulo VII se analicen los resultados numéricos obtenidos con los diversos métodos, se indicarán las expresiones de \underline{p} y \underline{t} con \underline{d}_u^+ incluida para comparar numéricamente los dos modelos propuestos para la distribución de la fuga neta transversal.

Realimentación no lineal y sintetización:

La ecuación (IV.39)

planteada en la cara izquierda de la dirección u queda:

$$\underline{j}_{u-}^+ = \rho_u \underline{j}_{u-}^- + h_u \sum_v t_{vu} \frac{\underline{j}_v^-}{h_v} + h_u \rho_u Q + \underline{j}_{u-}^0 \quad (\text{IV.40})$$

donde ρ_u es el coeficiente de reflexión para la dirección u , que no debe ser confundido con el de la ecuación (III.14.b) obtenido para modelar la fuga neta transversal. Si bien tiene el mismo sentido, es decir es también un coeficiente de reflexión directa, la diferencia está en que éste fue obtenido suponiendo el flujo expandido en un polinomio de segundo grado, mientras que el de la ecuación (IV.40) se corresponde con la expansión L -ésima para el flujo $\phi_u(u)$. Verdaderamente, si $L=2$ entonces $t_u=1$ (ver Apéndice II) y $\alpha_u=2d_u$, ecuación (IV.30), con lo cual ambos ρ_u coinciden. Como no se usan simultáneamente, designar ambos con la misma letra no se presta a confusiones y simplifica la notación.

Dentro de la sumatoria de la ecuación (IV.40), t_{vu} es la componente de la matriz \underline{t} que representa la transmisión de la dirección v a la u .

Las corrientes simétricas \bar{J}_v son las incógnitas ó variables del problema nodal, tal como se lo ha presentado hasta aquí. Esto es consecuencia de haber supuesto nodos homogéneos; de no haber sido así, las variables serían 6 por nodo y por grupo: las corrientes entrantes por cada cara del nodo. En el esquema de matrices de respuesta adoptado en esta sección, para pasar de tres variables (por nodo y por grupo) a una sola, es condición suficiente que la matriz de respuesta de la ecuación (IV.40) sea una matriz sintética, es decir que sus elementos t_{vu} sean factorizables en el producto $\gamma_v \cdot r_{vu}$. Sin embargo la matriz de respuesta para nodos rectangulares no es sintética /13/, por lo cual se recurre a la realimentación no lineal para lograr esta "sintetización".

Las transmisiones originales se descomponen en el producto de dos factores:

$$t_{vu} = \gamma_v \cdot r_{vu} \quad (\text{IV.41.a})$$

con:

$$\mu_v = 2 \sum_w t_{vw} \quad r_{vu} = \frac{t_{vu}}{\mu_v} \quad (\text{IV.41.b})$$

Así μ_v es el número de neutrones que abandonan el nodo en todas las direcciones, por neutrón entrante al mismo desde la dirección v ; r_{vu} es el factor de distribución de fugas, es decir la probabilidad de que los μ_v neutrones que van a abandonar el nodo lo hagan por una de las dos caras extremas de la dirección u . Entonces r_{vu} está normalizado tal que:

$$2 \sum_u r_{vu} = 1 \quad (\text{IV.42})$$

En función de estas magnitudes, el término de la sumatoria en la ecuación (IV.40) se escribe como:

$$h_u \sum_v \mu_v r_{vu} \frac{j_v^-}{h_v} \quad (\text{IV.43})$$

e introduciendo ahora los factores de distribución de fuga equivalentes, definidos por:

$$r_u = \frac{\sum_v \mu_v r_{vu} \frac{f_v}{h_v}}{\sum_v \mu_v \frac{f_v}{h_v}} \quad (\text{IV.44})$$

con:

$$f_v = \frac{j_v^-}{\sum_w j_w^-} \quad (\text{IV.45})$$

el término (IV.43) queda expresado como:

$$h_u r_u \sum_v \mu_v \frac{j_v^-}{h_v} \quad (\text{IV.46})$$

Los factores de realimentación no lineal de la ecuación (IV.45) (ó también factores de forma) están acotados por ser definidos positivos y porque su suma debe ser igual a la unidad:

$$\sum_v f_v = 1 \quad (\text{IV.47})$$

La introducción de la realimentación no lineal ha permitido obtener un factor de distribución de fugas que es función única de la dirección de salida, r_u de la ecuación (IV.44). Estos factores cumplen también con la normalización (IV.42); con ellos es posible hacer la transformación:

$$h_u \sum_v t_{vu} \frac{j_v^-}{h_v} = h_u r_u \sum_v \mu_v \frac{j_v^-}{h_v} \quad (\text{IV.48})$$

y así agrupar las tres variables originales j_v^- en una única variable M , de ahora en más la variable nodal, definida como la siguiente combinación de las j_v^- :

$$M = \sum_v \mu_v \frac{j_v^-}{h_v} \quad (\text{IV.49})$$

Esta variable M tiene un significado físico preciso: es la cantidad de neutrones que abandonan el nodo habiendo entrado al mismo desde todas las direcciones.

Con la introducción de esta nueva variable, la ecuación de respuesta (IV.40) queda ahora:

$$j_{u-}^+ = p_u j_{u-}^- + h_u r_u M + h_u p_u Q + j_{u-}^0 \quad (\text{IV.50})$$

con r_u jugando para M el mismo papel que la probabilidad de escape p_u para la fuente promedio Q .

En resumen, en esta sección se ha reducido el número de incógnitas a una sola por nodo y por grupo, tal como hubiera ocurrido de haber tratado con una matriz de respuesta originalmente sintética. Desde este punto de vista la introducción de la realimentación no lineal equivale a una sintetización de dicha

matriz. Sin embargo ésta todavía conserva su carácter general de no sintética pues, con los r_u definidos por la ecuación (IV.44), la condición $t_{vu} = M_v r_u$ se cumple solamente para la distribución de corrientes (es decir, los factores f_v) con que fue calculado r_u , siendo $t_{vu} \neq M_v r_u$ para cualquier otra distribución. Por lo tanto la condición de sintética se fuerza utilizando un valor de r_u para cada situación particular, es decir uno para cada nodo y para cada grupo. Como los coeficientes r_u están unívocamente determinados por los factores f_v de realimentación no lineal, resulta que todavía siguen siendo tres las incógnitas del problema: la variable nodal M y dos de los factores f_v (el tercero se obtiene de la condición (IV.47) de normalización). Pero estos factores se calculan en un lazo exterior a las iteraciones sobre M , manteniéndose fijos durante éstas y reduciendo entonces en un factor 3 las necesidades de memoria rápida.

Acoplamiento y fórmula de 7 puntos:

Escribiendo la ecuación de respuesta (IV.50) para dos nodos N y K vecinos en la dirección u , se obtiene:

$$j_{u+N}^+ = p_{uN} j_{u+N}^- + h_u r_{uN} M_N + h_u p_{uN} Q_N + j_{NK}^0 \quad (\text{IV.51.a})$$

$$j_{u-K}^+ = p_{uK} j_{u-K}^- + h_u r_{uK} M_K + h_u p_{uK} Q_K + j_{KN}^0 \quad (\text{IV.51.b})$$

La continuidad de las corrientes parciales promediadas sobre la interfase NK establece:

$$j_{NK} = j_{u+N}^+ = j_{u-K}^-$$

$$j_{KN} = j_{u+N}^- = j_{u-K}^+$$

Introduciendo estas expresiones en las ecuaciones (IV.51) y resolviendo para j_{KN} , se llega a:

$$j_{KN} = \frac{h_u \gamma_{uK} M_K + h_u \rho_{uK} Q_K + j_{KN}^0}{1 - \rho_{uN} \rho_{uK}} + \frac{\rho_{uK} (h_u \gamma_{uN} M_N + h_u \rho_{uN} Q_N + j_{NK}^0)}{1 - \rho_{uN} \rho_{uK}} \quad (\text{IV.52})$$

Una ecuación similar se obtiene para j_{NK} . De esta ecuación se puede ver que la corriente que en la interfase NK va del nodo K al nodo N, está compuesta por:

- a) los neutrones que habiendo entrado al nodo K desde todas las direcciones, fugan de él en dirección al nodo N: $h_u \gamma_{uK} M_K$, más los que nacidos de una fuente uniformemente distribuida en K fugan hacia N: $h_u \rho_{uK} Q_K$, más la contribución de la corriente heterogénea j_{KN}^0
- b) los mismos mecanismos descritos en a) ocurren desde el nodo N hacia el K y son directamente reflejados de vuelta hacia el nodo N con un factor ρ_{uK} en la frontera internodal.

Estas dos contribuciones de primer cruce del numerador de la ecuación (IV.52) están amplificadas por el factor $(1 - \rho_{uK} \rho_{uN})^{-1}$, que contabiliza las múltiples reflexiones ocurridas en la interfase NK.

Multiplicando la ecuación (IV.52) por μ_{uN} , dividiéndola por h_u y sumándola sobre todos los vecinos K del nodo N, se llega finalmente a la ecuación de 7 puntos para M (la llamada ecuación nodal):

$$M_N = \sum_K A_{KN} M_K + S_N \quad (\text{IV.53})$$

donde:

$$A_{KN} = \lambda_N \frac{\mu_{uN}}{1 - \rho_{uN} \rho_{uK}} \gamma_{uK} \quad \lambda_N = \left[1 - \sum_K \frac{\mu_{uN} \rho_{uK}}{1 - \rho_{uN} \rho_{uK}} \gamma_{uN} \right]^{-1} \quad (\text{IV.54.a})$$

$$S_N = \lambda_N \sum_K \frac{M_{uN}}{1 - P_{uN} P_{uK}} \left\{ p_{uK} Q_K + \frac{j_{KN}^0}{h_u} + P_{uK} \left(p_{uN} Q_N + \frac{j_{NK}^0}{h_u} \right) \right\} \quad (\text{IV.54.b})$$

Una vez resuelta la ecuación (IV.53) se obtiene el valor de M para todos los nodos, y de éstos se calculan las corrientes parciales según la ecuación (IV.52). Falta determinar el valor promedio del flujo en el nodo, y para ello se recurre al balance, ecuación (IV.27). Usando la ecuación (IV.50), se tiene para las componentes simétricas:

$$j_u^+ = P_u j_u^- + 2 h_u v_u M + 2 h_u p_u Q + j_u^0$$

con lo cual:

$$\phi = \frac{1}{\Sigma_r} \left\{ Q \left(1 - 2 \sum_u p_u \right) + \sum_u (1 - P_u) \frac{j_u^-}{h_u} - M - \sum_u \frac{j_u^0}{h_u} \right\}$$

De la definición de M, ecuación (IV.49), resulta:

$$\sum_u (1 - P_u) \frac{j_u^-}{h_u} - M = \sum_u (1 - P_u - M_u) \frac{j_u^-}{h_u} = \sum_u \Gamma_u \frac{j_u^-}{h_u} \quad (\text{IV.55})$$

siendo Γ_u la probabilidad de absorción para neutrones entrantes al nodo por la dirección u.

Introduciendo la probabilidad de absorción para los neutrones nacidos de fuentes uniformemente distribuidas dentro del nodo:

$$\sigma = 1 - 2 \sum_u p_u \quad (\text{IV.56})$$

la expresión final para el flujo promedio queda:

$$\phi = \frac{1}{\Sigma_r} \left\{ \sigma Q + \sum_u \Gamma_u \frac{j_u^-}{h_u} - \sum_u \frac{j_u^0}{h_u} \right\} \quad (\text{IV.57})$$

y con ésta queda completa la solución al problema global.

Condiciones de contorno:

Siguiendo el método de la referencia 10, se trata de rodear al sistema con nodos externos "reflectores" r definiendo sus parámetros de manera tal que se reproduzcan las deseadas condiciones de contorno cuando algún vecino K de la ecuación (IV.53) corresponda a uno de estos nodos. Designando por p un nodo periférico del sistema, la corriente de r a p queda expresada, según la ecuación (IV.51):

$$j_{rp} = p_{ur} j_{pr} + h_u v_{ur} M_r + h_u p_{ur} Q_r + j_{rp}^{\circ} \quad (IV.58)$$

donde p_{ur} es la componente diagonal correspondiente al grupo g de la matriz de albedos:

$$p_{ur} = a_{gg} \quad (IV.59)$$

y para los términos restantes se adopta uno de los tres siguientes conjuntos alternativos:

$$v_{ur} = \frac{1}{h_u} ; \quad M_r = j^{\text{ext}} ; \quad Q_r = 0 ; \quad j_{rp}^{\circ} = 0 \quad (IV.60.a)$$

$$p_{ur} = \frac{1}{h_u} ; \quad M_r = 0 ; \quad Q_r = j^{\text{ext}} ; \quad j_{rp}^{\circ} = 0 \quad (IV.60.b)$$

$$M_r = 0 ; \quad Q_r = 0 ; \quad j_{rp}^{\circ} = j^{\text{ext}} \quad (IV.60.c)$$

con:

$$j_g^{\text{ext}} = \sum_{g' \neq g} a_{g'g} j_{prg'} \quad (IV.60.d)$$

Para la condición de contorno particular de anular el flujo sobre el borde exterior del reactor, se puede usar el siguiente conjunto:

$$P_{ur} = -1 \quad ; \quad M_r = Q_r = j_{rp}^0 = 0 \quad (IV.61)$$

Conjuntos similares a las ecuaciones (IV.60) y (IV.61) se aplican como condiciones de contorno para la determinación de la modulación de la fuga neta transversal en cualquiera de los dos métodos detallados en el capítulo III. Referidos a las ecuaciones (III.13), ellos son:

$$P_{vr} = Q_{gg} \quad ; \quad T_{vr} = 1 \quad ; \quad j_{vrx}^- = j_x^{ext} \quad ; \quad \phi_{rx} = 0 \quad (IV.62.a)$$

$$P_{vr} = Q_{gg} \quad ; \quad A_{vr} = 4 \quad ; \quad j_{vrx}^- = 0 \quad ; \quad \phi_{rx} = j_x^{ext} \quad (IV.62.b)$$

con:

$$j_{gx}^{ext} = \sum_{g' \neq g} a_{g'g} j_{prg'x} \quad (IV.62.c)$$

Las magnitudes j_{vr}^- , ϕ_r y j_x^{ext} de las ecuaciones (IV.62) contienen el subíndice x que refiere a una cara nodal ó al orden de un momento local, según se trate del método APD ó EML.

Finalmente, para el caso de condiciones de flujo nulo sobre el contorno del reactor, se tienen las siguientes expresiones equivalente a la (IV.61):

$$P_{vr} = -1 \quad ; \quad j_{vrx}^- = \phi_{rx} = 0 \quad (IV.63)$$

Sumario del algoritmo:

A continuación se sugiere el camino para obtener los flujos nodales promedio, según el esquema de matrices de respuesta presentado en esta sección. Partiendo de los

valores (conocidos de la iteración previa ó estimados) de los momentos del flujo (ϕ_{u1}), los pasos necesarios son:

- 1) se calcula \underline{Q}_{uN} según alguno de los métodos descritos en el capítulo III;
- 2) se calculan \underline{q}_{uN} y $Q_N (=q_{uON})$ de la ecuación (IV.18);
- 3) se evalúa \underline{S}_{uN} según la (IV.8.b);
- 4) se obtienen las corrientes heterogéneas j_{KN}^o a partir de las ecuaciones (IV.34) y (IV.35);
- 5) se evalúan los r_{uN} según la (IV.44);
- 6) se calculan los coeficientes A_{KN} y la fuente S_N de las ecuaciones (IV.54);
- 7) se resuelve M_N de la (IV.53);
- 8) se construye j_{KN} de la (IV.52) y los f_{uN} de (IV.45);
- 9) se obtiene ϕ_N de la (IV.57).

Estos pasos se ejecutan para cada grupo del esquema multigrupo hasta terminar el barrido exterior. Luego se recalcula la fuente de fisión y el k_{eff} en forma convencional, se evalúan los nuevos momentos del flujo de las ecuaciones (IV.15) y (IV.10.a) y se hace una nueva iteración exterior. Este proceso se repite hasta lograr convergencia.

IV.4 El problema global con métodos de malla gruesa:

En esta sección se obtendrán las ecuaciones que resultan de establecer el acoplamiento nodal usando las corrientes netas, en lugar de las parciales, como variables de acople. La presentación del material se ha dividido en tres subsecciones: la primera de ellas contiene la descripción del llamado "método del flujo total", ó método ϕ en forma abreviada, que es el equivalente directo en malla gruesa del presentado en la sección IV.3. En la segunda subsección se describe un método que explota la linealidad de la ecuación de Boltzmann para resolver separadamente las contribuciones al flujo promedio nodal provenientes de las corrientes

netas entrantes al nodo desde sus vecinos (flujo transitorio o flujo ψ), y las debidas a las fuentes propias del nodo (flujo asintótico o flujo ϕ). Por esta razón se lo llama "método de separación", o método $\psi+\phi$. En la tercera subsección se hace una comparación analítica entre ambos métodos en base a la manera de introducir la realimentación no lineal en uno y en otro.

Dado que la formulación es básicamente similar a la presentada en la sección IV.3 para el caso de matrices de respuesta, se evitarán las deducciones detalladas cuando sea posible referirlas a su equivalente en dicha sección.

IV.4.a Método del flujo total:

Las variables sobre las que se imponen las condiciones de continuidad son, en los métodos de malla gruesa, las corrientes netas y los flujos promediados sobre las interfases nodales. Estas dos magnitudes están relacionadas entre sí en una ecuación que es la expresión discretizada de la ley de Fick, y que es la equivalente a la ecuación de respuesta de los métodos de matrices de respuesta. Esta ecuación se deriva a continuación.

Relación corriente neta-gradiente de flujo:

A partir de la ecuación (III.8) para la ley de Fick y la solución al problema local, ecuación (IV.13.a), se obtiene la siguiente expresión:

$$J_{u\bar{1}} = -d_u \left\{ \bar{1} \frac{1}{2} (\phi_{u+} - \phi_{u-}) t_u + \left(\frac{1}{2} (\phi_{u+} + \phi_{u-}) - \phi \right) X_u \right\} -$$

$$- d_u \left. \frac{d \Delta \phi_u(u)}{dn_u} \right|_{u=\bar{1}} \quad (IV.64)$$

con t_u y x_u dados por las ecuaciones (IV.24). Sumando y restando la cantidad $0.5^* \phi_{u\mp}^* t_u$ dentro del corchete, la ecuación anterior se transforma en:

$$J_{u\mp} = -d_u \left\{ \phi_{u\mp} t_u + (x_u - t_u) \frac{\phi_u}{L} - x_u \phi \right\} - d_u \left. \frac{d \Delta \phi_u(u)}{dn_u} \right|_{u=\mp 1}$$

la cual se puede poner como:

$$J_{u\mp} = -d_u^* (\phi_{u\mp} - s_u \phi) + J_{u\mp}^o \quad (\text{IV.65})$$

donde:

$$d_u^* = d_u t_u \quad (\text{IV.66.a})$$

$$s_u = \frac{1}{t_u} \left\{ x_u - (x_u - t_u) \frac{f_u}{L} \right\} \quad (\text{IV.66.b})$$

$$f_u = \frac{\phi_u}{\phi} \quad \phi_u = \phi_{u+} + \phi_{u-} \quad (\text{IV.66.c})$$

$$J_{u\mp}^o = -d_u \left. \frac{d \Delta \phi_u(u)}{dn_u} \right|_{u=\mp 1} = \frac{S_u^T}{L} \cdot W_{u(\mp 1)} \quad (\text{IV.66.d})$$

habiéndose utilizado la ecuación (IV.26) en la última expresión.

La ecuación (IV.65) es la expresión de la ley de Fick para el método de malla gruesa. Los factores s_u y t_u que en ella aparecen, son los llamados factores de corrección por tamaño de nodo y tienen los siguientes valores límites (ver Apéndice II):

$$\lim_{h_u \rightarrow 0} s_u = 1 \quad \lim_{h_u \rightarrow 0} t_u = 1 \quad (\text{IV.67.a})$$

Esto garantiza la convergencia del modelo hacia los resultados obtenidos con diferencias finitas, pues cuando $h \rightarrow 0$ las fuentes del nodo y las corrientes sobre sus caras se vuelven planos, con lo cual $J_{u\bar{r}}^0 \rightarrow 0$ y se llega a la expresión de la corriente en el método de diferencias finitas:

$$J_{u\bar{r}} = -d_u (\phi_{u\bar{r}} - \phi) \quad (\text{IV.67.b})$$

Los factores f_u definidos por la ecuación (IV.66.c) son los factores de realimentación no lineal del presente método de malla gruesa y su inclusión permitió llegar a la ecuación (IV. 65) para la corriente neta, la cual como se verá a continuación, conduce directamente a una fórmula de 7 puntos para ϕ .

Acoplamiento y fórmula de 7 puntos:

Escribiendo la ecuación (IV.65) para dos nodos N y K vecinos en la dirección u, se tiene:

$$J_{u+N} = -d_{uN}^* (\phi_{u+N} - s_{uN} \phi_N) + J_{u+N}^0 \quad (\text{IV.68.a})$$

$$J_{u-K} = -d_{uK}^* (\phi_{u-K} - s_{uK} \phi_K) + J_{u-K}^0 \quad (\text{IV.68.b})$$

La continuidad del flujo y la corriente neta en la interfase NK se expresa como:

$$\phi_{NK} = \phi_{u+N} = \phi_{u-K} = \phi_{KN}$$

$$J_{NK} = J_{u+N} = -J_{u-K} = -J_{KN}$$

las que introducidas en el sistema (IV.68) conducen, una vez resuelto, al siguiente par de ecuaciones para el flujo ϕ_{NK} y la corriente J_{NK} :

$$\phi_{NK} = \frac{d_{uN}^* s_{uN} \phi_N + d_{uK}^* s_{uK} \phi_K}{d_{uN}^* + d_{uK}^*} + \delta \phi_{NK} \quad (\text{IV.69.a})$$

$$J_{NK} = D_{NK}^* (s_{uN} \phi_N - s_{uK} \phi_K) + \delta J_{NK} \quad (\text{IV.69.b})$$

con el coeficiente D_{NK}^* definido por:

$$D_{NK}^* = \frac{d_{uN}^* d_{uK}^*}{d_{uN}^* + d_{uK}^*} = D_{KN}^* \quad (\text{IV.70})$$

y las correcciones heterogéneas para el flujo y la corriente:

$$\delta \phi_{NK} = \frac{J_{NK}^0 + J_{KN}^0}{d_{uN}^* + d_{uK}^*} = \delta \phi_{KN} \quad (\text{IV.71.a})$$

$$\delta J_{NK} = D_{NK}^* \left(\frac{J_{NK}^0}{d_{uN}^*} - \frac{J_{KN}^0}{d_{uK}^*} \right) = -\delta J_{KN} \quad (\text{IV.71.b})$$

Utilizando la ecuación (IV.69.b) en la ecuación de balance se obtiene directamente la fórmula de 7 puntos para ϕ_N :

$$\sum_K \frac{J_{NK}}{h_u} + \sum_{rN} \phi_N = Q_N \quad (\text{IV.72.a})$$

$$\sum_K \frac{D_{NK}^*}{h_u} (s_{uN} \phi_N - s_{uK} \phi_K) + \sum_{rN} \phi_N = Q_N + \delta Q_N \quad (\text{IV.72.b})$$

con:

$$\delta Q_N = \sum_K \frac{\delta J_{KN}}{h_u} \quad (\text{IV.72.c})$$

En la ecuación (IV.72.b) el efecto de las corrientes heterogéneas se traduce en un término extra de fuente δQ_N , positivo o negativo, que modifica la amplitud del flujo ϕ_N . La expresión final para la ecuación nodal, equivalente a la (IV.53) del método de matrices de respuesta, es la que resulta de despejar ϕ_N de la ecuación (IV.72.b); así se tiene:

$$\phi_N = \sum_K A_{KN} \phi_K + S_N \quad (\text{IV.73.a})$$

donde:

$$A_{KN} = \lambda_N \frac{D_{NK}^*}{h_u} S_{uK} \quad \lambda_N = \left[\sum_{rN} + \sum_K \frac{D_{NK}^*}{h_u} S_{uN} \right]^{-1} \quad (\text{IV.73.b})$$

$$S_N = \lambda_N (Q_N + \delta Q_N) \quad (\text{IV.73.c})$$

A diferencia del método de matrices de respuesta de la sección IV.3, las variables nodales del presente método de malla gruesa son directamente los flujos nodales promedio. Entonces la solución del problema global no necesita de operaciones extra para hallar el valor del flujo, como era el caso de la variable nodal M del método de matrices de respuesta.

Condiciones de contorno:

En forma análoga a lo hecho en la sección IV.3 para el método de matrices de respuesta, se describen aquí las condiciones de contorno para el método del flujo total. En términos de condiciones de albedo, la corriente neta de un nodo reflector r hacia un nodo periférico p está dada por la siguiente expresión /10/:

$$J_{rp} = - \frac{1 - a_{gg}}{1 + a_{gg}} \frac{\phi_{pr}}{\ell} + \frac{\ell}{1 + a_{gg}} j^{ext} \quad (\text{IV.74})$$

con j^{ext} dado por la ecuación (IV.60.d). Comparando esta expresión con la (IV.65) planteada sobre la interfase r_p se obtiene:

$$d_{ur}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - a_{gg}}{1 + a_{gg}} \right) \quad (IV.75.a)$$

ó bien:

$$D_r = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - a_{gg}}{1 + a_{gg}} \right) \quad t_{ur} = h_u \quad (IV.75.b)$$

y uno de los conjuntos siguientes:

$$\phi_r = 0 \quad ; \quad J_{rp}^{\circ} = \frac{2}{1 + a_{gg}} j^{ext} \quad (IV.76.a)$$

$$\phi_r = \frac{4}{1 - a_{gg}} j^{ext} \quad ; \quad J_{rp}^{\circ} = 0 \quad ; \quad S_{ur} = 1 \quad (IV.76.b)$$

En el caso de condiciones de flujo nulo sobre los contornos exteriores, debe cumplirse $\phi_{rp} = 0$; de la ecuación (IV.69.a) y (IV.71.a) esto equivale a:

$$\delta \phi_{rp} = \frac{d_{ur}^* S_{ur} \phi_r + d_{up}^* S_{up} \phi_p}{d_{ur}^* + d_{up}^*} + \frac{J_{rp}^{\circ} + J_{pr}^{\circ}}{d_{ur}^* + d_{up}^*} = 0$$

lo cual puede lograrse haciendo:

$$J_{rp}^{\circ} = -J_{pr}^{\circ} \quad ; \quad d_{ur}^* = d_{up}^* \quad (IV.77)$$

y una de las siguientes alternativas:

$$S_{ur} = -S_{up} \quad ; \quad \phi_r = \phi_p \quad (IV.78.a)$$

$$S_{ur} = S_{up} \quad ; \quad \phi_r = -\phi_p \quad (IV.78.b)$$

IV.4.b Método de separación:

En este método se utilizará la linealidad de la ecuación (I.1) de difusión dentro del nodo para descomponer el problema real de hallar la solución $\phi(\underline{r})$ conocidas las fuentes y las corrientes netas sobre los contornos, en dos problemas más simples:

- a) hallar el flujo **transitorio** $\psi(\underline{r})$ para el problema con las corrientes netas pero sin las fuentes en el nodo, dado por la ecuación:

$$-\mathcal{D} \nabla^2 \psi(\underline{r}) + \sum_r \psi(\underline{r}) = 0 \quad (\text{IV.79})$$

con $-\mathcal{D} \nabla^2 \psi(\underline{r})$ conocido sobre el contorno nodal δ .

- b) hallar el flujo **asintótico** $\varphi(\underline{r})$ de la situación con fuentes representada por la ecuación:

$$-\mathcal{D} \nabla^2 \varphi(\underline{r}) + \sum_r \varphi(\underline{r}) = Q(\underline{r}) \quad (\text{IV.80.a})$$

sujeto a la condición de "desacople":

$$\nabla \varphi(\underline{r}) = 0 \quad \underline{r} \in \delta \quad (\text{IV.80.b})$$

La solución para $\phi(\underline{r})$ será entonces la suma de las soluciones de los problemas a) y b), es decir:

$$\phi(\underline{r}) = \varphi(\underline{r}) + \psi(\underline{r}) \quad (\text{IV.81})$$

La aplicación del método de los semimomentos en forma completamente análoga a lo realizado en el capítulo II, transforma las ecuaciones (IV.79) y (IV.80.a) en el siguiente conjunto de ecuaciones direccionales:

$$-\frac{4\mathcal{D}}{h_u^2} \frac{d^2 \psi_u(u)}{du^2} + \sum_r \psi_u(u) = -\mathcal{D} L_u(u) \quad (\text{IV.82})$$

$$-\frac{4D}{h_u^2} \frac{d^2 \varphi_u(u)}{du^2} + \sum_r \varphi_u(u) = Q_u(u) \quad (\text{IV.83})$$

donde los semimomentos $L_u(u)$ y $Q_u(u)$ son los definidos por las ecuaciones (II.5) y $\gamma_u(u)$ y $\varphi_u(u)$ son los semimomentos respectivos, siempre de orden cero, del flujo transitorio y asintótico. La suma de las ecuaciones (IV.82) y (IV.83) conduce inmediatamente a las ecuaciones direccionales (II.4).

El término heterogéneo $-DL_u(u)$ juega en la ecuación (IV.82) el mismo papel que la fuente $Q_u(u)$ lo hace en la ecuación (IV.83). En efecto, la cantidad $-DL_u(u)du$ es la cantidad neta de neutrones que entran al nodo por la fracción de área lateral $dS = (h_y+h_z)h_x du$.

Solución local:

Expandiendo los semimomentos en polinomios de Legendre y aplicando el método de residuos ponderados tal cual se realizó en la sección IV.1, se pueden resolver las ecuaciones (IV.82) y (IV.83) para dar las siguientes expresiones equivalentes a la ecuación (IV.11):

$$\gamma_u(u) = \gamma_u + \gamma_{ua}^T \cdot \underline{g}_u(u) + F_u^t(u) \quad (\text{IV.84})$$

$$\varphi_u(u) = \varphi_u + \varphi_{ua}^T \cdot \underline{g}_u(u) + F_u^a(u) \quad (\text{IV.85})$$

donde: γ_{ua} y φ_{ua} son vectores que contienen los momentos locales de orden 1 y 2 de las expresiones respectivas; γ_u y φ_u son los momentos locales de orden cero, ó en virtud de su definición,

los valores promedios nodales de las magnitudes respectivas; las funciones $\underline{g}_u(u)$ son las definidas en la ecuación (IV.12.a). El último término de ambas expresiones viene dado por:

$$F_u^t(u) = \frac{h_u^2}{4} \underline{d}_u^T \cdot \underline{I}^{(u)T} \cdot \underline{N}_u^T \cdot \underline{P}_b(u) \quad (\text{IV.86.a})$$

$$F_u^a(u) = -\frac{h_u^2}{4D} \underline{q}_u^T \cdot \underline{N}_u^T \cdot \underline{P}_b(u) \quad (\text{IV.86.b})$$

con los supraíndices a y t indicando asintótico y transitorio, y cumpliéndose que su suma es igual a la función $F_u(u)$ de la ecuación (IV.12.b).

A partir de este punto, el tratamiento para cada flujo $\zeta_u(u)$ y $\varphi_u(u)$ es diferente.

El flujo transitorio:

Para el flujo transitorio el tratamiento es el mismo de la sección IV.1 y conduce a la siguiente solución para $\zeta_u(u)$:

$$\zeta_u(u) = \zeta + \frac{1}{2}(\zeta_{u+} - \zeta_{u-}) G_{1u}(u) + \left(\frac{1}{2}(\zeta_{u+} + \zeta_{u-}) - \zeta\right) G_{2u}(u) + \Delta\zeta_u(u) \quad (\text{IV.87.a})$$

$$\Delta\zeta_u(u) = F_u^t(u) - \frac{1}{2}(F_{u+}^t - F_{u-}^t) G_{1u}(u) - \frac{1}{2}(F_{u+}^t + F_{u-}^t) G_{2u}(u) \quad (\text{IV.87.b})$$

donde $\Delta\zeta_u(u)$ es una corrección que tiene en cuenta solamente la modulación de la fuga neta transversal, a diferencia del $\Delta\phi_u(u)$ de la ecuación (IV.13.b) que también incluye la distribución de las fuentes.

El flujo asintótico:

Este flujo no recibe influencia de los nodos vecinos, sino que está determinado por la distribución y amplitud de la fuente dentro del propio nodo. Promediando la ecuación direccional (IV.83) se obtiene:

$$-\frac{2D}{h_u^2} \left\{ \frac{d\varphi_u(u)}{du} \Big|_{u=+1} - \frac{d\varphi_u(u)}{du} \Big|_{u=-1} \right\} + \Sigma_r \varphi = Q$$

la cual, debido a la condición de desacople de la ecuación (IV.80.b), arroja para el promedio nodal de $\varphi_u(u)$ el valor:

$$\varphi = \frac{Q}{\Sigma_r} \quad (\text{IV.88})$$

Derivando la ecuación (IV.85) y utilizando otra vez la condición de desacople, se obtiene sobre los extremos $u=\pm 1$ el siguiente par de ecuaciones:

$$0 = \varphi_{uq}^T \cdot \underline{g}'_{u\pm} + F_{u\pm}'^a$$

donde las primas indican derivadas en la dirección saliente. Explicitando el producto escalar se tiene:

$$0 = \varphi_{u1} g'_{1u\pm} + \varphi_{u2} g'_{2u\pm} + F_{u\pm}'^a \quad (\text{IV.89})$$

De las propiedades de paridad de las funciones $\underline{g}_u(u)$ (Apéndice II), se deduce que:

$$g'_{1u+} = -g'_{1u-}$$

$$g'_{2u+} = g'_{2u-}$$

con lo cual el sistema (IV.89) se resuelve para los momentos locales φ_{u1} y φ_{u2} , dando las expresiones:

$$\varphi_{u1} = - \frac{1}{2 g'_{1u+}} (F_{u+}'^a - F_{u-}'^a) \quad \varphi_{u2} = - \frac{1}{2 g'_{2u+}} (F_{u+}'^a + F_{u-}'^a) \quad (IV.90)$$

Con éstas y la ecuación (IV.88) queda resuelto el problema para $\varphi_u(u)$. En particular los valores fronterizos $\varphi_{u\pm}$ quedan expresados por:

$$\varphi_{u\pm} = \varphi \mp (F_{u+}'^a - F_{u-}'^a) \frac{1}{2 t_u} - (F_{u+}'^a + F_{u-}'^a) \frac{1}{2 X_u} + F_{u\pm}^a \quad (IV.91)$$

Relación corriente neta-gradiente de flujo:

En este método, la ley de Fick de la ecuación (III.8) queda expresada como:

$$J_{u\pm} = - d_u \left. \frac{d \zeta_u(u)}{d n_u} \right|_{u=\pm 1} \quad (IV.92)$$

ya que por la condición de desacople, el flujo asintótico no contribuye a la corriente neta sobre los contornos. Introduciendo en la ecuación anterior las expresiones (IV.87) para $\zeta_u(u)$ y operando tal cual se hizo en la subsección IV.4.a para el caso del método del flujo total, se llega a la siguiente expresión equivalente a la ecuación (IV.65):

$$J_{u\pm} = - d_u^* (\zeta_{u\pm} - s_u \zeta) + J_{u\pm}^o \quad (IV.93)$$

donde d_u^* es el mismo de la ecuación (IV.66.a) y el factor de corrección por tamaño de nodo s_u viene dado por la ecuación (IV.66.b), con una diferencia en los factores de realimentación no lineal f_u , que en este caso están definidos por:

$$f_u = \frac{\zeta_{u+}}{\zeta} \quad \zeta_u = \zeta_{u+} + \zeta_{u-} \quad (IV.94)$$

La corriente heterogénea $J_{u\pm}^{\circ}$ es ahora:

$$J_{u\pm}^{\circ} = -d_u \left. \frac{d \Delta \psi_u(u)}{d h_u} \right|_{u=\pm 1} = \frac{d_u^T}{\sim} \cdot \overset{(u)}{I} \cdot \underline{W}_u(\pm 1) \quad (\text{IV.95})$$

Nuevamente se garantiza la convergencia hacia los resultados de diferencias finitas cuando $h \rightarrow 0$ pues en éste límite las corrientes sobre las caras nodales se vuelven planas, con lo cual $J_{u\pm}^{\circ} \rightarrow 0$ y los factores s_u y t_u tienden ambos a 1. Así la ecuación (IV.93) se convierte en:

$$J_{u\pm} = -d_u (\psi_{u\pm} - \psi) \quad (h \rightarrow 0)$$

pero: $\psi_{u\pm} = \phi_{u\pm} - \psi_{u\pm}$ y en el límite $h \rightarrow 0$ se cumple que la fuente en el nodo también tiende a ser plana, con lo cual $\psi_{u\pm} = \psi$ y la ecuación anterior se reduce a la expresión (IV.67.b) para la corriente neta en diferencias finitas.

Acoplamiento y fórmula de 7 puntos:

Referido nuevamente al par de nodos N y K vecinos en la dirección u, se plantea:

$$J_{u+N} = -d_{uN}^* (\psi_{u+N} - s_{uN} \psi_N) + J_{NK}^{\circ} \quad (\text{IV.96.a})$$

$$J_{u-K} = -d_{uK}^* (\psi_{u-K} - s_{uK} \psi_K) + J_{KN}^{\circ} \quad (\text{IV.96.b})$$

Las condiciones de continuidad del flujo total y la corriente neta establecen:

$$\begin{aligned} \phi_{NK} &= \psi_{u+N} + \psi_{u+N} = \psi_{u-K} + \psi_{u-K} = \phi_{KN} \\ J_{NK} &= J_{u+N} = -J_{u-K} = -J_{KN} \end{aligned}$$

La continuidad del flujo total no impone la continuidad de sus componentes φ y ζ , es decir en general ocurre $\zeta_{NK} \neq \zeta_{KN}$ y $\varphi_{NK} \neq \varphi_{KN}$. Introduciendo las condiciones de continuidad anteriores en el sistema (IV.96), se obtiene:

$$J_{NK} = -d_{uN}^* (\phi_{NK} - \varphi_{NK} - S_{uN} \zeta_N) + J_{NK}^{\circ} \quad (\text{IV.97.a})$$

$$-J_{NK} = -d_{uK}^* (\phi_{NK} - \varphi_{KN} - S_{uK} \zeta_K) + J_{KN}^{\circ} \quad (\text{IV.97.b})$$

Despejando ϕ_{NK} se llega a la siguiente expresión:

$$\phi_{NK} = \frac{d_{uN}^* (S_{uN} \zeta_N + \varphi_{NK}) + d_{uK}^* (S_{uK} \zeta_K + \varphi_{KN})}{d_{uN}^* + d_{uK}^*} + \delta \phi_{NK} \quad (\text{IV.98.a})$$

$$\delta \phi_{NK} = \frac{J_{NK}^{\circ} + J_{KN}^{\circ}}{d_{uN}^* + d_{uK}^*} = \delta \phi_{KN} \quad (\text{IV.98.b})$$

Introduciendo las expresiones anteriores en la ecuación (IV.97.a) se logra para J_{NK} :

$$J_{NK} = D_{NK}^* \left\{ (S_{uN} \zeta_N + \varphi_{NK}) - (S_{uK} \zeta_K + \varphi_{KN}) \right\} + \delta J_{NK} \quad (\text{IV.99})$$

con D_{NK}^* dado por la ecuación (IV.70) y la corrección heterogénea δJ_{NK} según:

$$\delta J_{NK} = D_{NK}^* \left(\frac{J_{NK}^{\circ}}{d_{uN}^*} - \frac{J_{KN}^{\circ}}{d_{uK}^*} \right) = -\delta J_{KN} \quad (\text{IV.100})$$

Reconociendo que $\sum_r \varphi = Q$, la ecuación de balance (IV.72.a) se expresa como:

$$\sum_K \frac{J_{NK}}{h_u} + \sum_r \zeta_N = 0$$

e introduciendo en ésta la expresión (IV.99) para J_{NK} , se llega a:

$$\sum_K \frac{D_{NK}^*}{h_u} (S_{uN} \varphi_N - S_{uK} \varphi_K) + \sum_{rN} \varphi_N = q_N + \delta q_N \quad (\text{IV.101.a})$$

$$q_N = \sum_K \frac{D_{KN}^*}{h_u} (\varphi_{KN} - \varphi_{NK}) \quad \delta q_N = \sum_K \frac{\delta J_{KN}}{h_u} \quad (\text{IV.101.b})$$

De estas ecuaciones se puede notar que la fuente para el flujo transitorio está formada por los "saltos" que el flujo asintótico tiene en las interfases nodales. El término extra δq_N actúa como una corrección debida a la modulación de las corrientes sobre las interfases. Por último, la ecuación nodal para φ_N se obtiene despejando de la ecuación (IV.101.a) para dar:

$$\varphi_N = \sum_K A_{KN} \varphi_K + S_N \quad (\text{IV.102})$$

con:

$$A_{KN} = \lambda_N \frac{D_{NK}^*}{h_u} S_{uK} \quad \lambda_N = \left[\sum_{rN} + \sum_K \frac{D_{NK}^*}{h_u} S_{uN} \right]^{-1} \quad (\text{IV.103.a})$$

$$S_N = \lambda_N (q_N + \delta q_N) \quad (\text{IV.103.b})$$

La solución completa del problema global requiere un paso extra, sencillo, que consiste en reconstruir el flujo promedio total a partir de sus contribuciones individuales como:

$$\phi_N = \varphi_N + \varphi_N = \varphi_N + \frac{Q_N}{\sum_{rN}} \quad (\text{IV.104})$$

Condiciones de contorno:

Comparando la corriente neta de un nodo reflector r hacia un nodo periférico p, dada por la ecuación (IV.74), con la expresión para J_{rp} obtenida según la (IV.97.a), se deduce:

$$d_{ur}^* = \frac{1}{2} \frac{1 - a_{gg}}{1 + a_{gg}}$$

con la condición:

$$\frac{2}{1 + a_{gg}} j^{ext} = d_{ur}^* (\varphi_{rp} + S_{ur} z_r) + J_{rp}^{\circ} \quad (IV.105)$$

la cual puede ser satisfecha, por ejemplo, con una de las alternativas siguientes:

$$\varphi_{rp} = 0 \quad ; \quad z_r = 0 \quad ; \quad J_{rp}^{\circ} = \frac{2}{1 + a_{gg}} j^{ext} \quad (IV.106.a)$$

$$\varphi_{rp} = \frac{4}{1 - a_{gg}} j^{ext} \quad ; \quad z_r = 0 \quad ; \quad J_{rp}^{\circ} = 0 \quad (IV.106.b)$$

$$\varphi_{rp} = 0 \quad ; \quad z_r = \frac{4}{1 - a_{gg}} j^{ext} \quad ; \quad J_{rp}^{\circ} = 0 \quad ; \quad S_{ur} = 1 \quad (IV.106.c)$$

Para el caso de condiciones de flujo nulo sobre los contornos del reactor, la condición $\phi_{rp} = 0$ puede cumplirse en las ecuaciones (IV.98) haciendo:

$$J_{rp}^{\circ} = - J_{pr}^{\circ} \quad ; \quad d_{ur}^* = d_{up}^* \quad ; \quad \varphi_{rp} = - \varphi_{pr} \quad (IV.107.a)$$

junto con una de las siguientes condiciones:

$$S_{ur} = - S_{up} \quad ; \quad z_r = z_p \quad (IV.107.b)$$

$$S_{ur} = S_{up} \quad ; \quad z_r = - z_p \quad (IV.107.c)$$

IV.4.c Comparación de ambos métodos:

La diferencia fundamental entre los dos métodos desarrollados en esta sección, radica en la forma en que la realimentación no lineal es introducida en cada uno de ellos para llegar a la fórmula de 7 puntos del problema global. El caso más sencillo de resolver en forma analítica es el correspondiente a un slab con fuentes fijas uniformemente distribuidas y rodeado de vacío, el cual será resuelto en el orden básico $L=2$ de aproximación para el flujo. Este ejemplo puede parecer trivial, pero de él se obtuvieron explicaciones a los efectos aparecidos en los resultados numéricos relativos a casos más complejos.

El caso del slab:

Sea un slab designado por N, de espesor h y propiedades D y Σ_r , que tiene una fuente Q uniformemente distribuida y está inmerso en un medio vacío que será designado por R, se hallará la expresión de los factores de realimentación no lineal según:

caso a) : el método $\psi + \zeta$

caso b) : el método ϕ

y sus resultados serán comparados desde el punto de vista iterativo y en función de las expresiones que toman para los valores límites $h \rightarrow 0$ y $h \rightarrow \infty$.

caso a):

La expresión para el flujo total en cualquiera de las dos interfases con el vacío es, según las ecuaciones (IV.98):

$$\phi_{NR} = \frac{d_{UN} (S_{UN} \zeta_N + \psi_{NR}) + d_{UR} (S_{UR} \zeta_R + \psi_{RN})}{d_{UN} + d_{UR}} + \frac{J_{NR}^0 + J_{RN}^0}{d_{UN} + d_{UR}} \quad (\text{IV.108})$$

donde los asteriscos han desaparecido de las magnitudes d_u

pues en el orden básico $L=2$, la corrección t_u es igual a 1.

En un slab con fuentes planas se cumple:

$$J_{NR}^{\circ} = 0 \qquad \varphi_{NR} = \varphi_N = \frac{Q}{\Sigma_r}$$

El vacío se representa con condiciones de contorno: $a_{gg}=j^{ext}=0$, con lo cual, de las ecuaciones (IV.75.a) y (IV.106), se obtiene:

$$d_{uR} = \frac{1}{2} \qquad \varphi_{RN} = 0$$

Con estas observaciones, la ecuación (IV.108) queda:

$$\phi_{NR} = \frac{2 d_{uN}}{1 + 2 d_{uN}} (S_{uN} \varphi_N + \varphi_N)$$

de la cual:

$$\varphi_{uN} = 2 \varphi_{NR} = 2 (\phi_{NR} - \varphi_N) = \frac{4 d_{uN}}{1 + 2 d_{uN}} S_{uN} \varphi_N - \frac{2}{1 + 2 d_{uN}} \varphi_N$$

Ahora, de la ecuación nodal (IV.102) para φ_N se tiene:

$$\varphi_N = S_N = - \frac{\frac{1}{h_u} \frac{2 d_{uN}}{1 + 2 d_{uN}} \varphi_N}{\Sigma_{rN} + \frac{1}{h_u} \frac{2 d_{uN}}{1 + 2 d_{uN}} S_{uN}}$$

De esta ecuación y la anterior se obtiene f_{uN} como:

$$f_{uN} = \frac{\varphi_{uN}}{\varphi_N} = 2 S_{uN} + \frac{\frac{2}{h_u} \Sigma_{rN}}{2 D_N}$$

La relación entre s_u y f_u es, para $L=2$, $s_u=3-f_u$ (ver Apéndice II) lo cual transforma la ecuación anterior en la siguiente:

$$f_{uN} = 6 + \frac{\frac{2}{h_u} \Sigma_{rN}}{2 D_N} - 2 f_{uN} \qquad (IV.109)$$

caso b):

En el método ϕ el flujo en la interfase NR viene dado por la ecuación (IV.69.a), la cual en base a las consideraciones hechas en el caso a) relativas a las condiciones de contorno y a la modulación de las fuentes y corrientes de interfase, se escribe en el presente caso como:

$$\phi_{NR} = \frac{2 d_{UN}}{1 + 2 d_{UN}} s_{UN} \phi_N$$

de donde sale directamente, usando de nuevo la relación $s_u = 3 - f_u$:

$$f_{UN} = \frac{\phi_{UN}}{\phi_N} = \frac{12 d_{UN}}{1 + 2 d_{UN}} - \frac{4 d_{UN}}{1 + 2 d_{UN}} f_{UN} \quad (IV.110)$$

Comportamiento iterativo:

Tanto en el caso a) como en el caso b) la fórmula de recurrencia que se obtuvo para el caso del slab es de la forma:

$$f^{(t)} = \alpha + \beta f^{(t-1)} \quad (IV.111)$$

donde t y $t-1$ indican el número de iteración respectivo. La expresión anterior en términos de la estimación inicial $f^{(0)}$ está dada por:

$$f^{(t)} = \alpha \sum_{i=0}^{t-1} \beta^i + \beta^t f^{(0)}$$

la cual para $t \rightarrow \infty$ converge a $\alpha / (1 - \beta)$ sólo si $|\beta| < 1$. Las expresiones para β de las ecuaciones (IV.109) y (IV.110) son:

$$\beta = -2 \quad (\text{método } \psi + \zeta) \quad (IV.112.a)$$

$$(L=2) \quad \beta = -\frac{4d}{1+2d} \quad (\text{método } \phi) \quad (IV.112.b)$$

de donde se desprende que es imposible resolver el problema del slab en forma iterativa con el método ψ_+^2 . Para el método ϕ tal solución está condicionada por $4D < h$, la cual generalmente se cumple para nodos "grandes" (10-20 cm). Si bien estas observaciones se obtuvieron en el orden básico $l=2$, se puede demostrar que para órdenes mayores de expansión el coeficiente β está dado por:

$$\beta = -(X-t) \quad (\text{método } \psi_+^2)$$

$$(L > 2) \quad \beta = -\frac{2d(x-t)}{1+2dt} \quad (\text{método } \phi)$$

con x y t dados por las ecuaciones (IV.24). La introducción de polinomios de orden superior a 2 atenúa algo el efecto divergente, dado que $t > 1$ y $x-t < 2$ (ver Apéndice II); la condición de convergencia es ahora $(x-2t)4D < h$, la cual es una restricción más débil que $4D < h$ dado que $x-2t < 1$. Entonces las conclusiones obtenidas en el orden $L=2$ son conservativas respecto a la inclusión de términos de orden superior.

Por lo tanto es necesario, al menos para el método ψ_+^2 , encontrar una fórmula recursiva para f_u cuyo coeficiente β cumpla con la condición $|\beta| < 1$. Esto se soluciona introduciendo la subrelajación en el cálculo de f_u a partir del valor de la iteración anterior.

Subrelajación:

La ecuación (IV.111) para la determinación de $f_u^{(t)}$ será reemplazada por el siguiente par:

$$f^{(t)} = f^{(t-1)} + \Omega (X^{(t)} - f^{(t-1)}) \quad (\text{IV.113.a})$$

$$X^{(t)} = \alpha + \beta f^{(t-1)} \quad (\text{IV.113.b})$$

donde $\Omega > 0$ es por ahora un factor de peso arbitrario; en particular si $\Omega = 1$, el conjunto anterior se reduce a la ecuación (IV.111). Combinando estas dos ecuaciones en una sola se obtiene:

$$f^{(t)} = \alpha(\Omega) + \beta(\Omega) f^{(t-1)} \quad (\text{IV.114.a})$$

con:

$$\alpha(\Omega) = \Omega \alpha \quad (\text{IV.114.b})$$

$$\beta(\Omega) = 1 + \Omega(\beta - 1) \quad (\text{IV.114.c})$$

Esta ecuación para f_u converge sólo si $|\beta(\Omega)| < 1$, es decir si $|1 + \Omega(\beta - 1)| < 1$, condición que puede ser satisfecha aún cuando $|\beta| > 1$ restringiendo los posibles valores de Ω al intervalo:

$$0 < \Omega < \frac{2}{1 + |\beta|} = \Omega_{LIM} \quad (\text{IV.115})$$

Dado que $|\beta| > 1$ se observa que $\Omega_{LIM} < 1$, con lo cual la aplicación de las ecuaciones (IV.113) constituye una subrelajación ($\Omega > 1$ correspondería a una sobrerelajación). El valor final, convergido, para f_u no se altera pues para cualquier Ω :

$$f^* = \lim_{t \rightarrow \infty} f^{(t)} = \frac{\alpha(\Omega)}{1 - \beta(\Omega)} = \frac{\alpha}{1 - \beta} \quad (\text{IV.116})$$

El efecto de la subrelajación se puede observar en el diagrama de la figura 1. Allí se ha graficado el valor de $f^{(t)}/\alpha$ en función de este mismo valor para la iteración anterior $t-1$, para un conjunto de valores del parámetro Ω . Las rectas resultantes

se cortan en el punto de convergencia de coordenadas (f^*, f^*) y en ellas se puede ver el efecto de la subrelajación ($\Omega < 1$) "suavizando" las pendientes respectivas. El diagrama debe entenderse de la siguiente manera: se ubica la estimación inicial $f^{(0)}/\alpha$ sobre el eje de las abscisas y se proyecta verticalmente hasta cortar la recta del valor de Ω correspondiente; así se obtiene sobre las ordenadas el valor $f^{(1)}/\alpha$ de la primera iteración, el cual se proyecta horizontalmente hasta cortar la recta $f(t) = f(t-1)$ ($\Omega = 0$) para ubicarlo sobre el eje de abscisas y comenzar de nuevo. Los posibles caminos resultantes dependen del valor de Ω elegido y pueden ser:

- a) espirales divergentes, que se producen para valores de Ω fuera del intervalo definido por la condición (IV.115) y se manifiestan como oscilaciones de amplitud creciente en el valor de f_U a medida que transcurren las iteraciones;
- b) espirales convergentes, para valores de Ω en el intervalo: $0.5 \Omega_{LIM} < \Omega < \Omega_{LIM}$ manifestadas como oscilaciones amortiguadas de f_U en función del número de iteraciones, convergentes al valor f^* ;
- c) camino tipo escalón, para $0 < \Omega < 0.5 \Omega_{LIM}$ dando una convergencia de tipo asintótica para f_U ;
- d) cuadrado, en caso de $\Omega = \Omega_{LIM}$ y es una oscilación permanente de f_U entre los valores $f(0)$ y $\alpha \Omega_{LIM} - f(0)$;
- e) punto, si $\Omega = 0$ siempre f_U será igual a $f(0)$;
- f) óptimo, cuando $\Omega = 0.5 \Omega_{LIM}$ se logra el valor convergido f^* en la primera iteración.

Expresiones límites:

El comportamiento iterativo de la realimentación fue analizado en el título anterior y se mostró, para el

caso del slab, cómo la subrelajación estabiliza el proceso. Existe otro aspecto relacionado con los valores que toman los factores de realimentación no lineal f_u , ya que estos entran en los coeficientes A_{KN} de otro proceso iterativo: el de las iteraciones interiores para ϕ_N ó para ζ_N . El análisis será una vez más relativo al caso del slab, por ser el caso más sencillo de resolver analíticamente. El valor convergido f^* de la ecuación (IV.116) es, en la aproximación $L=2$:

$$f^* = 2 + \frac{h^2 \sum r}{6 D} \quad (\text{método } \psi+\zeta) \quad (\text{IV.117.a})$$

$$f^* = 2 - \frac{2 h}{h+12 D} \quad (\text{método } \phi) \quad (\text{IV.117.b})$$

Para $h \rightarrow 0$ ambos métodos predicen correctamente el valor 2, con una tendencia más rápida (h^2) para el método $\psi+\zeta$ que para el método del flujo total. Esta observación tiene que ser válida para cualquier orden L de aproximación, pues en este límite los términos superiores desaparecen antes que el $l=2$. Para espesores crecientes se observa una diferencia fundamental entre ambos métodos: el comportamiento de f^* es creciente en el método $\psi+\zeta$, mientras que para el método ϕ es decreciente. Pero ahora empiezan a contribuir los términos superiores a 2 y su influencia debe ser tenida en cuenta. Dada la sencillez del problema del slab es posible resolver analíticamente las ecuaciones y hallar las expresiones exactas de f_u , que son:

$$f = 2 \frac{\frac{h}{2L}}{\operatorname{tgh}\left(\frac{h}{2L}\right)} \quad (\text{método } \psi+\zeta) \quad (\text{IV.118.a})$$

$$f = 2 \frac{\frac{2 D}{L} \operatorname{tgh}\left(\frac{h}{2L}\right)}{1 + \operatorname{tgh}\left(\frac{h}{2L}\right) \left(\frac{2 D}{L} - \frac{2 L}{h}\right)} \quad (\text{método } \phi) \quad (\text{IV.118.b})$$

$$L^2 = \frac{D}{\sum r}$$

Estas expresiones confirman el carácter creciente y decreciente de uno y otro método, y el comportamiento límite para $h \gg 2L$ es:

$$f \longrightarrow \frac{h}{L} \quad (\text{método } \psi + \zeta) \quad (\text{IV.119.a})$$

$$f \longrightarrow \zeta \frac{\frac{2D}{L}}{1 + \frac{2D}{L}} \quad (\text{método } \phi) \quad (\text{IV.119.b})$$

De aquí se deduce que los factores f_u no están acotados en el método $\psi + \zeta$, mientras que sí lo están en el método ϕ . En el caso del slab tratado, la fuente tiene un papel esencial pues, dadas las condiciones de contorno de vacío, sin ella no existe solución. La componente ζ del flujo está generada por la corriente neta saliente debida al escape de los neutrones de fuente. Pero puede ocurrir que debido a la influencia de los vecinos, un nodo tenga componente ζ y no tener fuente. Este es el caso, por ejemplo, de un nodo de agua del reflector en el grupo rápido. En este caso el flujo ϕ es igual al ζ y para ambos métodos los factores de realimentación f_u vienen dados por la expresión (IV.118.a), que es creciente y no acotada.

Conclusiones:

La expresión de la corriente neta entre dos nodos para cualquiera de los dos métodos, es de la forma:

$$J_{NK} = D_{NK}^* (\phi_{uN}^M - \phi_{uK}^M) + \Delta J_{NK}$$

donde ΔJ_{NK} simboliza las contribuciones fijas de fuentes y modulación de las corrientes de interfase. Los ϕ_u^M son los flujos "motores" de la corriente neta, y son de la forma:

$$\phi_u^M = \begin{cases} S_u \zeta & (\text{método } \psi + \zeta) \\ S_u \phi & (\text{método } \phi) \end{cases}$$

La citada expresión para la corriente es el resultado de la introducción de la realimentación no lineal, y en ambos métodos y en cualquier aproximación, la tendencia a 1 de los factores de corrección por tamaño de nodo asegura la convergencia de la expresión para J_{NK} a la del método de diferencias finitas cuando $h \rightarrow 0$.

La introducción de la subrelajación se ha encontrado necesaria para la convergencia en el método de separación, mientras que para método del flujo total depende de las condiciones particulares del problema. Para el caso del slab con fuente, la condición de convergencia encontrada corresponde a la desigualdad $4D < h$.

Las expresiones límites halladas para los factores de realimentación no lineal establecen que para nodos "grandes" (entendiéndose por "grande" que se cumple $h \gg 2L$):

a) $f_u = \frac{\psi_u}{\psi}$ no está acotado

b) $f_u = \frac{\phi_u}{\phi}$ | está acotado si hay fuentes presentes en el nodo
| no está acotado en ausencia de fuentes

Estos comportamientos hallados en forma analítica reflejan realidades físicas concretas. El flujo transitorio ψ tiene sus fuentes concentradas sobre los contornos del nodo, dado que se genera cuando hay corrientes netas entrantes ó salientes al mismo. Entonces toma su valor máximo (en valor absoluto) sobre los bordes y decrece hacia el centro del nodo, haciendo que el valor promedio nodal tienda monotonamente a cero a medida que $h \rightarrow \infty$, lo que explica el comportamiento no acotado de f_u en este caso. En el método del flujo total, el mismo razonamiento respecto al valor promedio de ψ hace que el factor de realimentación no lineal pase de ser:

$$f_u = \frac{\varphi_u + \gamma_u}{\varphi + \gamma}$$

a valer:

$$f_u^\infty = \frac{\varphi_u + \gamma_u}{\varphi}$$

en el límite $h \rightarrow \infty$, el cual es un valor finito gracias a la contribución de las fuentes: $\varphi = Q/\Sigma r$. En la situación sin fuentes se repite el comportamiento divergente característico del método de separación.

La tendencia decreciente para f_u del método ϕ , encontrada en el análisis del slab, es propia del problema y no es una característica general. El paso de $f_u = \phi_u/\phi$ a $f_u^\infty = \phi_u/\varphi$ con $h \rightarrow \infty$ es decreciente sólo cuando $\gamma < 0$ (corrientes netas salientes del nodo).

Las conclusiones presentadas sobre las características de uno y otro método han sido obtenidas del análisis del caso del slab. Pero esto no implica una validez restringida al caso unidimensional, pues la aplicación del método de los semimomentos del capítulo II reduce el problema multidimensional original a un conjunto de ecuaciones unidimensionales con un término heterogéneo extra contabilizando las corrientes netas transversales. Este término (ausente en el caso del slab) es una fuente superficial y por lo tanto no modifica las observaciones relativas a las expresiones límites.

C A P I T U L O V:

METODO ANALITICO

V. METODO ANALITICO

En el capítulo precedente se resolvieron las ecuaciones direccionales (II.4) en forma aproximada, expresando su solución en un desarrollo polinómico de orden variable. En el presente capítulo esta solución será obtenida en forma exacta, integrando analíticamente las ecuaciones direccionales en las siguientes condiciones:

- a) el tratamiento es presentado para el caso de dos grupos de energía, aunque el método es válido para cualquier número de grupos;
- b) La fuga neta transversal será tratada según el método de aproximación parabólica directa (APD) presentado en el capítulo II.

En el tratamiento del problema global se aplicará el método de matrices de respuesta, que no presenta los problemas de los métodos de malla gruesa en relación a la introducción de la realimentación no lineal, necesaria para llevar el problema global a la forma sencilla de la fórmula de 7 puntos.

El punto de partida consiste en expresar las ecuaciones (I.1) para el caso de dos grupos, con la fuente $Q_g(\underline{r})$ explicitada, dando el siguiente sistema:

$$-D_1 \nabla^2 \phi_1(\underline{r}) + \Sigma_{r1} \phi_1(\underline{r}) = \lambda \nu \Sigma_{f1} \phi_1(\underline{r}) + \lambda \nu \Sigma_{f2} \phi_2(\underline{r}) \quad (V.1.a)$$

$$-D_2 \nabla^2 \phi_2(\underline{r}) + \Sigma_{a2} \phi_2(\underline{r}) = \Sigma_{s12} \phi_1(\underline{r}) \quad (V.1.b)$$

donde $\lambda = k_{eff}^{-1}$ es la inversa del factor de multiplicación y se ha supuesto que no hay up-scattering ($\Sigma_{s21}=0$). El sistema anterior puede escribirse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\nabla^2 \vec{\phi}(\underline{r}) + \hat{B}^2 \vec{\phi}(\underline{r}) = \vec{0} \quad (V.2)$$

siendo:

$$\vec{\phi}(\underline{r}) = \text{col} (\phi_1(\underline{r}), \phi_2(\underline{r})) \quad (\text{V.3.a})$$

el vector que contiene los flujos en cada grupo, y:

$$\hat{B}^L = \begin{bmatrix} \frac{\lambda \lambda \Sigma_{f1} - \Sigma_{r1}}{D_1} & \frac{\lambda \lambda \Sigma_{f2}}{D_1} \\ \frac{\Sigma_{s12}}{D_2} & -\frac{\Sigma_{a2}}{D_2} \end{bmatrix} \quad (\text{V.3.b})$$

la matriz de buckling del sistema, la cual es función de las propiedades del nodo como así también de la solución, a través de λ .

V.1 Análisis modal:

Para hallar la solución general de la ecuación (V.2) se utilizará el método de expansión modal/10/, que consiste en expresar dicha solución en términos de soluciones elementales cuya dependencia en espacio y energía es separable:

$$\vec{\phi}(\underline{r}) = \sum_L \varphi_L(\underline{r}) \vec{U}_L \quad (\text{V.4})$$

donde $\varphi_L(\underline{r})$ es el i -ésimo modo espacial de la distribución $\phi(\underline{r})$ y \vec{U}_L el espectro correspondiente. La sustitución de $\phi(\underline{r})$ por su i -ésima solución elemental en la ecuación (V.2), conduce a la siguiente ecuación para el modo $\varphi_L(\underline{r})$:

$$\nabla^2 \varphi_L(\underline{r}) + B_L^2 \varphi_L(\underline{r}) = 0 \quad (\text{V.5})$$

la cual se obtiene si los vectores \vec{U}_L satisfacen la relación matricial:

$$\hat{B}^2 \vec{u}_i = B_i^2 \vec{u}_i \quad (V.6)$$

de donde se deduce que los vectores \vec{u}_i son los autovectores de la matriz de buckling y B_i^2 los autovalores correspondientes. Estas magnitudes para la matriz \hat{B}^2 de la ecuación (V.3.b), están desarrolladas en el Apéndice III.

Una vez obtenidos los autovectores y autovalores de \hat{B}^2 , la ecuación (V.5) puede ser resuelta, con sus condiciones de contorno, para obtener los modos espaciales. Para el presente tratamiento en dos grupos, la expresión (V.4) para $\vec{\phi}(\underline{r})$ es:

$$\vec{\phi}(\underline{r}) = \varphi_1(\underline{r}) \vec{u}_1 + \varphi_2(\underline{r}) \vec{u}_2 \quad (V.7)$$

la cual se puede escribir como:

$$\vec{\phi}(\underline{r}) = \hat{U} \cdot \vec{\varphi}(\underline{r}) \quad (V.8)$$

donde \hat{U} es la matriz (2x2) que se forma poniendo el espectro \vec{u}_i en la i-ésima columna:

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} \quad (V.9.a)$$

y $\vec{\varphi}(\underline{r})$ el vector de los modos, compuesto por:

$$\vec{\varphi}(\underline{r}) = \text{col} (\varphi_1(\underline{r}), \varphi_2(\underline{r})) \quad (V.9.b)$$

La ecuación (V.8) es la expresión del flujo en la representación de los grupos, mientras que la relación inversa:

$$\vec{\varphi}(\underline{r}) = \hat{U}^{-1} \cdot \vec{\phi}(\underline{r}) \quad (V.10)$$

es la expresión del flujo en la representación del buckling.

V.2 El problema local:

En el presente método analítico, el problema local consiste, luego de haber aplicado la expansión modal, en resolver las ecuaciones diferenciales (V.5) para cada modo espacial $\Psi_i(r)$. La aplicación del método de los semimomentos del capítulo II transforma cada ecuación para $\Psi_i(r)$ en un conjunto de tres ecuaciones direccionales acopladas, en forma completamente análoga a lo hecho sobre el flujo $\phi(r)$ en el mencionado capítulo. Las ecuaciones resultantes son de la forma:

$$\frac{4}{h_u^2} \frac{d^2}{du^2} \Psi_u(u) + B^2 \Psi_u(u) - \lambda_u(u) = 0 \quad (V.11)$$

Los semimomentos de ambos modos espaciales responden a una ecuación de este tipo, por lo cual se ha omitido el índice i de las magnitudes $\Psi_u(u)$, $\lambda_u(u)$ y B^2 y se omitirá en el resto de las expresiones de esta sección para mayor claridad de notación, sin peligro de confusión.

Volviendo a la ecuación (V.11), los semimomentos $\Psi_u(u)$ que en ella aparecen responden a la definición (II.5), mientras que el término heterogéneo $\lambda_u(u)$ está definido por:

$$\lambda_u(u) = -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{4}{h_v^2} \frac{\partial^2 \Psi(u,v,w)}{\partial v^2} + \frac{4}{h_w^2} \frac{\partial^2 \Psi(u,v,w)}{\partial w^2} \right\} dv dw \quad (V.12)$$

Su relación con la fuga neta transversal $L_u(u)$ de la ecuación (II.5.c) será establecida en la sección V.3. Se introduce ahora la siguiente y única aproximación para resolver las ecuaciones (V.11):

$$\lambda_u(u) = \sum_{l=0}^L g_{ul} P_l(u) \quad (V.13)$$

donde $P_l(u)$ es de nuevo el l -ésimo polinomio de Legendre y los coeficientes g_{ul} serán hallados en la próxima sección.

Introduciendo la expresión anterior para $l_u(u)$ en la ecuación (V.11) y multiplicando por $h_u^2/4$ se obtiene para la dirección genérica u:

$$\frac{d^2}{du^2} \varphi_u(u) + b_u^2 \varphi_u(u) - \frac{h_u^2}{4} \sum_{l=0}^2 g_{ul} P_l(u) = 0 \quad (V.14)$$

con el buckling adimensional b_u definido por:

$$b_u = \frac{1}{L} B h_u$$

La ecuación (V.14) puede ser resuelta analíticamente para dar:

$$\varphi_u(u) = A \operatorname{sen}(b_u u) + C \operatorname{cos}(b_u u) + \sum_{l=0}^2 f_{ul} P_l(u) \quad (V.15)$$

donde:

$$f_{u0} = \frac{h_u^2}{4b_u^2} \left(g_{u0} - \frac{3}{b_u^2} g_{2u} \right) \quad (V.16.a)$$

$$f_{u1} = \frac{h_u^2}{4b_u^2} g_{u1} \quad (V.16.b)$$

$$f_{u2} = \frac{h_u^2}{4b_u^2} g_{u2} \quad (V.16.c)$$

El par de constantes de integración A y C puede ser expresado en términos de los valores fronterizos $\varphi_{u\pm}$ de la manera siguiente:

$$\varphi_{u\pm} = \pm A \operatorname{sen} b_u + C \operatorname{cos} b_u + f_{u0} \pm f_{u1} + f_{u2} \quad (V.17)$$

despejando A y C, se obtiene:

$$A = \frac{1}{\text{sen } b_u} \left(\frac{\varphi_u^*}{L} - f_{u1} \right) \quad C = \frac{1}{\text{cos } b_u} \left(\frac{\varphi_u}{L} - f_{u0} - f_{u2} \right) \quad (\text{V.18})$$

donde $\varphi_u^* = \varphi_{u+} - \varphi_{u-}$ y $\varphi_u = \varphi_{u+} + \varphi_{u-}$. Introduciendo las expresiones anteriores para A y C en la ecuación (V.15), se llega a la solución del problema local para $\varphi_u(u)$ en términos de los valores sobre los contornos:

$$\varphi_u(u) = \frac{\varphi_u^*}{L} \frac{\text{sen}(b_u u)}{\text{sen } b_u} + \frac{\varphi_u}{L} \frac{\text{cos}(b_u u)}{\text{cos } b_u} + \Delta \varphi_u(u) \quad (\text{V.19.a})$$

$$\Delta \varphi_u(u) = f_{u0} \left(1 - \frac{\text{cos}(b_u u)}{\text{cos } b_u} \right) + f_{u1} \left(\rho_1(u) - \frac{\text{sen}(b_u u)}{\text{sen } b_u} \right) + f_{u2} \left(\rho_2(u) - \frac{\text{cos}(b_u u)}{\text{cos } b_u} \right) \quad (\text{V.19.b})$$

donde $\Delta \varphi_u(u)$ contiene la corrección debida a la modulación de las corrientes sobre las interfases nodales a través de los coeficientes g_{u1} , como se verá en la próxima sección. Este término se anula sobre los bordes $u = \pm 1$ del nodo.

V.3 La fuga transversal en la representación del buckling:

La expresión (V.12) del término de acoplamiento entre las ecuaciones direccionales (V.11) para cada modo espacial i , se puede escribir vectorialmente comprendiendo ambos modos como:

$$\vec{l}_u(u) = -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{4}{h_v^2} \frac{\partial^2 \vec{\varphi}_{(u,v,w)}}{\partial v^2} + \frac{4}{h_w^2} \frac{\partial^2 \vec{\varphi}_{(u,v,w)}}{\partial w^2} \right\} dv dw \quad (\text{V.20})$$

Multiplicando ambos miembros de esta expresión por la matriz \hat{U} se obtiene, usando la relación (V.8):

$$\hat{U} \cdot \vec{l}_u(u) = -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{4}{h_v^2} \frac{\partial^2 \vec{\phi}_{(u,v,w)}}{\partial v^2} + \frac{4}{h_w^2} \frac{\partial^2 \vec{\phi}_{(u,v,w)}}{\partial w^2} \right\} dv dw$$

El lado derecho de esta ecuación no es más que la expresión para $L_u(u)$ de la ecuación (II.5.c) con los dos grupos colectados en un vector, entonces se tiene:

$$\vec{l}_u(u) = \hat{U}^{-1} \vec{L}_u(u) \quad (V.21)$$

de la cual se deduce que la magnitud $\vec{l}_u(u)$ es la expresión de la fuga neta transversal en la representación del buckling.

La aplicación del método APD de la sección III.1 para la determinación de la fuga neta transversal establece:

$$\vec{L}_u(u) = \sum_{\lambda=0}^2 \vec{L}_{u\lambda} P_\lambda(u) \quad (V.22)$$

con las componentes de $\vec{L}_{u\lambda}$ en cada grupo dadas por las ecuaciones (III.7), (III.21) y (III.23); introduciendo esta expresión en la (V.21) para $\vec{l}_u(u)$ y comparándola con la ecuación (V.13), se deduce la siguiente expresión para evaluar los coeficientes $g_{u\lambda}$ en términos de los conocidos $L_{u\lambda}$:

$$\vec{g}_{u\lambda} = \hat{U}^{-1} \vec{L}_{u\lambda} \quad (V.23)$$

V.4 El problema global:

En esta sección se obtendrán las ecuaciones para resolver el problema global a partir de la solución local, ecuaciones (V.19). El problema será formulado en el esquema de matrices de respuesta, que presenta la ventaja, frente a los de malla gruesa, de tener siempre acotados los factores de realimentación no lineal, dándole estabilidad numérica al método.

La presentación comprende hasta la obtención de la ecuación de respuesta nodal equivalente a la ecuación (IV.40). Una vez obtenida esta ecuación, el tratamiento posterior de sintetización y acoplamiento es exactamente igual al ya desarrollado en

la sección IV.3, cuando se aplicó el esquema de matrices de respuesta al método polinómico.

Previo a la obtención de la ecuación de respuesta es necesario encontrar la expresión de la derivada de $\varphi_u(u)$ sobre las caras $u=\pm 1$, es decir la derivada del flujo expresada en la representación del buckling.

La derivada en la representación del buckling:

La derivada de $\varphi_u(u)$ respecto de la normal saliente, evaluada sobre los extremos $u=\pm 1$, se expresa usando la ecuación (V.19) como:

$$\left. \frac{d\varphi_u(u)}{dn_u} \right|_{u=\pm 1} = \pm \frac{1}{L} a_u \varphi_u^* - \frac{1}{L} c_u \varphi_u + f_{u0} c_u \pm f_{u1}(1-a_u) + f_{u2}(3+c_u) \quad (V.24)$$

donde a_u y c_u afectan las magnitudes asimétricas y simétricas respectivamente, y vienen dadas por:

$$a_u = \frac{b_u}{\operatorname{tg}(b_u)} \quad c_u = b_u \operatorname{tg}(b_u) \quad (V.25)$$

Si ocurre que $b_u^2 < 0$ en la ecuación (V.14), entonces las funciones trigonométricas cambian a hiperbólicas y sus argumentos b_u son reemplazados por $|b_u|$ en las expresiones anteriores. Además de esto, c_u debe cambiar de signo en este caso.

La expresión (V.24) puede escribirse en forma matricial como:

$$\left. \frac{d\vec{\varphi}_u(u)}{dn_u} \right|_{u=\pm 1} = \pm \frac{1}{L} \hat{a}_u \vec{\varphi}_u^* - \frac{1}{L} \hat{c}_u \vec{\varphi}_u + \hat{c}_u \vec{f}_{u0} \pm (\hat{I} - \hat{a}_u) \vec{f}_{u1} + (3\hat{I} + \hat{c}_u) \vec{f}_{u2} \quad (V.26)$$

donde \hat{I} es la matriz (2x2) identidad y las matrices \hat{a}_u y \hat{c}_u son diagonales y definidas por:

$$\hat{a}_u = \operatorname{diag}(a_{u1}, a_{u2}) \quad (V.27.a)$$

$$\hat{C}_u = \text{diag}(C_{u1}, C_{u2}) \quad (\text{V.27.b})$$

Los subíndices 1 y 2 indican las expresiones (V.25) evaluadas con los autovalores B_1^2 y B_2^2 respectivamente.

Las ecuaciones (V.16) para las constantes de la solución particular de cada modo pueden agruparse vectorialmente en:

$$\vec{f}_{u0} = \frac{h_u^2}{4} \hat{b}_u^{2^{-1}} \cdot (\vec{g}_{u0} - 3 \hat{b}_u^{2^{-1}} \cdot \vec{g}_{u2}) \quad (\text{V.28.a})$$

$$\vec{f}_{u1} = \frac{h_u^2}{4} \hat{b}_u^{2^{-1}} \cdot \vec{g}_{u1} \quad (\text{V.28.b})$$

$$\vec{f}_{u2} = \frac{h_u^2}{4} \hat{b}_u^{2^{-1}} \cdot \vec{g}_{u2} \quad (\text{V.28.c})$$

siendo:

$$\hat{b}_u^{2^{-1}} = \text{diag} \left(\frac{1}{b_{u1}^2}, \frac{1}{b_{u2}^2} \right) \quad (\text{V.29})$$

Reemplazando los \vec{f}_{u1} de la ecuación (V.26) por las expresiones (V.28), se obtiene:

$$\left. \frac{d\vec{\varphi}_u(u)}{dn_u} \right|_{u=\pm 1} = \pm \frac{1}{2} \hat{a}_u \cdot \vec{\varphi}_u^* - \frac{1}{2} \hat{C}_u \cdot \vec{\varphi}_u + \frac{h_u^2}{4} \hat{C}_u \cdot \vec{g}_{u0} + \frac{h_u^2}{4} \hat{k}_u \cdot \vec{g}_{u1} + \frac{h_u^2}{4} \hat{m}_u \cdot \vec{g}_{u2} \quad (\text{V.30})$$

con las definiciones:

$$\hat{e}_u = \hat{C}_u \cdot \hat{b}_u^{2^{-1}} \quad (\text{V.31.a})$$

$$\hat{k}_u = (\hat{I} - \hat{a}_u) \cdot \hat{b}_u^{2^{-1}} \quad (\text{V.31.b})$$

$$\hat{m}_u = \{ 3(\hat{I} - \hat{e}_u) + \hat{C}_u \} \cdot \hat{b}_u^{2^{-1}} \quad (\text{V.31.c})$$

La ecuación (V.30) es la expresión final de la derivada del flujo en la representación del buckling.

La ecuación de respuesta nodal:

Habiendo encontrado la expresión de la derivada en la representación del buckling se puede hallar la misma en la representación de los grupos simplemente multiplicando por \hat{U} , y en esta representación la derivada debe cumplir con la ley de Fick de la ecuación (III.8) expresada vectorialmente como:

$$\vec{j}_{u\pm}^+ - \vec{j}_{u\pm}^- = - \hat{d}_u \cdot \left. \frac{d \vec{\phi}_u(u)}{dn_u} \right|_{u=\pm 1} \quad (V.32)$$

donde:

$$\hat{d}_u = \text{diag} (d_{u1}, d_{u2}) \quad (V.33)$$

Multiplicando entonces la ecuación (V.30) por $-\hat{d}_u \cdot \hat{U}$ se llega a:

$$\begin{aligned} \vec{j}_{u\pm}^+ - \vec{j}_{u\pm}^- = & \mp \frac{1}{2} \hat{d}_u \cdot \hat{V} \cdot \hat{a}_u \cdot \vec{\psi}_u^* + \frac{1}{2} \hat{d}_u \cdot \hat{V} \cdot \hat{c}_u \cdot \vec{\varphi}_u - \frac{h_u}{4} \hat{d}_u \cdot \hat{V} \cdot \hat{e}_u \cdot \vec{g}_{u0} \mp \\ & \mp \frac{h_u}{4} \hat{d}_u \cdot \hat{V} \cdot \hat{k}_u \cdot \vec{g}_{u1} - \frac{h_u}{4} \hat{d}_u \cdot \hat{V} \cdot \hat{m}_u \cdot \vec{g}_{u2} \end{aligned} \quad (V.34)$$

Utilizando las relaciones (V.23) para \vec{g}_{u1} y (V.10) para $\vec{\psi}_u^*$ y $\vec{\varphi}_u$, la expresión anterior se convierte en:

$$\begin{aligned} \vec{j}_{u\pm}^+ - \vec{j}_{u\pm}^- = & \mp \frac{1}{2} \hat{d}_u \cdot \hat{a}_u \cdot \vec{\phi}_u^* + \frac{1}{2} \hat{d}_u \cdot \hat{c}_u \cdot \vec{\phi}_u - \frac{h_u}{4} \hat{d}_u \cdot \hat{e}_u \cdot \vec{L}_{u0} \mp \\ & \mp \frac{h_u}{4} \hat{d}_u \cdot \hat{k}_u \cdot \vec{L}_{u1} - \frac{h_u}{4} \hat{d}_u \cdot \hat{m}_u \cdot \vec{L}_{u2} \end{aligned} \quad (V.35)$$

donde la doble barra sobre la matriz indica que la misma ha sufrido una rotación dada por la expresión general:

$$\overline{\hat{X}} = \hat{U} \cdot \hat{X} \cdot \hat{U}^{-1} \quad (\text{V.36})$$

Dado que la matriz \hat{U} no es diagonal (ver Apéndice III), la matriz rotada $\overline{\hat{X}}$ tampoco lo será aunque \hat{X} sí lo es. Los términos fuera de la diagonal son los responsables del acoplamiento entre el grupo rápido y el térmico.

Sumando y restando el par de ecuaciones implícito en la (V.35), se llega al siguiente conjunto para las componentes simétricas y antisimétricas:

$$\vec{j}_u^+ - \vec{j}_u^- = \hat{d}_u \cdot \overline{\vec{c}}_u \cdot \vec{\phi}_u - \frac{\hbar u}{2} \hat{d}_u \cdot \overline{\vec{e}}_u \cdot \vec{L}_{u0} + \vec{J}_u^0 \quad (\text{V.37.a})$$

$$\vec{j}_u^{+*} - \vec{j}_u^{-*} = -\hat{d}_u \cdot \overline{\vec{a}}_u \cdot \vec{\phi}_u^* + \vec{J}_u^{0*} \quad (\text{V.37.b})$$

Las expresiones para las corrientes heterogéneas \vec{J}_u^0 y \vec{J}_u^{0*} están dadas por:

$$\vec{J}_u^0 = -\frac{\hbar u}{2} \hat{d}_u \cdot \overline{\vec{m}}_u \cdot \vec{L}_{u2} \quad (\text{V.38.a})$$

$$\vec{J}_u^{0*} = -\frac{\hbar u}{2} \hat{d}_u \cdot \overline{\vec{k}}_u \cdot \vec{L}_{u1} \quad (\text{V.38.b})$$

En estas ecuaciones está contenida la modulación de la fuga neta transversal, con los elementos de \vec{L}_{u1} y \vec{L}_{u2} dados por la ecuación (III.23).

El sistema (V.37) se puede poner en términos de las corrientes parciales entrantes y salientes, expresando $\vec{\phi}_u$ y $\vec{\phi}_u^*$ según las ecuaciones (I.3) y \vec{L}_{u0} según la (III.7) para dar:

$$\vec{j}_u^+ - \vec{j}_u^- = 2 \hat{d}_u \cdot \overline{\vec{c}}_u \cdot (\vec{j}_u^+ + \vec{j}_u^-) - \hat{d}_u \cdot \overline{\vec{e}}_u \cdot \hat{d}_u^{-1} \sum_{v \neq u} \frac{\hbar u}{\hbar v} (\vec{j}_v^+ - \vec{j}_v^-) + \vec{J}_u^0 \quad (\text{V.39.a})$$

$$\vec{j}_u^{+*} - \vec{j}_u^{-*} = -2 \hat{d}_u \cdot \bar{a}_u \cdot (\vec{j}_u^{+*} + \vec{j}_u^{-*}) + \vec{J}_u^{0*} \quad (\text{V.39.b})$$

La ecuación de la componente antisimétrica no depende explícitamente de las otras direcciones y por lo tanto puede ser resuelta directamente para dar:

$$\vec{j}_u^{+*} = \hat{p}_u \cdot \vec{j}_u^{-*} + \vec{J}_u^{0*} \quad (\text{V.40})$$

con:

$$\hat{p}_u = (\hat{I} + 2 \hat{d}_u \cdot \bar{a}_u)^{-1} (\hat{I} - 2 \hat{d}_u \cdot \bar{a}_u) \quad (\text{V.41.a})$$

$$\vec{J}_u^{0*} = (\hat{I} + 2 \hat{d}_u \cdot \bar{a}_u)^{-1} \vec{J}_u^{0*} \quad (\text{V.41.b})$$

El tratamiento para la componente simétrica es un poco más complicado; sumando y restando la cantidad $\hat{d}_u \cdot \bar{e}_u \cdot \hat{d}_u^{-1} \cdot (\vec{j}_u^+ - \vec{j}_u^-)$ y definiendo las matrices:

$$\hat{E}_u^\pm = 2 \hat{d}_u \cdot \bar{e}_u \pm \hat{d}_u \cdot \bar{e}_u \cdot \hat{d}_u^{-1} \quad (\text{V.42})$$

La ecuación (V.39.a) queda expresada como:

$$\begin{aligned} (\hat{I} - \hat{E}_u^+) \cdot \vec{j}_u^+ + \hat{d}_u \cdot \bar{e}_u \cdot \hat{d}_u^{-1} \sum_v \frac{h_u}{h_v} \vec{j}_v^+ &= (\hat{I} + \hat{E}_u^-) \cdot \vec{j}_u^- + \\ + \hat{d}_u \cdot \bar{e}_u \cdot \hat{d}_u^{-1} \sum_v \frac{h_u}{h_v} \vec{j}_v^- &+ \vec{J}_u^0 \end{aligned} \quad (\text{V.43})$$

Se introducen ahora los supervectores:

$$\vec{j}^\pm = \text{COL} (\vec{j}_u^\pm, \vec{j}_v^\pm, \vec{j}_w^\pm) \quad (\text{V.44.a})$$

$$\vec{J}^0 = \text{COL} (\vec{J}_u^0, \vec{J}_v^0, \vec{J}_w^0) \quad (\text{V.44.b})$$

y las supermatrices:

$$/A = \begin{bmatrix} \hat{A}_{uu} & \hat{A}_{vu} & \hat{A}_{wu} \\ \hat{A}_{uv} & \hat{A}_{vv} & \hat{A}_{wv} \\ \hat{A}_{uw} & \hat{A}_{vw} & \hat{A}_{ww} \end{bmatrix} \quad /B = \begin{bmatrix} \hat{B}_{uu} & \hat{B}_{vu} & \hat{B}_{wu} \\ \hat{B}_{uv} & \hat{B}_{vv} & \hat{B}_{wv} \\ \hat{B}_{uw} & \hat{B}_{vw} & \hat{B}_{ww} \end{bmatrix} \quad (V.45)$$

donde:

$$\hat{A}_{u'u} = (\hat{I} - \hat{E}_u^+) \cdot \hat{\delta}_{uu'} + \frac{h_u}{h_{u'}} \hat{d}_u \cdot \bar{e}_u \cdot \hat{d}_u^{-1} \quad (V.46.a)$$

$$\hat{B}_{u'u} = (\hat{I} + \hat{E}_u^-) \cdot \hat{\delta}_{uu'} + \frac{h_u}{h_{u'}} \hat{d}_u \cdot \bar{e}_u \cdot \hat{d}_u^{-1} \quad (V.46.b)$$

siendo $\hat{\delta}_{uu'} = \hat{I}$ si $u = u'$ y $\hat{\delta}_{uu'} = \hat{O}$ si $u \neq u'$.

Las tres ecuaciones (V.43) para cada dirección espacial pueden escribirse en forma compacta como:

$$/A \cdot \vec{j}^+ = /B \cdot \vec{j}^- + \vec{j}^0 \quad (V.47)$$

de la cual se obtiene \vec{j}^+ :

$$\vec{j}^+ = /R \cdot \vec{j}^- + \vec{j}^0 \quad (V.48)$$

con:

$$/R = /A^{-1} \cdot /B = \begin{bmatrix} \hat{R}_{uu} & \hat{R}_{vu} & \hat{R}_{wu} \\ \hat{R}_{uv} & \hat{R}_{vv} & \hat{R}_{wv} \\ \hat{R}_{uw} & \hat{R}_{vw} & \hat{R}_{ww} \end{bmatrix} \quad (V.49.a)$$

$$\vec{j}^{\circ} = \mathbb{A}^{-1} \vec{J}^{\circ} \quad (\text{V.49.b})$$

siendo \mathbb{A}^{-1} la matriz inversa de \mathbb{A} , que cumple con:

$$\mathbb{A}^{-1} \mathbb{A} = \mathbb{I} \quad \mathbb{I} = \text{DIAG}(\hat{1}, \hat{1}, \hat{1})$$

De la ecuación (V.40) se puede escribir para la corriente antisimétrica:

$$\vec{j}^{+*} = \text{IRO} \cdot \vec{j}^{-*} + \vec{j}^{o*} \quad (\text{V.50})$$

donde:

$$\vec{j}^{+*} = \text{COL}(\vec{j}_u^{+*}, \vec{j}_v^{+*}, \vec{j}_w^{+*}) \quad (\text{V.51.a})$$

$$\vec{j}^{o*} = \text{COL}(\vec{j}_u^{o*}, \vec{j}_v^{o*}, \vec{j}_w^{o*}) \quad (\text{V.51.b})$$

$$\text{IRO} = \text{DIAG}(\hat{P}_u, \hat{P}_v, \hat{P}_w) \quad (\text{V.51.c})$$

Con las ecuaciones (V.48) y (V.50) se obtiene, usando la relación (IV.35):

$$\vec{j}_{\pm}^{+} = \text{IRO} \cdot \vec{j}_{\pm}^{-} + \frac{1}{2} (\text{IR} - \text{IRO}) \cdot \vec{j}^{-} + \vec{j}_{\pm}^{o} \quad (\text{V.52})$$

Esta ecuación es la equivalente a la (IV.36) del método polinómico, con la diferencia que en aquella el acople entre los grupos es explícito a través de la fuente Q, mientras que en la

(V.52) está implícito en los elementos de las matrices IR_0 y IR . Para expresar la ecuación (V.52) en términos de las transmisiones, se recurre a la relación (IV.38.a) expresada aquí como:

$$\Pi = \frac{1}{2} IH \cdot (IR - IR_0) \cdot IH = \begin{bmatrix} \hat{t}_{uu} & \hat{t}_{vu} & \hat{t}_{wu} \\ \hat{t}_{uv} & \hat{t}_{vv} & \hat{t}_{wv} \\ \hat{t}_{uw} & \hat{t}_{vw} & \hat{t}_{ww} \end{bmatrix} \quad (V.53)$$

con:

$$IH = \text{DIAG} (\hat{h}_u, \hat{h}_v, \hat{h}_w) \quad (V.54.a)$$

$$\hat{h}_u = \text{diag} (h_u, h_u) \quad (V.54.b)$$

resultando para \vec{j}_{\pm}^+ :

$$\vec{j}_{\pm}^+ = IR_0 \cdot \vec{j}_{\pm}^- + IH \cdot \Pi \cdot IH^{-1} \cdot \vec{j}_{\pm}^- + \vec{j}_{\pm}^0 \quad (V.55)$$

Esta es la ecuación de respuesta nodal expresada vectorialmente en término de las magnitudes de respuesta IR_0 y Π . De nuevo estas magnitudes no se corresponden con las de la teoría de matrices de respuesta de orden cero, debido a que la modulación espacial de las corrientes salientes está incluida (junto con la de las entrantes) en el término heterogéneo \vec{j}_{\pm}^0 , tal cual se explicó en la sección IV.3 para el caso del método polinómico.

La componente en la dirección genérica u de la ecuación (V.55) está dada por:

$$\vec{j}_{u\pm}^+ = \hat{p}_u \cdot \vec{j}_{u\pm}^- + h_u \sum_v \hat{t}_{vu} \frac{j_v^-}{h_v} + \vec{j}_{u\pm}^0 \quad (V.56)$$

y la componente de esta ecuación para el grupo g es:

$$j_{u\pm g}^+ = \sum_{g'} \rho_{ug'g} j_{u\pm g'}^- + h_u \sum_v \frac{1}{h\nu} \sum_{g'} t_{vug'g} j_{vg'}^- + j_{u\pm g}^0 \quad (V.57)$$

la cual se puede escribir, omitiendo el índice g por la convención del capítulo I:

$$j_{u\pm}^+ = \rho_u j_{u\pm}^- + h_u \sum_v t_{vu} \frac{j_v^-}{h\nu} + j_{u\pm}^{\text{ext}} + j_{u\pm}^0 \quad (V.58)$$

con:

$$j_{u\pm g}^{\text{ext}} = \sum_{g' \neq g} \rho_{ug'g} j_{u\pm g'}^- + h_u \sum_v \frac{1}{h\nu} \sum_{g' \neq g} t_{vug'g} j_{vg'}^- \quad (V.59)$$

La ecuación (V.58) es la equivalente a la (IV.40) del método polinómico. Ambas expresiones dan la corriente saliente por una determinada cara en un determinado grupo, como una combinación de las corrientes entrantes en ese mismo grupo que se reflejan ó transmiten sin cambiar de energía, más un término que contabiliza el aporte de neutrones que "aparecen" en ese grupo y fugan por la cara en cuestión. Esta contribución es la fuente con su probabilidad de escape en la ecuación (IV.40), ó las corrientes entrantes en otros grupos con las transmisiones y reflexiones no diagonales reflejando la interacción entre grupos en la ecuación (V.58). Las dos expresiones se completan con el término relativo a la modulación de la fuga neta transversal (y de la fuente en caso de la (IV.40)).

Una vez obtenida la ecuación (V.58) se le aplica la realimentación no lineal y la sintetización para llevar el problema global a una fórmula de 7 puntos, de manera análoga a lo hecho en la sección IV.3.

C A P I T U L O VI:

APROXIMACION DE LA
REALIMENTACION ISOTROPICA

VI. APROXIMACION DE LA REALIMENTACION ISOTROPICA

Los métodos de matrices de respuesta presentados en los capítulos IV y V, requieren de la realimentación para poder expresar el algoritmo en la fórmula sencilla de 7 puntos de la ecuación (IV.53). Los coeficientes de acoplamiento A_{KN} de esta expresión dependen de los factores de realimentación no lineal f_u a través de r_u según la ecuación (IV.44); por lo tanto es necesario recalcular los coeficientes de acoplamiento A_{KN} para todos los nodos del sistema cada vez que se disponga de una nueva distribución de las corrientes parciales entrantes, lo que ocurre, en principio, después de cada iteración exterior. Este esfuerzo, medido en tiempo de procesamiento, es necesario si se quiere calcular con la verdadera matriz de respuesta no sintética. Sin embargo, a costa de una pérdida de precisión en los resultados que será cuantificada en el capítulo VII, es posible evitar la realimentación en el cálculo de r_u en base a cierta aproximación sobre la distribución de las corrientes entrantes, lo cual entonces evita tener que recalcular los coeficientes A_{KN} .

La ecuación (IV.45) que define los factores de realimentación no lineal f_u , puede escribirse de la siguiente manera:

$$f_u = \frac{1}{N} (1 + \epsilon_u) \quad (\text{VI.1})$$

donde N es el número de dimensiones del problema (interesan casos con $N > 1$) y ϵ_u una magnitud que cumple con las condiciones:

$$-1 \leq \epsilon_u \leq N-1 \quad \sum_u \epsilon_u = 0 \quad (\text{VI.2})$$

Introduciendo la ecuación (IV.45) en la (VI.1) se puede hallar para ϵ_u la expresión:

$$\epsilon_u = \frac{j_u - \langle j \rangle}{\langle j \rangle} \quad (\text{VI.3})$$

donde $\langle j^- \rangle$ es el valor promedio de la corriente entrante en cada dirección, definido por:

$$\langle j^- \rangle = \frac{1}{N} \sum_u j_u^- \quad (\text{VI.4})$$

En el caso de que las corrientes entrantes en cada dirección tengan el mismo valor j^- (caso isotrópico), se verifica $\langle j^- \rangle = j^-$ y $\epsilon_u = 0$ para todas las direcciones. De aquí se deduce que ϵ_u de la ecuación (VI.3) es una medida del apartamiento, positivo o negativo, de la componente u de la corriente entrante, con respecto al caso isotrópico.

Introduciendo los f_u definidos por la ecuación (VI.1) en la expresión (IV.44) para r_u , se obtiene:

$$r_u = \frac{\sum_v \frac{M_v r_{vu}}{h_v} (1 + \epsilon_v)}{\sum_v \frac{M_v}{h_v} (1 + \epsilon_v)} \quad (\text{VI.5})$$

Después de un poco de álgebra, la expresión anterior puede ponerse como:

$$r_u = r_u^s + \delta r_u \quad (\text{VI.6})$$

con r_u^s representando la componente sintética:

$$r_u^s = \frac{\sum_v \frac{M_v r_{vu}}{h_v}}{\sum_v \frac{M_v}{h_v}} \quad (\text{VI.7})$$

y δr_u un término de corrección, definido por:

$$\delta r_u = \frac{\sum_v \frac{M_v}{h_v} (r_{vu} - r_u^s) \mathcal{E}_v}{\sum_v \frac{M_v}{h_v} (1 + \mathcal{E}_v)} \quad (\text{VI.8})$$

Si la matriz original es sintética entonces r_{vu} es una función única de la dirección u de salida, con lo que la ecuación (VI.7) resulta en $r_u^s = r_{vu}$ lo cual anula δr_u y se obtiene $r_u = r_u^s$ para cualquier condición de realimentación \mathcal{E}_v . Los nodos rectangulares del presente trabajo tienen matrices de respuesta no sintéticas; aún en el caso cuadrado (ó cúbico) sus matrices no son sintéticas a partir del término en h /13/. Por lo tanto $r_{vu} \neq r_u^s$ y estos apartamientos de la condición sintética son colectados en δr_u con factores de peso \mathcal{E}_v en cada dirección.

La aproximación más directa que se puede hacer para evitar recalcular los coeficientes A_{KN} , consiste en fijar:

$$\delta r_u = 0 \quad (\text{VI.9})$$

para todos los nodos, en todas las direcciones. Entonces r_u se evalúa simplemente como:

$$r_u = r_u^s \quad (\text{VI.10})$$

De la ecuación (VI.8), la condición $\delta r_u = 0$ se asegura cumpliendo $\mathcal{E}_v = 0$ para todas las direcciones con lo cual los factores de realimentación no lineal f_u resultan independientes de la dirección, ecuación (VI.1), y esto origina el nombre de la aproximación.

Validez:

La condición (VI.9) para δr_u es la situación extrema de la siguiente aproximación:

$$|\delta r_u| \ll r_u^s \quad (\text{VI.11})$$

la cual permite calcular r_u de la ecuación (VI.10), ya que con la condición anterior se cumple: $r_u \approx r_u^s$. Introduciendo las expresiones (VI.7) y (VI.8) se obtiene:

$$\left| \sum_v \frac{\mu_v}{h\nu} \Delta r_{vu} \mathcal{E}_v \right| \ll \sum_v \frac{\mu_v}{h\nu} (1 + \mathcal{E}_v) \quad (\text{VI.12})$$

donde se han utilizado las propiedades $\mu_v > 0$ y $(1 + \mathcal{E}_v) \geq 0$, y Δr_{vu} es el apartamiento relativo de la matriz de respuesta respecto de la expresión sintética:

$$\Delta r_{vu} = \frac{r_{vu} - r_u^s}{r_u^s} \quad (\text{VI.13})$$

La desigualdad (VI.12) es la condición que debe cumplirse para poder utilizar la ecuación (VI.10) en la evaluación de r_u ; consiste en una relación entre las propiedades de la matriz de respuesta, fijadas a través de Δr_{vu} y μ_v , y las características de la solución, contenidas en \mathcal{E}_v . Es evidente que la condición (VI.12) impone menos restricciones a los valores de \mathcal{E}_v que la condición $\mathcal{E}_v = 0$ con la cual fue derivada la relación (VI.10).

VI.1 El caso de nodos cúbicos:

El caso de nodos cúbicos (ó cuadrados) es de particular interés por la simetría de sus elementos, como así también por ser casos de interés práctico. Para un nodo tal, se tiene:

$$h_v = h \quad (\text{VI.14.a})$$

$$t_{vu} = \begin{cases} t & \text{Si } u=v \\ b & \text{Si } u \neq v \end{cases} \quad (\text{VI.14.b})$$

con lo cual se necesitan solamente dos cantidades para definir su matriz de transmisiones. De la definición (IV.41.b) se obtiene para μ_v :

$$\mu_v = 2 \sum_w t_{vw} = 2 (t + (N-1)b) = \mu \quad (\text{VI.15})$$

y para la expresión del factor de distribución de fugas r_{vu} se tiene:

$$r_{vu} = \begin{cases} \frac{t}{\mu} & \text{Si } u=v \\ \frac{b}{\mu} & \text{Si } u \neq v \end{cases} \quad (\text{VI.16})$$

La expresión sintética r_u^s se obtiene de la ecuación (VI.7) como:

$$r_u^s = \frac{t + (N-1)b}{N\mu} = \frac{1}{2N} = r^s \quad (\text{VI.17})$$

es decir que en el caso de que la matriz de respuesta sea sintética, la probabilidad de fuga por una cara cualquiera es la inversa del número total de caras del nodo.

De las ecuaciones (VI.16) y (VI.17) se tiene para Δr_{vu} :

$$\Delta r_{vu} = \begin{cases} \frac{2(N-1)(t-b)}{\mu} & \text{Si } u=v \\ \frac{2}{\mu}(b-t) & \text{Si } u \neq v \end{cases} \quad (\text{VI.18})$$

Introduciendo estas expresiones para Δr_{vu} en la desigualdad (VI.12), se llega a:

$$\left| \frac{2(N-1)}{\mu} (t-b) \varepsilon_u - \frac{2}{\mu} (t-b) \sum_{v \neq u} \varepsilon_v \right| \ll \sum_v (1 + \varepsilon_v)$$

la cual, utilizando la ecuación (VI.2) para anular la suma de los ε_v , se reduce a la siguiente condición:

$$|\varepsilon_u| \ll \frac{\mu}{2|t-b|} = \mu^* \quad (\text{VI.19})$$

que establece la cota para $|\varepsilon_u|$ en todas las direcciones en función del apartamiento de la matriz de su condición de sintética, contenido en $|t-b|$.

Entonces para el caso de nodos cúbicos, r_u puede ser calculado de la expresión sencilla (VI.7) dentro de los límites de validez de la desigualdad anterior. Del conjunto de posibles valores para ε_u , dados por la ecuación (VI.2), se deduce:

$$\text{máx } |\varepsilon_u| \leq N-1 \quad (\text{VI.20})$$

con lo cual la condición de validez de la aproximación de la realimentación isotrópica se vuelve:

$$1 \ll \frac{\mu^*}{N-1} \quad (\text{VI.21})$$

la cual debe cumplirse para todos los nodos del sistema y en todos los grupos.

C A P I T U L O VII:

RESULTADOS NUMERICOS

VII. RESULTADOS NUMERICOS

Los métodos descritos en este trabajo fueron programados, en dos dimensiones, en códigos de prueba para evaluar su comportamiento. En este capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos de estos programas con los métodos de matrices de respuesta, ambos el polinómico y el analítico, para las dos representaciones distintas de la fuga neta transversal e incluyendo la aproximación de la realimentación isotrópica. No se incluyen los resultados correspondientes a los métodos de malla gruesa dado que éstos difieren del método de matrices de respuesta en los aspectos iterativos analizados en la subsección IV.4.c, que condicionan la convergencia del proceso iterativo pero, en caso de converger, la calidad de los resultados es la misma en razón de la equivalencia existente entre ambos esquemas, reflejada en las ecuaciones (I.3).

Los resultados se presentan en dos secciones; en la primera de ellas se analizan los elementos de respuesta de un nodo ejemplo y se los compara con los valores de referencia correspondientes a la teoría de matrices de respuesta de orden cero, obtenidos de la literatura. De esta manera en la primer sección se analiza la precisión de los métodos desarrollados en el tratamiento del problema local. La segunda sección contiene los resultados obtenidos en el cálculo de la distribución de potencia del problema benchmark bidimensional de la IAEA y las comparaciones con la solución de referencia.

VII.1 Elementos de respuesta:

Las ecuaciones de respuesta (IV.39) y (V.55) están caracterizadas por los factores de reflexión directa ρ_{U} y las transmisiones t_{VU} que forman las matrices respectivas. Tal como se mencionó oportunamente, estas magnitudes no se corresponden con la teoría de matrices de respuesta de

orden cero porque no incluyen la modulación de las corrientes parciales salientes; por lo tanto, para que la comparación tenga sentido es necesario excluir dicha modulación de la corriente heterogénea j_{\pm}^0 e incluirla en las transmisiones y reflexiones correspondientes. Este procedimiento se hace utilizando la descomposición $\underline{j}_u = \underline{j}_u^+ - \underline{j}_u^-$ para la fuga neta transversal, y está indicado en Apéndice IV con las fórmulas utilizadas es esta sección.

Los elementos ρ_u y t_{vu} serán calculados para el caso de un nodo cuadrado con $D=1.5$ cm y $\Sigma_a=0.03012$ cm⁻¹, de tamaño variable. Debido a la simetría se necesitan solamente las cantidades ρ ($=\rho_u=\rho_v$), t ($=t_{uu}=t_{vv}$) y b ($=t_{uv}=t_{vu}$) para caracterizar la respuesta del nodo. Con estas magnitudes se calculan $\mu = 2(t+b)$ y $\Gamma = 1-\rho-\mu$. La comparación se hace contra los valores exactos extraídos de la referencia 13, donde fueron calculados rigurosamente en base a un desarrollo en serie de Fourier.

En el método analítico las magnitudes de respuesta se calcularon con las constantes $D_2=D$, $\Sigma_{a2}=\Sigma_a$ y constantes arbitrarias en el grupo rápido. Además $\nu\Sigma f_1=\nu\Sigma f_2=0$ con lo cual la matriz de buckling deja de depender de la solución, pues λ siempre aparece en las expresiones en la forma λk_{∞} (ver Apéndice III), siendo idénticamente nulo en este caso.

Los resultados obtenidos están consignados en la tabla V, la cual contiene los valores de ρ , Γ , b y t para tres tamaños de nodo, calculados en varios órdenes de expansión con el método polinómico (en las columnas indicadas con $L=3, 4, 5$ y 6) y con el método analítico (en la columna indicada MODAL). Los cálculos con el método polinómico fueron hechos con las dos variantes para la modulación de la fuga neta transversal, APD y EML(L), mientras que en el método analítico sólo la APD fue utilizada. La última columna de la tabla contiene la mencionada solución de referencia.

La tabla VI es complementaria de la anterior. En ella se consignan los errores relativos porcentuales de las tres magnitudes calculadas en P_6 con respecto a la solución de referencia, para los tres tamaños de nodo y ambas representaciones de la fuga neta transversal. Los errores relativos porcentuales se definen como:

$$\mathcal{E}_X = \frac{X - X^{ref}}{X^{ref}} * 100 \quad (VII.1)$$

VII.2 El problema benchmark de la IAEA:

Este problema es el más utilizado en la literatura para validar nuevos métodos y códigos de cálculo en teoría de difusión y geometría rectangular. En la versión bidimensional éste consiste en el cuarto de núcleo de un reactor PWR mostrado en la figura 2, conteniendo dos combustibles de distinto enriquecimiento y barras de control insertadas representadas por un absorbente uniformemente distribuido en el elemento combustible correspondiente. Esto causa una distribución de flujo altamente no separable, que en adición al pico agudo del flujo térmico en el reflector conforman una situación cuya solución precisa es difícil de obtener. La solución de referencia de esta sección aparece en la figura 3 y fue obtenida con un método de matrices de respuesta de alto orden /7/.

Los resultados obtenidos para este problema se encuentran en las tablas VII a XI. En ellas se muestran los errores de la solución calculada con respecto a la de referencia para el factor de multiplicación y la distribución de potencia; los errores se dan en unidades de 10^{-6} (es decir en partes por millón) para el factor de multiplicación y para la distribución de potencia se consignan el error relativo porcentual máximo:

$$\mathcal{E}_{max} = \max_n \{ \mathcal{E}_n \} \quad \mathcal{E}_n = \frac{P_n - P_n^{ref}}{P_n^{ref}} * 100 \quad (VII.2)$$

y el error cuadrático medio, definido como:

$$\overline{\epsilon^2} = \text{SQRT} \left(\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \epsilon_n^2 \right) \quad (\text{VII.3})$$

Las tablas VII y VIII contienen las magnitudes mencionadas en función del orden L de expansión del flujo para el método polinómico, para tamaños de nodo de 20 cm y 10 cm respectivamente. Las tablas del caso a) corresponden a utilizar el método de aproximación parabólica directa para la modulación de la fuga neta transversal y las del caso b) utilizan la expansión en momentos locales del mismo orden L de expansión del flujo. En las tablas del caso a) se incluyen también los resultados obtenidos con el método analítico (MODAL).

Las tablas IX y X son análogas a las VII y VIII y corresponden a los resultados obtenidos usando la aproximación de la realimentación isotrópica.

En la tabla XI se investiga el efecto que el orden de la fuga neta transversal (según el método EML) tiene sobre la precisión de los resultados, para varios órdenes de expansión del flujo.

Las mencionadas tablas contienen información sobre los errores máximo y promedio de la distribución de potencia. El detalle de su distribución se presenta en las figuras 4 y 5 para nodos de 20 cm y varios órdenes de expansión del flujo, con las dos posibles aproximaciones sobre la fuga neta transversal. Se incluye también la distribución calculada según el método analítico para el caso de usar la APD en la modulación de la fuga transversal.

Por último, las tablas XII y XIII contienen los resultados obtenidos con varios métodos para el problema de la IAEA, que

han sido obtenidos de las referencias correspondientes. La tabla XIII es una comparación del método polinómico con EML contra el código PUMA /4/ de diferencias finitas, que es el usado comúnmente para los cálculos de reactor en el departamento de Cálculo y Análisis del Centro Atómico Constituyentes.

VII.3 Análisis y discusión general:

Los métodos desarrollados y presentados en los capítulos IV y V tienen en común una característica distintiva: la ecuación de acoplamiento del problema global consiste en una fórmula de 7 puntos con una única variable representando a cada nodo. En el caso de los métodos de malla gruesa esta variable es directamente el flujo promedio nodal (ϕ ó $\bar{\phi}$), mientras que en el esquema de matrices de respuesta es una combinación de las corrientes parciales promedio entrantes al nodo en cada dirección. Los coeficientes de acoplamiento de la fórmula de 7 puntos resultan ser dependientes de la solución a través de los factores de realimentación no lineal f_u . Esta dependencia introdujo los problemas de convergencia que aparecieron en los métodos de malla gruesa y que fueron analizados en la sección IV.4; desde este punto de vista los métodos de matrices de respuesta resultan más atractivos pues no presentan problemas de convergencia, y por este motivo el énfasis fue puesto en estos métodos con los cuales se obtuvieron los resultados numéricos presentados en el capítulo anterior. Se estudiaron entonces las propiedades y características de las posibles variantes dentro de este esquema.

Precisión del método de residuos ponderados:

La utilización del método general de residuos ponderados en la resolución de las ecuaciones direccionales (II.4) demostró ser una excelente aproximación a la solución rigurosa del método analítico. En la

tabla V se puede observar que los elementos de respuesta generados con los residuos ponderados coinciden, dentro de las cifras indicadas, con los obtenidos en forma analítica, siempre y cuando se tomen suficientes polinomios en la expansión del flujo dentro del nodo. Estos resultados fueron obtenidos utilizando el método APD para la fuga neta transversal, pero la convergencia del método polinómico a la solución analítica cuando el orden $L \rightarrow \infty$ es independiente del modelo de fuga transversal utilizado, ya que en las ecuaciones direccionales ésta aparece como un término heterogéneo de fuente.

En los resultados obtenidos para el problema benchmark de la IAEA (figura 4) se verifica nuevamente la tendencia a la solución analítica a medida que aumenta el orden de expansión del flujo.

Influencia de la modulación de la fuga neta transversal:

Los errores en los elementos de respuesta calculados con los métodos de este trabajo, tabla VI, indican que tanto la APD como la EML distorsionan la respuesta nodal, especialmente para nodos de 20 cm de lado. Con la fuga transversal modulada según la APD se observa la tendencia a subestimar la transmisión cruzada y a sobrestimar la directa, pero de manera tal que sus errores absolutos son de amplitudes parecidas lo cual se traduce en un pequeño error sobre la fracción μ que abandona nuevamente el nodo. En cambio con la EML se subestiman ambas transmisiones, a costa de una sobrestimación del factor ρ de reflexiones directas. Resulta sorprendente el pequeñísimo error con que ambos métodos predicen la negrura Γ de absorción, aún para nodos de 20 cm.

La combinación del método polinómico con el modelo APD para la fuga neta transversal resulta en un método nodal de carac-

terísticas similares al Nodal Expansion Method (NEM) de Finne mann /2/, al tener en común el modelo local de expansión del flujo nodal en polinomios de Legendre y un modelo equivalente (aunque no igual) de aproximación parabólica para la fuga neta transversal. En el NEM no se utiliza la realimentación no lineal y el algoritmo del problema global no corresponde a la fórmula de 7 puntos de los métodos de este trabajo. La referencia 11 contiene los resultados del problema de la IAEA obtenidos con NEM en aproximación G_3B^2 , que significa 5^{to} orden en el flujo, esquema de Galerkin en los residuos ponderados y fuga transversal de 2^{do} orden. La comparación de éstos con el orden 5^{to} del caso a) de las tablas VII y VIII se resume a continuación:

Tamaño de nodo	NEM G_3B^2		POLINOMICO P_5 APD	
	Keff	$ \epsilon_{max} $	Keff	$ \epsilon_{max} $
20 cm	1.029657	1.4 %	1.029550	1.3 %
10 cm	1.029611	0.3 %	1.029580	0.45%

TABLA I : Método polinómico con APD versus NEM
(Problema benchmark de la IAEA)

Es decir que dentro de las diferencias entre ambos métodos, se observa un buen acuerdo en los resultados para este problema.

La versión analítica del NEM es el Nodal Integration Method (NIM) descrito en la referencia 3. Al utilizar el mismo modelo de fuga transversal que el NEM, la comparación con el método analítico del presente trabajo es posible y se presenta en la siguiente tabla:

Tamaño de nodo	NIM		ANALITICO APD	
	Keff	$ \epsilon_{\max} $	Keff	$ \epsilon_{\max} $
20 cm	1.02964	2.0 %	1.029542	1.8 %

TABLA II : Método analítico con APD versus NIM
(Problema benchmark de la IAEA)

De nuevo se observa una buena concordancia entre ambos métodos, aunque el NEM y el NIM tienden a sobrestimar el k-efectivo mientras que los métodos de este trabajo lo subestiman; más allá de esta observación, la magnitud de los errores es similar en cada caso.

En las tablas I y II anteriores el pasaje del método polinómico al analítico (ó el de NEM a NIM) no produce la esperada reducción en la magnitud de los errores sino, muy por el contrario, los incrementa. Este extraño comportamiento se observa claramente en el caso a) de las tablas VII y VIII, y está ausente en el caso b) de las mismas tablas. Parece ser entonces una característica propia del método APD para la fuga neta transversal, que produce un cambio de signo en los errores de la potencia al pasar de un orden bajo ($L=3$) a órdenes superiores, como se observa en la figura 4. Debido a este cambio de signo la expansión de 5^{to} orden para el flujo nodal resulta ser la de menor error para este problema, pero puede no serlo para otros. Para el mismo problema tratado con nodos de 10 cm el óptimo se ubica en el 4^{to} orden.

El método EML es conceptualmente superior al APD y no adolece del problema de cambio de signo en los errores, como se puede ver en la figura 5. Como el número de operaciones necesarias para determinar la modulación de la fuga neta transversal con

EML(LL) depende del orden LL en que se lo aplique, requiere mayores tiempos de procesamiento que el APD en los órdenes superiores (caso b) de la tabla VII). Sin embargo existe un efecto de saturación, mostrado en la tabla XI, por el cual no es necesario aplicar el método EML(LL) con órdenes superiores a LL=2 ó LL=3, lo cual reduce los tiempos de procesamiento a valores similares a los obtenidos con el APD.

Influencia de la realimentación:

En el capítulo VI se presentó un método que en base a cierta aproximación, llamada aproximación de la realimentación isotrópica, permite eliminar la realimentación no lineal en el cálculo de los factores de distribución de fugas r_u y, en consecuencia, hacer que los coeficientes de acoplamiento de la fórmula de 7 puntos resulten independientes de la solución. Usando esta aproximación en el problema de la IAEA (nodos cuadrados, 2 dimensiones) el factor r_u se calcula simplemente como $r_u = r^S = 1/4$, ecuación (VI.17), y con este valor se construyeron las tablas IX y X. Los errores resultantes, del orden del 3% al 5% de máximo y del 2% de cuadrático medio en la distribución de potencia, son consecuencia de no cumplirse con la condición de validez de la aproximación, ecuación (VI.21):

$$1 \ll \mu^*$$

ya que para los datos de este problema μ^* varía en el rango 0.5 a 0.8 para nodos de 20 cm y 0.6 a 1.4 para nodos de 10 cm, dependiendo del material y del grupo de energía.

C A P I T U L O V I I I :

CONCLUSIONES

VIII. CONCLUSIONES

La conclusión más importante que se rescata de este trabajo es que la utilización de la realimentación no lineal para reducir el número de incógnitas ha sido posible y en el esquema de matrices de respuesta el algoritmo resultante es estable, mientras que en el esquema de malla gruesa es necesario en general la subrelajación de los factores de realimentación no lineal para lograr estabilidad.

En el esquema de matrices de respuesta es posible remover de los coeficientes de acoplamiento su dependencia en la solución, por medio de la aproximación de la realimentación isotrópica. La pérdida de precisión asociada se estima del 4% al 5% en la distribución de potencia.

El método polinómico en combinación con el método de residuos ponderados demostró ser una alternativa excelente para resolver el problema local. La supuesta composición homogénea de los nodos hace que unos pocos polinomios sean suficientes para describir con buen detalle la forma del flujo dentro de ellos.

Un aspecto que mostró ser muy importante para la precisión global de los métodos, fue la modulación de la fuga neta transversal. Las dos aproximaciones propuestas para su determinación son equivalentes en eficiencia, con una ventaja de la EML respecto de la APD relativa al cambio de signo de los errores observados en el método polinómico.

La comparación con otros métodos de la literatura indica que los aquí presentados se encuentran al nivel de precisión de los métodos nodales más avanzados, requiriendo tiempos de procesamiento un orden de magnitud menor (para casos bidimensionales) que el método de diferencias finitas para lograr la misma precisión.

A P E N D I C E S

APENDICE I : Polinomios de Legendre.

Las expresiones de los primeros polinomios de Legendre son:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= (3x^2 - 1)/2 \\ P_3(x) &= (5x^3 - x)/2 \\ P_4(x) &= (35x^4 - 30x^2 + 3)/8 \\ &\dots \end{aligned}$$

La siguiente ecuación de recurrencia relaciona las expresiones para tres órdenes consecutivos $l-1$, l y $l+1$:

$$(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x)$$

Los elementos de matriz b_{pl} definidos por la ecuación (IV.5.a) se tabulan a continuación para los primeros valores de p y l ; el resto se los puede hallar por inducción:

$\begin{array}{c} l \\ \hline p \end{array}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	10	0	28	0	54	0	88	0
2	0	0	0	14	0	36	0	66	0	104
3	0	0	0	0	18	0	44	0	78	0
4	0	0	0	0	0	22	0	52	0	90
5	0	0	0	0	0	0	26	0	60	0
6	0	0	0	0	0	0	0	30	0	68
7	0	0	0	0	0	0	0	0	34	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	38

TABLA III : Elementos de la matriz $\{b_{pl}\}$

APENDICE II : Expresiones polinómicas y analíticas
para los factores t_u y x_u .

En el método polinómico de matrices de respuesta se introdujeron las magnitudes t_u y x_u definidas por las expresiones (IV.24). Las expresiones analíticas de estos factores para los primeros valores del orden L de expansión se presentan a continuación:

a) $L = 2$:

Este es caso básico para el cual no hay ninguna condición de residuos ponderados, con lo cual $\underline{P}_b(u) = 0$ y se tiene para las funciones $\underline{g}_u(u)$ (ecuación (IV.12.a)):

$$g_{1u}(u) = P_1(u) \qquad g_{2u}(u) = P_2(u)$$

con las cuales se obtiene:

$$t_u = 1 \qquad x_u = 3 \qquad \text{(AII.1)}$$

b) $L = 3$:

En este caso hay una condición de residuos ponderados, con lo cual:

$$\underline{B} = (0 \quad 0 \quad 10) \qquad ; \quad \text{Apéndice I}$$

$$\underline{E} = (2/3 \quad 0 \quad 0) \qquad ; \quad \text{ec. (IV.5.b)}$$

$$\underline{H}_u = (-2/3K_u^2 \quad 0 \quad 10) \qquad ; \quad \text{ec. (IV.8.a)}$$

$$\underline{M}_u = (-1/15K_u^2 \quad 0) \qquad ; \quad \text{ec. (IV.10.c)}$$

y de aquí se obtiene para las funciones $\underline{g}_u(u)$:

$$g_{1u}(u) = P_1(u) + \frac{1}{15K_u^2} P_3(u)$$

$$g_{2u}(u) = P_2(u)$$

de las cuales resulta:

$$t_u = 1 + \frac{5}{1+15K_u^2} \quad X_u = 3 \quad (\text{AII.2})$$

Para los siguientes órdenes de expansión solamente se consig-
nan las expresiones finales para t_u y x_u .

c) L = 4 :

$$t_u = 1 + \frac{5}{1+15K_u^2} \quad (\text{AII.3.a})$$

$$X_u = 3 + \frac{7}{1+35K_u^2} \quad (\text{AII.3.b})$$

d) L = 5 :

$$t_u = \frac{1}{1 + \frac{3}{2+45K_u^2} + \frac{1}{42K_u^2 + 945K_u^4}} \left(1 + \frac{18}{2+45K_u^2} + \frac{5}{14K_u^2 + 315K_u^4} \right) \quad (\text{AII.4.a})$$

$$X_u = 3 + \frac{7}{1+35K_u^2} \quad (\text{AII.4.b})$$

Se puede decir como regla general que los polinomios impares
inciden sobre el factor t_u solamente y que los de grado par
afectan sólo al factor x_u .

También se puede deducir la paridad de las funciones $g_u(u)$; obsevando que en cualquier orden de aproximación van a tener la siguiente estructura:

$$g_{1u}(u) = P_1(u) + A_{u1} P_3(u) + A_{u2} P_5(u) + \dots$$

$$g_{2u}(u) = P_2(u) + B_{u2} P_4(u) + B_{u2} P_6(u) + \dots$$

surge inmediatamente que $g_{1u}(u)$ es impar, mientras que $g_{2u}(u)$ es par.

De las expresiones para $L=2$ se obtienen los siguientes valores de los factores de corrección por tamaño de nodo de los métodos de malla gruesa, ecuación (IV.66.b), en el límite para $h \rightarrow 0$:

$$t_u \longrightarrow 1$$

$$S_u \longrightarrow 3 - f_u$$

En el capítulo V se obtuvo la expresión (V.24) para la derivada de un modo espacial cualquiera $\psi_u(u)$. En el caso a un grupo de energía, el flujo $\phi(\underline{r})$ coincide con el único modo $\psi(\underline{r})$ pues el espectro es en este caso $\vec{u} = (1)$. Entonces, en el caso a un grupo y dejando de lado la modulación de la fuga neta transversal, la expresión (V.24) se transforma en:

$$\left. \frac{d \phi_u(u)}{dn_u} \right|_{u=\pm 1} = \pm \frac{1}{2} a_u \phi_u^* - \frac{1}{2} c_u \phi_u + f_{u0} c_u$$

La relación entre f_{u0} y el flujo promedio en el nodo (ϕ), se obtiene promediando las ecuaciones (V.19) para dar:

$$f_{u0} = \left(\phi - \frac{\phi_u}{2 a_u} \right) \frac{a_u}{a_u - 1}$$

con lo cual la expresión anterior de la derivada se transforma en:

$$\left. \frac{d\phi_u(u)}{dn_u} \right|_{u=\pm 1} = \pm \frac{1}{2} a_u \phi_u^* - \left(\frac{\phi_u}{2} - \phi \right) \frac{a_u c_u}{a_u - 1} \quad (\text{analítico})$$

La expresión equivalente del método polinómico se obtiene de la ecuación (IV.64):

$$\left. \frac{d\phi_u(u)}{dn_u} \right|_{u=\pm 1} = \pm \frac{1}{2} t_u \phi_u^* + \left(\frac{\phi_u}{2} - \phi \right) x_u \quad (\text{polinómico})$$

Comparando ambas expresiones se observan las siguientes relaciones entre las magnitudes t_u y x_u del método polinómico y a_u y c_u del método analítico:

$$t_u = a_u \quad (\text{AII.5.a})$$

$$x_u = \frac{a_u c_u}{1 - a_u} \quad (\text{AII.5.b})$$

La equivalencia anterior se analiza en el siguiente ejemplo numérico.

Ejemplo: nodo cuadrado de $h=20$ cm, $D=1.5$ cm y $\Sigma_a=0.03012$ cm⁻¹:

$$K_u^2 = 0.49801 \quad ; \quad \text{ec. (IV.4)}$$

$$B^2 = -\frac{1}{L^2} = -0.02008 \text{ cm}^{-2} \quad ; \quad \text{Apéndice III}$$

con estos valores se calculan x_u y t_u en distintas aproximaciones, según las expresiones de este apéndice y con a_u y c_u de las ecuaciones (V.25). Los resultados se consignan en la tabla siguiente:

MAGNITUD	L=2	L=3	L=4	L=5	según (AII.5)
t_u	1.0	1.5903	1.5903	1.5940	1.5940
x_u	3.0	3.0	3.3798	3.3798	3.3804

TABLA IV : Valores numéricos de t_u y x_u para un nodo de 20 cm con $D=1.5$ cm y $\Sigma_a=0.03012$ cm⁻¹

APENDICE III : Autovalores y autovectores
de la matriz de buckling

Los autovalores de la matriz de buckling:

$$\hat{B}^2 = \begin{bmatrix} \frac{\lambda \nu \Sigma_{f1} - \Sigma_{r1}}{D_1} & \frac{\lambda \nu \Sigma_{f2}}{D_1} \\ \frac{\Sigma_{s12}}{D_2} & -\frac{\Sigma_{a2}}{D_2} \end{bmatrix}$$

se obtienen anulando el determinante de la matriz: $\hat{B}^2 - B_i^2 \hat{I}$
La expresión resultante es:

$$B_{1/2}^2 = \frac{T}{2} \pm \text{SQRT} \left(\frac{T^2}{4} - D \right)$$

donde T y D son la traza y el determinante de la matriz \hat{B}^2 ,
dados por las siguientes ecuaciones en términos de la teoría
de reactores a dos grupos:

$$T = - \left(\frac{1}{\beta^*} + \frac{1}{L^2} \right)$$

$$D = \frac{1}{\beta L^2} (1 - \lambda k_{\infty})$$

con:

$$\frac{1}{\beta^*} = \frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \lambda (1 - \beta) (\eta f)_1 \right\}$$

$$k_{\infty} = (1 - \beta) (\eta f)_1 + \beta (\eta f)_2$$

$$L^2 = \frac{D_2}{\Sigma_{a2}}$$

$$(\eta f)_g = \frac{\nu \Sigma_{fg}}{\Sigma_{ag}}$$

$$\beta = \frac{\Sigma_{s12}}{\Sigma_{r1}}$$

$$\beta = \frac{D_1}{\Sigma_{r1}}$$

Los autovectores respectivos se obtienen de:

$$\hat{B}^2 \vec{U}_i = B_i^2 \vec{U}_i \quad i=1,2$$

Como la ecuación (V.2) es homogénea, los autovectores pueden ser normalizados tal que una de sus componentes sea la unidad, así se obtiene:

$$\vec{U}_1 = \text{col}(1, r_1) \quad \vec{U}_2 = \text{col}(r_2, 1)$$

con:

$$r_1 = \frac{r_{\infty}}{1+L^2 B_1^2} \quad ; \quad r_2 = \frac{1+L^2 B_2^2}{r_{\infty}} \quad ; \quad r_{\infty} = \frac{\Sigma s_{12}}{\Sigma a_2}$$

La matriz \hat{U} de la ecuación (V.9.a) queda entonces definida por:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & r_2 \\ r_1 & 1 \end{pmatrix}$$

y su inversa viene dada por:

$$\hat{U}^{-1} = \frac{1}{1-r_1 r_2} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ -r_1 & 1 \end{pmatrix}$$

APENDICE IV : Elementos de respuesta que incluyen la modulación de las corrientes parciales salientes

La descomposición del vector \underline{d}_u de la fuga neta transversal en $\underline{d}_u^+ - \underline{d}_u^-$ permite incluir la modulación de las corrientes parciales salientes (contenida en \underline{d}_u^+) en los elementos de respuesta de la ecuación de respuesta nodal, para hacer corresponder a éstos con los de la teoría de matrices de respuesta de orden cero. Dado que el procedimiento es diferente según el método que se aplique para determinar la modulación de la fuga neta transversal, se analizará cada caso por separado, indicando los pasos más importantes para obtener las expresiones respectivas.

a) Método polinómico con APD:

La partición $\underline{d}_u = \underline{d}_u^+ - \underline{d}_u^-$ implica una partición similar en el vector \underline{S}_u de la ecuación (IV.8.b):

$$\underline{S}_u = \underline{S}_u^+ - \underline{S}_u^- = \underline{I}^{(2)} \underline{d}_u^+ - \left(\underline{I}^{(2)} \underline{d}_u^- + \frac{1}{D} \underline{q}_u \right) \quad (\text{AIV.1})$$

con esta división las expresiones para $\underline{S}_u^T \underline{W}_u$ y $\underline{S}_u^T \underline{W}_u^*$ de las ecuaciones (IV.29), se explicitan como:

$$\underline{S}_u^T \underline{W}_u = L_{u1}^+ W_{u1} + L_{u2}^+ W_{u2} - \underline{S}_u^{-T} \underline{W}_u \quad (\text{AIV.2.a})$$

$$\underline{S}_u^T \underline{W}_u^* = L_{u1}^+ W_{u1}^* + L_{u2}^+ W_{u2}^* - \underline{S}_u^{-T} \underline{W}_u^* \quad (\text{AIV.2.b})$$

De la definición del vector \underline{W}_u , ecuación (IV.25), y de la paridad de los $P_1(u)$ se deduce que $W_{u1} = 0$ y $W_{u2} = 2W_{2u+}$, y para la componente antisimétrica: $W_{u1}^* = 2W_{1u+}$ y $W_{u2}^* = 0$.

Insertando las expresiones (III.24.a) para L_{u1}^+ y L_{u2}^+ , se obtiene:

$$\underline{S}_u^T \cdot \underline{W}_u = \frac{1}{D} W_{2u+} \sum_{V \neq u} \frac{A_V}{h_V} (j_u^+ + j_u^-) - \frac{2}{D} W_{2u+} \sum_{V \neq u} \frac{1}{h_V} (j_V^+ - (1-A_V) j_V^-) - \underline{S}_u^T \cdot \underline{W}_u \quad (\text{AIV.3.a})$$

$$\underline{S}_u^T \cdot \underline{W}_u^* = \frac{1}{D} W_{1u+} \sum_{V \neq u} \frac{A_V}{h_V} (j_u^{+*} + j_u^{-*}) - \underline{S}_u^T \cdot \underline{W}_u^* \quad (\text{AIV.3.b})$$

La segunda sumatoria del lado derecho de la ecuación (AIV.3.a) puede ser descompuesta según:

$$\sum_{V \neq u} \frac{1}{h_V} (j_V^+ - (1-A_V) j_V^-) = \sum_V \frac{1}{h_V} (j_V^+ - (1-A_V) j_V^-) - \frac{1}{h_u} (j_u^+ - (1-A_u) j_u^-)$$

con esta descomposición e introduciendo las ecuaciones (AIV.3) en el par (IV.29) se obtiene el siguiente sistema equivalente al (IV.31):

$$\underline{j}^+ - \underline{j}^- = - \underline{\tilde{C}} \cdot \underline{j}^+ - \underline{\tilde{G}} \cdot \underline{j}^- - \underline{\tilde{K}} \cdot \underline{j}^+ + \underline{\tilde{K}} \cdot \underline{j}^- - \underline{\tilde{V}} \cdot \underline{j}^- - \underline{2QX} - \underline{W} \cdot \underline{S}^- \quad (\text{AIV.4.a})$$

$$\underline{j}^{+*} - \underline{j}^{-*} = - \underline{\tilde{A}} \cdot \underline{j}^{+*} - \underline{\tilde{A}} \cdot \underline{j}^{-*} - \underline{W} \cdot \underline{S}^- \quad (\text{AIV.4.b})$$

con las definiciones:

$$\underline{\tilde{C}} = \text{diag} (\beta_u, \beta_v, \beta_w) \quad (\text{AIV.5.a})$$

$$\underline{\tilde{A}} = \text{diag} (\alpha_u, \alpha_v, \alpha_w) \quad (\text{AIV.5.b})$$

$$\underline{\tilde{G}} = \text{diag} (\gamma_u, \gamma_v, \gamma_w) \quad (\text{AIV.5.c})$$

$$\underline{\tilde{K}} = \frac{1}{\underline{\Sigma}_r} \underline{\tilde{D}} \cdot \frac{1}{\underline{\tilde{h}}} \cdot \underline{\tilde{h}}^{-1} \quad \underline{\tilde{D}} = \text{diag} (\delta_u, \delta_v, \delta_w) \quad (\text{AIV.5.d})$$

$$\underline{V} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{1}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{h}}^{-1} \quad \underline{\underline{E}} = \text{diag} (\underline{\underline{\epsilon}}_u, \underline{\underline{\epsilon}}_v, \underline{\underline{\epsilon}}_w) \quad (\text{AIV.5.e})$$

con:

$$\beta_u = 2 d_u x_u - \frac{W_{2u+}}{D} \left(\frac{2}{h_u} + \sum_{v \neq u} \frac{A_v}{h_v} \right) \quad \alpha_u = 2 d_u t_u - \frac{W_{2u+}}{D} \sum_{v \neq u} \frac{A_v}{h_v}$$

$$\delta_u = 2 d_u x_u + \frac{W_{2u+}}{D} \left(\frac{2(1-A_u)}{h_u} - \sum_{v \neq u} \frac{A_v}{h_v} \right) \quad \delta_u = 2 d_u x_u + \frac{2 W_{2u+}}{D} \sum_v$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}_u = 2 \frac{W_{2u+}}{D}$$

El sistema (AIV.4) una vez resuelto conduce a:

$$\underline{j}^+ = \underline{R} \cdot \underline{j}^- + 2 \underline{Q} \underline{\pi} + \underline{j}^0 \quad (\text{AIV.6.a})$$

$$\underline{j}^{+*} = \underline{P} \cdot \underline{j}^{-*} + \underline{j}^{0*} \quad (\text{AIV.6.b})$$

donde \underline{R} , \underline{P} , $\underline{\pi}$ y \underline{j}^0 vienen dados ahora por:

$$\underline{R} = (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{K}})^{-1} \cdot (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{G}} + \underline{\underline{K}} - \underline{\underline{V}}) \quad (\text{AIV.7.a})$$

$$\underline{P} = (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}})^{-1} \cdot (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) \quad (\text{AIV.7.b})$$

$$\underline{\pi} = (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{K}})^{-1} \cdot \underline{X} \quad (\text{AIV.7.c})$$

$$\underline{j}^0 = -(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{K}})^{-1} \cdot \underline{W} \cdot \underline{S}^- \quad (\text{AIV.7.d})$$

$$\underline{j}^{0*} = -(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}})^{-1} \cdot \underline{W}^* \cdot \underline{S}^- \quad (\text{AIV.7.e})$$

A partir de \tilde{R} y \tilde{P} , las transmisiones \tilde{t} se obtienen como antes según las ecuaciones (IV.37) y (IV.38). Las magnitudes \tilde{R} , \tilde{P} y $\tilde{\pi}$ son ahora las correspondientes a la teoría de matrices de respuesta de orden cero, y los vectores \tilde{j}^o y \tilde{j}^{o*} contienen ahora solamente la modulación de las corrientes entrantes (y de la fuente, si no es plana).

b) Método polinómico con EML:

Utilizando las expresiones (III.35.a), la partición (AIV.1) queda expresada:

$$\underline{S}_u = \frac{1}{2D} \left(\sum_{v \neq u} \frac{A_v}{h_v} \right) \underline{\phi}_u - \underline{S}_u^- \quad (\text{AIV.8})$$

donde: $\underline{S}_u^- = \underline{L}_u^- + \frac{1}{D} q_u$ y se ha supuesto que el orden LL de expansión de la fuga neta transversal es el mismo que el del flujo (L). La introducción del vector \underline{S}_u definido por la ecuación (AIV.8) se hace en la ecuación (IV.9), la cual queda convertida en:

$$\tilde{H}_u \cdot \underline{\phi}_u + \frac{h_u^2}{4} \tilde{E} \cdot \underline{S}_u^- = 0 \quad (\text{AIV.9})$$

con la nueva definición para \tilde{H}_u :

$$\tilde{H}_u = \tilde{B} - \left(\frac{1}{K_u^2} + \frac{h_u^2}{8D} \sum_{v \neq u} \frac{A_v}{h_v} \right) \cdot \tilde{E} \quad (\text{AIV.10})$$

Con esta nueva expresión para \tilde{H}_u , el procedimiento para encontrar las expresiones de las magnitudes de respuesta es idéntico al detallado en el capítulo IV.

c) Análítico con APD:

La expresión matricial de las componentes L_{u1}^+ y L_{u2}^+ de la ecuación (III.24.a), después de manipulada, es:

$$\vec{L}_{u1}^+ = \frac{2}{h_u^2} \hat{\alpha}_u^{-1} \hat{\alpha}_u \cdot (\vec{j}_u^{+*} + \vec{j}_u^{-*}) \quad (\text{AIV.11.a})$$

$$\vec{L}_{u2}^+ = \frac{2}{h_u^2} \hat{\alpha}_u^{-1} \cdot \left(\hat{\gamma}_u \cdot \vec{j}_u^+ + \hat{\delta}_u \cdot \vec{j}_u^- - \sum_v \frac{h_u}{h_v} \vec{j}_v^+ + \sum_v \frac{h_u}{h_v} \hat{\beta}_v \cdot \vec{j}_v^- \right) \quad (\text{AIV.11.b})$$

donde las magnitudes $\hat{\alpha}_u$, $\hat{\beta}_u$, $\hat{\delta}_u$ y $\hat{\gamma}_u$ no tienen que ver con otros usos anteriores de los mismos símbolos. Las definiciones correspondientes son:

$$\hat{\alpha}_u = \frac{h_u}{\mathcal{L}} \sum_{v \neq u} \frac{1}{h_v} \hat{A}_v \quad (\text{AIV.12.a})$$

$$\hat{\beta}_u = \hat{I} - \hat{A}_u \quad (\text{AIV.12.b})$$

$$\hat{\delta}_u = \hat{\alpha}_u - \hat{\beta}_u \quad (\text{AIV.12.c})$$

$$\hat{\gamma}_u = \hat{I} + \hat{\alpha}_u \quad (\text{AIV.12.d})$$

con:

$$\hat{A}_u = \text{diag}(A_{u1}, A_{u2})$$

Evaluando \vec{J}_u^{0*} con $\vec{L}_{u1} = \vec{L}_{u1}^+ - \vec{L}_{u1}^-$ y utilizando para \vec{L}_{u1}^+ la expresión (AIV.11.a), se obtiene para la componente antisimétrica la siguiente ecuación, equivalente a la (V.40):

$$\vec{j}_u^{+*} = \hat{P}_u \cdot \vec{j}_u^{-*} + \vec{j}_u^{0*} \quad (\text{AIV.13})$$

donde:

$$\hat{P}_u = (\hat{I} + \hat{X}_u)^{-1} \cdot (\hat{I} - \hat{X}_u) \quad (\text{AIV.14.a})$$

$$\vec{j}_u^{0*} = (\hat{I} + \hat{X}_u)^{-1} \cdot \hat{d}_u \cdot \overline{\overline{k}}_u \cdot \frac{h_u}{\mathcal{L}} \cdot \vec{L}_{u1} \quad (\text{AIV.14.b})$$

con:

$$\hat{X}_u = \mathcal{L} \hat{d}_u \cdot \overline{\overline{a}}_u + \hat{d}_u \cdot \overline{\overline{k}}_u \cdot \hat{d}_u^{-1} \cdot \hat{\alpha}_u$$

La ecuación para la componente simétrica se obtiene evaluando \vec{J}_u^0 con $\vec{L}_{u2} = \vec{L}_{u2}^+ - \vec{L}_{u2}^-$, donde \vec{L}_{u2}^+ está dado por la ec. (AIV.11.b).

Introduciendo la expresión resultante en la (V.43) y agrupando términos, se llega a la equivalente de la ecuación (V.48):

$$\vec{j}^+ = IR \cdot \vec{j}^- + \vec{j}^0 \quad (\text{AIV.15})$$

donde:

$$IR = A^{-1} \cdot IB \quad (\text{AIV.16.a})$$

$$\vec{j}^0 = A^{-1} \cdot \vec{J}^0 \quad (\text{AIV.16.b})$$

siendo A y IB supermatrices compuestas por las siguientes matrices bloque de (2x2):

$$\hat{A}_{u'u} = (\hat{I} - \hat{E}_u^+ + \hat{d}_u \cdot \overline{\overline{m}}_u \cdot \hat{d}_u^{-1} \cdot \hat{y}_u) \cdot \hat{\delta}_{uu'} + \hat{d}_u \cdot (\overline{\overline{e}}_u - \overline{\overline{m}}_u) \cdot \hat{d}_u^{-1} \cdot \frac{h_u}{h_{u'}} \quad (\text{AIV.17.a})$$

$$\hat{B}_{u'u} = (\hat{I} + \hat{E}_u^- - \hat{d}_u \cdot \overline{\overline{m}}_u \cdot \hat{d}_u^{-1} \cdot \hat{y}_u) \cdot \hat{\delta}_{uu'} + \hat{d}_u \cdot (\overline{\overline{e}}_u - \overline{\overline{m}}_u \cdot \hat{\beta}_{u'}) \cdot \hat{d}_u^{-1} \cdot \frac{h_u}{h_{u'}} \quad (\text{AIV.17.b})$$

y \vec{J}^0 está definido por:

$$\vec{J}^0 = \text{COL}(\vec{J}_u^0, \vec{J}_v^0, \vec{J}_w^0) \quad (\text{AIV.18})$$

con:

$$\vec{J}_u^0 = \frac{h_u}{2} \hat{d}_u \cdot \overline{\overline{m}}_u \cdot \vec{L}_{u2}$$

De las ecuaciones (AIV.14.a) y (AIV.16.a) se obtienen los elementos de respuesta finales, como en los casos anteriores.

F I G U R A S
Y
T A B L A S

FIGURA 1 : Diagrama de la ecuación : $f^{(t)} = \alpha(\Omega) + \beta(\Omega) f^{(t-1)}$
mostrando un camino espiral convergente y otro
divergente.

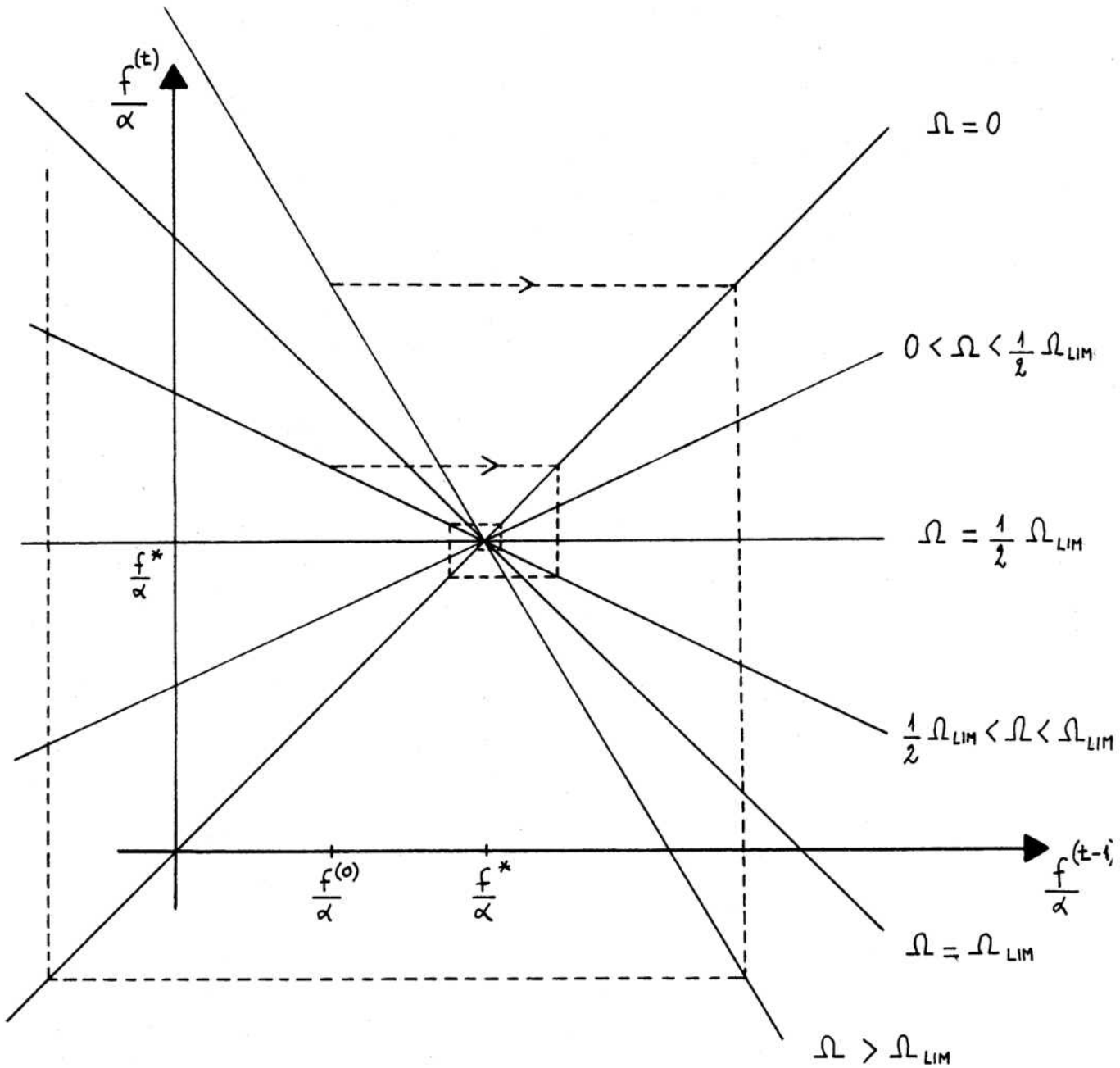
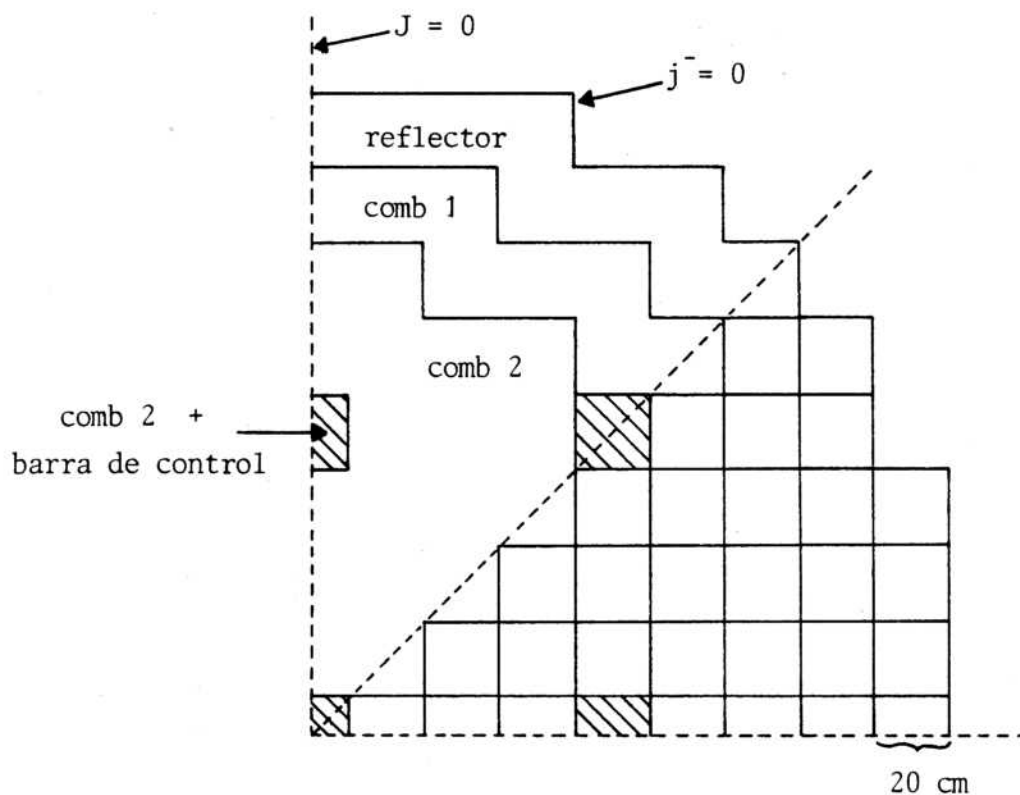


FIGURA 2 : El problema benchmark de la IAEA



DATOS

Buckling axial = $8.0 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-2}$

REGION	D_1	D_2	Σ_{s12}	Σ_{a1}	Σ_{a2}	$\nu \Sigma_{f2}$
comb 1	1.5	0.4	0.02	0.01	0.08	0.135
comb 2	1.5	0.4	0.02	0.01	0.085	0.135
comb 2 + barra	1.5	0.4	0.02	0.01	0.13	0.135
reflector	2.0	0.3	0.04	0.0	0.01	0.0

FIGURA 3 : Solución del problema benchmark de la IAEA
(Obtenida de la referencia 7)

k - efectivo : 1.029583

Densidad de potencia promedio por elemento combustible:

					0.5852		
				0.4706	0.6857	0.5974	
			1.1927	0.9671	0.9065	0.8464	
		1.4690	1.3449	1.1792	1.0706	0.9753	0.6924
	1.4346	1.4794	1.3146	1.0696	1.0362	0.9506	0.7360
0.7453	1.3092	1.4533	1.2105	0.6100	0.9352	0.9345	0.7552

TABLA V : Valores de las magnitudes de respuesta calculadas por los métodos polinómicos y analítico, para tres tamaños de nodo.

TAMAÑO	MAG-NITUD	FUGA TRANS.	ORDEN DE EXPANSION(L de P_L)				MODAL	EXACTO
			3	4	5	6		
5 cm	ρ	APD	-0.2027	-0.2027	-0.2027	-0.2027	-0.2027	-0.2025
		EML(L)	-0.1986	-0.1986	-0.1986	-0.1986	---	
	Γ	APD	0.1374	0.1375	0.1375	0.1375	0.1375	0.1375
		EML(L)	0.1374	0.1375	0.1375	0.1375	---	
b	APD	0.3570	0.3610	0.3610	0.3610	0.3610	0.3617	
	EML(L)	0.3570	0.3611	0.3611	0.3611	---		
t	APD	0.1757	0.1716	0.1716	0.1716	0.1716	0.1708	
	EML(L)	0.1737	0.1695	0.1695	0.1695	---		
10 cm	ρ	APD	0.0501	0.0501	0.0501	0.0501	0.0501	0.0494
		EML(L)	0.0611	0.0611	0.0605	0.0605	---	
	Γ	APD	0.2440	0.2457	0.2457	0.2457	0.2457	0.2456
		EML(L)	0.2441	0.2455	0.2455	0.2455	---	
b	APD	0.2604	0.2704	0.2704	0.2704	0.2704	0.2733	
	EML(L)	0.2604	0.2709	0.2709	0.2709	---		
t	APD	0.0925	0.0816	0.0817	0.0817	0.0817	0.0792	
	EML(L)	0.0870	0.0758	0.0761	0.0761	---		
20 cm	ρ	APD	0.2374	0.2374	0.2358	0.2358	0.2358	0.2328
		EML(L)	0.2583	0.2583	0.2543	0.2543	---	
	Γ	APD	0.3682	0.3840	0.3840	0.3840	0.3840	0.3824
		EML(L)	0.3681	0.3823	0.3822	0.3822	---	
b	APD	0.1448	0.1642	0.1642	0.1642	0.1642	0.1719	
	EML(L)	0.1448	0.1658	0.1658	0.1658	---		
t	APD	0.0524	0.0251	0.0259	0.0258	0.0258	0.0205	
	EML(L)	0.0420	0.0139	0.0159	0.0158	---		

TABLA VI : Errores en las magnitudes de respuesta calculadas en P_6 para tres tamaños de nodo y ambas representaciones de la fuga neta transversal.

TAMAÑO	FUGA NETA TRANSVERSAL	ϵ_p	ϵ_r	ϵ_b	ϵ_t	ϵ_K
5 cm	APD	-0.10	0.00	-0.19	0.47	0.02
	EML(6)	1.88	0.00	-0.17	-0.76	-0.35
10 cm	APD	1.42	0.04	-1.06	3.16	-0.11
	EML(6)	22.47	-0.04	-0.88	-3.91	-1.56
20 cm	APD	1.29	0.42	-4.48	25.85	-1.25
	EML(6)	9.23	-0.05	-3.49	-22.93	-5.55

Todos los errores están en %

TABLA VII : Resultados problema IAEA con nodos de 20 cm.

CASO a) fuga transversal modulada según APD

ORDEN "L" DE EXPANSION	ΔK_{eff} ^a	ϵ_{max} ^b	$\overline{\epsilon^2}$ ^b	T_{cpu} ^c
3	-538	-14.2	6.6	3.3
4	-150	-1.8	0.87	3.7
5	-33	1.3	0.34	4.1
6	-41	1.8	0.51	4.5
7	-40	1.8	0.52	4.9
8	-40	1.8	0.52	5.3

modal	-41	1.8	0.52	4.8
-------	-----	-----	------	-----

CASO b) fuga transversal modulada según EML(L)

ORDEN "L" DE EXPANSION	ΔK_{eff} ^a	ϵ_{max} ^b	$\overline{\epsilon^2}$ ^b	T_{cpu} ^c
3	-513	-14.4	6.6	3.2
4	-164	-3.1	1.5	3.8
5	-50	-1.5	0.62	4.4
6	-63	-1.0	0.41	4.8
7	-63	-1.0	0.40	5.5
8	-63	-1.0	0.40	6.1

a : errores en ppm

b : errores en %

c : tiempo de CPU en minutos para la BASF 7/68 del C.A.C. El problema fue resuelto en simetría I (núcleo completo).

TABLA VIII : Resultados problema IAEA con nodos de 10 cm.

CASO a) fuga transversal según APD

ORDEN "L" DE EXPANSION	ΔK_{eff}^a	ϵ_{max}^b	$\overline{\epsilon^2}^b$
3	-107	-3.2	1.4
4	-3	0.28	0.08
5	-3	0.45	0.14
6	-3	0.45	0.13

modal	3	0.43	0.12
-------	---	------	------

CASO b) fuga transversal según EML(L)

ORDEN "L" DE EXPANSION	ΔK_{eff}^a	ϵ_{max}^b	$\overline{\epsilon^2}^b$
3	-166	-3.3	1.5
4	-14	-0.70	0.22
5	-19	-0.51	0.14
6	-19	-0.51	0.14

^a : errores en ppm

^b : errores en %

TABLA IX : Resultados problema IAEA con nodos de 20 cm y la aproximación de la realimentación isotrópica.

CASO a) fuga transversal modulada según APD

ORDEN "L" DE EXPANSION	ΔK_{eff} ^a	ϵ_{max} ^b	$\overline{\epsilon^2}$ ^b
3	-38	-11.8	5.5
4	718	-4.4	1.5
5	798	-4.8	1.9
6	804	5.2	2.0
7	805	5.2	2.0
8	805	5.2	2.0
modal	847	5.4	2.0

CASO b) fuga transversal modulada según EML(L)

ORDEN "L" DE EXPANSION	ΔK_{eff} ^a	ϵ_{max} ^b	$\overline{\epsilon^2}$ ^b
3	-9	-12.0	5.5
4	742	-5.1	1.5
5	814	-4.8	1.5
6	819	-4.8	1.6
7	820	-4.8	1.6
8	820	-4.8	1.6

a : errores en ppm

b : errores en %

TABLA X : Resultados problema IAEA con nodos de 10 cm y la aproximación de la realimentación isotrópica.

CASO a) fuga transversal modulada según APD

ORDEN "L" DE EXPANSION	ΔK_{eff} ^a	ϵ_{max} ^b	$\overline{\epsilon^2}$ ^b
3	-117	-3.0	1.4
4	32	-3.3	1.6
5	29	-3.2	1.6
6	29	-3.2	1.6
modal	16	-3.8	1.9

CASO b) fuga transversal modulada según EML(L)

ORDEN "L" DE EXPANSION	ΔK_{eff} ^a	ϵ_{max} ^b	$\overline{\epsilon^2}$ ^b
3	-135	-6.4	3.0
4	22	-4.0	1.9
5	20	-3.8	1.8
6	20	-3.8	1.8

a : errores en ppm

b : errores en %

TABLA XI : Influencia del orden (LL) de la fuga neta transversal según el método EML.

(Problema IAEA, nodos de 20 cm)

ORDEN DE EXPANSION "L" DEL FLUJO	FUGA NETA TRANSVERSAL	ΔK_{eff} ^a	$\overline{\epsilon^2}$ ^b	ϵ_{max} ^b	T_{cpu} ^c
6	EML(0)	457	0.96	-2.7	---
	EML(1)	-26	0.58	-1.7	4.0
	EML(2)	-68	0.46	-1.2	4.2
	EML(3)	-63	0.42	-1.1	4.3
	EML(4)	-63	0.41	-1.0	4.5
	EML(5)	-63	0.41	-1.0	4.6
	EML(6)	-63	0.41	-1.0	4.8
5	EML(0)	462	0.95	-2.8	---
	EML(1)	-13	0.76	-2.0	3.8
	EML(2)	-55	0.64	-1.6	3.9
	EML(3)	-50	0.62	-1.5	4.0
	EML(4)	-50	0.62	-1.5	4.1
	EML(5)	-50	0.62	-1.5	4.4
4	EML(0)	351	0.97	-2.3	---
	EML(1)	-122	1.6	-3.5	3.3
	EML(2)	-164	1.5	-3.1	3.4
	EML(3)	-164	1.5	-3.1	3.6
	EML(4)	-164	1.5	-3.1	3.8
3	EML(0)	-70	5.8	-13.4	---
	EML(1)	-513	6.6	-14.4	2.9
	EML(2)	-513	6.6	-14.4	3.0
	EML(3)	-513	6.6	-14.4	3.2

^a : errores en ppm

^b : errores en %

^c : tiempo de CPU en minutos para la BASF 7/68 del C.A.C. El problema fue resuelto en simetría I (núcleo completo).

TABLA XII : Resultados del problema de la IAEA para varios métodos.

METODO		REF.	$ \Delta K_{eff} ^a$	$ \epsilon_{max} ^b$	OBSERVACIONES
NEM		2,11	74	1.4	G_3B^2
NGFM		6	12	0.7	basado en funciones de Green
FERM		8	3	1.5	elementos finitos
Polinomial		9	20	1.8	expansión de 4°orden
Polinómico EML		presente trabajo	63	1.0	flujo P_6 con EML(4)
Dif. finitas "VENTURE"	5.0 cm	11	340	13.9	puntos centrados en el mesh
	1.25 cm		50	2.0	
	0.67 cm		5	0.4	

a : errores en ppm

b : errores en %

Todos los casos, excluyendo los de diferencias finitas, corresponden a un tamaño de nodo de 20 centímetros.

TABLA XIII : Comparación con el código PUMA.

		$ \Delta K_{eff} ^a$	$\overline{\epsilon}^b$	$ \epsilon_{max} ^b$	T_{cpu}^c	OBSERVACIONES
Polinómico EML		63	0.41	1.0	51	P_6 EML(4); 1/4 núcleo
PUMA	5.0 cm	343	6.6	14.0	53	1/4 núcleo
	2.5 cm	169	2.4	5.1	358	

a : errores en ppm

b : errores en %

c : segundos de CPU en la BASF 7/68 del C.A.C.

En todos los casos el criterio de parada de las iteraciones fue una precisión en el flujo de 10^{-4} .

R E F E R E N C I A S

R E F E R E N C I A S

- 1- BENNEWITZ F. et al: "Solution of the multidimensional neutron diffusion equations by nodal expansion". Proceedings of the Conference on Computational Methods in Nuclear Engineering, I-100, April 1975, Charleston, South Carolina, USA
- 2- FINNEMANN H. et al: "Interface currents techniques for multi-dimensional reactor calculations". Atomkernenergie, 30, 123 (1977)
- 3- FISHER H. and FINNEMANN H.: "The nodal integration method - A diverse solver for neutron diffusion problems". Atomkernenergie, 39, 229 (1981)
- 4- GRANT C.: "PUMA - Sistema para la simulación de reactores nucleares. Fundamentos teóricos y su utilización". CNEA-Re-163, junio 1980
- 5- HENRY A.: "Calculation methods for reactors". Winter courses on nuclear physics and reactors, part II.1, feb 1978, International Centre for Theoretical Physics, Trieste, ITALY
- 6- LAWRENCE R., DORNING J.: "A nodal Green's function method for multidimensional neutron diffusion calculations", Nuclear Science and Engineering, 76, 218 (1980)
- 7- LINDAHL S., WEISS Z.: "The response matrix method". Advances in Nuclear Science and Technology, volume 13, page 73, Plenum Press, New York (1981)
- 8- NAKATA H., MARTIN W.: "The finite elements response matrix method", Nuclear Science and Engineering, 85, 289 (1983)

- 9- SHOBER R. et al: "Two nodal methods for solving time-dependent group diffusion equations", Nuclear Science and Engineering, 64,582(1977)
- 10- STAMM'LER R.J.J., ABBATE M.J.: "Methods of Steady-State Reactor Physics in Nuclear Design", Academic Press, London(1983)
- 11- WAGNER M. et al: "Validation of the Nodal Expansion Method and the depletion program MEDIUM-2 by benchmark calculations and direct comparison with experiments". Atomkernenergie, 30,129(1977)
- 12- WEISS Z.: "Nodal methods". No publicado.
- 13- WEISS Z.: "Some basic properties of the response matrix equations", Nuclear Science and Engineering, 63,457(1977)
- 14- WEISS Z.: "High order response matrix equations in two dimensional geometry", Nuclear Science and Engineering, 58,166(1975)

A G R A D E C I M I E N T O S

A G R A D E C I M I E N T O S

- A la Comisión Nacional de Energía Atómica por concederme la oportunidad de realizar y concretar este trabajo.

- A la Organización Internacional de Energía Atómica por el soporte económico otorgado a través del proyecto PNUD, el cual possibilitó mi traslado a Suecia para retomar contacto con el Dr. Stamm'ler.

- A la empresa ASEA-ATOM, Västerås, Suecia, por las atenciones recibidas y el excelente trato brindado durante mi permanencia en ella.

- A todos aquellos que de una u otra forma me brindaron su apoyo a lo largo de estos años; y en forma muy especial al que fue mi guía permanente y depositó su confianza en mí. Por esto, muchas gracias Rudi.