

01.84.07

1	1984
---	------

01.84.

METODOS ANALITICOS APROXIMADOS  
EN TEORIAS DE MEDIDA  
EN LA RED

Tesis presentada ante el Instituto Balseiro,  
Universidad Nacional de Cuyo, para optar al título de  
Doctor en Física.

Dr. Andrés García  
Asesor Científico

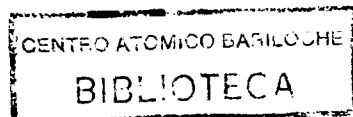
Dr. Luis Masperi ✓  
Asesor Científico

Lic. Elbio Dagotto ✓

Doctorando

San Carlos de Bariloche

-1984-



A Adriana

## RESUMEN

En los últimos años se ha demostrado que las teorías de medida en la red son una técnica muy útil en el estudio de fenómenos no perturbativos en teorías de campos no abelianos. Este método consta de los siguientes pasos:

- a) Discretización del problema analizado.
- b) Estudio del diagrama de fases correspondiente.
- c) Aproximación al continuo en los valores del acoplamiento donde la longitud de correlación es infinita.

En esta tesis se ha estudiado en detalle el punto b), es decir, se han analizado los diagramas de fases de las teorías de medida en la red con grupos abelianos y no abelianos. Para estos fines se utilizaron técnicas analíticas que brindan resultados tan aceptables como los obtenidos numéricamente..

Usando la aproximación de campo medio con correcciones radiativas se analizaron los modelos  $Z(2)$  de medida con materia escalar,  $U(1)$  y  $SU(2)$  de medida mixtos en cuatro dimensiones adaptando la técnica al caso en que las variables presentes en la acción no son lineales. Las predicciones concuerdan notablemente con los resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas. Además se analizó la influencia de la medida elegida en los resultados del método.

También se estudió la aproximación variacional en formulación Hamiltoniana. Aplicamos la técnica a la teoría  $SU(2)$  de medida en 3+1 dimensiones calculando los valores medios en el modelo Lagrangiano equivalente (tridimensional) mediante cálculos de plaqueta media.

Para mejorar las ideas variacionales se propusieron dos métodos iterativos del tipo Bethe-Peierls y Lanczos. La segunda variante proporciona resultados excelentes en pocas iteraciones al aplicarla al cálculo de autovalores de la ecuación de Mathieu y del modelo de Ising cuántico unidimensional.

Finalmente se extendió la técnica de plaqueta media a cualquier grupo de medida y representación. Las predicciones obtenidas para teorías  $SU(2)$  y  $SU(3)$  de medida mixtas son muy buenas comparadas con resultados de Monte Carlo.

## ABSTRACT

In recent years it has been shown that lattice gauge theories are a powerful technique for the study of non perturbative physics in non abelian field theories. This method consists of the following steps:

- a) Discretization of the problem.
- b) Evaluation of the phase diagram.
- c) Approximation to the continuum for those values of the coupling constant for which the correlation length goes to infinity.

In this thesis the point b) has been studied in detail i.e. we have analyzed the phase diagrams of lattice gauge theories with abelian and non abelian groups. For this purpose we have used analytic methods which gave results as good as those obtained by numerical approximations.

Using the mean field approach with radiative corrections we analyzed the  $Z(2)$  gauge model with scalar matter as well as the  $U(1)$  and  $SU(2)$  gauge theories with mixed actions in four dimensions. We adapted this technique for the treatment of actions with non-linear variables. The predictions are in remarkable agreement with those obtained performing numerical simulations. We also analyzed the influence of the gauge in the results.

We studied the variational approach in Hamiltonian formulation applying the technique to the  $SU(2)$  gauge model in 3+1 dimensions. The mean values in the equivalent threedimensional Lagrangian model were evaluated by the mean plaquette method.

In order to improve the variational ideas we have proposed two iterative methods similar to the Bethe-Peierls and the Lanczos approximations. The second one has given excellent results in a few iterations when we applied it to the evaluation of eigenvalues of the Mathieu equation and to the Ising onedimensional quantum model.

Finally we extended the mean plaquette technique to any gauge group and representation. The predictions for the phase diagrams of the SU(2) and SU(3) gauge mixed theories are in good agreement with Monte Carlo results.

## INDICE

### Capítulo I - Introducción. Teorías de medida en la red.

I.a	Cromodinámica cuántica.....	1
I.b	Analogía entre teoría de campos y mecánica estadística.....	2
I.c	Teorías de medida en la red.....	5
I.d	Formulación Hamiltoniana.....	9
I.e	Lazo de Wilson.....	10
I.f	Límite continuo.....	12
I.g	Métodos aproximados.....	14
I.h	Resumen.....	18

### Capítulo II - Campo medio con correcciones radiativas.

II.a	Desarrollo del formalismo.....	29
II.b	Aplicación al modelo $Z(2)$ Higgs.....	37
II.c	Estudio del modelo $U(1)$ mixto.....	42
II.d	Estudio del modelo $SU(2)$ mixto.....	56
II.e	Conclusiones.....	63

### Capítulo III - Método Variacional Hamiltoniano.

III.a	Introducción.....	88
III.b	Aproximación de Bethe-Peierls para modelos Lagrangianos y Hamiltonianos.....	98
III.c	Estudio variacional de la teoría $SU(2)$ de medida.....	100
III.d	Método variacional mejorado.....	107
III.e	Conclusiones.....	112

### Capítulo IV - Campo medio en variables de plaqueta.

IV.a	Desarrollo del formalismo.....	136
IV.b	Aplicación de la técnica de plaqueta media a la teoría $SU(2)$ mixta.....	141
IV.c	Aplicación de la técnica de plaqueta media a la teoría $SU(3)$ mixta.....	144

## CAPITULO I

### INTRODUCCION

#### TEORIAS DE MEDIDA EN LA RED

##### I.a Cromodinámica Cuántica

Actualmente las teorías de campos de medida no abelianos<sup>1</sup> tienen fundamental importancia para la física de altas energías. En particular se cree que la teoría que describe las interacciones fuertes es la Cromodinámica Cuántica<sup>2,3</sup>(QCD) cuyo grupo de medida es el SU(3) de color. La QCD es renormalizable<sup>4</sup> y posee la propiedad de libertad asintótica<sup>5</sup>, es decir la interacción entre los constituyentes fundamentales de los hadrones (quarks y gluones) disminuye al acortarse la distancia entre ellos. Este efecto ha sido observado en experiencias de muy altas energías<sup>6</sup>. Sin embargo luego de varios años de haber sido propuesta aún no se sabe con total certeza si la QCD es la teoría correcta. Esto se debe a que los principales fenómenos que hipotéticamente describe, son de naturaleza no perturbativa (o sea las magnitudes físicas de interés no admiten un desarrollo en serie de potencias del acoplamiento). En consecuencia las herramientas habituales de la teoría de campos (diagramas de Feynman) no son adecuadas para su tratamiento. Entre estos fenómenos se destaca el confinamiento o sea la propiedad por la cual los quarks y gluones no son observados libres. Su estudio requiere el desarrollo de nuevas técnicas aproximadas. Si la QCD fuese la teoría correcta, mediante estas técnicas debería poder predecirse el espectro hadrónico y muchos otros datos experimentales de bajas energías como, por ejemplo, el momento magnético de los nucleones.

En resumen el principal inconveniente que impide dilucidar si la QCD es o no la teoría de las interacciones fuertes, es de índole matemática. No sabemos cómo obtener información cuantitativa confiable de esta teoría de campos debido a la fundamental importancia de los efectos no perturbativos. Además los sistemas de interés involucran interacciones entre muchos cuerpos. Por ejemplo un simple protón sería un estado ligado de tres quarks rodeados de pares

quark-antiquark y gluones. Un núcleo de uranio estaría formado por 714 quarks complicando apreciablemente cualquier análisis.

El único método cuantitativo que se ha desarrollado con éxito para el estudio de la QCD a bajas energías fue ideado por K. Wilson<sup>7</sup> y lleva el nombre de teorías de medida en la red (lattice gauge theories). Mediante esta técnica se han logrado estimaciones confiables de numerosas magnitudes físicas de interés. El resto de este capítulo está dedicado a una descripción de este método tan fructífero en teorías de campos.

### I.b Analogía entre teoría de campos y mecánica estadística

Una teoría de campos puede cuantizarse mediante el formalismo de integrales de camino.<sup>8</sup> El valor de expectación en el vacío de un cierto observable  $\mathcal{O}$  se define mediante la siguiente expresión,

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \mathcal{O}(\varphi) \exp\left\{-\frac{1}{\hbar} S(\varphi)\right\}}{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-\frac{1}{\hbar} S(\varphi)\right\}}, \quad (1)$$

donde  $S(\varphi) = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi(x))$  es la acción que describe la teoría estudiada y  $\mathcal{L}$  su densidad Lagrangiana (por simplicidad supondremos que  $\varphi(x)$  es un campo escalar dependiente de la coordenada espacio-temporal  $x$ ). En la ec.(1) hemos efectuado el cambio de variable  $x_\mu = i\tau$  (rotación de Wick) donde  $\tau$  es el tiempo en espacio de Minkowski. O sea trabajaremos en métrica euclídea (ref. 3, pag.133). El símbolo  $\int \mathcal{D}\varphi$  indica que debe sumarse sobre todas las posibles configuraciones de la variable  $\varphi(x)$  además de las clásicas que minimizan  $S(\varphi)$ . Para dar un sentido matemático más claro a lo antedicho se adoptan las ideas de Feynman,<sup>8</sup> es decir, se discretiza el espacio-tiempo (mediante una red cúbica, por ejemplo) colocando una variable  $\varphi(n)$  en cada sitio  $n$  de dicha red. Al finalizar los cálculos debe tomarse el límite en que el espaciado de la red  $a$  tiende a cero (o en otras palabras mandar el corte en impulsos  $\pi/a$  a infinito). Para colocar una teoría escalar en la red se hacen los siguientes reemplazos (en dimensión igual a cuatro),

$$\int \mathcal{D}\varphi \rightarrow \prod_m \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi(m) \quad , \quad \int d^4x \rightarrow a^4 \sum_m \quad , \quad (2.a)$$

$$S(\varphi) = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 + \frac{1}{g^2} W(g\varphi) \right] \rightarrow a^4 \sum_m \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 \left( \frac{\varphi(m+\mu) - \varphi(m)}{a} \right)^2 + \frac{1}{g^2} W(a\varphi) \right] \quad (2.b)$$

donde  $W$  es el potencial de la teoría y  $g$  la constante de acoplamiento. Si además se supone que el tamaño  $V$  del sistema es finito tenemos un problema matemáticamente bien definido. Simplemente debemos evaluar una integral múltiple complicada. La introducción de la red nos permite reducir el problema inicial a un sistema con un número finito de grados de libertad. Es muy similar a la introducción de un reticulado para resolver ecuaciones diferenciales.

Luego de efectuados los cálculos se debe tomar el límite  $a \rightarrow 0, V \rightarrow \infty$ . En general estos límites deben realizarse muy cuidadosamente si se pretende obtener resultados no triviales. Notemos además que existen ciertas ambigüedades al escribir la teoría en la red. Por ejemplo el retículo elegido puede no ser cúbico o bien puede adoptarse otra convención para escribir una derivada en la red. Los resultados en el límite continuo no deberían depender del tipo de discretización elegido.

Integrales como la presentada en la ec.(1) son muy similares a las que aparecen en el formalismo canónico de mecánica estadística. De hecho la funcional generatriz  $Z$  de teoría de campos puede identificarse con la función de partición de un sistema estadístico equivalente. Por ejemplo la acción en la red ec.(2.b) corresponde a la interacción entre próximos vecinos con un peso dependiente de  $\varphi(m)$  en cada sitio. Notemos que la energía cinética del continuo se ha convertido en la energía de interacción en la red.<sup>9</sup> La función de partición equivalente es,

$$Z = \lim_{\substack{V \rightarrow \infty \\ a \rightarrow 0}} \prod_m \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi(m) \exp \left\{ \frac{a^2}{\hbar g^2} \sum_m \left[ \sum_{\mu=1}^4 \varphi(m+\mu)\varphi(m) - a^2 W(\varphi(m)) - 4\varphi^2(m) \right] \right\} \quad (3)$$

donde hemos hecho el cambio de variables  $g\varphi(m) \rightarrow \varphi(m)$ . El papel de la temperatura lo tiene  $\hbar g^2$  o sea las fluctuaciones cuánticas se asocian con las térmicas. Una lista completa de magnitudes de teoría de

campos y su análogo de mec. estadística se presenta en las ref.10 y 11. Si nos preguntamos cuándo existe y es finito el límite continuo en la ec.(3) la analogía con mec. estadística puede ayudarnos. Sabemos que en aquellos puntos donde hay una transición de fase de segundo orden el sistema pierde la información de cuál es el espaciamiento de red pues la longitud de correlación es infinita. En estos casos existe la posibilidad de obtener un límite continuo no trivial (es una condición necesaria pero no suficiente).

En consecuencia el método para evaluar magnitudes físicas mediante integrales de camino usando técnicas no perturbativas es el siguiente: Colocar la teoría en la red. Analizar el modelo análogo de mecánica estadística. Estudiar su diagrama de fases buscando especialmente aquellas temperaturas (o acoplamientos) para los cuales existen transiciones de fase de segundo orden. En esos puntos debe tomarse el límite continuo. Veremos más adelante que en los casos de interés esta técnica debe complementarse con las ideas de renormalización pues los modelos de mecánica estadística al igual que los de teorías de campos presentan muchas divergencias que deben subsanarse.

Veamos un ejemplo muy sencillo en que el límite continuo se recupera para cualquier acoplamiento. Sea una teoría escalar libre con masa, o sea,  $W(\varphi)$  en la ec.(2.b) es simplemente igual a  $\frac{m^2}{2} \varphi^2$ . La acción en la red es,

$$S(\varphi) = \frac{a^2}{2} \sum_{m, \mu} [\varphi(m+\mu) - \varphi(m)]^2 + \frac{a^4 m^2}{2} \sum_m \varphi^2(m), \quad (4.a)$$

o, en espacio de impulsos,

$$S(\tilde{\varphi}) = \frac{a^4}{2} \sum_k \tilde{\varphi}(k) \tilde{\varphi}(-k) \left[ \frac{4}{a^2} \sum_r \sin^2\left(\frac{k_r a}{2}\right) + m^2 \right]. \quad (4.b)$$

Cada modo  $k$  contribuye con un término que se reduce en el límite continuo al familiar  $(k^2 + m^2)$ . El resultado es invariante ante rotaciones. Son los términos de orden superior en  $a$  los que rompen esta simetría. En este caso trivial el acoplamiento no aparece en la acción y por eso no es necesario buscar transiciones de segundo orden para recuperar el límite continuo al contrario de lo que ocurre en todas las teorías de interés. Destaquemos además que si para un sistema de fermiones libres se repiten estos razonamientos no se

recupera exactamente el resultado del continuo<sup>12</sup>. Sin embargo en esta tesis sólo estudiaremos sistemas de medida puros o con materia escalar.

El estudio de la integral múltiple finita ec.(3) no es trivial porque el número de variables acopladas es muy grande. Un método muy usado en física de Partículas y Campos es el desarrollo perturbativo<sup>13</sup>. La técnica consiste en mantener en el exponente la parte cuadrática en  $\varphi(m)$  desarrollando la exponencial de las potencias superiores. De esta manera cada sumando se reduce a una integral gaussiana que es la única integral múltiple complicada que se conoce en forma cerrada. Los métodos perturbativos han tenido gran éxito en el caso de la Electrodinámica Cuántica (QED) obteniéndose un acuerdo notable entre resultados experimentales y predicciones teóricas<sup>14,15</sup>. Sin embargo esta técnica tiene importantes deficiencias. Supongamos que se deseen estudiar los estados ligados de un Hamiltoniano,  $H = H_0 + V$  donde  $V$  es el potencial y  $H_0$  la energía cinética. Si se perturban soluciones de  $H_0$  (en general ondas planas) nunca pueden recuperarse los estados ligados. Además en las teorías de interés como la QCD se demuestra (sec. I.c) que muchas magnitudes físicas, como por ejemplo las masas de hadrones, tienen un comportamiento del tipo,

$$m_h \sim e^{-1/g^2}, \quad (5)$$

que no es desarrollable en serie alrededor de  $g=0$ . En consecuencia nuevos métodos no perturbativos deben emplearse. Basándonos en la analogía con mec. estadística es fácil darse cuenta de que las técnicas desarrolladas para el estudio de transiciones de fase son adecuadas para esos fines (dichas técnicas serán descritas en las próximas secciones). Esta es la ventaja de regularizar con la red. Podemos independizarnos de los métodos perturbativos y evaluar la integral de camino de la manera más conveniente.

### I.c Teorías de medida en la red

En 1971, Wegner<sup>16</sup> ideó la primer teoría de medida en la red. Su motivación fue la de encontrar un modelo de spines simple que tuviera una transición de fase pero no un parámetro de orden local.

El modelo Z(2) de medida que propuso se define mediante la siguiente función de partición,

$$Z = \sum_{\{S_\mu(x)\}} e^S = \sum_{\{S_\mu(x)\}} \exp \left[ \frac{1}{g_0^2} \sum_p S_\mu(x) S_\nu(x+\mu) S_\mu(x+\nu) S_\nu(x) \right], \quad (6)$$

donde  $g_0$  es el acoplamiento y  $S_\mu(x)$  es una variable que puede tomar valores  $\pm 1$  (o sea pertenece al grupo Z(2)) ubicada en las uniones de la red (ver fig. 1). La interacción es entre los cuatro spines vinculados a una plaqueta (la cual se define como cada uno de los cuadrados elementales en el caso de una red cúbica). Este modelo es invariante ante la transformación,

$$S_\mu(x) \rightarrow \Omega_{x+\mu} S_\mu(x) \Omega_x, \quad (7)$$

donde  $\Omega_x$  también pertenece al grupo Z(2) y está ubicada en los sitios de la red. En general  $\Omega$  puede ser distinta sitio a sitio y por ello se habla de una simetría local. Este modelo no posee un parámetro de orden equivalente a la magnetización de las teorías con simetrías globales como el modelo de Ising pues se demuestra fácilmente (teorema de Elitzur<sup>17</sup>) que  $\langle S_\mu(x) \rangle = 0$  para cualquier valor de  $g_0$ . Sin embargo la teoría presenta una transición de fase caracterizada por un comportamiento distinto en función del acoplamiento de una magnitud no local como el lazo de Wilson (que será definido en la sección I.e).

Las ideas de Wegner pueden generalizarse fácilmente al caso en que las variables de unión pertenezcan a representaciones de grupos continuos. Por ejemplo si,

$$S_\mu(x) = e^{i\theta_\mu(x)}, \quad 0 \leq \theta_\mu(x) \leq 2\pi, \quad (8)$$

entonces la teoría de medida U(1) resultante está descrita por la función de partición,

$$Z = \prod_{x,\mu} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_\mu(x)}{2\pi} \exp \left\{ \frac{1}{g_0^2} \sum_p \cos \left[ \theta_\mu(x) + \theta_\nu(x+\mu) - \theta_\mu(x+\nu) - \theta_\nu(x) \right] \right\}. \quad (9)$$

La generalización al grupo no abeliano SU(N) también es

inmediata. Las variables de unión se parametrizan como,

$$U_\mu(x) = \exp\left\{ i g_0 a \frac{A_\mu^\alpha(x) \lambda^\alpha}{2} \right\}, \quad (10)$$

donde las matrices  $\lambda^\alpha$  son los generadores de transformaciones infinitesimales del grupo SU(N) (de dimensión  $N \times N$  si pertenecen a la representación fundamental).  $A_\mu^\alpha(x)$  es el potencial vector.  $\alpha$  va de 1 a  $(N^2 - 1)$ . Si se pide invariancia ante la transf. de medida,

$$U_\mu(x) \rightarrow \Omega_{x+\mu} U_\mu(x) \Omega_x^\dagger, \quad (11)$$

donde la variable de sitio  $\Omega$  también pertenece al grupo SU(N), se puede demostrar que la más sencilla elección para la acción es,

$$S(U_p) = - \sum_p \frac{\text{tr}(U_p + U_p^\dagger)}{N}, \quad (12)$$

donde

$$U_p = U_\mu(x) U_\nu(x+\mu) U_\rho^\dagger(x+\nu) U_\sigma^\dagger(x). \quad (13)$$

A  $S(U_p)$  se le suele llamar "acción de Wilson".

Otros sumandos pueden agregarse a la ec.(12). Por ejemplo es obvio que la traza de cualquier cadena cerrada de matrices  $U_\mu(x)$  también es una magnitud invariante ante transformaciones de medida. Además pudo haberse considerado otra representación irreducible del grupo SU(N) o una combinación lineal de ellas.

La función de partición del modelo es,

$$Z = \prod_{x,\mu} \int dU_\mu(x) \exp\left[ \frac{1}{g_0^2 N} \sum_p \text{tr}(U_p + U_p^\dagger) \right], \quad (14)$$

donde  $dU_\mu(x)$  es la medida invariante<sup>18</sup> ante la transformación ec.(11) (también llamada medida de Haar). Elegida una parametrización del grupo SU(N) pueden hallarse expresiones explícitas para  $dU_\mu(x)$ . Por ejemplo en SU(2) se adopta la parametrización,

$$U = \begin{pmatrix} X_4 + iX_3 & X_2 + iX_1 \\ -X_2 + iX_1 & X_4 - iX_3 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

donde

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{sen } \theta_2 \text{ sen } \theta_1 \cos \varphi, \\ X_2 &= \text{sen } \theta_2 \text{ sen } \theta_1 \text{ sen } \varphi, \\ X_3 &= \text{sen } \theta_2 \cos \theta_1, \\ X_4 &= \cos \theta_2. \end{aligned} \tag{16}$$

En este caso la integral sobre el grupo SU(2) de una función  $f(U)$  es,<sup>19</sup>

$$\int dU f(U) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2^2 d\theta_1 d\theta_2 d\varphi f(\theta_1, \theta_2, \varphi), \tag{17}$$

y satisface

$$\int dU = 1.$$

En este trabajo también hemos utilizado la medida de Haar del grupo SU(3) (cap. IV).

Usando la ec.(10) y la fórmula de Baker-Cambell-Hausdorff se demuestra fácilmente<sup>20</sup> que en el límite continuo

$$U_p = \exp \left\{ i g_0 a^2 \frac{F_{\mu\nu}^\alpha \lambda^\alpha}{2} + \mathcal{O}(a^3) \right\}. \tag{18}$$

O sea la acción tiende al resultado esperado en el continuo (ref.3, cap. 12),

$$\frac{1}{g_0^2} S \rightarrow \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^\alpha F_{\mu\nu}^\alpha. \tag{19}$$

Lo mismo ocurre con la ec.(9). Al pasar al continuo se recupera la electrodinámica. En consecuencia las acciones aquí analizadas son una posible versión en la red de las teorías que se desean estudiar. Estas teorías en el retículo mantienen la invariancia de medida aunque se ha perdido la invariancia ante rotaciones (sólo subsiste la invariancia al rotar en 90° y al trasladar en múltiplos del espaciado de red). Se espera que en el continuo las simetrías completas se recuperen. Esta es una prueba importante que deben satisfacer las teorías en la red. Hay resultados de Monte Carlo (sec. I.g) que indican que efectivamente la invariancia ante rotaciones se recupera en ese límite.

Puede demostrarse fácilmente que las otras posibles acciones en la red citadas en la pág. 7 también tienen por límite continuo la ec.(19). En consecuencia eligiendo adecuadamente los coeficientes relativos entre distintos sumandos pueden eliminarse sistemáticamente correcciones en potencias de  $\bar{a}$ . Esta variante ha sido muy estudiada recientemente<sup>21</sup>. Además se han analizado<sup>22</sup> las llamadas acciones de Manton y Heat Kernel que en el límite  $\bar{a} \rightarrow 0$  también se reducen a la ec.(19).

Destaquemos que el requerimiento de invariancia de medida en la red no es imprescindible. Podría inventarse fácilmente una acción en el retículo no invariante en el sentido de la ec.(11) pero con el límite correcto (ec.(19)). Se esperaría que al igual que con la simetría ante rotaciones, al tomar  $\bar{a} \rightarrow 0$  también la simetría ante transformaciones de medida sea restaurada. Sin embargo esto complicaría innecesariamente el método. Es muy útil en cualquier regularización mantener tantas simetrías como sea posible.

Otro detalle importante es que las ec.(6,9,14) no necesitan la fijación de la medida para obtener resultados finitos. Esto se debe a que el dominio de integración es compacto (por ejemplo, se dice que la ec.(9) describe la "QED compacta"). No ocurre así con las teorías en el continuo donde  $A_\mu^\alpha(x)$  varía de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Allí la fijación de medida es imprescindible. Por supuesto si por alguna razón se desea fijar la medida en la red no hay ningún inconveniente.

#### I.d Formulación Hamiltoniana

La formulación de la teoría de campos en la red estudiada en la sec. I.c es llamada Lagrangiana o clásica. Por razones prácticas también es útil introducir la formulación Hamiltoniana<sup>23</sup>. Al estudiar integrales de camino en el curso de mecánica cuántica se procede de la siguiente manera: mediante el Hamiltoniano del sistema se plantea la amplitud de probabilidad de que partiendo del estado  $i$  al tiempo  $t=0$  se arribe al estado  $j$  al tiempo  $t$ . Luego se discretiza el parámetro  $t$  e introduciendo adecuadas bases completas en cada punto se llega a la integral de camino,

$$\langle j | e^{itH} | i \rangle = \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t \tilde{L}(t) dt} \quad (20)$$

Ambos formalismos son equivalentes ( ver el ejemplo del oscilador armónico en ref. 20, pág. 664). En el caso de las teorías en la red disponemos de la integral de camino (por ej. ec. (14)) y deseamos hallar el Hamiltoniano. Entonces simplemente se invierten los pasos seguidos para llegar a la ec. (20). Debido a que estamos estudiando teorías de campos en que los parámetros son  $\vec{x}$  y  $t$ , obtendremos un Hamiltoniano continuo en el tiempo pero en un reticulado espacial.

El resultado para la teoría U(1) de medida, por ej., es<sup>20</sup>

$$a_s H = \frac{g_0^2}{2} \sum_{x,\lambda} \left( -\frac{\partial^2}{\partial \theta_\lambda^2(x)} \right) - \frac{1}{g_0^2} \sum_{\rho} \cos \theta_\rho, \quad (21)$$

donde las sumas son sobre uniones y plaquetas espaciales.  $a_s$  es el espaciamiento de la red espacial. Obviamente también pueden deducirse Hamiltonianos para modelos con grupos discretos o no abelianos.

La formulación Hamiltoniana está íntimamente vinculada con la matriz de transferencia en mecánica estadística tal como se remarca en la ref. 24.

En general se puede establecer una clara correspondencia entre ciertas magnitudes de ambas formulaciones. Por ejemplo se demuestra en la ref. 20 la siguiente vinculación,

Mec. Estadística	Teoría de campos
Densidad de energía libre	Densidad de energía en el vacío
Función de correlación	Propagador
Inversa de la long. de correlación	Masa de la excitación de menor energía

Estudiaremos la formulación Hamiltoniana en el capítulo III mediante el método variacional.

### I.e Lazo de Wilson

Antes de detallar los métodos aproximados que utilizaremos para el estudio del modelo de mec. estadística equivalente a la teoría de campos analizada, veamos cuál es el parámetro que caracteriza las distintas fases de la teoría.

Para teorías no abelianas se define el lazo de Wilson de la

siguiente manera,

$$W(C) = \text{tr} \left( \prod_{x \in C} U_\mu(x) \right), \quad (22)$$

donde C es una cierta curva cerrada en la red y P indica el producto ordenado de variables  $U_\mu(x)$  (ec. (10)) a lo largo de esa curva. Tomemos el caso en que el lazo es un rectángulo de largo T en la dirección temporal y ancho R en la dirección espacial (fig. 2). Se demuestra<sup>25</sup> que el potencial  $V(R)$  entre dos quarks estáticos ( o sea de masa infinita) es,

$$V(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \langle W(C) \rangle. \quad (23)$$

Si  $W(C) \sim \exp\{-TR\}$  el potencial es confinante pues  $V(R) = \sigma R$  donde  $\sigma$  a la constante de proporcionalidad se le llama tensión de la cuerda. Entonces si el lazo de Wilson tiene un comportamiento tipo área hay confinamiento (al menos en la teoría de medida sin materia). Demostraremos en la sec. I.g al estudiar los desarrollos en serie de alta temperatura que todas las teorías de medida en la red confinan en el límite de acoplamiento fuerte ( $g_0 \rightarrow \infty$ ). Lo importante es analizar si esta propiedad subsiste o no en el límite continuo. Para la QED debería existir una transición de fase a un régimen no confinante antes de dicho límite mientras que para la QCD no se esperan transiciones con esas características ( fig. 3).

Si por el contrario  $W(C) \sim \exp\{-(R+T)\}$  o sea decae con el perímetro del lazo no se tiene confinamiento (Los resultados perturbativos de acoplamiento débil indican siempre este último comportamiento pues se pierden los efectos no perturbativos). De esta manera podemos caracterizar las fases de una teoría de medida pura en la red. Notemos que  $W(C)$  es una magnitud no local. Para el caso de teorías abelianas se utilizan las mismas ideas. Como ya dijimos en pág. 6 para la teoría  $Z(2)$  de medida en la red (en 4 dimensiones) el lazo de Wilson cambia de comportamiento tipo área a perímetro<sup>26</sup> en  $\beta_c = (1/g_0^2)_c = \frac{1}{2} \log(1+\sqrt{2}) \approx 0.4407$ . Para  $\beta < \beta_c$  hay confinamiento y si  $\beta > \beta_c$  no. Algo similar ocurre para la QED compacta.<sup>27</sup> Estudios numéricos de Monte Carlo (los cuales se describen más adelante) indican que para los grupos  $SU(2)$  y  $SU(3)$  no hay transiciones de fase y la teoría existe en una única fase confinante.

I.f Límite Continuo

Estudiemos en detalle el problema del límite continuo. Un ejemplo muy sencillo al respecto es el modelo de Ising cuántico unidimensional<sup>28</sup> descrito por el Hamiltoniano,

$$H = - \sum_i \sigma_i^1 - \lambda \sum_i \sigma_i^3 \sigma_{i+1}^3, \quad (24)$$

donde  $\sigma_i^1, \sigma_i^3$  son matrices de Pauli ubicadas en el sitio  $i$ .  $\lambda$  es un parámetro. Este modelo puede resolverse exactamente. Presenta una transición de fase de segundo orden en  $\lambda_c = 1$ . La relación energía-impulso es (ref.20, pág. 681),

$$E(k) = \frac{1}{a} \left( 1 + 2\lambda \cos(\pi + ka) + \lambda^2 \right)^{1/2}. \quad (25)$$

Cerca del límite continuo se obtiene,

$$E(k) \cong \left[ \left( \frac{1-\lambda}{a} \right)^2 + \lambda k^2 \right]^{1/2}. \quad (26)$$

Sólo si  $\lambda = \lambda_c$  el espectro de energías es no trivial obteniéndose un sistema de partículas sin masa invariante ante rotaciones. Notemos la importancia de ubicarnos en un punto crítico para recobrar el límite continuo. Otro ejemplo interesante lo constituye la versión Lagrangiana de la ec.(24) o sea el modelo de Ising clásico bidimensional con variables  $S_{\vec{x}} = \pm 1$  ubicadas en los sitios  $\vec{x}$ . En este modelo la longitud de correlación a gran distancia decae exponencialmente como,

$$\langle S_{\vec{x}} S_{\vec{j}} \rangle \sim \exp\{-m(\alpha) |\vec{x} - \vec{j}|\}, \quad (27)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre el vector  $(\vec{x} - \vec{j})$  y uno de los ejes de la red. En la ref.29 se demuestra que,

$$\frac{m(\alpha = 0^\circ)}{m(\alpha = 45^\circ)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\log_2 \left( \frac{1+v}{1-v} \right)}{\log_2 \left( \frac{2v}{1-v^2} \right)}, \quad (28)$$

donde  $v = \frac{1}{g} \ln \beta$  y  $\beta$  es proporcional a la inversa de la temperatura. El sistema se hace crítico cuando  $v = v_c = \sqrt{2} - 1$ . Sólo en ese momento la ec. (28) se hace igual a 1 indicando invariancia ante rotaciones.

En la mayoría de los casos de interés al acercarnos al punto crítico es necesario renormalizar el acoplamiento. Este método da a la teoría la posibilidad de producir resultados no triviales. Las teorías de interés en la red presentan la necesidad de esta renormalización.

Tomemos el ejemplo del grupo de medida SU(3) de color (QCD sin fermiones). Se demuestra que el acoplamiento es un parámetro adimensional. En consecuencia las unidades de las magnitudes físicas se recuperan con la ayuda del espaciado de red. Por ejemplo para una masa es,

$$m = \frac{f(g_0)}{a}, \quad (29)$$

donde  $f(g_0)$  es una función del acoplamiento no renormalizado  $g_0$ . Si se toma el límite  $a \rightarrow 0$ , entonces  $m \rightarrow \infty$  a menos que  $g_0$  se piense como función de  $a$  de una manera muy especial.<sup>25,30</sup> Estas ideas no deben extrañarnos pues en los desarrollos perturbativos del continuo al parámetro  $g_0$  se lo considera función del corte en impulsos.

Para hallar  $f(g_0)$  se pide que la masa de las excitaciones sea independiente de  $a$  lo cual es razonable físicamente. Entonces,

$$a \frac{dm}{da} = 0, \quad (30)$$

o bien

$$-f(g_0) + a \frac{dg_0(a)}{da} \cdot \frac{df}{dg_0} = 0. \quad (31)$$

La relación  $a(dg_0/da)$  es conocida como la función  $\beta(g_0)$  y puede calcularse perturbativamente. El resultado es,

$$\beta(g_0) = -\beta_0 g_0^3 - \beta_1 g_0^5 - \dots, \quad (32)$$

donde  $\beta_0, \beta_1, \dots$  son coeficientes conocidos.

Integrando la ec. (31) queda,

$$m = C_m \frac{1}{a} e^{-\frac{1}{2\beta_0 g_0^2}} (\beta_0 g_0^2)^{-\frac{\beta_1}{2\beta_0^2}} [1 + O(g_0^2)] = C_m \Lambda, \quad (33)$$

donde  $C_m$  es una constante de integración y  $\Lambda$  es el único parámetro con dimensiones de la teoría. Este último es independiente del valor de  $\partial$ . Si se repiten los cálculos para la tensión de la cuerda se obtiene,

$$\sigma^{1/2} = C_\sigma \Lambda, \quad (34)$$

y en general cualquier magnitud física es proporcional a alguna potencia de  $\Lambda$ . El objetivo de las teorías en la red es el cálculo de los coeficientes  $C$ . Allí se encuentra la información no perturbativa del sistema. La constante  $\Lambda$  fija la escala en QCD y debe obtenerse experimentalmente.  $\Lambda$  cumple un rol análogo al de la constante de estructura fina  $\alpha \approx 1/137$  en QED.

### I.g Métodos aproximados

En general existen muy pocos resultados exactos en el estudio teórico de las transiciones de fase de modelos físicos realistas. Para el caso de las teorías de medida en la red se ha demostrado analíticamente que el modelo SU(2) sin fermiones confina para cualquier valor del acoplamiento<sup>31</sup>. Sin embargo aunque se generalice esta demostración a la QCD, la gran prueba final para esta teoría reside en la comparación de los resultados que predice para, por ej., las masas de hadrones, con los resultados experimentales. En consecuencia es de principal importancia el desarrollo de métodos matemáticos que nos permitan obtener información cuantitativa de las teorías no abelianas.

Los métodos más utilizados en teorías de medida en la red para el estudio de los fenómenos críticos son:

- a) Simulaciones de Monte Carlo<sup>32</sup>
- b) Desarrollos en serie de alta temperatura<sup>33,34</sup>
- c) Campo medio en variables de unión con correcciones radiativas<sup>34</sup>
- d) Grupo de renormalización<sup>35</sup> (Migdal-Kadanoff)
- e) Desarrollos en la inversa del número de colores<sup>36</sup> (1/N)
- f) Métodos variacionales en formulación Lagrangiana<sup>37</sup> y Hamiltoniana<sup>38</sup>

Otras técnicas usadas frecuentemente son la de grupo de renormalización en espacio real,<sup>39</sup> redes finitas,<sup>40</sup> métodos estocásticos,<sup>41</sup> modelos reducidos,<sup>42</sup> etc..

De los métodos a) y b) daremos en este capítulo una breve síntesis de su empleo y resultados obtenidos. Las técnicas c) y f) serán tratadas con mayor detalle en los capítulos siguientes, constituyendo la mayor parte de esta tesis.

#### Simulaciones de Monte Carlo:

El método de Monte Carlo es un algoritmo que permite evaluar en forma aproximada la integral múltiple que aparece en la ec. (14). Esta integral tiene  $4(N^2 - 1)L^4$  variables si el grupo de medida es  $SU(N)$ , la dimensión de la red igual a 4 y si se supone que el retículo es un hipercubo con  $L$  sitios en cada dirección. Para el grupo  $SU(2)$  en una red de  $L=10$  tenemos 120.000 variables lo cual hace imposible un cálculo exacto de la ec. (14).

Una forma de evaluar esta integral múltiple aproximadamente es con un muestreo al azar. Sin embargo debido al factor  $e^{-5}$  el integrando varía muy rápidamente entre configuraciones próximas y un muestreo aleatorio generaría sólo configuraciones irrelevantes. En el método de Monte Carlo, por el contrario, se generan configuraciones con probabilidad proporcional a  $e^{-5}$  lo cual ha probado ser una técnica muy eficiente para evaluar el tipo de integrales que nos interesan. Para un estudio completo del método ver ref. 43.

El inconveniente de esta aproximación es que se debe restringir el estudio a redes finitas de tamaño tan grande como permita la memoria de la computadora utilizada. Variando ese volumen puede lograrse una estimación acerca de si los resultados obtenidos son similares a los del límite termodinámico  $V \rightarrow \infty$ . Sin embargo el principal inconveniente en la aplicación de este método a las teorías de medida en la red es el hecho de que a medida que nos acercamos al límite continuo ( $g_0 \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ ) la longitud de correlación  $\xi$  crece pues  $\xi \sim e^{1/g_0^2}$  y eventualmente puede llegar a ser del orden de  $L$ . A partir de ese momento el efecto del tamaño finito de la red afecta apreciablemente los resultados.

En las simulaciones de Monte Carlo de teorías en la red se da la circunstancia afortunada de que antes de que  $\xi$  sea del orden de  $L$  ya se observan los comportamientos asintóticos predichos por el grupo de renormalización ec. (33). O sea existe una región de paráme-

tros donde  $\beta \ll \xi \ll L$ . Por ejemplo los resultados de la fig.4 indican que para el grupo SU(2) en  $\beta \sim 2.2$  la tensión de la cuerda se comporta aproximadamente como<sup>44</sup>

$$\sqrt{\sigma} = (79 \pm 12) \Lambda, \quad (35)$$

donde  $\Lambda$  se obtiene de la ec.(33) considerando  $\beta_0 = \frac{11}{24\pi^2}$  y  $\beta_1 = \frac{34}{3} \left( \frac{1}{8\pi^2} \right)^2$ .

Si se aumenta el valor de  $\beta$  los problemas enunciados antes con la longitud de correlación se hacen presentes. Existe entonces una "ventana" en los valores de  $\beta$  en donde se observan comportamientos similares a los predichos asintóticamente. De allí se obtiene la información del continuo.

Otro aspecto muy interesante que ha sido estudiado en las simulaciones de Monte Carlo es la restauración de la invariancia ante rotaciones cuando  $\beta \rightarrow 0$ . Por ejemplo se ha verificado<sup>45</sup> que el potencial entre dos cargas estáticas cerca del continuo sólo depende de la distancia entre ellas y no de su posición respecto de los ejes de la red.

También se han obtenido resultados<sup>46</sup> para el espectro hadrónico. Por ejemplo la masa calculada mediante Monte Carlo para el protón es de  $(1000 \pm 150)$  Mev siendo el valor experimental de 938 Mev. Para el resto de las partículas se obtienen resultados análogos. Las barras de error se mantienen demasiado grandes aunque los valores numéricos son alentadores. No obstante se está llegando al peligroso límite de saturación de memoria y velocidad de las mayores computadoras. Esto justifica los grandes esfuerzos que se realizan para desarrollar técnicas analíticas en la red que suplanten estos intentos puramente numéricos.

Desarrollos de alta temperatura:

El desarrollo de alta temperatura es un método bien conocido de mecánica estadística. Muchos de los resultados más precisos para temperaturas y exponentes críticos de modelos no triviales, se han obtenido mediante esta técnica suplementada con aproximantes de Padé.<sup>47</sup> Tomemos como ejemplo el cálculo del lazo de Wilson en el modelo Z(2) de medida ec.(6),

$$\langle W(C) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{s\}} \prod_{x \in C} S_\mu(x) e^{\beta \sum_P (s s s s)_P}, \quad (36)$$

donde se ha usado la definición ec.(22) y  $\beta = 1/g_0^2$ . Cada factor de plaqueta del tipo  $\exp\{\beta (ssss)_p\}$  puede desarrollarse como,

$$e^{\beta (ssss)_p} = \cosh \beta \left[ 1 + (ssss)_p \operatorname{tgh} \beta \right]. \quad (37)$$

Debemos formar combinaciones que no contengan ninguna variable  $S_\mu(x)$  libre pues al sumar sobre ella se anularía el resultado. A menor orden en  $\operatorname{tgh} \beta$  ( que es aquí el parámetro del desarrollo) se obtiene,

$$\langle W(C) \rangle \cong \operatorname{tgh} \beta^{\text{Area del lazo}} = e^{\text{Area} \cdot \log(\operatorname{tgh} \beta)} \quad (38)$$

Entonces se deduce que en el límite de acoplamiento  $\beta \ll 1$  la tensión de la cuerda (pág.11) es,

$$\sigma = -\log(\operatorname{tgh} \beta), \quad (39)$$

lo cual indica un comportamiento confinante para el modelo en ese límite.

La ec. (37) puede generalizarse a otros grupos de medida. Por ejemplo para un grupo no abeliano  $SU(N)$  dicha generalización es,

$$e^{\frac{\beta}{2N} \operatorname{tr}(U_p + U_p^\dagger)} = \sum_{\chi} C_{\chi}(\beta) \chi_{\chi}(U_p), \quad (40)$$

donde  $\chi_{\chi}(U_p)$  es el carácter de  $U_p$  en la representación  $\chi$  del grupo  $SU(N)$ . Los coeficientes  $C_{\chi}(\beta)$  se deducen a partir de las relaciones de ortogonalidad entre caracteres,

$$\int dU \chi_p(SU) \chi_q(TU) = \delta_{pq} \frac{\chi_p(ST^{-1})}{\chi_p(1)}, \quad S, T \in SU(N). \quad (41)$$

Repitiendo los cálculos del lazo de Wilson para estos y otros modelos se verifica que en el límite de  $\beta$  chico todas las teorías de medida en la red confinan. Esta es una de las grandes ventajas del método, o sea, el confinamiento es explícito al menos en un cierto límite. Lo importante es analizar qué ocurre con esta propie-

dad al acercarnos al límite continuo. Tal como se remarcó en pág. 11 se espera que para la QED exista una transición de fase a un régimen no confinante antes de recuperar el continuo, mientras que para la QCD dicha transición no debería existir.

Volviendo a los desarrollos de alta temperatura cabe acotar que mediante esta técnica pueden calcularse muchas otras magnitudes como por ejemplo las masas de glueballs (estados ligados de gluones), etc.. Sin embargo las series son relativamente cortas y los resultados no son precisos (a pesar de que el número de sumandos es mucho mayor que los que pueden obtenerse en la zona de baja temperatura o acoplamiento débil). Otro importante problema radica en el radio de convergencia finito<sup>18</sup> de estas series debido, por ejemplo, a singularidades para valores complejos del parámetro del desarrollo. El uso de extrapolantes de Padé es de gran utilidad en estos casos. No obstante algunas estimaciones indican que serían necesarios cerca de 50 órdenes de la serie para obtener resultados confiables<sup>10</sup> alrededor de  $\beta \sim 2.2$  en la teoría SU(2). Estos problemas han motivado una disminución en el interés en estos desarrollos.

Antes de finalizar esta sección es útil hacer algunas aclaraciones. Los desarrollos de alta temperatura contienen información no perturbativa por ser series de potencias en  $g_0^{-1}$ . De ahí su utilidad en el cálculo de ciertas magnitudes físicas. Otro aspecto importante de remarcar es que las transiciones de primer orden generalmente son invisibles en estos desarrollos. Uno obtiene la continuación analítica en la zona metaestable. En estos casos es imprescindible el uso combinado de series de alta y baja temperatura.

Finalmente destaquemos que en la formulación Hamiltoniana también pueden hacerse desarrollos en la inversa del acoplamiento mediante el método de Rayleigh-Schrödinger.<sup>20</sup> En general en este caso el número de sumandos accesibles al cálculo es menor que en la formulación Lagrangiana. Desde los trabajos de Kogut et. al (ref.33) estos desarrollos han progresado poco.

## I.h Resumen

Para finalizar este capítulo daremos algunos detalles de las teorías en la red que seguramente ayudarán al lector a completar una idea global del tema.

— Como se ha mencionado anteriormente, en este formalismo pueden ha-

cerse cálculos perturbativos de acoplamiento débil. Para ello se debe desarrollar  $U_p(x)$  en potencias de  $g_0$ . Debido a esto en la acción aparecen infinitos sumandos como interacción dando origen a su vez a infinitos vértices (de distinto orden en  $g_0$  obviamente). Esto indica que los cálculos son más complejos que en el continuo. Más aún, se demuestra que cuando  $\partial \rightarrow 0$  se recuperan los resultados perturbativos habituales. En consecuencia la red en este caso es sólo una regularización más con la desventaja de que los cálculos son difíciles. De ahí que no existan estimaciones de secciones eficaces a altas energías usando la regularización de la red. La única utilidad de estos desarrollos de acoplamiento débil radica en el cálculo de cocientes de parámetros de escala  $\Lambda$  entre regularizaciones del continuo y del retículo.<sup>49</sup>

En la práctica los resultados obtenidos en espacio euclídeo representan directamente las predicciones físicas buscadas y una continuación analítica de vuelta al espacio de Minkowski no es necesaria. Esto ocurre, por ejemplo, con el cálculo de masas. Si en cambio el resultado obtenido depende de las coordenadas o impulsos ahí es necesario volver al tiempo real (por ejemplo al evaluar un propagador).

Muchos otros aspectos interesantes de las teorías de medida pueden estudiarse mediante la regularización tipo red. Por ejemplo en teoría de campos a temperatura finita las simulaciones de Monte Carlo revelan que existe una temperatura crítica<sup>50</sup> a partir de la cual hay desconfinamiento en QCD. Otros aspectos de interés son la ruptura de simetría quiral, el análisis de condensación de gluones, etc..

Se están comenzando a estudiar otras interacciones además de la fuerte también en el ámbito de las teorías en el retículo. Por ejemplo gravedad,<sup>51</sup> interacciones débiles<sup>52</sup> y supersimetría.<sup>53</sup>

Como resumen de las ideas expuestas en las diferentes secciones estudiadas veamos cuál es el camino a seguir para el análisis de una teoría de campos mediante el método de la red.

- i) Escribir la teoría en el retículo en su versión Lagrangiana o Hamiltoniana. Existe gran ambigüedad en este punto pues infinitas teorías con  $a$  finito pueden converger a una misma expresión en el continuo. Debe elegirse aquella versión más adecuada para el estudio del fenómeno que uno desea analizar. Por ejemplo la acción

de Wilson es útil para analizar el confinamiento en teorías no abelianas pues en el límite  $g_0 = \infty$  se verifica dicha propiedad.

- ii) Estudiar mediante las técnicas descritas en la sección I.9 el diagrama de fases de la teoría (el que en general es muy complicado). En la fig.5 hemos representado un diagrama posible para una teoría con dos parámetros. Aparecen transiciones de fase de primer , segundo o superior orden separando fases con distintas características (por ejemplo, confinantes o desconfinantes). También suelen aparecer puntos triples o puntos críticos al final de una línea de transiciones de primer orden.
- iii) De todos los puntos críticos de la teoría (o sea aquellos donde hay transiciones de segundo orden o mayor) debemos seleccionar aquel para el cual el acoplamiento desnudo tome el valor esperado en la teoría del continuo. Por ej. aunque la teoría SU(3) de medida tuviese una transición de segundo orden no desconfinante para un  $g_0^*$  finito igual los resultados de interés deberían recuperarse cuando  $g_0 \rightarrow 0$  (libertad asintótica). Por supuesto en  $g_0^*$  también se obtendrían dos teorías del continuo (aproximándose por derecha y por izquierda). Por ej. si en la fig.5 el punto importante fuese el punto triple y además la propiedad que se espera aparezca en el continuo se verifica en la fase I entonces la flecha indica la dirección de aproximación a dicho punto. En general se debe renormalizar el acoplamiento desnudo pidiendo que los resultados físicos sean finitos.

Creemos que la introducción a los métodos no perturbativos en teorías de medida expuesta en este capítulo es una base suficiente para entender las ideas desarrolladas en esta tesis. En la ref.54 puede consultarse bibliografía adicional.

Las teorías en la red son uno de los temas más activos en el ámbito de la física de Partículas y Campos. Como ejemplo de esto veamos el resultado de un pequeño análisis estadístico hecho por el autor con la ayuda de la publicación semanal "Preprints in Particles and Fields" (PPF) de Stanford (USA). En los últimos 52 números recibidos (desde 1/7/83 a 29/6/84) aparecieron 3724 trabajos teóricos (incluimos las categorías T, TR y CT de dicha publicación) de los cuales el 14.26% (o sea 531) corresponden a trabajos sobre teorías en la red. Ningún otro tema alcanza un porcentaje igual.

En opinión del autor de esta tesis las teorías en la red tienden a convertirse en un método standard de estudio en teorías de campos. Muy posiblemente la próxima generación de problemas, como por ejemplo las grandes unificaciones, requieran el análisis de fenómenos no perturbativos. En ese caso la red será una técnica insustituible.

REFERENCIAS

1. C. Yang y R. Mills, Phys. Rev. 96, 1605 (1954).
2. E. Abers y B. Lee, Phys. Rep. 9,1 (1973);  
T. D. Lee, "Particle Physics and introduction to field theory",  
Harwood academic publishers (1981),
3. K. Huang, "Quarks, Leptons and Gauge fields", World Scientific  
(1982).
4. G. 't Hooft, Nucl. Phys. B35, 167 (1971).
5. D. Gross y F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30, 1343 (1973).
6. F. Close, "An introduction to quarks and partons", Academic Press  
(1979).
7. K. Wilson, Phys. Rev. D14, 2455 (1974).
8. R. Feynman, Rev. Mod. Phys. 20, 367 (1948);  
R. Feynman y A. Hibbs, "Quantum mechanics and path integrals",  
Mc Graw-Hill (1965).
9. C. Itzykson, Physica Scripta 24, 854 (1981).
10. G. Parisi, "Recent progresses in gauge theories", LNF-80/52(P).
11. R. Brower, "Discrete quantum chromodynamics", UCSC-TH-147-81.
12. L. Susskind, Phys. Rev. D16, 3031 (1977).
13. D. Amit, "Field Theory, the Renormalization Group, and Critical  
Phenomena", Mc Graw-Hill (1978).
14. P. Schwinburg, R. van Dyck y H. Dehmett, Phys. Rev. Lett. 47, 1679  
(1981).
15. T. Kinoshita y W. Lundquist, Phys. Rev. D27, 867, 877 y 886 (1983).
16. F. Wegner, J. Math. Phys. 12, 2259 (1971).
17. S. Elitzur, Phys. Rev. D12, 3978 (1975).
18. H. Weyl, "The Classical Group", Princeton Univ. Press (1939);  
V. Baluni y J. Willemsen, Phys. Rev. D13, 3342 (1976);  
I. Bars y F. Green, Phys. Rev. D20, 3311 (1979).
19. G. Craft y S. Raboy, "The invariant integrals on SU(2) and SO(3)",  
Binghamton preprint (no publicado).
20. J. Kogut, Rev. Mod. Phys. 51, 659 (1979).
21. K. Symanzik, Nucl. Phys. B226, 187 (1983).
22. N. Manton, Phys. Lett. 96B, 328 (1980);  
P. Menotti y E. Onofri, Nucl. Phys. B190, 288 (1981).
23. J. Kogut y L. Susskind, Phys. Rev. D11, 395 (1975).
24. M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. 46, 1337 (1971);  
E. Fradkin y L. Susskind, Phys. Rev. D17, 2637 (1978);

- C. Hamer, J. Kogut y L. Susskind, Phys. Rev. D19,3091 (1979);  
C. Hamer y J. Kogut, Phys. Rev. B20,3859 (1979).
25. J. Kogut, Rev. Mod. Phys. 55,775 (1983).
  26. M. Creutz, Phys. Rev. Lett. 42,1390 (1979).
  27. B. Lautrup y M. Nauenberg, Phys. Lett. 95B, 63 (1980).
  28. P. Pfeuty, Ann. Phys. (NY) 57,79 (1970).
  29. M. Fischer y R. Burford, Phys. Rev. 156, 583 (1967).
  30. P. Hasenfratz, TH-3737 CERN.
  31. T. Tomboulis, Phys. Rev. Lett. 50, 885 (1983).
  32. M. Creutz, L. Jacobs y C. Rebbi, Phys. Rep. 95,203 (1983).
  33. J. Kogut, R. Pearson y J. Shigemitsu, Phys. Rev. Lett.43,484(1979).
  34. J. M. Drouffe y J. B. Zuber, Phys. Rep. 102, 1 (1983).
  35. K. Bitar, S.Gottlieb y C. Zachos,Phys. Rev. D26,2853 (1982).
  36. E. Witten, Nucl. Phys. B160, 57 (1979).
  37. N. Hari Dass, A. Patkós yF. Deák, Nucl. Phys.B205 (FS5), 414 (1982)
  38. S. Drell,H. Quinn, B. Svetitsky y M. Weinstein, Phys. Rev.D19,619 (1979).
  39. B. Hu, Phys. Rep. 91, 235 (1982).
  40. A. Irving y C. Hamer, J. Phys. A 16,829 (1983).
  41. G. Parisi y Y. Wu, Scientia Sinica 24,483 (1981).
  42. T. Eguchi y H. Kawai, Phys. Rev. Lett.48, 1063 (1982).
  43. K. Binder, "Monte Carlo methods in Statistical Physics", Springer Verlag (1979).
  44. M. Creutz, Phys. Rev. D21, 2308 (1980).
  45. C. Lang y C. Rebbi, Phys. Lett. 115B, 137 (1982).
  46. H. Hamber y G. Parisi, Phys. Rev. D27, 208 (1983).
  47. G. Baker, Phys. Rev. 124, 768(1961).
  48. M. Falcioni, E. Marinari ,M.Paciello, G. Parisi y B. Taglienti, Phys. Lett. 102B, 270 (1981).
  49. A. Hasenfratz y P. Hasenfratz, Phys. Lett.93B, 165 (1980).
  50. A. Polyakov, Phys. Lett.72B, 477 (1978).
  51. D. Weingarten, Nucl. Phys. B210 (FS6),229 (1982).
  52. N. Cabibbo, G. Martinelli y R. Petronzio, TH-3774 CERN.
  53. S. Elitzur, E. Rabinovici y A. Schwimmer, Phys. Lett. 119B, 165 (1982).
  54. J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci.(USA)44, 956 (1958);  
I. Gel'fand y A. Yaglom, J. Math. Phys.1 ,48 (1960);  
K. Symanzik,<sup>†</sup> J. Math. Phys.7, 510 (1966);  
A. Polyakov, Soviet Phys. JEPT 28, 533 (1969);

- M. Moore, *Lett. Nuovo Cimento* 3, 275 (1972);  
K. Wilson y J. Kogut, *Phys. Rep.* 12, 75 (1974);  
B. Mc Coy, C. Tracy y T.T.Wu, *Phys. Rev. Lett.* 38, 793 (1977);  
J.M. Drouffe y C. Itzykson, *Phys. Rep.* 38, 133 (1978);  
B. Mc Coy y T. T. Wu, ITP-SB-80-11;  
M. Bander, *Phys. Rep.* 75, 207 (1981);  
F. Close, *Physica Scripta* 25, 86 (1982);  
C. Rebbi, *Scientific American*, Febrero 1983;  
M. Creutz, "Quarks, Gluons and Lattices", Cambridge Univ. Press 1983;  
I. O. Stamatescu, "On lattice gauge theory with matter", MPI-PAE/PTh  
15/84 (marzo 1984).

EXPLICACION DE LAS FIGURAS :

1. Plaqueta correspondiente al sitio  $x$  en una red cúbica bidimensional. Ubicación de las variables de unión.
2. Lazo de Wilson rectangular de tamaño  $R \times T$  utilizado en la definición del potencial entre quarks estáticos.
3. Los diagramas de fases esperados para las teorías QED (a) y QCD (b) en la red de cuatro dimensiones.
4. Resultados obtenidos mediante simulaciones de Monte Carlo (M. Creutz, Phys. Rev. Lett. 45, 313 (1980)) para la tensión de la cuerda en función del acoplamiento para el grupo de medida  $SU(2)$ . La nomenclatura es igual a la de la sección I.f. Se distingue claramente una región donde las predicciones del grupo de renormalización se verifican. Para guiar la vista se han suplantado los datos puntuales de Monte Carlo por líneas continuas. El parámetro  $J$  indica que se ha utilizado un lazo de tamaño  $J \times J$ .
5. Un posible diagrama de fases de una teoría en la red donde  $\beta$  y  $\delta$  son dos parámetros de la acción (ver por ejemplo la acción mixta de la sección II.c). La línea continua indica transiciones de primer orden, la línea rayada de segundo orden y la punteada de orden superior. T es un punto triple y E indica un punto crítico al final de una línea de transiciones de primer orden. Las fases I, II y III se caracterizan por ciertas propiedades como el confinamiento, densidad de monopolos, etc.. El significado de la flecha se explica en el texto (sec. I.h).

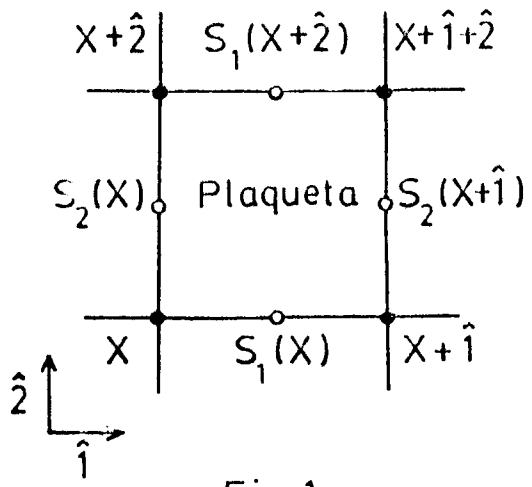


Fig.1

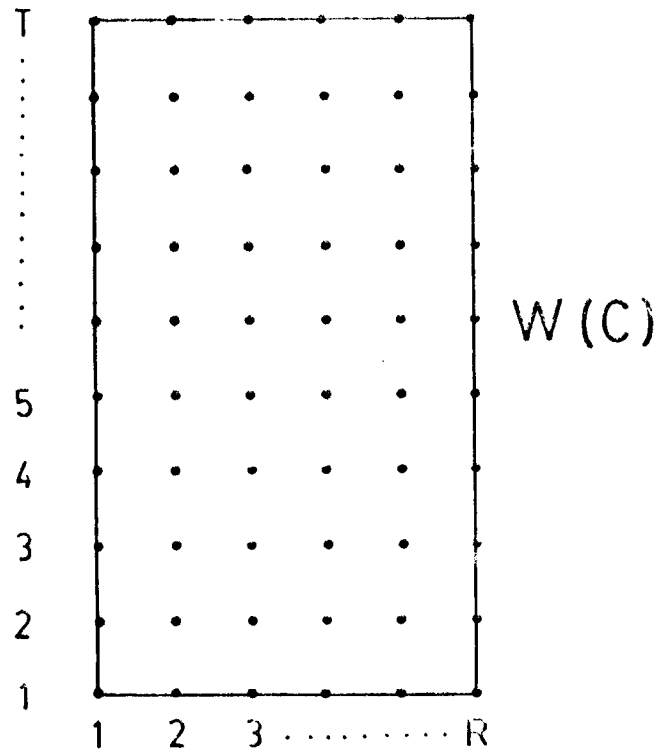


Fig. 2

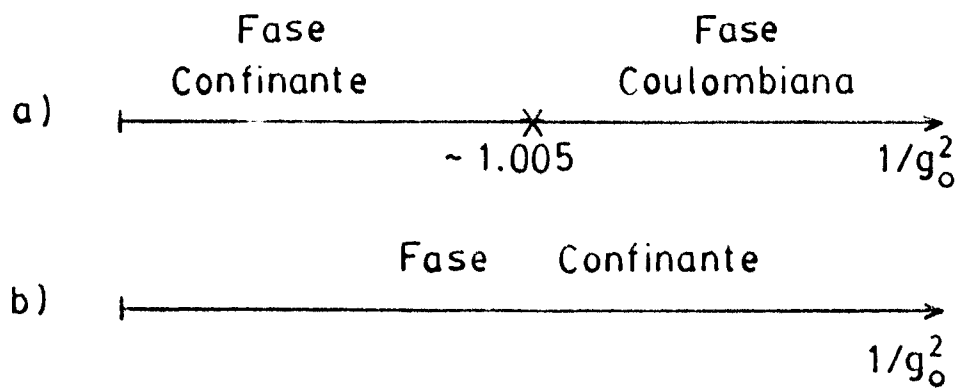


Fig. 3

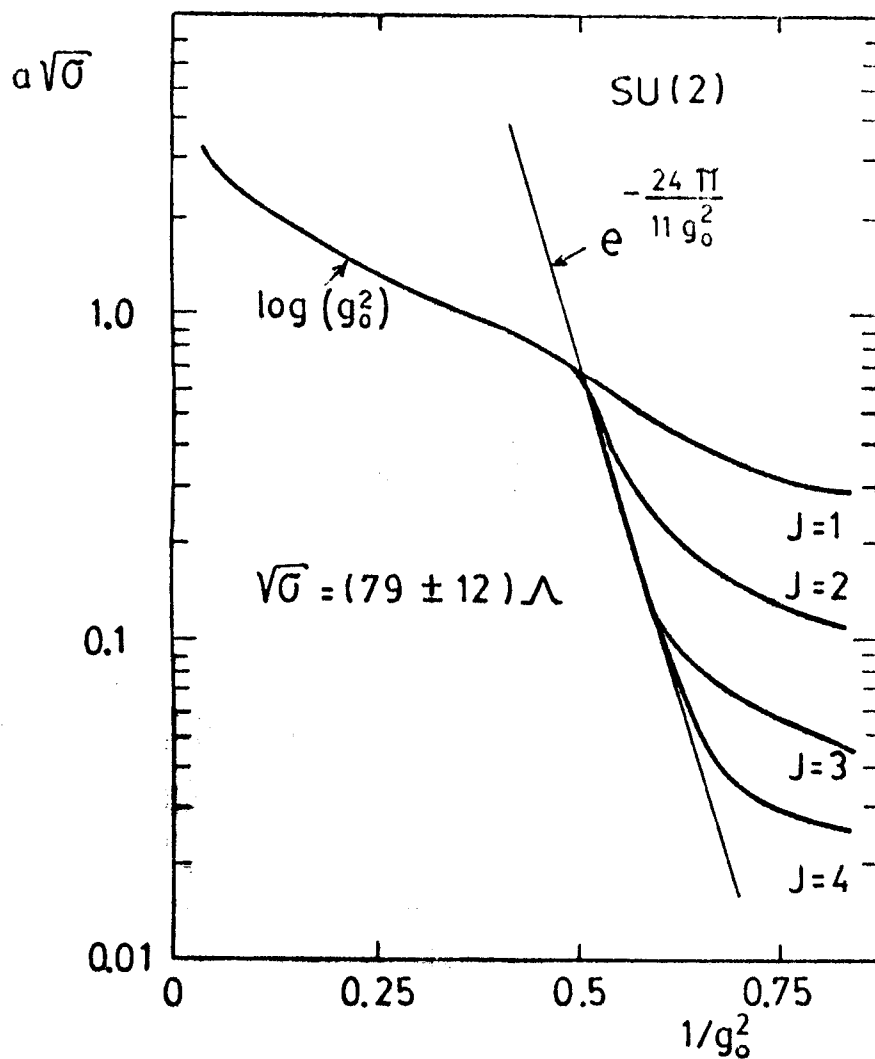


Fig. 4

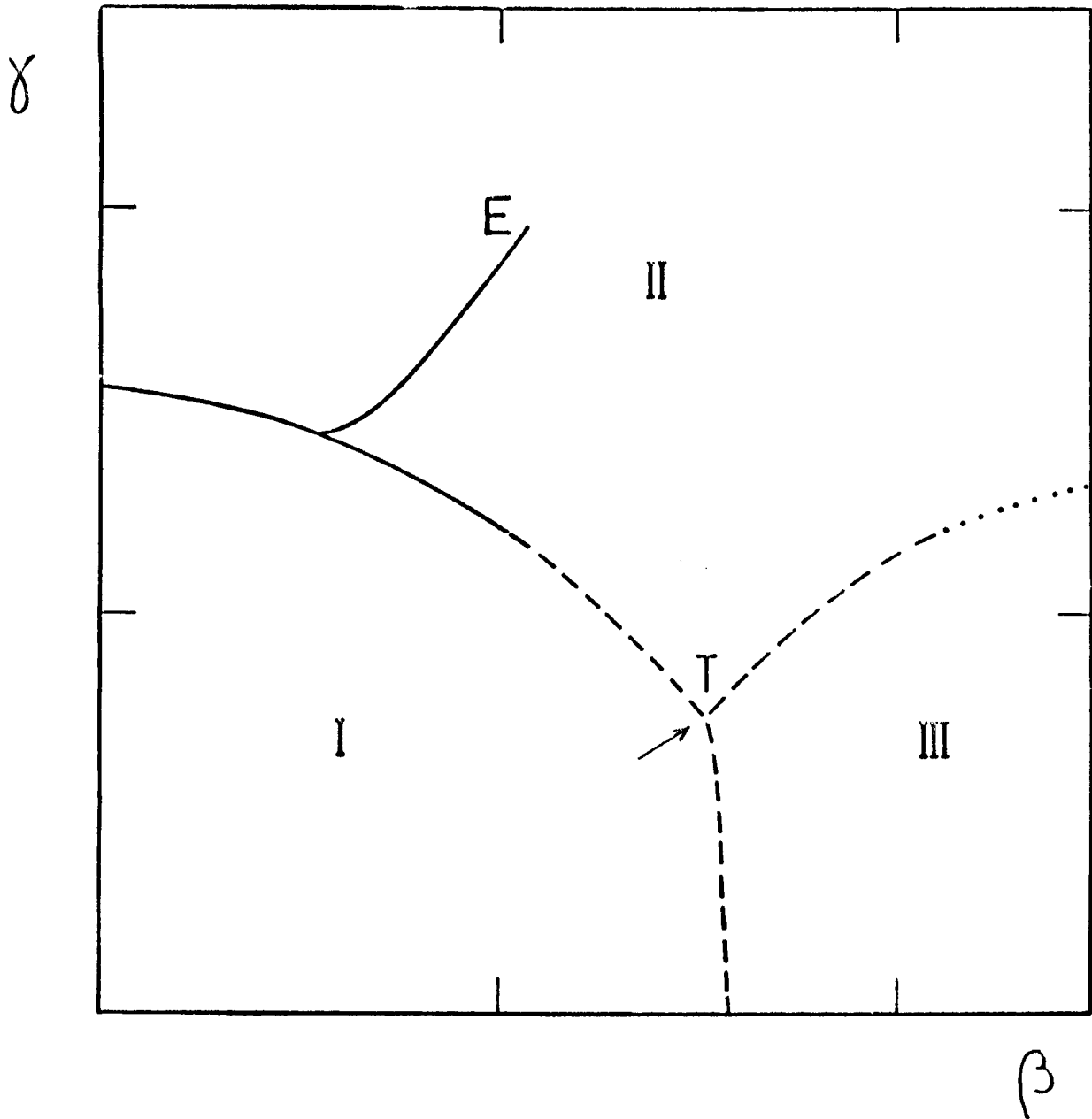


Fig. 5

CAPITULO II

CAMPO MEDIO CON  
CORRECCIONES RADIATIVAS

II.a Desarrollo del formalismo

La aproximación de campo medio utilizada en teorías de medida en la red es similar a la conocida técnica de igual nombre de la física del sólido<sup>1,2</sup>. La suposición fundamental es que el efecto de todas las variables de la red analizada, sobre un dado sitio, puede aproximarse por un campo promedio. Al pedir que la magnetización (o algún otro parámetro de orden local) en el sitio estudiado sea igual a la del resto de los puntos de la red se obtiene una ecuación para dicha magnetización cuyas raíces nos permiten obtener información sobre las fases del modelo. Tomemos como ejemplo la teoría Z(2) de medida en la red (ver sec. I.c). La acción de esta teoría es,

$$S = \beta \sum_p (\sigma_\ell \sigma_{\ell'} \sigma_{\ell''} \sigma_{\ell'''})_p, \quad (1)$$

donde  $\sigma_\ell$  es una variable ubicada en la unión ( $\ell$ ) de la red (por simplicidad en este capítulo adoptaremos esta nomenclatura para las variables de unión en lugar de la utilizada en el capítulo I) y que puede tomar valores  $\pm 1$ .  $\beta = 1/g_0^2$ ,  $g_0$  es el acoplamiento. Las cuatro variables  $\sigma_\ell$  que rodean a una plaqueta ( $p$ ) están acopladas entre sí (ver fig. 1, cap. I). Siguiendo las ideas enunciadas arriba congelamos el valor de todas las variables menos una a su valor medio  $\langle \sigma_\ell \rangle = m$ . Recordando que cada unión de la red de  $d$ -dimensiones está en contacto con  $2(d-1)$  plaquetas, la ecuación de autoconsistencia para la magnetización es,

$$m = \frac{\sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \exp\{2(d-1)\beta m^3 \sigma\}}{\sum_{\sigma=\pm 1} \exp\{2(d-1)\beta m^3 \sigma\}} = \text{tgh}[2(d-1)\beta m^3]. \quad (2)$$

Esta ecuación tiene como solución la raíz  $m=0$  para todo  $\beta$  pero (en  $d=4$ ) a partir de  $\beta^* = 0.36$  aparece una raíz no trivial estable tal como indica la figura 1.

La aparición de la raíz no trivial se interpreta como transición de fase (luego veremos que más correcto es comparar las energías libres de cada solución). Dicha transición es de primer orden pues la raíz  $m \neq 0$  aparece bruscamente. Esto ocurre en cualquier teoría de medida debido al acoplamiento de cuatro variables en la plaqueta. Para modelos de spin (interacciones de a pares entre próximos vecinos) por el contrario, la transición es siempre de segundo orden o sea para  $\beta > \beta^*$  una raíz evoluciona con continuidad a partir de  $m=0$ . Una vez conocido  $m$  pueden evaluarse otras magnitudes. Por ej. el valor medio de la energía es  $E_p = m^4$  para el modelo definido en la ec. (1).

Estos mismos resultados se obtienen de una manera elegante mediante un método variacional<sup>2,3</sup> (aunque como veremos luego para introducir correcciones es necesario desarrollar otro formalismo). Definamos una acción del tipo unión independiente,

$$S_0 = K \sum_{\text{uniones}} \sigma_l, \quad (3)$$

donde  $K$  es una cierta constante que será obtenida variacionalmente. Si defino el valor medio con la acción  $S_0$  de una magnitud  $X$  cualquiera como,

$$\langle X \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} \sum_{\{\sigma_{l,t+1}\}} X e^{S_0}, \quad \left( Z_0 = \sum_{\{\sigma_{l,t+1}\}} e^{S_0} \right), \quad (4)$$

resulta que,

$$\frac{Z}{Z_0} = \left\langle e^{S - S_0} \right\rangle_0, \quad (5)$$

siendo  $S$  la acción definida en la ec. (1) y  $Z$  la correspondiente función de partición. Por la propiedad de convexidad de la exponencial<sup>2,3</sup>,

$$\langle e^x \rangle_0 \geq e^{\langle x \rangle_0} , \quad (6)$$

llegamos a,

$$\log Z \geq \log Z_0 + \langle S - S_0 \rangle_0 , \quad (7.a)$$

o bien en este caso,

$$\frac{\log Z}{N_d} \geq \log(\cosh K) + \frac{\beta(d-1)}{2} (\tanh K)^4 - K \tanh K . \quad (7.b)$$

Al minimizar respecto de K se obtiene la ec.(2) recuperando los resultados ya conocidos. La aproximación descrita ha sido aplicada a numerosos modelos de medida<sup>4,5,6,7,8</sup> con resultados aceptables en comparación con las simulaciones de Monte Carlo. Notemos en la ec. (7.b) que el segundo sumando corresponde a la energía U del modelo. Recordando que F= U-TS, los otros dos sumandos pueden asociarse a la entropía.

Un detalle importante a remarcar es que existe una forma sencilla y sistemática de mejorar los resultados de campo medio. Esto se logra manteniendo "vivas" en la ec.(2) a varias variables de unión adyacentes en vez de sólo una, igualando, como siempre, el resto a su valor medio. De esta manera se tienen en cuenta fluctuaciones del orden del tamaño del volumen finito considerado exactamente. En el capítulo III hemos aplicado esta aproximación al modelo de Ising (ver referencias en ese capítulo). Los resultados mejoran apreciablemente para dimensiones grandes aunque la convergencia a los valores aceptados de temperatura crítica es lenta. En el contexto de las teorías de medida en la red esta mejora fue aplicada a varios modelos abelianos y no abelianos con resultados aceptables.<sup>5,7</sup>

Existe una importante crítica al método que hemos descrito motivada en la invariancia de medida. Es bien conocido que el valor medio de una magnitud no invariante ante transformaciones de medida (como  $\langle \sigma_i \rangle$  por ej.) es estrictamente cero (teorema de Elitzur)<sup>9</sup>. Esto puede visualizarse intuitivamente de la siguiente manera. Supongamos la configuración en que todas las variables  $\sigma_i$  son iguales a +1. Si elegimos un sitio de la red y realizamos una transformación de medida (o sea invertimos los signos de las 2d variables de unión vinculadas al sitio) la acción queda inalterada (en el lenguaje de mecánica estadística se dice que la energía no cambia) y por lo tanto ambas

configuraciones son igualmente probables. Sin embargo la magnetización cambió de  $Nd$  ( $N = n^d$  de sitios de la red) a  $(N-4)d$ . Si se continúa este razonamiento haciendo transformaciones de medida en diversos puntos de la red se llega a la conclusión de que en el caso de la teoría  $Z(2)$  de medida existen  $2^N$  configuraciones igualmente probables (degeneradas) pero con magnetización que varía de  $Nd$  a  $-Nd$ . Entonces en promedio  $m \cdot \langle \sigma \rangle = 0$  en contradicción con los resultados de campo medio. En consecuencia esta técnica aproximada es intrínsecamente inconsistente. Además el hecho de predecir siempre transiciones de primer orden es incorrecto.

El problema vinculado con el teorema de Elitzur fue resuelto en las ref. 10, 11 y 12. El truco fundamental consiste en reescribir la función de partición del modelo estudiado en términos de variables sin vínculos y con una cierta acción efectiva. Las ecuaciones de campo medio ya estudiadas surgen al evaluar la función de partición mediante la técnica de saddle-point (punto de ensilladura). Tomemos como ejemplo nuevamente a la teoría  $Z(2)$  de medida. Introduzcamos en la función de partición un 1 escrito como,

$$1 = \prod_{\ell} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\sigma_{\ell} - v_{\ell}) dv_{\ell} = \prod_{\ell} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\ell} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha_{\ell}}{2\pi i} e^{\sum_{\ell} \alpha_{\ell} (\sigma_{\ell} - v_{\ell})}, \quad (8)$$

o sea,

$$Z = \prod_{\ell} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\ell} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha_{\ell}}{2\pi i} e^{\left( \beta \sum_p (v v v v)_p - \sum_{\ell} \alpha_{\ell} v_{\ell} + \sum_{\ell} \log(\cosh \alpha_{\ell}) \right)}. \quad (9)$$

La ec. (9) es una expresión exacta para la función de partición. Corresponde a un modelo con variables no acotadas y con una acción efectiva,

$$S_{ef} = \beta \sum_p (v v v v)_p - \sum_{\ell} \alpha_{\ell} v_{\ell} + \sum_{\ell} \log(\cosh \alpha_{\ell}). \quad (10)$$

Notemos que se ha duplicado el número de variables. En general para cualquier grupo de medida siempre el número de variables es mayor o igual que el doble de las de partida.

El paso siguiente consiste en aplicar la técnica de saddle-point a la ec. (10). Previamente repasemos en qué consiste dicha

aproximación. Supongamos que se desea evaluar la integral,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{f(t)} dt, \quad (11)$$

donde  $f(t)$  es una función con un máximo agudo en  $t=t_0$ . Desarrollemos  $f(t)$  en serie de Taylor alrededor de  $t_0$ ,

$$f(t) \approx f(t_0) + \frac{1}{2}(t-t_0)^2 f''(t_0) + \dots \quad (12)$$

Entonces  $I$  queda igual a,

$$I \approx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{f(t_0) - \frac{1}{2}(t-t_0)^2 |f''(t_0)|} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(t_0)|}} e^{f(t_0)}, \quad (13.a)$$

o tomando logaritmos,

$$\log I \approx f(t_0) + \frac{1}{2} \log \left( \frac{2\pi}{|f''|} \right). \quad (13.b)$$

La aplicación de este método a integrales simples, como por ejemplo la función gamma  $\Gamma(x)$ , muestra que el mismo da muy buenos resultados cuando el integrando tiene máximos agudos. En caso que se considere una integral  $I_M$  con un número  $M$  de máximos suficientemente alejados unos de otros y de altura y ancho iguales, entonces,

$$\log I_M \approx \log M + \log I. \quad (14)$$

Para aplicar estas ideas al modelo  $Z(2)$  de medida primeramente debemos hallar la posición de los máximos de  $\exp\{S_{ef}\}$  (función de  $2Nd$  variables). Estos satisfacen las ecuaciones,

$$\frac{\partial S_{ef}}{\partial v_\ell} = \beta \sum_{\substack{2(d-1) \\ \text{plazuelas}}} (v_1 v_2 v_3) - \alpha_\ell = 0, \quad (15.a)$$

$$\frac{\partial S_{ef}}{\partial \alpha_\ell} = \text{tgh } \alpha_\ell - v_\ell = 0, \quad (15.b)$$

donde la suma en ec.(15.a) es sobre las  $2(d-1)$  plaquetas vinculadas a la unión  $\ell$ .  $(V_1, V_2, V_3)$  representan las tres variables de unión que junto con  $v_\ell$  forman esas plaquetas. Estas son las ecuaciones clásicas de la acción ec.(10) (pero no obviamente de la acción ec.(1) pues en este caso las variables pueden tomar sólo valores  $\pm 1$ ). La introducción de correcciones alrededor de estas soluciones tendrá en cuenta parcialmente los efectos cuánticos. Las ec. (15) no pueden resolverse por su complejidad. Debemos introducir entonces una segunda aproximación. Buscaremos soluciones tipo campo medio o sea invariantes ante traslaciones o rotaciones en  $90^\circ$  del tipo,

$$V_\ell = V \quad , \quad \alpha_\ell = \alpha \quad , \quad \forall \ell \quad . \quad (16)$$

Las ecuaciones resultantes son,

$$V = \tanh \alpha \quad , \quad (17.a)$$

$$\alpha = 2(d-1)\beta v^3 \quad , \quad (17.b)$$

que es exactamente igual a la ec.(2). Queda claro entonces que la aproximación de saddle-point a la función de partición escrita en términos de variables sin vínculos, suplementada con la hipótesis de soluciones invariantes ante traslaciones o rotaciones, da iguales resultados que el campo medio (este truco es bien conocido en mecánica estadística<sup>2,14</sup>). La aproximación aquí desarrollada tiene grandes ventajas. En primer lugar notemos que las ec.(15) aún suplementadas con la hipótesis (16) son invariantes de medida. Esto indica que hay  $2^N$  soluciones de la ec.(15) (sólo dos de ellas invariantes ante traslaciones y rotaciones) que dan igual valor a  $S_{ef}$  y por ende la función de partición es aproximadamente la suma de las contribuciones de esos  $2^N$  máximos<sup>15</sup>. Implícitamente estamos suponiendo que los máximos se encuentran suficientemente separados (ver ec. (14)). Luego veremos que las energías libres que obtendremos convergen a los resultados perturbativos conociendo de alguna manera esta hipótesis al menos para  $\beta$  grande. La energía libre por unidad de sitio correspondiente a la solución no trivial de la ec.(17) es,

$$F_{sfm} = \frac{\log Z}{N} \cong \log 2 - \frac{3}{2} \beta d(d-1) v^4 - \frac{d}{2} \log(1-v^2) \quad , \quad (18)$$

donde el primer sumando es el factor de entropía debido a la degeneración de los máximos. La energía libre de la solución trivial sigue siendo 0 pues la órbita de dicha solución tiene un único elemento. Para hallar las transiciones de fase debemos ahora comparar las  $F$  de cada solución. Su cruce se interpreta como transición. Notemos que ese cruce en general se produce para un  $\beta$  mayor o igual que el  $\beta^*$  adonde aparece la raíz no trivial.

Otra ventaja de esta aproximación es que ahora se satisface el teorema de Elitzur<sup>9</sup> pues para obtener el valor medio de una cierta magnitud se debe promediar sobre todas las configuraciones que minimizan la acción. En consecuencia  $\langle \phi_i \rangle = 0$ . El valor medio de una magnitud invariante de medida es el mismo en todos los máximos y por lo tanto su valor no cambia respecto del obtenido en la versión "naive" del método (o sea la descripta al comienzo de esta sección) justificando porqué está última da valores aceptables para muchas magnitudes físicas (un razonamiento similar se esboza en la ref. (5)).

El lector puede objetar que repitiendo este argumento para el modelo de Ising se llega también a la conclusión de que  $\langle \phi \rangle = 0$  pues este modelo presenta dos máximos de la acción con magnetizaciones de signo opuesto e iguales en valor absoluto. La explicación de esta aparente paradoja se logra introduciendo un pequeño campo magnético  $h$ . La diferencia en energía entre diferentes soluciones en el modelo  $Z(2)$  de medida es  $\Delta E = 4d\beta h$  y es finita cuando el volumen  $V \rightarrow \infty$ . Pero en el Ising,  $\Delta E = 2\beta hN \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\rightarrow \infty}$  y las transiciones entre los dos máximos por pequeño que sea el  $h$  son imposibles. En otras palabras en una teoría de medida los límites  $V \rightarrow \infty, h \rightarrow 0$  conmutan pero en una teoría de spins no.<sup>16,17</sup>

Una vez planteada la aproximación de campo medio de esta manera se pueden evaluar correcciones sistemáticamente alrededor de la solución de las ecuaciones de saddle-point (Es evidente que quedarnos con los resultados "clásicos" de la teoría definida por la acción (10) no necesariamente es una buena aproximación a los resultados cuánticos (Se deben tener en cuenta fluctuaciones)). Este procedimiento es muy usado en teoría de campos donde se lo conoce como desarrollo en lazos<sup>18</sup> (loops). Todo el formalismo es inmediatamente extendible a grupos más complicados con o sin materia. Si el grupo es continuo es imprescindible fijar la medida para evaluar correcciones.<sup>15</sup> Este cálculo especializado para los modelos  $Z(2)$  Higgs,  $U(1)$  y  $SU(2)$  mixtos forma la

parte principal de este capítulo (sec. II.b,c y d).

El campo medio predice valores confiables sólo para magnitudes locales como el valor medio de la variable de plaqueta pero el cálculo de lazos de Wilson, masas de glueballs o hadrones, etc. está más allá de su capacidad. O sea esta técnica puede usarse en la predicción de diagramas de fase para las teorías de medida en la red, pero no para estimar el límite continuo. En la sec. I.c se amplían estas observaciones.

Antes de pasar a las aplicaciones discutiremos brevemente la influencia de la fijación de medida en el modelo definido por la ec.(1). Tomemos por ejemplo todas las variables en la dirección  $d$ -ésima ( $\phi_d(x)$ ) iguales a 1 (medida temporal o axial). Si se repiten los cálculos que nos permitieron llegar a las ecuaciones de saddle-point invariantes ante traslaciones (ec.(17)), se obtiene en este caso,

$$v = t_y h \left\{ 2\beta \left[ (d-2)v^3 + v \right] \right\}. \quad (19)$$

La simetría de medida de las ecuaciones ya no existe y por ende hay sólo un mínimo. La energía libre es,

$$F_{axial} = -\beta(d-1) \left[ \frac{3}{2}(d-2)v^4 + v^2 \right] - \frac{(d-1)}{2} \log(1-v^2), \quad (20)$$

y aparentemente el resultado es distinto al de la ec.(18). Sin embargo se demuestra que en la zona de acoplamiento débil las ec.(18 y 20) convergen respectivamente a,

$$F_{sfm} \approx \frac{1}{2}d(d-1)\beta - (d-1)\log 2 + d e^{-4(d-1)\beta}, \quad (21.a)$$

$$F_{axial} \approx \frac{1}{2}d(d-1)\beta - (d-1)\log 2 + (d-1) e^{-4(d-1)\beta}. \quad (21.b)$$

$F_{sfm}$  es igual al verdadero valor de  $F$  en la zona de acoplamiento débil (ref.15) pero  $F_{axial}$  difiere en un término  $\exp[-4(d-1)\beta]$ . El hecho de que  $F_{axial} \neq F_{sfm}$  no debe sorprendernos pues sólo el resultado exacto es igual en cualquier medida, pero esa igualdad no se mantiene orden a orden en un cálculo aproximado. En las ref.15 y16 se probó que si se tienen en cuenta configuraciones tipo fluxón o sea con  $2(d-1)$  plaquetas frustradas entonces  $F_{axial} = F_{sfm}$  a orden  $\exp[-4(d-1)\beta]$ . Cabe acotar que estas configuraciones no invariantes ante traslaciones no son soluciones de las ec. de saddle-point.

## II.b Aplicación al modelo Z(2) Higgs

En esta sección aplicaremos<sup>19</sup> la técnica de campo medio con correcciones al modelo Z(2) Higgs, el cual se define a través de la función de partición,

$$Z(\beta, \gamma) = \frac{1}{2^{N(d+1)}} \sum_{\{\sigma_x, \tau_x\}} \exp \left[ \beta \sum_p (\sigma \sigma \sigma \sigma)_p + \gamma \sum_l (\tau \cup \tau)_l \right]. \quad (22)$$

Las variables de materia  $\tau$  ubicadas en los sitios de la red toman valores  $\pm 1$ . Si  $\gamma=0$  se recupera la teoría Z(2) de medida ya estudiada en la sección anterior. El acoplamiento entre  $\sigma$  y  $\tau$  se produce en cada unión a través de sumandos del tipo,

$$\tau_x \sigma_{\mu(x)} \tau_{x+\mu}, \quad (23)$$

donde  $x$  indica un cierto sitio y  $\mu$  una dirección.  $d$  es la dimensión de la red.

Este modelo fue estudiado analíticamente<sup>20</sup> y mediante simulaciones de Monte Carlo<sup>21,22</sup> en 3 y 4 dimensiones. El diagrama de fases obtenido puede verse en la figura 2. Aparecen tres fases: para  $(\beta, \gamma \ll 1)$  una zona confinante donde el lazo de Wilson tiene un comportamiento tipo área, si  $(\beta \gg 1, \gamma \ll 1)$  la fase "libre" donde la fuerza entre cargas es tipo coulombiana y si  $(\beta, \gamma \gg 1)$  tenemos la fase Higgs donde en una cierta medida adecuada  $\langle \tau \rangle \neq 0$ . El modelo no corresponde "a priori" a alguna teoría de interés físico pero posee los requisitos adecuados como para ser un modelo no trivial con muchas de las características de las teorías realistas. Un detalle muy importante de la figura 2 es la presencia de un vínculo analítico entre las fases confinante y Higgs. Precisamente esa conexión es un aspecto difícil de predecir mediante métodos aproximados. Además en el punto final (end-point) al terminar la línea de transiciones de primer orden, tenemos una transición de segundo orden o sea la longitud de correlación  $\xi$  diverge, dando la posibilidad de que allí pueda tomarse un límite continuo. Volveremos sobre este aspecto más adelante.

El tratamiento de este modelo mediante la técnica de campo medio es sencillo. Primeramente debemos escribir  $Z$  en función de variables sin vínculos mediante la identidad,

$$\frac{1}{2} \sum_{R=1} f(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} dQ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP}{2\pi i} f(Q) e^{\log(\cosh P) - PQ} \quad (24)$$

obteniéndose,

$$\begin{aligned} Z(\beta, \gamma) = & \left( \prod_{\ell} \int_{-\infty}^{+\infty} dU_{\ell} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha_{\ell}}{2\pi i} \right) \left( \prod_x \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu_x}{2\pi i} \right) \exp \left\{ \sum_{\ell} (\log \cosh \alpha_{\ell} - \alpha_{\ell} U_{\ell}) + \right. \\ & \left. + \sum_x (\log \cosh \mu_x - \mu_x \tau_x) + \beta \sum_p (UUUU)_p + \gamma \sum_{\ell} (\tau U \tau)_{\ell} \right\}. \quad (25) \end{aligned}$$

donde  $\alpha_{\ell}$  y  $\mu_x$  son campos auxiliares definidos en las uniones y sitios de la red, respectivamente.

Si no se fija la medida las ecuaciones de saddle-point del modelo, luego de pedir invariancia ante traslaciones, son,

$$v = \operatorname{tgh} [2\beta(d-1)v^3 + \gamma\tau^2], \quad (26.a)$$

$$\tau = \operatorname{tgh} [2\gamma d v \tau]. \quad (26.b)$$

Si  $\gamma=0$  se recupera la ec.(17). Existen tres tipos de soluciones:  $(v=0, \tau=0)$ ,  $(v \neq 0, \tau=0)$ ,  $(v \neq 0, \tau \neq 0)$ . La energía libre por unidad de sitio correspondiente a la solución trivial  $(0,0)$  es 0 mientras que la correspondiente a las soluciones no triviales son,

$$F_{sfm} = \log 2 - \frac{d}{2} \log(1-v^2) - \frac{1}{2} \log(1-\tau^2) - \frac{3}{2} \beta d(d-1)v^4 - 2d\gamma v \tau^2, \quad (27)$$

donde se ha considerado explícitamente la degeneración  $2^N$ . Comparando las energías libres se obtiene el diagrama de fases dibujado en la figura 2. Incorrectamente no se predice la conexión analítica entre la fase confinante y la Higgs.

Veamos qué ocurre en caso de fijar la medida axial. Las nuevas ecuaciones de saddle-point son,

$$v = \operatorname{tgh} \left\{ 2\beta v [1 + v^2(d-2)] + \gamma\tau^2 \right\}, \quad (28.a)$$

$$\tau = \operatorname{tgh} \left\{ 2\gamma\tau [(d-1)v + 1] \right\}, \quad (28.b)$$

con una energía libre igual a,

$$F_{axial}^- = -\frac{(d-1)}{2} \log(1-v^2) - \frac{1}{2} \log(1-\tau^2) - \beta(d-1)v^2 \left[ 1 + \frac{3}{2}(d-2)v^2 \right] - \chi\tau^2 [1 + 2(d-1)v]. \quad (29)$$

El diagrama de fases correspondiente se muestra en la fig.2. Si bien se acerca más a los resultados de Monte Carlo que en el caso en que no se fija la medida, cualitativamente presenta también el inconveniente de la predicción de tres fases separadas.

Una tercera forma de realizar los cálculos es en la medida unitaria la cuál consiste en fijar los campos de materia  $\zeta = +1$  en todos los sitios de la red. La ecuación de saddle-point correspondiente, que obviamente involucra sólo a la variable de medida, es,

$$v = \tanh [2(d-1)\beta v^3 + \chi], \quad (30)$$

con una energía libre igual a,

$$F_{unit.} = -\frac{3}{2} \beta d(d-1)v^4 - \frac{d}{2} \log(1-v^2). \quad (31)$$

El diagrama de fases correspondiente a esta medida presenta características muy distintas a los dos casos anteriores (fig.2). Se predice correctamente la existencia de un punto final para la línea de transiciones que separa la fase Higgs de la confinante. El mismo está localizado en<sup>12</sup>

$$\chi_c \simeq 0.41, \quad \beta_c = 0.66 / (d-1). \quad (32)$$

Otra ventaja es que la energía libre predicha en el eje  $\chi$  coincide con la exacta ( $F = d \log(\cosh \chi)$ ). Sin embargo la fase libre se ha perdido completamente. El hecho de que esta medida falle para  $\chi \ll 1$  puede entenderse fácilmente. En el eje  $\chi = 0$  la invariancia de medida se restaura indicando la existencia de  $2^N$  máximos iguales en las ec. de saddle-point. En consecuencia para  $\chi \ll 1$  habrá muchos máximos casi degenerados con el de máxima acción que no son tenidos en cuenta en la ec.(31). En otras palabras la unitaria no es una buena medida en todo el plano. Falla en  $\beta = 0$ .

Antes de pasar a las correcciones destaquemos un hecho positivo de estos resultados a orden cero. En el límite  $(\beta, \chi) \gg 1$ , las energías libres hasta aquí obtenidas convergen a la energía libre que

proporciona el desarrollo de acoplamiento débil, es decir,

$$F \xrightarrow{\beta, \gamma \gg 1} \frac{\beta d(d-1)}{2} + \gamma d - d \log 2 + d e^{-4\beta(d-1)-2\gamma} + e^{-4\gamma d}, \quad (33)$$

donde F representa cualquiera de las ec. (27,29 y 31). En el caso en que se fija la medida, para obtener la ec.(33) es necesario adicionar las contribuciones no triviales (fig.3) al igual que se hizo en la pág. 36 para la teoría Z(2) de medida.

Veamos como pueden mejorarse los resultados de la fig.2 mediante el campo medio con correcciones. Para ello se recurre al desarrollo en lazos enunciado antes. El mismo consiste primeramente en hacer el cambio de variables,

$$\begin{aligned} \sigma_l &\rightarrow v + \delta_l, & \tau_x &\rightarrow \tau + \tau_x, \\ \alpha_l &\rightarrow \alpha + \alpha_l, & \mu_x &\rightarrow \mu + \mu_x, \end{aligned} \quad (34)$$

y mantener en la acción hasta términos cuadráticos en las nuevas variables. Los sumandos de orden superior se desarrollan en potencias de  $\beta$  y  $\gamma$ . Las integrales resultantes son del tipo gaussiana y pueden evaluarse en forma cerrada.

Al corregir la solución trivial (0,0) se recupera el desarrollo habitual de acoplamiento fuerte para la energía libre. El mismo puede organizarse en potencias de  $\beta, \gamma$  o en caracteres. Esta última aproximación da como resultado,

$$\begin{aligned} F_{sc} = & d \log \cosh \gamma + \frac{d(d-1)}{2} \left[ \log \cosh \beta + \operatorname{tgh} \beta \operatorname{tgh}^4 \gamma + \right. \\ & \left. + 2(2d-3) \operatorname{tgh}^2 \beta \operatorname{tgh}^6 \gamma + \dots \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Esta energía libre es la misma para cualquier medida. La correspondiente corrección  $\Delta F$  en las fases de soluciones no triviales es despreciable para este modelo (aunque es fundamental para grupos más realistas),

$$\Delta F = -\frac{1}{2N} \operatorname{tr} \left[ \log (1 - \beta v^2 (1-v^4) \square) \right] - \frac{1}{2N} \operatorname{tr} \left[ \log (1 - \gamma v (1-\tau^4) \Delta) \right], \quad (36.a)$$

donde hemos definido las matrices,

$$\square_{l,l'} \begin{cases} =1 & \text{si } l \text{ y } l' \text{ pertenecen a una misma plaqueta} \\ =0 & \text{de otra manera} \end{cases}, \quad (36.b)$$

$$\Delta_{x,x'} \begin{cases} =1 & \text{si } x \text{ y } x' \text{ pertenecen a una misma unión} \\ =0 & \text{de otra manera .} \end{cases} \quad (36.c)$$

El hecho de que  $\Delta F$  es despreciable puede estimarse siguiendo el razonamiento de la ref.15 para el eje de medida pura (el cual fue verificado explícitamente en la ref.23). En definitiva vemos que el método consiste ahora en la comparación de la energía libre ec.(35) con las ya obtenidas en las ec.(27,29 y 31). Los resultados son los siguientes:

d=4

La figura 4 muestra el diagrama de fases obtenido comparando las energías libres ec.(35) y ec.(29) (medida axial). El punto de transición en el eje puro es  $\beta_c = 0.44$  en excelente acuerdo con los resultados de Monte Carlo y autodualidad ( $\beta_c = \frac{1}{2} \log(4+\sqrt{5}) = 0.4407$ ) (Este resultado fue anteriormente obtenido en la ref.15) El detalle más importante es la aparición del punto final que permite la conexión analítica entre las fases Higgs y confinante. La ubicación de ese punto es aceptable comparado con los resultados de Monte Carlo<sup>24</sup> y aparece de una manera similar al caso de la acción SU(2) mixta<sup>24</sup> (fig.5). En la fig.4 vemos que la fase libre está presente y por lo tanto el diagrama de fases predicho es completo y en buen acuerdo cuantitativo con las simulaciones de Monte Carlo. La línea Higgs-libre no cambia respecto de la aproximación de orden cero (fig.6).

Si no se fija la medida el diagrama de fases es casi igual al de la medida axial salvo que cerca del eje ( $\beta = 0$ ) aparece una línea espuria de transiciones terminando en otro punto crítico. Con la medida unitaria no realizamos los cálculos pues como ya se discutió antes, en ese caso hay una fase ausente. En general para obtener un buen diagrama de fases es necesario que a orden cero aparezcan todas las fases del mismo.

d=3

Al igual que d=4, los resultados en este caso (medida axial) indican una mejora de los correspondientes de orden cero, obteniéndose un diagrama de fases cualitativamente correcto. La posición del punto final no es buena ( $\beta = 0.36$ ,  $\gamma = 0.66$ ) pero la ubicación de la transición en el eje de medida pura es casi correcta ( $\beta_c \approx 0.72$ ) siendo esta de primer orden en vez de segundo orden. Está claro que en dimensión baja los resultados de campo medio no son tan confiables como en dimensión alta.

d=5

En este caso no hay valores de Monte Carlo con los cuales comparar. Hemos obtenido un diagrama de fases similar a los de d=3 y 4. La transición de pura medida ocurre en  $\beta \simeq 0.33$ , la línea Higgs-libre está en  $\gamma \simeq 0.4$  y el punto final se encuentra en  $\beta \simeq 0.14, \delta \simeq 0.68$ .

Para finalizar esta sección destaquemos que el diagrama de fases de la teoría Z(2) Higgs es muy parecido al de la acción mixta SU(2) fundamental adjunta intercambiando  $(\beta, \delta)$  con  $(\beta_{\text{adj}}, \beta_{\text{fund}})$  tal como se analiza en la ref.25. Sin embargo en d=5 no hemos encontrado una transición de fase en el eje  $\beta=0$  aunque sí se espera una transición de primer orden en el eje  $\beta_{\text{fund}}$  de la teoría mixta. El análisis de estos detalles sería un interesante tema de investigación. Otros aspectos que también requieren un cuidadoso estudio son los siguientes:

- i) En la ref.12 se estudió el límite continuo de este modelo en el punto final donde aparece una transición de segundo orden (longitud de correlación  $\infty$ ), en la medida unitaria. Se demostró que la teoría del continuo que allí se obtiene es la  $\phi^4$ . Analizando el modelo mediante las correcciones tenidas en cuenta en esta sección (en la medida axial o sin fijar la medida) se obtiene también una teoría  $\phi^4$ ?
- ii) Se ha comprobado que de acuerdo a la representación en que se encuentre la materia, existe o no una conexión analítica Higgs-confinante.<sup>20</sup> Para la teoría Z(2) sólo hay una representación no trivial (fundamental) pero ya para el modelo Z(3) de medida hay dos representaciones. Sería muy interesante estudiar si una aproximación de campo medio con correcciones reproduce cualitativamente lo esperado.
- iii) Debería verificarse si la técnica aquí propuesta puede adaptarse al estudio de campos de materia con norma variable tal como los estudiados en la ref.26. En la ref.27 hay estudios preliminares a orden cero.

II.c Estudio del modelo U(1) mixto

<sup>28</sup>  
En esta sección estudiaremos en detalle la teoría U(1) mixta en la aproximación de campo medio con correcciones en 1/d. Primeramente daremos un breve resumen sobre acciones mixtas. Estas se definen mediante la combinación lineal de caracteres del grupo de medida en cada plaqueta de la red. Todas estas teorías en el límite en

<sup>29,30</sup>

que el espaciamiento de red tiende a cero, convergen al modelo del continuo. Han sido muy estudiadas para verificar la hipótesis de universalidad o sea el límite continuo es independiente de detalles finos en la red. Además en la práctica puede ser más conveniente trabajar numéricamente (Monte Carlo) con acciones mixtas que con la de Wilson pues con las primeras puede observarse el continuo antes que con la última( o sea para valores de los parámetros más chicos). Las acciones mixtas tienen un diagrama de fases muy rico e interesante. Una prueba muy importante para cualquier método aproximado que se proponga es su capacidad de reproducirlos.

El modelo U(1) extendido o mixto está definido por la acción,

$$S = \beta \sum_P \text{Re}(U_P) + \gamma \sum_P \text{Re}(U_P^2), \quad (37)$$

donde  $U_P$  es la variable de plaqueta descrita en el cap. I y pertenece al grupo U(1) es decir puede escribirse como una fase,  $U_P = \exp(i\theta_P)$ . Consideramos una red hipercúbica d-dimensional. La acción ec.(37) ha sido analizada mediante simulaciones de Monte Carlo,<sup>29,30</sup> grupo de renormalización, simulaciones microcanónicas y argumentos analíticos.<sup>31</sup> Los promedios estadísticos se obtienen mediante la función de partición,

$$Z = \int \prod_{\ell} dU_{\ell} e^S, \quad (38)$$

donde  $dU_{\ell} = d\theta_{\ell}/2\pi$  es la medida normalizada a 1 siendo  $\theta_{\ell}$  el ángulo de la variable de unión  $\ell$ . El estudio de este modelo es importante para verificar las características no confinantes de la QED en el límite continuo<sup>29</sup> en d=4. El hecho de que con la acción de Wilson aparezca una transición no es suficiente evidencia de ese comportamiento porque en un espacio de parámetros extendido podría encontrarse una conexión analítica.

Por completitud veamos las principales características de esta teoría siguiendo la ref.29. El modelo tiene varios límites no triviales. En ambos ejes obtenemos el modelo standard U(1) con una transición de fase de segundo orden en  $(\beta_c, \gamma_c = 1.005 \text{ (d=4)})$ <sup>32</sup>. Si  $\gamma$  va a infinito las variables de unión quedan restringidas a tomar valores  $\pm 1$ . En consecuencia se obtiene en ese límite una teoría Z(2) de medida con una transición de fase de primer orden en  $(\beta_c = .4407 \text{ (d=4)})$ <sup>33</sup>.

La acción ec.(37) tiene muchas simetrías interesantes. Llamando a las variables de unión como  $U_\mu(x)$  donde  $x=(x_0, x_1, x_2, x_3)$  es un sitio de la red y  $\mu=0,1,2,3$  son direcciones ( $d=4$ ), consideremos la transformación,

$$\begin{aligned}
 U_0(x) &\longrightarrow U_0(x) \\
 U_1(x) &\longrightarrow W U_1(x) \quad (x_1 \text{ impar}) \\
 &\quad U_1(x) \quad (x_1 \text{ par}) \\
 U_2(x) &\longrightarrow W U_2(x) \quad (x_1+x_2 \text{ impar}) \\
 &\quad U_2(x) \quad (x_1+x_2 \text{ par}) \\
 U_3(x) &\longrightarrow W U_3(x) \quad (x_1+x_2+x_3 \text{ impar}) \\
 &\quad U_3(x) \quad (x_1+x_2+x_3 \text{ par}) \quad ,
 \end{aligned} \tag{39}$$

donde  $W$  es un factor que aparece un número impar de veces para cada plaqueta. Tomando  $W=-1$  y cambiando  $\beta$  por  $-\beta$  la acción permanece inalterada y por lo tanto el diagrama de fases es simétrico ante una reflexión respecto del eje  $\gamma$ . Análogamente cuando  $W=e^{\frac{i\pi}{2}}$  y  $\beta=0$  podemos intercambiar  $\gamma$  con  $-\gamma$  sin cambiar  $S$ . Esta simetría implica que para  $\gamma=-1.005$  aparece una transición de fase. Esta última fase puede ser fácilmente identificada si buscamos un mínimo no trivial de la acción de plaqueta ( $S_p = \beta \cos(\theta_p) + \gamma \cos(2\theta_p)$ ) en la zona  $\gamma < 0$ . Este mínimo existe y su valor es,

$$\cos \theta_m = -\beta/4\gamma . \tag{40}$$

Puede probarse fácilmente que es estable debajo de  $\gamma + \frac{\beta}{4} = 0$ . En consecuencia la transición en  $\gamma < 0$  se piensa como un cambio en el estado fundamental de la teoría.

29

El diagrama obtenido en simulaciones de Monte Carlo se muestra esquemáticamente en la fig.7. El correspondiente<sup>30</sup> para dimensión 5 es cualitativamente equivalente. Las fases I y II son las habituales confinante y no confinante de QED. La fase III es una continuación para  $\gamma$  finito de la fase confinante del modelo  $Z(2)$  de medida. Finalmente la fase IV tiene características "antiferromagnéticas" debido a su estado fundamental no trivial.

La aproximación de campo medio a orden cero para teorías extendidas requiere la introducción de tantos parámetros como sumandos tenga la acción de cada plaqueta. En el caso que estamos estudiando

es necesario definir diferentes variables sin vínculo para  $U$  y  $U^2$  si se pretende recuperar a orden cero el resultado del campo medio "naive". En realidad esto es consecuencia del hecho bien conocido de que  $\langle U^2 \rangle \neq \langle U \rangle^2$ . Este detalle fue también remarcado en la ref. 34 en el contexto de la teoría  $Z(4)$  extendida y posteriormente en las ref. 23 y 35 para el modelo de Potts y  $SU(2)$  mixto respectivamente. Cabe acotar que varios trabajos previos no consideraron este aspecto obteniendo diagramas de fases poco confiables<sup>36,37</sup>. Los cálculos son los siguientes:

En la ec. (38) introducimos cuatro nuevas variables en cada unión de la red por medio de la identidad,

$$1 = \prod_{\ell} \int_{-\infty}^{+\infty} dV_{1\ell} dV_{2\ell} d\tilde{V}_{1\ell} d\tilde{V}_{2\ell} \delta[\text{Re}U_{\ell} - V_{1\ell}] \delta[\text{Im}U_{\ell} - V_{2\ell}] \delta[\text{Re}U_{\ell}^2 - \tilde{V}_{1\ell}] \delta[\text{Im}U_{\ell}^2 - \tilde{V}_{2\ell}] \quad (41)$$

Usando el desarrollo,

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \frac{dy}{2\pi}, \quad (42)$$

la función de partición puede escribirse como,

$$Z(\beta, \gamma) = \prod_{\ell, a=1,2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dV_{a\ell}}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\tilde{V}_{a\ell}}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\alpha_{a\ell}}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\tilde{\alpha}_{a\ell}}{\sqrt{2\pi}} \exp\{S_{ef}\}, \quad (43)$$

donde

$$S_{ef} = S(V, \tilde{V}) - i \sum_{\ell, a} (V_{a\ell} \alpha_{a\ell} + \tilde{V}_{a\ell} \tilde{\alpha}_{a\ell}) + \sum_{\ell} \omega(\alpha_{a\ell}, \tilde{\alpha}_{a\ell}), \quad (44.a)$$

$$S(V, \tilde{V}) = \beta \sum_P \text{Re} V_p + \gamma \sum_P \text{Re} V_p^2, \quad (44.b)$$

$$\omega(\alpha_{a\ell}, \tilde{\alpha}_{a\ell}) = \log \left\{ \int dU \exp \left\{ i \left[ \text{Re}U \alpha_{1\ell} + \text{Im}U \alpha_{2\ell} + \text{Re}U^2 \tilde{\alpha}_{1\ell} + \text{Im}U^2 \tilde{\alpha}_{2\ell} \right] \right\} \right\}, \quad (44.c)$$

y en  $V_p(\tilde{V}_p)$  cada variable de unión es igual a  $V_{1\ell} + iV_{2\ell}$  ( $\tilde{V}_{1\ell} + i\tilde{V}_{2\ell}$ ). Notemos que el acoplamiento entre los campos  $V_{2\ell}, \alpha_{2\ell}$  y  $\tilde{V}_{2\ell}, \tilde{\alpha}_{2\ell}$  se produce sólo a través de la función  $\omega$ .  $S_{ef}$  es invariante ante la siguiente transformación de medida,

$$\begin{aligned} V_{1\ell} + iV_{2\ell} &= V_{\ell} \longrightarrow V_{\ell} e^{i\varphi}, & \alpha_{1\ell} + i\alpha_{2\ell} &= \alpha_{\ell} \longrightarrow \alpha_{\ell} e^{i\varphi}, \\ \tilde{V}_{1\ell} + i\tilde{V}_{2\ell} &= \tilde{V}_{\ell} \longrightarrow \tilde{V}_{\ell} e^{2i\varphi}, & \tilde{\alpha}_{1\ell} + i\tilde{\alpha}_{2\ell} &= \tilde{\alpha}_{\ell} \longrightarrow \tilde{\alpha}_{\ell} e^{2i\varphi}. \end{aligned} \quad (45)$$

La aproximación de saddle-point a la ec.(43) se obtiene minimizando  $S_{\text{eff}}$  con respecto a todas las variables. Las ecuaciones son altamente no triviales y para resolverlas buscamos una solución invariante ante traslaciones,

$$\begin{aligned} v_{1\ell} = v \quad , \quad \alpha_{1\ell} = -i\alpha \quad , \quad \tilde{v}_{1\ell} = \tilde{v} \quad , \quad \tilde{\alpha}_{1\ell} = -i\tilde{\alpha} \quad , \\ v_{2\ell} = 0 \quad , \quad \alpha_{2\ell} = 0 \quad , \quad \tilde{v}_{2\ell} = 0 \quad , \quad \tilde{\alpha}_{2\ell} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (46)$$

Con la ayuda de esta aproximación las ecuaciones son,

$$v = \frac{1}{Z} \int dU \operatorname{Re} U e^{\hat{S}} \quad , \quad \tilde{v} = \frac{1}{Z} \int dU \operatorname{Re} U^2 e^{\hat{S}} \quad , \quad (47)$$

donde

$$\alpha = 2\bar{\beta}v^3, \quad \bar{\beta} = \beta(d-1), \quad (48.a)$$

$$\tilde{\alpha} = 2\bar{\delta}\tilde{v}^3, \quad \bar{\delta} = \delta(d-1), \quad (48.b)$$

$$Z = \int dU e^{\hat{S}} \quad y \quad \hat{S} = \alpha \operatorname{Re} U + \tilde{\alpha} \operatorname{Re} U^2. \quad (48.c)$$

Estas ecuaciones corresponden a la aproximación de campo medio "naive" cuando  $\langle U \rangle$  y  $\langle U^2 \rangle$  se consideran como parámetros de orden. La ec.(47) tiene tres tipos de soluciones. La trivial ( $v=0, \tilde{v}=0$ ) en la zona de acoplamiento fuerte, una solución ( $v \neq 0, \tilde{v} \neq 0$ ) asociada con la fase no confinante de la QED y una tercera solución ( $v=0, \tilde{v} \neq 0$ ) que corresponde a la fase confinante  $Z(2)$ .

Al igual que en el caso de la teoría  $Z(2)$  de medida, los valores medios de magnitudes no invariantes ante transformaciones de medida dan cero al promediarse sobre todos los máximos.

Repitiendo los pasos ec.(41 a 48) para una acción  $U(1)$  más complicada como,

$$S = \sum_p \sum_m \beta_m \operatorname{Re} U^m, \quad (49)$$

los resultados de campo medio se reobtienen si introducimos diferentes variables sin vínculo para cada entero  $n$ . Una situación similar ocurre para modelos no abelianos con o sin materia. En estos casos

una variable diferente debe considerarse por cada caracter del grupo de medida y para cada potencia local del campo de materia.

La energía libre por unión a orden cero y en la presencia de una solución no trivial de la ec.(47) es,

$$F_0 = -\frac{\bar{\beta}}{2} v^4 - \frac{\bar{\gamma}}{2} \tilde{v}^4 + v\alpha + \tilde{v}\tilde{\alpha} - \log \left[ \int du e^{\hat{s}} \right], \quad (50)$$

mientras que para la raíz trivial (0,0) la correspondiente energía libre es cero.

Una discusión similar a la expuesta en la ref.38 muestra que  $F_0$  es el resultado exacto en el límite  $d=\infty$ . Mostraremos explícitamente más adelante que las correcciones  $1/d$  se anulan en ese límite.

Para obtener el diagrama de fases a orden cero debemos comparar las energías libres de diferentes soluciones y buscar dónde se cruzan lo cual se interpreta como transición de fase. A orden cero sólo necesitamos buscar las soluciones de la ecuación,

$$F_0(\bar{\beta}_c, \bar{\gamma}_c) = 0. \quad (51)$$

Resolviendo numéricamente la ec.(51) obtenemos el diagrama mostrado en las figuras 8 y 9. Aunque cualitativamente correcto las transiciones están apreciablemente corridas hacia la zona de acoplamiento débil respecto de los resultados de las simulaciones de Monte Carlo.

Las ec.(47 y 50) deben ser levemente modificadas para considerar también la fase "antiferromagnética". Esto puede lograrse introduciendo una nueva variable de plaqueta  $\theta$ , es decir en vez de proponer una solución invariante ante traslaciones como en la ec.(46), se plantea el siguiente Ansatz,

$$\begin{aligned} v_{1\ell} = v_{1\ell} + i v_{2\ell} &= v e^{i\theta}, & \alpha_{1\ell} = \alpha_{1\ell} + i \alpha_{2\ell} &= \alpha e^{i\theta}, \\ \tilde{v}_{1\ell} = \tilde{v}_{1\ell} + i \tilde{v}_{2\ell} &= \tilde{v} e^{2i\theta}, & \tilde{\alpha}_{1\ell} = \tilde{\alpha}_{1\ell} + i \tilde{\alpha}_{2\ell} &= \tilde{\alpha} e^{2i\theta}, \end{aligned} \quad (52)$$

para, por ejemplo, las mismas uniones donde en la ec.(39) aplicamos el factor  $W$ . En otras palabras queremos que el factor  $\chi_{\nu}\{i\theta, 2i\theta\}$  aparezca sólo un número impar de veces por cada plaqueta. Las ecuaciones de saddle-point correspondientes son las ec.(47 y 48) con el cambio,

$$\alpha \rightarrow \alpha \cos \theta \quad , \quad \tilde{\alpha} \rightarrow \tilde{\alpha} \cos 2\theta \quad ,$$

y la nueva ecuación

$$\cos \theta = - \frac{\beta v^4}{4\delta \tilde{v}^4} . \quad (53)$$

La energía libre es

$$F_0 = - \frac{\bar{\beta}}{2} v^4 \cos \theta - \frac{\bar{\delta}}{2} \tilde{v}^4 \cos 2\theta + v\alpha + \tilde{v}\tilde{\alpha} - \log_e \left[ \int dU e^{\hat{E}} \right] . \quad (54)$$

Tomando  $\pi/2$  en el eje  $\chi < 0$  obtenemos la misma energía libre que en el caso  $\chi > 0$  ( $\theta = 0$ ). En consecuencia aparece una transición de fase en la región  $\chi < 0$  obteniéndose un diagrama cualitativamente correcto. Demostraremos que la inclusión de correcciones en  $1/d$  mejora apreciablemente estos resultados. Es de destacar que es posible otra aproximación<sup>24,36</sup> que no introduce una variable sin vínculos para  $U^2$ . Esta consiste en la extracción de un factor perteneciente al grupo  $Z(2)$  para cada plaqueta en la función de partición, es decir,

$$Z(\beta, \delta) = \prod_l \left( \int dU_l \frac{1}{2} \sum_{Q_l = \pm 1} \right) \exp \left\{ \beta \sum_p Q_p \text{Re} U_p + \delta \sum_p \text{Re} U_p^2 \right\} . \quad (55)$$

Las ecuaciones de saddle-point tienen ahora las tres fases esperadas para  $\chi > 0$ . Sin embargo evaluamos las correcciones a un lazo en este caso. Estas son finitas cuando  $d = \infty$  y el acuerdo con el diagrama de fases de Monte Carlo es pobre.

Evaluemos las correcciones alrededor de la solución de orden cero. Por simplicidad estudiaremos sólo la región  $\chi > 0$ . Aunque el cálculo es tedioso lo explicitaremos en detalle porque es muy ilustrativo acerca de ciertos aspectos técnicos tal como el tratamiento del modo cero. Comenzamos con las correcciones a la fase II (fig.7). Las correspondientes a las fases I y III son más simples y se discuten al final de esta sección.

El primer paso consiste en trasladar las variables de integración,

$$\begin{aligned} V_{1l} &= V + Z_{1l} \quad , \quad V_{2l} = 0 + Z_{2l} \quad , \quad \alpha_{1l} = -i\alpha + \mu_{1l} \quad , \quad \alpha_{2l} = 0 + \mu_{2l} \quad , \\ \tilde{V}_{1l} &= \tilde{V} + \tilde{Z}_{1l} \quad , \quad \tilde{V}_{2l} = 0 + \tilde{Z}_{2l} \quad , \quad \tilde{\alpha}_{1l} = -i\tilde{\alpha} + \tilde{\mu}_{1l} \quad , \quad \tilde{\alpha}_{2l} = 0 + \tilde{\mu}_{2l} \quad , \end{aligned} \quad (56)$$

y desarrollar la acción efectiva resultante hasta términos cuadráticos en las nuevas variables (no hay términos lineales pues consideramos fluctuaciones alrededor de un mínimo de la acción). La integración en las variables  $\mu, \tilde{\mu}$  es inmediata debido a sus características locales. La expresión resultante para la función de partición es,

$$Z(\beta, \delta) = \frac{e^{-F_0}}{(\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2)^{Nd/2}} \left( \prod_{l, a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz_{al}}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\tilde{z}_{al}}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp \left\{ S_{ef(cuad)} \right\}, \quad (57)$$

donde hemos definido,

$$S_{ef(cuad)} = S_{cuad} - \sum_{l, a} \left( E_a z_{al}^2 + F_a \tilde{z}_{al}^2 - G_a z_{al} \tilde{z}_{al} \right), \quad (58)$$

$$\mathcal{D}_a = \hat{Q}_a^2 - 4 Q_a \tilde{Q}_a, \quad (59)$$

$$E_a = \ddot{Q}_a / \mathcal{D}_a,$$

$$F_a = Q_a / \mathcal{D}_a,$$

$$G_a = \hat{Q}_a / \mathcal{D}_a, \quad (60)$$

y las integrales  $Q_a, \tilde{Q}_a, \hat{Q}_a$  se enumeran en el apéndice A de este capítulo.  $S_{cuad}$  es la acción ec.(37) desarrollada hasta términos cuadráticos. Notemos que el acoplamiento entre los campos  $Z$  y  $\tilde{Z}$  se produce sólo a través del factor  $G_a$ . La información de que  $U$  y  $U^2$  son en realidad variables vinculadas se encuentra de alguna manera en ese acoplamiento.

Transformemos a espacio de momentos. El cálculo ha sido hecho en la ref.38 para la acción de Wilson y en consecuencia sólo daremos aquí el resultado,

$$Z(\beta, \delta) = \frac{e^{-F_0}}{(\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2)^{Nd/2}} \left( \prod_{\mu, \nu, a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz_{\mu\nu}(p)}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\tilde{z}_{\mu\nu}(p)}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp \left\{ - \sum_{\mu, \nu=1}^d \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \cdot \right.$$

$$\left. \left[ z_{1\mu} \Lambda_{\mu\nu} z_{1\nu} + \tilde{z}_{1\mu} \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} \tilde{z}_{1\nu} + z_{2\mu} \Omega_{\mu\nu} z_{2\nu} + \tilde{z}_{2\mu} \tilde{\Omega}_{\mu\nu} \tilde{z}_{2\nu} - \delta_{\mu\nu} (G_1 z_{1\mu} \tilde{z}_{1\nu} + G_2 z_{2\mu} \tilde{z}_{2\nu}) \right] \right\}, \quad (61)$$

donde

$$\mathcal{L}_{\mu\nu}(\rho) = \delta_{\mu\nu} \left[ E_1 + \frac{\alpha}{2(d-1)v} \left( 1 - \sum_{\lambda} \cos p_{\lambda} \right) \right] - \frac{\alpha}{2(d-1)v} (1 + e^{i p_{\mu}})(1 + e^{-i p_{\nu}}), \quad (62.a)$$

$$\mathcal{N}_{\mu\nu}(\rho) = \delta_{\mu\nu} \left[ E_2 + \frac{\alpha}{2(d-1)v} \left( 1 - \sum_{\lambda} \cos p_{\lambda} \right) \right] - \frac{\alpha}{2(d-1)v} (1 - e^{i p_{\mu}})(1 - e^{-i p_{\nu}}), \quad (62.b)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\mu\nu}(\rho) = \mathcal{L}_{\mu\nu}(\rho) (E_1 \rightarrow F_1, \alpha/v \rightarrow \tilde{\alpha}/\tilde{v}), \quad (62.c)$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_{\mu\nu}(\rho) = \mathcal{N}_{\mu\nu}(\rho) (E_2 \rightarrow F_2, \alpha/v \rightarrow \tilde{\alpha}/\tilde{v}), \quad (62.d)$$

y  $\tilde{z}_{\mu}(\rho), \tilde{\tilde{z}}_{\mu}(\rho)$  son las transformadas de Fourier de  $\tilde{z}_{\mu}$  y  $\tilde{\tilde{z}}_{\mu}$ . Debido a que luego desarrollaremos a orden  $1/d$  hemos despreciado en  $\mathcal{L}$  y  $\tilde{\mathcal{L}}$  un sumando  $\cos p_{\mu}$ . Los autovalores resultantes  $p, p_0$  de  $\mathcal{L}$  y  $q, q_0$  de  $\mathcal{N}$  pueden obtenerse fácilmente pues estas matrices se escriben como un escalar más una matriz de rango 1. Estos autovalores son,

$$\begin{aligned} p &= E_1 - \frac{\alpha}{2v} + \frac{\alpha}{2v(d-1)} \sum_{\lambda} (1 - \cos p_{\lambda}), \\ p_0 &= E_1 - \frac{\alpha}{2v} - \frac{\alpha}{v(d-1)} \sum_{\lambda} \cos p_{\lambda}, \\ q &= E_2 - \frac{\alpha}{2v} + \frac{\alpha}{2v(d-1)} \sum_{\lambda} (1 - \cos q_{\lambda}), \\ q_0 &= E_2 - \frac{\alpha}{2v}, \end{aligned} \quad (63)$$

$p$  y  $q$  son  $(d-1)$  degenerados mientras que  $p_0$  y  $q_0$  no son degenerados. Los autovalores correspondientes para  $\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{N}}$  (llamados  $\tilde{p}, \tilde{p}_0, \tilde{q}, \tilde{q}_0$ , respectivamente) se encuentran a partir de la ec. (63) cambiando  $E_{\mu} \rightarrow F_{\mu}$  y  $\alpha/v$  con  $\tilde{\alpha}/\tilde{v}$ . Definamos los vectores  $Y$  y  $W$  de dimensión  $2d$  y las matrices  $A$  y  $B$  ( $2d \times 2d$ ) como sigue,

$$Y = \begin{pmatrix} \tilde{z}_{11} \\ \vdots \\ \tilde{z}_{1d} \\ \tilde{\tilde{z}}_{11} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{z}}_{1d} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} \tilde{z}_{21} \\ \vdots \\ \tilde{z}_{2d} \\ \tilde{\tilde{z}}_{21} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{z}}_{2d} \end{pmatrix}, \quad (64)$$

$$A = \left( \begin{array}{c|c} \Lambda & -\frac{G_1 1}{2} \\ \hline -\frac{G_1 1}{2} & \tilde{\Lambda} \end{array} \right), \quad B = \left( \begin{array}{c|c} \Omega & -\frac{G_2 1}{2} \\ \hline -\frac{G_2 1}{2} & \tilde{\Omega} \end{array} \right), \quad (65)$$

(la dependencia en impulso se sobreentiende y el primer índice en Y,W corresponde a las fluctuaciones reales(1) o imaginarias(2)). En consecuencia el exponente en la ec.(61) puede escribirse como,

$$-\sum_{\substack{d \\ \epsilon = 1}}^{\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (Y_\epsilon A_{p\epsilon} Y_\epsilon + W_\epsilon B_{p\epsilon} W_\epsilon) . \quad (66)$$

Como es habitual en estos casos debido a la invariancia de medida local del modelo aparece un modo cero<sup>39</sup> (recordemos que ahora las variables de integración varían de  $-\infty$  a  $+\infty$  y la presencia de un modo cero ocasiona divergencias. En la formulación en términos de variables pertenecientes a grupos compactos eso no ocurre (ver pág. 9 , cap.I)). Veremos explícitamente que éste ocurre entre las fluctuaciones imaginarias es decir, en la matriz B. Para evitarlo debemos introducir una condición de medida la cual selecciona sólo fluctuaciones ortogonales al modo cero. Esto puede realizarse mediante el truco de Faddeev-Popov,<sup>40</sup> es decir,

$$1 = \Delta_{PF} \prod_x \int_0^{2\pi} d\phi_x \delta(\text{condición de medida}), \quad (67)$$

donde la condición "natural" de medida se deduce una vez que se conoce la autofunción del modo cero.<sup>39</sup>

Los autovalores  $\lambda$  de las matrices A y B pueden obtenerse fácilmente usando la ec.(63). Ellos están dados por,

$$\begin{aligned} \lambda_{0,1}^A &= \frac{1}{2} \left[ p_0 + \tilde{p}_0 \pm \sqrt{(p_0 - \tilde{p}_0)^2 + G_1^2} \right], \\ \lambda_{2, \dots, d-1}^A &= \frac{1}{2} \left[ p + \tilde{p} \pm \sqrt{(p - \tilde{p})^2 + G_1^2} \right], \\ \lambda_0^B &= 0, \\ \lambda_1^B &= q_0 + \tilde{q}_0, \\ \lambda_{2, \dots, d-1}^B &= \frac{1}{2} \left[ q + \tilde{q} \pm \sqrt{(q - \tilde{q})^2 + G_2^2} \right]. \end{aligned} \quad (68)$$

Los autovalores que involucran a  $p, \tilde{p}, q$  y  $\hat{q}$  son  $(d-1)$  degenerados mientras que el resto son no degenerados. Todos son definidos positivos. La existencia de un autovalor cero en la matriz B fue demostrada numéricamente en todo el plano  $(\beta, \gamma)$ . Una prueba analítica de este hecho no es fácil pues las integrales  $Q, \tilde{Q}$  y  $\hat{Q}$  no tienen una expresión cerrada sencilla. La autofunción del modo cero es el vector de  $2d$  dimensiones normalizado:

$$\Psi^{(0)}(p) = \frac{1}{\left[2(1+k^2) \sum_{\lambda=1}^d (1 - \cos p_\lambda)\right]^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 - e^{ip_1} \\ \vdots \\ 1 - e^{ip_d} \\ k(1 - e^{ip_1}) \\ \vdots \\ k(1 - e^{ip_d}) \end{pmatrix}, \quad (69)$$

donde  $k = \frac{G_2/2}{F_2 - \alpha/2v} = \frac{E_2 - \alpha/2v}{G_2/2}$ . (70)

Siguiendo la ref. 38 desarrollamos las fluctuaciones ec.(64) en autofunciones de A y B ( $\Psi_A^{(m)}$  y  $\Psi_B^{(m)}$  respectivamente),

$$Y_p = \sum_{m=1}^{2d} C_m^A(p) \Psi_{A,p}^{(m)}(\varphi), \quad W_p = \sum_{m=1}^{2d} C_m^B(p) \Psi_{B,p}^{(m)}(\varphi), \quad (71)$$

donde el Jacobiano de la transformación  $Y_p, W_p \rightarrow C_m^A, C_m^B$  es uno.

Introduciendo la ec.(67) en la función de partición ec.(61) obtenemos,

$$Z(\beta, \gamma) = \frac{e^{-F_0}}{(D_1 D_2)^{Nd/2}} \prod_{p,m} \left( \frac{dC_m^A(p)}{\sqrt{2\pi}} \frac{dC_m^B(p)}{\sqrt{2\pi}} \Delta_{PF} \prod_p \delta(\text{medida}) \right) \\ \times \left\{ - \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \sum_{m=0}^{2d-1} (C_m^A \lambda_m^A + C_m^B \lambda_m^B) \right\}. \quad (72)$$

Por supuesto la medida aún no ha sido elegida. Necesitamos que la función  $\delta$  sea proporcional a  $\delta(C_0^B(\varphi))$  para eliminar la divergencia causada por el modo cero. Esta es la medida "natural". Se puede probar fácilmente que la condición,

$$f(z, \tilde{z}) = \sum_{\mu=1}^d (z_{2_{x,\mu}} - z_{2_{x+\mu, \mu}}) + k \sum_{\mu=1}^d (\tilde{z}_{2_{x,\mu}} - \tilde{z}_{2_{x+\mu, \mu}}) = 0, \quad (73)$$

para todos los sitios de la red, satisface este requerimiento debido a que en espacio de momentos puede escribirse como,

$$\prod_x \delta [f(z, \tilde{z})] = \prod_p \frac{\delta [C_o^B(p)]}{[2(1+k^2) \sum_{\lambda} (1 - \cos p_{\lambda})]^{1/2}}. \quad (74)$$

Una vez que la condición de medida se conoce, puede evaluarse  $\Delta_{\rho F}$ . En nuestro desarrollo  $1/d$  se obtiene, aproximadamente,

$$\Delta_{\rho F} = \det C, \quad C_{x,\gamma} = \sum_{\mu=1}^d (v + 2k\tilde{v})(2\delta_{x,\gamma} - \delta_{x,\gamma+\mu} - \delta_{x,\gamma-\mu}). \quad (75)$$

En consecuencia las integrales sobre  $C_m^A(\varphi)$  y  $C_m^B(\varphi)$  se calculan fácilmente. Sumando todas las contribuciones uno obtiene para la energía libre por unión en la fase II, ( $d=4$ )

$$\begin{aligned} F_{II} = F_o + \frac{1}{2d} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} & \left[ \log_4 (4\lambda_2^A \lambda_3^A) (d-1) + \log_4 (4\lambda_1^A \lambda_4^A) + \right. \\ + \frac{1}{2d} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} & \left[ \log_4 (4\lambda_2^B \lambda_3^B) (d-1) + \log_4 (2\lambda_1^B) + \frac{1}{2d} \log_4 \left[ \frac{2\pi(1+k^2)}{(v+2\tilde{v}k)^2} \right] - \right. \\ - \frac{1}{2d} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} & \log_4 \left[ \sum_{\mu} 2(1 - \cos p_{\mu}) \right] + \frac{1}{2} \log_4 (D_1 D_2), \end{aligned} \quad (76)$$

donde el primer término viene de las fluctuaciones reales, el segundo de los  $(2d-1)$  modos no cero en las fluctuaciones imaginarias, el tercero y cuarto términos de la integración en el modo cero, incluyendo el Faddeev-Popov y el volumen del grupo, y el último de la integración en  $\alpha$  y  $\tilde{\alpha}$ . Las integrales deben evaluarse mediante un desarrollo en  $1/d$ . El resultado final es,

$$\begin{aligned} F_{II} = F_o + \frac{1}{2d} \left\{ \log_4 \left[ 1 + 2 \left( \frac{\alpha}{\tilde{v}} Q_1 + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{v}} \tilde{Q}_1 \right) \right] + \left( R - \frac{R^2}{4} \right) + \right. \\ \left. + \log_4 \left[ \frac{2(Q_o + \tilde{Q}_o)(1+k^2)(-D_2)}{(v+2\tilde{v}k)^2} \right] + \left( T - \frac{T^2}{4} \right) - \log_4 (4\pi d) \right\}, \end{aligned} \quad (77)$$

donde

$$R = -2 \frac{\alpha}{V} Q_1, \quad T = -2 \left[ \frac{\alpha}{V} Q_1 + \frac{\tilde{\alpha}}{V} Q_2 \right].$$

En el eje  $\beta$  se prueba que  $F$  es igual a la energía libre obtenida previamente en la ref.38.

La ec.(77) será usada para obtener el diagrama de fases del modelo. Las correcciones a las otras fases son fáciles de calcular. En la fase III, por ejemplo, la energía libre por unión incluyendo correcciones en  $\beta^2$  puede escribirse como,

$$F_{III} \simeq -\frac{\beta^2}{8d} + F_{II} \left( 0, \bar{\gamma} + \frac{\beta^2}{4d} \right), \quad (78)$$

donde en el miembro de la derecha  $F_{II}$  representa la aproximación  $1/d$  a la energía libre en el eje  $\gamma$  (donde  $\bar{\gamma}$  se ha reemplazado por  $\bar{\gamma} + \frac{\beta^2}{4d}$ ). Es necesario considerar las correcciones  $\beta^2$  para que la línea de transiciones que separa las fases I y III tenga la curvatura correcta.

Para la fase I la corrección a la solución  $v, \alpha, \tilde{v}, \tilde{\alpha} = 0$  es

$$F_I \simeq -\frac{(\beta^2 + \bar{\gamma}^2)}{8d}. \quad (79)$$

Notemos que los desarrollos en lazos y en  $1/d$  no son coincidentes. En este trabajo hemos considerado la contribución  $1/d$  de la corrección a un lazo pues se ha conjeturado que las contribuciones de igual orden en lazos superiores son de orden  $(1-v^2)((1-\tilde{v}^2))$  en el eje  $\beta(\gamma)$ . Esta conjetura puede extenderse fácilmente al plano  $\beta-\gamma$  completo. Otros autores<sup>15,24</sup> prefieren calcular la corrección a un lazo completa en vez de mantener sólo el orden  $1/d$ . También se ha especulado con que es mejor desarrollar en  $\alpha^{-1}$  (ec.(48)) pues para  $d$  fijo tiende a 0 cuando  $\beta$  tiende a  $\infty$ .

Veamos los resultados obtenidos al incluir correcciones. Siguiendo la ref.38 los corrimientos en los parámetros críticos  $(\Delta\bar{\beta}_c, \Delta\bar{\gamma}_c)$  se evalúan para  $d$  grande mediante las siguientes expresiones,

$$\Delta\bar{\beta}_c \Big|_{I-II} = -\frac{2}{\sqrt{4}} \left[ \Delta F_I(\bar{\beta}_c, \bar{\gamma}_c) - \Delta F_{II}(\bar{\beta}_c, \bar{\gamma}_c) \right], \quad (80.a)$$

$$\Delta\bar{\beta}_c \Big|_{II-III} = -\frac{2}{\sqrt{4}} \left[ \Delta F_{III}(\bar{\beta}_c, \bar{\gamma}_c) - \Delta F_{II}(\bar{\beta}_c, \bar{\gamma}_c) \right], \quad (80.b)$$

$$\Delta\bar{\gamma}_c \Big|_{I-III} = \frac{2}{\sqrt{4}} \left[ \Delta F_I(\bar{\beta}_c, \bar{\gamma}_c) - \Delta F_{III}(\bar{\beta}_c, \bar{\gamma}_c) \right], \quad (80.c)$$

donde  $\Delta F$  son las correcciones  $1/d$  de cada fase.

La ec.(80.a) corresponde a la mejora en  $\bar{\beta}_c$  para la transición entre las fases I y II (fig.7) (También evaluamos las correcciones para  $\bar{\gamma}_c$ . En ambos casos se obtiene el mismo resultado). Las ec. (80.b y c) corresponden a las fronteras entre las fases II-III y I-III respectivamente.

Los resultados se muestran en la fig.10 para  $d=4$  y en la fig 11 para  $d=5$ . El acuerdo con las simulaciones de Monte Carlo<sup>29,30</sup> es excelente en ambos casos. Destaquemos que un análisis numérico más cuidadoso<sup>32</sup> usando una red de  $6^4$  sitios da  $\beta_c(\gamma_c)=1.005$  ( $d=4$ ) en el eje  $\beta(\gamma)$  mejorando el acuerdo con los resultados de campo medio. No obstante todas las transiciones predichas con nuestro método son incorrectamente de primer orden. Por ejemplo el parámetro  $v$  salta de 0 a 0.9 entre las fases I y II.

En resumen, en esta sección hemos demostrado que para aplicar la técnica de campo medio con correcciones a acciones mixtas es necesario introducir diferentes variables sin vínculos por cada caracter presente en la acción. Los resultados son muy satisfactorios al comparárselos con simulaciones de Monte Carlo.

Finalizamos esta sección con un comentario sobre futuras aplicaciones de estas ideas. Está comprobado que el campo medio con correcciones predice muy bien los diagramas de fases de teorías de medida en la red. Sin embargo, debido a su caracter local, el límite continuo donde las fluctuaciones de largo alcance son importantes está más allá de sus posibilidades. Por ej. en la ref.41 se probó que las predicciones para lazos de Wilson son poco precisas aún para los de tamaño pequeño. Quizás la única manera de obtener resultados físicos (tensión de la cuerda, masas de glueballs, etc.) es alcanzar la zona donde se observa el comportamiento predicho por el grupo de renormalización para un  $\beta$  no demasiado grande. Una manera de implementar estas ideas es mediante la aproximación de Bethe-Peierls<sup>42,43</sup> donde un número grande pero finito de variables es tratada exactamente. En la ref.44 sec.IV 2.e puede leerse un comentario similar. Por ahora no se sabe bien cómo adaptar esta mejora al truco de saddle-point. Se está trabajando en esa dirección.

Luego de terminado este trabajo recibimos un preprint<sup>45</sup> donde resultados similares a los nuestros se obtienen mediante la medida covariante.

II.d Estudio del modelo SU(2) mixto

Como parte final de este capítulo aplicamos<sup>46</sup> las ideas enunciadas en las secciones anteriores al modelo SU(2) mixto<sup>45,47,48</sup> (fundamental -adjunto). Al igual que en el caso de la acción U(1) extendida, el interés de este modelo se basa en la verificación de la hipótesis de universalidad. Una descripción detallada de la teoría analizando sus fases y principales características puede verse en el apéndice B. En esta sección trabajaremos en la medida axial en vez de en la medida "natural" usada en la sec.II.c. La causa es que trabajando en la axial la influencia de la elección de la medida se manifiesta ya a orden cero originando resultados aceptables a ese orden<sup>49</sup>. Esto no ocurre en medidas covariantes. Sin embargo al calcular correcciones de orden superior es conveniente usar estas últimas pues las cuentas se simplifican

La teoría SU(2) mixta fundamental-adjunta se define mediante la acción,<sup>47</sup>

$$S = \sum_p \left\{ \frac{\beta_F}{2} \text{tr}(U_{p,F}) + \frac{\beta_A}{3} \text{tr}(U_{p,A}) \right\}, \quad (82)$$

donde  $\text{tr}(U_{p,F})$  ( $\text{tr}(U_{p,A})$ ) es el caracter de la variable de plaqueta  $U_p$  en la representación fundamental (adjunta). La suma es sobre las plaquetas de una red hipercúbica de d-dimensiones y con N sitios.

Al igual que en todos los casos previamente estudiados para aplicar las ideas de campo medio reescribiremos la función de partición en términos de variables sin vínculos. En el caso del grupo SU(2) debemos pensar a las variables de unión en la representación fundamental ( $U_{\mu,F}(x)$ , x indica sitio y  $\mu$  dirección) como elementos de  $\mathbb{R}^4$  (ver ref 36) y la variable de unión en la representación adjunta ( $U_{\mu,A}(x)$ ) en  $GL(3, \mathbb{R})$  debido a que es real. Para detalles de este cálculo ver la sección anterior. El resultado es,

$$\begin{aligned} \bar{Z} = \prod_{x,\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} [dV d\alpha]_{x,\mu} \exp \left\{ S(V_F, V_A) - i \sum_{x,\mu} \left[ \text{tr}(V_{\mu,F} \alpha_{\mu,F}^+) + \right. \right. \\ \left. \left. + \text{tr}(V_{\mu,A} \alpha_{\mu,A}^+) \right] + \sum_{x,\mu} \omega(\alpha_{\mu,F}; \alpha_{\mu,A}) \right\}, \quad (83) \end{aligned}$$

donde  $S(V_F; V_A)$  es la acción ec. (82) cambiando  $U_{\mu,F}(x)$  ( $U_{\mu,A}(x)$ ) por la variable matricial  $V_{\mu,F}(x)$  ( $V_{\mu,A}(x)$ ). Estas últimas se separan en partes hermíticas y antihermíticas y son parametrizadas como sigue (se sobreentienden los índices  $x, \mu$ ),

$$V_F = H_F^0 T_F^0 + i \sum_{c=1}^3 G_F^c T_F^c, \quad (84.a)$$

$$V_A = H_A^0 T_A^0 + \sum_{c=1}^5 H_A^c T_A^c + i \sum_{c=6}^8 G_A^c T_A^c. \quad (84.b)$$

$H$  y  $G$  son variables reales y las matrices  $\{T\}$  forman una base ortonormal respecto del producto escalar usual,

$$\text{Tr}(T_a^d T_a^e) = \delta_{de}, \quad (a = F, A; d = 1, \dots, N_a), \quad (84.c)$$

donde hemos definido  $N_F = 2$  y  $N_A = 3$ .

Una representación explícita de estas matrices se da en el apéndice C. También definimos variables auxiliares parametrizadas en forma similar a  $V_{F,A}$ ,

$$\alpha_F = h_F^0 T_F^0 + i \sum_{c=1}^3 g_F^c T_F^c, \quad (84.d)$$

$$\alpha_A = h_A^0 T_A^0 + \sum_{c=1}^5 h_A^c T_A^c + i \sum_{c=6}^8 g_A^c T_A^c. \quad (84.e)$$

Las variables  $h, g$  son también reales. La función  $\omega$  está definida como,

$$\omega(\alpha_{\mu,F}; \alpha_{\mu,A}) = \log \left\{ \int dU \exp \left\{ i \left[ \text{Tr}(U_F \alpha_{\mu,F}^+) + \text{Tr}(U_A \alpha_{\mu,A}^+) \right] \right\} \right\}, \quad (85)$$

( $dU$  es la medida de Haar en  $SU(2)$ ) y la medida en la ec. (83) es,

$$[dV da] = \frac{dH_F^0}{\sqrt{2\pi}} \frac{dh_F^0}{\sqrt{2\pi}} \prod_{c=1}^3 \frac{dG_F^c}{\sqrt{2\pi}} \frac{dg_F^c}{\sqrt{2\pi}} \prod_{c=0}^5 \frac{dH_A^c}{\sqrt{2\pi}} \frac{dh_A^c}{\sqrt{2\pi}} \prod_{c=6}^8 \frac{dG_A^c}{\sqrt{2\pi}} \frac{dg_A^c}{\sqrt{2\pi}}. \quad (86)$$

Remarcamos de nuevo que hemos definido dos diferentes variables matriciales sin vínculos  $V_F, V_A$  por cada representación. Notemos además que estas variables interactúan sólo a través de la función  $\omega$

De la ecuación (83) obtenemos las ecuaciones de saddle-point. Como de costumbre buscamos soluciones invariantes ante traslaciones,

$$V_a = M_a T_a^0, \quad (87.a)$$

$$\alpha_a = Q_a T_a^0, \quad (87.b)$$

y obtenemos en la medida axial,

$$Q_a = \beta [M_a^2 (d-2) + M_a], \quad (87.c)$$

$$M_a = \frac{1}{N_a} \frac{d\omega_{III}}{dQ_a}, \quad (87.d)$$

donde

$$\omega_{MF} = \log \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \exp [Q_F 2 \cos \theta + Q_A (4 \cos^2 \theta - 1)] \right\}. \quad (87.e)$$

La energía libre por unión ( $F = \log Z/Nd$ ) es,

$$F_0 = \frac{(d-1)}{d} \sum_a \left\{ \beta_A \left[ \frac{(d-2)}{d} M_a^4 + M_a^2 \right] - N_a M_a Q_a \right\} + \omega_{III}(Q_F, Q_A). \quad (88)$$

El sistema de ecuaciones (87) tiene tres tipos de soluciones. En la región I (ver fig. 12) sólo está presente la raíz trivial o sea  $M_{F,A} = 0$ . En la región II aparece otra solución ( $M_F = 0, M_A \neq 0$ ) mientras que en la región III tanto  $M_F$  como  $M_A$  son distintos de cero. Los puntos de transición se obtienen comparando las energías libres de cada solución y buscando el punto donde se cruzan. El resultado para  $d=4$  (mostrado en la fig. 12) es aceptable pero no muy preciso cuando se lo compara con las simulaciones de Monte Carlo.<sup>47</sup> Más aún la transición de fase predicha en el eje fundamental está claramente equivocada. Mostraremos que el tener en cuenta las correcciones gaussianas alrededor de las soluciones de saddle-point mejora apreciablemente los resultados de orden cero. Los diferentes pasos que debemos seguir para eva-

luar estas correcciones ya han sido expuestos en detalle en la sec.II. c. Primero debemos trasladar las variables alrededor de la solución ec.(87 a,b) y desarrollar la acción hasta términos cuadráticos. La integración en  $\alpha_{F,A}$  es inmediata porque las variables pertenecientes a distintas uniones no se acoplan. El desarrollo de la función  $\omega$  da lo siguiente (por simplicidad llamamos a la variable trasladada igual que a las originales),

$$\omega_{\text{cuad}} = -\frac{1}{2} \left\{ C_F^h h_F^o h_F^o + C_F^g q_{F1}^c q_{F1}^c + C_A^h h_A^o h_A^o + C_A^g q_{A1}^c q_{A1}^c + C_A^h h_A^c h_A^c \right\} + D^h h_F^o h_A^o + D^g [q_{F1}^g q_{A1}^g + q_{F1}^2 q_{A1}^7 + q_{F1}^3 q_{A1}^0], \quad (89)$$

donde los coeficientes C y D (que dependen de  $Q_{F,A}$ ) son definidos en el apéndice C. El cálculo de la ec.(89) es largo pero sin mayores complicaciones al menos para las representaciones de SU(2) consideradas en este modelo. Para el tratamiento de cualquier representación del grupo SU(N) sería útil generalizar el método seguido en el apéndice de la ref. 50 para la representación fundamental.

La integración gaussiana en las variables auxiliares es muy fácil pues debemos diagonalizar sólo matrices 2x2. Para el cálculo de las integrales en las variables  $V_{F,A}$  necesitamos desarrollar  $S(V_F; V_A)$  hasta términos cuadráticos en la medida axial. Este trabajo ya ha sido hecho en la ref.50 para la representación fundamental pero se generaliza de inmediato a cualquier otra representación (esta es una de las ventajas de nuestra aproximación). El resultado es,

$$S(V_F; V_A) = -\frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^{d-1} \sum_k \left\{ H_{F,\mu}^o \mathcal{M}_{F,\mu\nu}^H H_{F,\nu}^o + G_{F,\mu}^c \mathcal{M}_{F,\mu\nu}^G G_{F,\nu}^c + H_{A,\mu}^o \mathcal{M}_{A,\mu\nu}^H H_{A,\nu}^o + H_{A,\mu}^c \mathcal{M}_{A,\mu\nu}^H H_{A,\nu}^c + G_{A,\mu}^c \mathcal{M}_{A,\mu\nu}^G G_{A,\nu}^c \right\}, \quad (90)$$

donde las variables  $H_{F,\mu}^o(k), \dots$  son las transformadas de Fourier de las  $H_{F,\mu}^o(x), \dots$  definidas en la ec.(84). Las matrices  $\mathcal{M}$  están definidas por,

$$\mathcal{M}_{a,\mu\nu}^H = \frac{2\beta_a}{N_a} \left\{ \left[ M_a^2 \left( 1 + 2\cos k_\mu - \sum_{\lambda=1}^{d-1} \cos k_\lambda \right) - \cos k_d \right] \epsilon_{\mu\nu} - \frac{M_a^2}{2} \left( 1 + e^{ik_\mu} \right) \left( 1 + \bar{e}^{ik_\nu} \right) \right\}, \quad (91.a)$$

$$\mathcal{M}_{\beta, \mu\nu}^G = \frac{2\beta_2}{N_\beta} \left\{ \left[ M_\beta^2 \left( 1 - \sum_{\lambda=1}^{d-1} \cos k_\lambda \right) - \cos k_d \right] \delta_{\mu\nu} - \frac{M_\beta^2}{2} (1 - e^{ik_\mu})(1 - e^{-ik_\nu}) \right\}. \quad (91.b)$$

Luego de la integración gaussiana en las variables  $N_{F,A}$  y tras algunas simplificaciones la función de partición resulta ser igual a,

$$\begin{aligned} Z &= e^{F_{III} N_d} = e^{F_0 N_d} \det^{-1/2} \left\{ (1 + \lambda_F^H \mathcal{M}_F^H + R^H)(1 + \lambda_A^H \mathcal{M}_A^H) - R^H \right\} \\ &\cdot \det^{-3/2} \left\{ (1 + \lambda_F^G \mathcal{M}_F^G + R^G)(1 + \lambda_A^G \mathcal{M}_A^G) - R^G \right\} \cdot \det^{-5/2} \left\{ 1 + \lambda_A^H \mathcal{M}_A^H \right\}. \end{aligned} \quad (92)$$

donde se ha definido,

$$\begin{aligned} \lambda_F^H &= C_F^h, \quad \lambda_F^G = C_F^g, \quad \lambda_A^H = E^h / C_A^h, \quad \lambda_A^G = E^g / C_A^g, \quad \lambda_A^H = \tilde{C}_A^H, \\ R^H &= D^{h^2} / E^h, \quad R^G = D^{g^2} / E^g \quad \text{y} \\ E^b &= C_F^b C_A^b - D^{b^2}, \quad (b=h, g). \end{aligned} \quad (93)$$

El logaritmo de la ec.(92) es la energía libre  $F_{III}$  de la región III en la aproximación de campo medio con correcciones gaussianas. Es el principal resultado de esta sección. En el cálculo de los determinantes que aparecen en la ec.(92) usamos la fórmula,

$$\frac{1}{N} \log \det^{-\alpha} (1+A) = -\alpha \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \sum_{\lambda=1}^{d-1} \log [1 + \omega_\lambda(k)], \quad (94)$$

donde  $\omega_\lambda(k)$  son los autovalores de la matriz  $A(N(d-1) \times N(d-1))$  y  $\alpha$  es una constante. En nuestro caso necesitamos,

$$\omega_\beta^H = \begin{cases} \frac{2\beta_2}{N_\beta} \left[ M_\beta^2 \left( 1 - \sum_{\lambda} \cos k_\lambda \right) - \cos k_d \right], & (d-2) \text{ degenerado} \\ \frac{2\beta_2}{N_\beta} \left[ -M_\beta^2 (d-2) - \cos k_d - 2 M_\beta^2 \sum_{\lambda} \cos k_\lambda \right], & \end{cases}$$

$$\omega_a = \begin{cases} \frac{2\beta_a}{N} \left[ M_a^2 \left( 1 - \sum_{\lambda} \cos k_{\lambda} \right) - \cos k_d \right], & (d-2) \text{ degenerado} \\ \frac{2\beta_a}{N} \left[ -M_a^2 (d-2) - \cos k_d \right], & \end{cases} \quad (95)$$

donde  $\omega_a^H$  ( $a=F, A$ ) son los autovalores de la matriz  $\mathcal{C}_a^H$ , cuando se elimina el término proporcional a  $\cos k_{\mu}$  (probamos numéricamente que la contribución de este sumando es despreciable) y  $\omega_a^G$  son los correspondientes autovalores de la matriz  $\mathcal{C}_a^G$ . Las sumas van de  $\lambda=1$  a  $(d-1)$ .

Las integrales que aparecen en la ec.(92) se evalúan numéricamente usando la ec.(94) donde podemos desarrollar el logaritmo e integrar cada sumando hasta observar convergencia. Las integrales que aparecen son en una variable. El término  $\cos k_{\mu}$  en la matriz  $\mathcal{C}_a^H$  es tenido en cuenta mediante el desarrollo,

$$\log \det (1 + M + \tilde{M}) = \log \det (1 + M) + \text{tr} \tilde{M} - \frac{1}{2} \text{tr} (\tilde{M}^2 + M \tilde{M}) + \dots \quad (96)$$

donde  $M$  representa una matriz diagonalizable mientras que  $\tilde{M}$  es un término no diagonalizable. De nuevo en la ec.(96) mantenemos tantos sumandos como sea necesario hasta observar convergencia.

Al evaluar explícitamente la ec.(92) verificamos que la principal contribución proviene de las fluctuaciones antihermíticas  $\{\det^{3/2}(\dots)\}$  las cuales representan alrededor del 99% de las correcciones gaussianas en todo el plano. Este hecho fue remarcado previamente en la ref. 15 para ambos ejes.

Las energías libres por unión en las regiones I y II pueden obtenerse fácilmente. En la región I se recupera el desarrollo de acoplamiento fuerte. Los primeros términos han sido evaluados en la ref. 24 y en consecuencia no explicitaremos  $F_I$ . En la región II usamos la aproximación

$$F_{II}(\beta_F, \beta_A) \cong F_{III} \left( 0, \beta_A + \frac{3}{8} \beta_F^2 \right) + \frac{\beta_F^2}{16} (d-1), \quad (97)$$

la cual está demostrada también en la ref. 24.

Para obtener el diagrama de fases de la acción mixta  $SU(2)$  debemos buscar aquellos puntos del plano  $\beta_F - \beta_A$  donde las energías libres se cruzan. El resultado se muestra en la fig.12. Al tener en cuenta las fluctuaciones gaussianas se ha mejorado el resultado de orden

cero. Notemos, por ejemplo, que se predice correctamente la existencia de un punto final cerca de la zona del "crossover" en el eje fundamental. El comportamiento de la energía libre en ese punto indica una transición de segundo orden en forma similar a lo que ocurrió para la teoría  $Z(2)$  Higgs en la sección II.b(ref. 19). La principal mejora se encuentra en la energía libre la cual es mayor que  $F_0$  en aproximadamente 0.45 cerca de los puntos de transición. En ambos ejes nuestros resultados son idénticos a aquellos obtenidos en las ref. 15,50. Tal como se remarcó al comienzo de esta sección, en la ref. 24 se calculó un diagrama de fases cualitativamente similar al nuestro. En la transición I-II son idénticos y en la parte II-III nuestros valores son levemente mejores ( y casi coincidentes con las simulaciones de Monte Carlo).

También trabajamos en la medida covariante pero las predicciones obtenidas son malas cuando se las compara con aquellas de la medida axial. Por ejemplo el diagrama de fases está apreciablemente corrido hacia valores grandes de  $(\beta_{V,A})$  (en la ref.49 se discute la importancia de la elección de la medida).

Un aspecto que quizás mejore aún más el diagrama de fases predicho es la inclusión de fluxones como en la ref.24.

Es de destacar que en la ref.8 también se ha estudiado el modelo  $SU(2)$  mixto mediante técnicas de campo medio a orden cero introduciendo dos parámetros de orden al igual que nosotros. Sin embargo el autor de la ref. 8 toma como criterio para hallar los puntos de transición, la aparición de la raíz no trivial en las ecuaciones de saddle-point lo que no es termodinámicamente correcto (este detalle fue remarcado también en la ref.24).

Otros aspectos que merecen un estudio más profundo son los siguientes:

- i) En la ref.51 se estudió mediante campo medio la estructura analítica en el espacio  $(\beta_F$  complejo,  $\beta_A$  real sin introducir variables distintas para cada representación. Sería interesante analizar qué ocurre con el tratamiento presentado en esta sección.
- ii) En la ref. 37 se estudió la acción mixta que mezcla la representación fundamental de  $SU(2)$  con la de  $j=3/2$ . Habría que repetir nuestros cálculos para ese caso.
- iii) Usando la técnica de la ref. 12 estudiar el límite continuo en el punto crítico del diagrama de fases.
- iv) Extender nuestro cálculo al modelo  $SU(3)$  mixto (estudiado por Mon-

te Carlo en la ref.52). El punto no trivial es el cálculo del equivalente a la ec.(89). Quizás aproximaciones a la integral de una unión del tipo  $1/N$  (ref.53) o cuadráticas (ref.8 y 42) puedan ser útiles.

Finalizamos esta sección indicando que la acción  $SU(2)$  mixta fue también estudiada mediante la técnica de campo medio en variables de plaqueta con excelentes resultados (ver cap. IV).

## II.e Conclusiones

En las secciones precedentes hemos probado mediante ejemplos no triviales que la técnica de campo medio con correcciones brinda excelentes resultados en la predicción de diagramas de fases en teorías de medida en la red. Mediante esta técnica analítica puede ahorrarse mucho tiempo de computación. Además está claro que campo medio es una forma muy eficiente y simple de hacer perturbaciones en la zona de  $\beta$  grande. Se ha argumentado que esta técnica es un reordenamiento del desarrollo de acoplamiento débil (ref.50 y 54). Otra ventaja del método es que si por alguna causa es necesario estudiar modelos en dimensión alta, las simulaciones de Monte Carlo serían poco útiles pues no sería posible analizar una red suficientemente grande. Sin embargo campo medio daría excelentes resultados en ese caso.

Actualmente se están realizando muchos intentos de extender el formalismo a teorías y situaciones más complicadas. En las ref.55 y 56 se han efectuado cálculos a temperatura finita y en redes asimétricas. Respecto de la inclusión de materia escalar<sup>57</sup> y fermiónica<sup>38,58</sup> se ha progresado mucho (la ref.58 es sólo una lista incompleta de referencias sobre este tema). También se ha logrado predecir con técnicas de campo medio las dos transiciones de fase de los modelos  $Z(N)$  de medida.<sup>34,59</sup>

Un detalle que debe ser tenido en cuenta en estos cálculos es que en general el desarrollo de acoplamiento fuerte de la energía libre presenta un radio de convergencia finito debido en general a singularidades en el plano complejo  $\beta$ . Para extender ese radio hasta la zona de transiciones deben hacerse adecuados cambios de variable (ref. 60 y 61). También se ha progresado en el cálculo de correcciones a órdenes superiores en lazos (ref.49,61 y 62). Finalmente la técnica aquí expuesta también es útil en el contexto del método variacional en teorías Hamiltonianas donde el cálculo de valores medios con ciertos

estados de prueba se reduce a un promedio estadístico Lagrangiano en una dimensión menos (ver cap.III). Muchos otros aspectos de interés han sido estudiados en la muy extensa literatura sobre el tema. La ref 63 intenta completar la lista de referencias.

1979.

En resumen, en este capítulo hemos estudiado la técnica de campo medio con correcciones en el contexto de teorías de medida en la red. Los resultados obtenidos son excelentes comparados con las simulaciones de Monte Carlo.

APENDICE A:

En este apéndice definimos las integrales  $Q_n, \tilde{Q}_n, \hat{Q}_n$  que aparecen en la sec. II.c.

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \frac{1}{2} [\langle \cos \phi \rangle^2 - \langle \cos^2 \phi \rangle], & \hat{Q}_1 &= [\langle \cos \phi \rangle \langle \cos 2\phi \rangle - \langle \cos \phi \cos 2\phi \rangle], \\
 Q_2 &= -\frac{1}{2} \langle \sin^2 \phi \rangle, & \hat{Q}_2 &= -\langle \sin \phi \sin 2\phi \rangle, \\
 \tilde{Q}_1 &= \frac{1}{2} [\langle \cos 2\phi \rangle^2 - \langle \cos^2 2\phi \rangle], \\
 \tilde{Q}_2 &= -\frac{1}{2} \langle \sin^2 2\phi \rangle,
 \end{aligned} \tag{a.1}$$

donde  $\langle f(\phi) \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^S f(\phi)}{\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^S}$  y  $S = \alpha \cos \phi + \beta \cos 2\phi$

Todas estas integrales ec. (a.1) admiten una expresión cerrada en términos de las funciones de Bessel modificadas de orden  $\nu, I_\nu(x)$ . Usando el desarrollo de Fourier,

$$e^{a \cos x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(a) e^{ikx},$$

se puede probar fácilmente que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^S = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{2k}(\alpha) I_k(\beta).$$

Análogamente se demuestra que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \cos \phi e^S = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [I_{2k+1}(\alpha) I_k(\beta) + I_{2k-1}(\alpha) I_k(\beta)],$$

y

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \sin \phi e^S = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [I_{2k+1}(\alpha) I_k(\beta) - I_{2k-1}(\alpha) I_k(\beta)].$$

APENDICE B:

La teoría SU(2) mixta definida en la ec.(82) tiene muchos límites no triviales. Para  $\beta_A=0$  se recupera el modelo SU(2) con acción de Wilson que no tiene transición de fase pero sí un rápido cambio del régimen de acoplamiento fuerte al débil (crossover) en  $\beta_1 \approx 2.2$  (punto C, fig.13). En el eje  $\beta_F=0$  tenemos una teoría SO(3) la cual tiene una transición no desconfiante de primer orden en  $\beta_A \approx 2.48$  (A). En el límite  $\beta_A \rightarrow \infty$  todas las variables de plaqueta sólo pueden tomar los valores  $\pm 1$  y la acción es igual a una teoría Z(2) de medida también con una transición de primer orden  $\beta_1(B)$  en  $\beta_1=0.44$ .

Las simulaciones de Monte Carlo para el plano  $(\beta_A, \beta_F)$  completo<sup>44</sup> predicen para esta teoría un diagrama de fases como el que se muestra esquemáticamente en la fig.13. A partir del punto triple (T) comienza una línea de primer orden la cual termina en un punto final (E) indicando que existe una conexión analítica entre las fases I y II. La continuación de esta línea apunta hacia el "crossover" (C) en el eje fundamental de SU(2) que puede pensarse como causado por la presencia cercana del punto (E). Se puede demostrar fácilmente<sup>66</sup> que la zona  $(\beta_A \geq 3\beta_F/8)$  contiene dos mínimos locales estables para la acción de cada plaqueta mientras que en  $\beta_A < 3\beta_F/8$  existe sólo el trivial. El punto E se encuentra muy cerca de la frontera entre ambas lo cual parece ser una característica general en acciones mixtas.

La dinámica tipo Z(2) nos permite explicar cualitativamente el diagrama de fases mostrado en la fig.13. Se dice que un monopolio de Z(2) está en un cubo c de la red si el signo del producto de las seis variables  $t_{r, \mu}(U_r)$  sobre dicho cubo es negativo. Este objeto tiene una cuerda de variables de plaqueta con signo negativo. Una cuerda cerrada es llamada vórtice. Argumentos teóricos y simulaciones de Monte Carlo<sup>45, 46</sup> indican la siguiente descripción de la fig.13. En la fase I hay una gran densidad de monopolos y vórtices mientras que la fase II tiene baja densidad de ambos. En la fase III existen muchos vórtices pero pocos monopolos. En el punto A (fig.13) tiene lugar una condensación de monopolos dejando intactos los vórtices pues estos son invisibles en una teoría SO(3) (la acción no distingue el signo de  $t_{r, \mu}(U_r)$ ). C se piensa como un punto en que se condensan monopolos y vórtices pequeños (en la zona de acoplamiento débil se espera que los vórtices de gran tamaño sobrevivan pudiendo ser responsables del confinamiento). El punto B es sólo una condensación de vórtices.

APENDICE C:

a) Una representación explícita de las matrices T definidas en la ec.(84) es,

$$T_{\alpha}^{\circ} = \frac{I_{\alpha}}{\sqrt{N_{\alpha}}} , \quad (I_{\alpha} = \text{matriz unidad de dimensión } N_{\alpha} \times N_{\alpha}), \quad (c.1)$$

$$T_F^c = \frac{\sigma^c}{\sqrt{2}} \quad (c=1,2 \text{ y } 3 \text{ y } \{\sigma\} \text{ son las matrices de Pauli}). \quad (c.2)$$

Llamando  $\lambda_i$  a las matrices de Gell-Mann habituales, las matrices  $T_A$  son,

$$\begin{aligned} T_A^1 &= \frac{\lambda_3}{\sqrt{2}} , & T_A^2 &= \frac{\lambda_8}{\sqrt{2}} , & T_A^3 &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} , & T_A^4 &= \frac{\lambda_4}{\sqrt{2}} , \\ T_A^5 &= \frac{\lambda_6}{\sqrt{2}} , & T_A^6 &= -\frac{\lambda_7}{\sqrt{2}} , & T_A^7 &= \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} , & T_A^8 &= -\frac{\lambda_5}{\sqrt{2}} . \end{aligned} \quad (c.3)$$

b) Los coeficientes C y D de la ec.(89) son definidos como,

$$\begin{aligned} C_F^h &= 2 \left[ \langle \cos^2 \theta \rangle - \langle \cos \theta \rangle^2 \right] , \\ C_F^g &= \frac{2}{3} \left[ 1 - \langle \cos^2 \theta \rangle \right] , & D^h &= \frac{8}{7C} \left[ \langle \cos \theta \rangle \langle \cos^3 \theta \rangle - \langle \cos^3 \theta \rangle \right] , \\ C_A^h &= \frac{16}{3} \left[ \langle \cos^4 \theta \rangle - \langle \cos^2 \theta \rangle^2 \right] , & D^g &= \frac{4}{3} \left[ \langle \cos \theta \rangle - \langle \cos^3 \theta \rangle \right] . \\ C_A^g &= \frac{8}{3} \left[ \langle \cos^2 \theta \rangle - \langle \cos^4 \theta \rangle \right] , \\ \tilde{C}_A^h &= \frac{8}{15} \left[ \langle \cos^4 \theta \rangle - 2 \langle \cos^2 \theta \rangle + 1 \right] , \end{aligned} \quad (c.4)$$

donde

$$\langle f(\theta) \rangle = \int_0^{\pi} d\theta \sin^2 \theta f(\theta) e^S / \int_0^{\pi} d\theta \sin^2 \theta e^S , \quad (c.5)$$

y

$$S(\theta) = Q_F 2 \cos \theta + Q_A (4 \cos^2 \theta - 1) . \quad (c.6)$$

REFERENCIAS

1. K. Huang, "Statistical Mechanics" (John Wiley & Sons, 1963), pág. 336.
2. E. Brézin, J.C. Le Guillou y Zinn-Justin, "Phase transitions and Critical Phenomena", Vol. 6, eds. C. Domb y M. Green (Academic Press New York, 1976).
3. R. Peierls, Phys. Rev. 54, 918 (1958).
4. K. Wilson, Phys. Rev. D10, 2445 (1974);  
R. Balian, J.M. Drouffe y C. Itzykson, Phys. Rev. D10, 3376 (1974) y  
Phys. Rev. D11, 2104 (1975).
5. J. Greensite y B. Lautrup, Phys. Lett. 104B, 41 (1981).
6. P. Cvitanovic, J. Greensite y B. Lautrup, Phys. Lett. 105B, 197 (1981)
7. J. Greensite, T. Hansson, N. Hari Dass y P. Lauwers, Phys. Lett. 105B  
201 (1981).
8. D. Pritchard, Phys. Lett. 106B, 193 (1981).
9. S. Elitzur, Phys. Rev. D12, 3978 (1975).
10. J.M. Drouffe, Nucl. Phys. B170, 211 (1980).
11. J.M. Drouffe, Phys. Lett. 105B, 46 (1981).
12. E. Brézin y J. M. Drouffe, Nucl. Phys. B200, 93 (1982).
13. A. Migdal, "Qualitative methods in Quantum Theory" (W. Benjamin, 1977  
pág. 13 y 170).
14. R. Brout, Phys. Rev. 118, 1009 (1960); Phys. Rev. 122, 1477 (1961);  
F. Englert, Phys. Rev. 129, 567 (1963);  
M. Fisher y D. Gaunt, Phys. Rev. 133, A224 (1964);  
R. Brout, "Phase transitions", (Benjamin, New York, 1965);  
L. Kadanoff et al., Rev. Mod. Phys. 39, 395 (1967);  
R. Abe, Prog. Theor. Phys. 47, 62 (1972).
15. H. Flyvbjerg, B. Lautrup y J. B. Zuber, Phys. Lett. 110B, 279 (1982).
16. B. Bunk, B. Lautrup, I. O. Stamatescu, W. Weinzierl y U. Wolff,  
Z. Phys. C18, 239 (1983).
17. J. M. Drouffe y J. B. Zuber, Phys. Rep. 102, 1 (1983).
18. D. Amit, "Field Theory, the Renormalization Group, and Critical  
Phenomena" (Mc Graw-Hill, 1978), pág. 137;  
C. Itzykson y J. B. Zuber, "Quantum Field Theory" (Mc Graw-Hill, 1980  
pág. 448).
19. E. Dagotto, Phys. Lett. 136B, 60 (1984).
20. E. Fradkin y S. Shenker, Phys. Rev. D19, 3682 (1979).
21. M. Creutz, Phys. Rev. D21, 1006 (1980).

22. G. Jongeward, J. Stack y C. Jayaprakash, Phys. Rev. D21, 3360 (1980).
23. C. Camarata, L. Epele, H. Fanchiotti y C. García Canal, La Plata preprint.
24. J. Albery, H. Flyvbjerg y B. Lautrup, Nucl. Phys. B220, 61 (1983).
25. R. Brower, D. Kessler y H. Levine, Nucl. Phys. B205 (FS5), 77 (1982).
26. T. Muehisa y Y. Muehisa, Nucl. Phys. B215, 508 (1983).
27. Y. Sugiyama y K. Kanaya, DPNU-84-08.
28. E. Dagotto, "Mean field with corrections approach to the mixed U(1) lattice gauge theory", Bariloche preprint, aceptado en Phys. Rev. D.
29. G. Bhanot, Nucl. Phys. B205 (FS5), 168 (1982).
30. G. Bhanot, Phys. Lett. 117B, 431 (1982).
31. K. Bitar, S. Gottlieb y C. Zachos, Phys. Lett. 121B, 163 (1983);  
U. Heller y N. Seiberg, Phys. Rev. D27, 2980 (1983);  
D. Horn, M. Karliner, E. Katznelson y S. Yankielowicz, Phys. Lett. 113B, 258 (1982);  
D. Horn y E. Katznelson, Phys. Lett. 121B, 349 (1983).
32. B. Lautrup y M. Nauenberg, Phys. Lett. 95B, 63 (1980).
33. M. Creutz, Phys. Rev. Lett. 42, 1390 (1979).
34. V. Alessandrini y Ph. Boucaud, Nucl. Phys. B227, 303 (1983).
35. Chung-I Tan y Zheng Xi-Te, Phys. Rev. D28, 3141 (1983).
36. J. M. Drouffe, Nucl. Phys. B205, 27 (1982).
37. K. Ghoroku, Prog. Theor. Phys. 70, 1091 (1983).
38. V. Alessandrini, V. Hakim y A. Krzywicki, Nucl. Phys. B215 (FS7), 109 (1983).
39. A. Polyakov, Nucl. Phys. B120, 429 (1977).
40. L. Faddeev y V. Popov, Phys. Lett. 25B, 29 (1967).
41. N. Kawamoto y K. Shigemoto, NBI-HE-83-02.
42. N. Hari Dass y P. Lauwers, Nucl. Phys. B210 (FS6), 388 (1982).
43. E. Dagotto y A. Moreo, Phys. Rev. D29, 300 (1984).
44. J. M. Drouffe y J. B. Zuber, Phys. Rep. 102, 1 (1983).
45. H. Ceccatto, IFIR preprint (no publicado).
46. H. Ceccatto, E. Dagotto y A. Moreo, "Gaussian corrections around the mean field approximation for the mixed SU(2) lattice gauge theory", Bariloche preprint.
47. G. Bhanot y M. Creutz, Phys. Rev. D24, 3212 (1981).
48. K. Bitar, S. Gottlieb y C. Zachos, Phys. Rev. D26, 2853 (1982);  
L. Caneschi, I. Halliday y A. Schwimmer, Nucl. Phys. B200 (FS4), 409 (1982); y lista de referencias en esos trabajos.
49. H. Flyvbjerg, P. Mansfield y B. Söderberg, Nordita-83/53.

50. V. Müller y W. Rühl, Nucl. Phys.B210(FS6), 289(1982).
51. H. Flyvbjerg y E. Marinari, Phys. Lett.132B, 385 (1983).
52. G. Bhanot, Phys. Lett. 108B, 337 (1982).
53. Y. Brihaye y P. Rossi, CERN TH-3590;  
Y. Brihaye, CERN TH-3835.
54. H. Flyvbjerg, Acta Physica Polonica B14, 179 (1983).
55. R. Trincherro, BI-TP 83/12 y BI-TP 83/21.
56. V. Alessandrini y Ph. Boucaud, LPTHE Orsay 83/38.
57. B. Pendleton, Edinburgh preprint 82/211;  
Ph. Boucaud, Nucl. Phys. B230, 172 (1984);  
A. Horowitz, Maryland preprint.
58. M. Bonini y G. Marchesini, Phys. Lett.110B, 275 (1982);  
H. Kluberg-Stern, A. Morel y B. Petersson, Nucl. Phys.B215, 527(1983)  
O. Martin, Phys. Lett. 130B, 411 (1983).
59. V. Alessandrini, Phys. Lett.117B, 423 (1982);  
V. Alessandrini y L. Jacobs, Phys. Lett. 132B, 389 (1983);  
V. Alessandrini, Nucl. Phys. B215, 337 (1983);  
K. Odaka y M. Fukugita, Nucl. Phys.B220, 471 (1983).
60. M. Falcioni, E. Marinari, M. Paciello, G. Parisi y B. Taglienti,  
Phys. Lett.105B, 51 (1981);  
V. Müller, T. Raddatz y W. Rühl, Phys. Lett. 122B, 148(1983).
61. H. Flyvbjerg, Nucl. Phys.B235(FS11), 331 (1984).
62. B. Lautrup y W. Rühl, Kaiserslautern preprint, febrero 1983.
63. J. M. Drouffe y C. Itzykson, Phys. Rep. 38, 133(1978) (pág.160);  
R. Kotecky, Comm.Math.Phys, 82, 391 (1981);  
D. Brout, R. Brout y M. Poulain, Nucl. Phys.B205(FS5), 233 (1982);  
V. Müller y W. Rühl, J. Math. Phys.23, 2461(1982);  
V. Müller y W. Rühl, Kaiserslautern preprint, Febrero 1982;  
Chen T.-L., C.-I Tan y Zheng X.-T., Phys. Lett.109B, 383(1982);  
N. Kawamoto y K. Shigemoto, Phys. Lett. 114B, 42(1982);  
Zheng X.-T., C.-I Tan y Chen T.-L., Phys. Rev.D26, 2843(1982);  
A. Peña y M. Socolovsky, DESY 83-003 (enero 1983);  
A. Cant y P. Pearce, Comm.Math.Phys.90, 373 (1983);  
H. Hasegawa y S. Yang, Phys. Lett.125B, 72(1983);  
H. Hasegawa y S. Yang, TMUP-HEL 83-01 (Marzo 1983);  
U. Wolff, MPI-Pae/Pth 26/83 (abril 1983);  
A. Guha y S. Lee, ITP-SB-83-34 (1983);  
C. Itzykson, Saclay preprint, DPh-T/81-83;  
H. Ceccatto y H. Giacomini, IFIR preprint (no publicado);

- S. Ryang y T. Saito, Prog. Theor. Phys. 69,1320 (1983);  
S. Ryang, T. Saito y K. Shigemoto, Prog. Theor.Phys.71, 420 (1984);  
X.-T. Zheng, T.-L. Chen y D.-C. Xian, BIHEP-TH-84-4;  
64. M. Creutz, Phys. Rev. D21, 2308 (1980).  
65. J. Greensite y B. Lautrup, Phys. Rev. Lett.47,9 (1981).  
66. C. Bachas y R. Dashen, Nucl. Phys. B210(FS6),583 (1982).

EXPLICACION DE LAS FIGURAS :

1. Análisis de las raíces de la ecuación 2 mediante el cruce de las curvas  $y=m$  y  $y=tgh(6\beta m^3)$  en cuatro dimensiones. Si  $\beta \sim \beta^*$  sólo existe la solución  $m=0$  pero a partir de  $\beta > \beta^*$  aparecen tres raíces (dos de ellas estables).
- 2.a Resultados de campo medio en las medidas axial (III) y unitaria (II) y sin fijar la medida (I) para  $d=4$  en la aproximación de orden cero comparados con resultados de Monte Carlo de las ref.21 y 22. Las líneas continuas indican transición de primer orden y la curva rayada de segundo orden.
- 2.b Idem para  $d=3$ .
3. Configuración no trivial que contribuye a la energía libre del modelo  $Z(2)$  Higgs en la medida axial.
4. Resultados de campo medio con correcciones en la medida axial para  $d=4$  comparados con valores de Monte Carlo de las ref. 21 y 22. Las líneas continuas (rayadas) corresponden a transiciones de primer (segundo) orden.
5. La energía libre  $F_{SC}$  ec.(35) y  $F_{s,x(1)}$  ec.(29) en  $\beta=0.26$  ( $d=4$ ) como ej. Cuando la distancia entre el punto A (donde se produce la transición de fase) y B (que no se interpreta como una transición) va a cero tenemos un punto crítico. Una situación similar se presenta en el análisis de la acción mixta.
6. La transición de segundo orden Higgs- libre en  $\beta=0.5$  como ej.. Esta aparece como una discontinuidad en la segunda derivada de  $F_{s,x(1)}$ .
7. Representación esquemática del diagrama de fases de la teoría  $U(1)$  extendida. En el texto se explican las características de las fases (I-IV).
8. Diagrama de fases predicho mediante cálculos de campo medio (línea continua) a orden cero en 4 dimensiones comparado con resultados de Monte Carlo tomados de la ref.29 (un círculo lleno indica transición de fase de primer orden y uno abierto de segundo orden).
9. Idem fig.8 pero para  $d=5$ . Los resultados de Monte Carlo son de la ref.30.
10. Diagrama de fases predicho por campo medio con correcciones (línea continua) incluyendo términos de orden  $1/d$  en  $d=4$ . Los resultados de Monte Carlo son de la ref.29.
11. Idem fig.10 pero en  $d=5$ . Los puntos de Monte Carlo son tomados de la ref.30.

12. Diagrama de fases de la teoría  $SU(2)$  mixta fundamental-adjunta en 4 dimensiones. Los puntos son resultados de Monte Carlo tomados de la ref.47. La línea rayada es la predicción de campo medio a orden cero mientras que la línea continua es el resultado incluyendo correcciones gaussianas.
13. Representación esquemática del diagrama de fases de la teoría  $SU(2)$  fundamental -adjunta. Todas las líneas son transiciones de primer orden. En el texto se explica el significado de los puntos A,B,C,E y T.

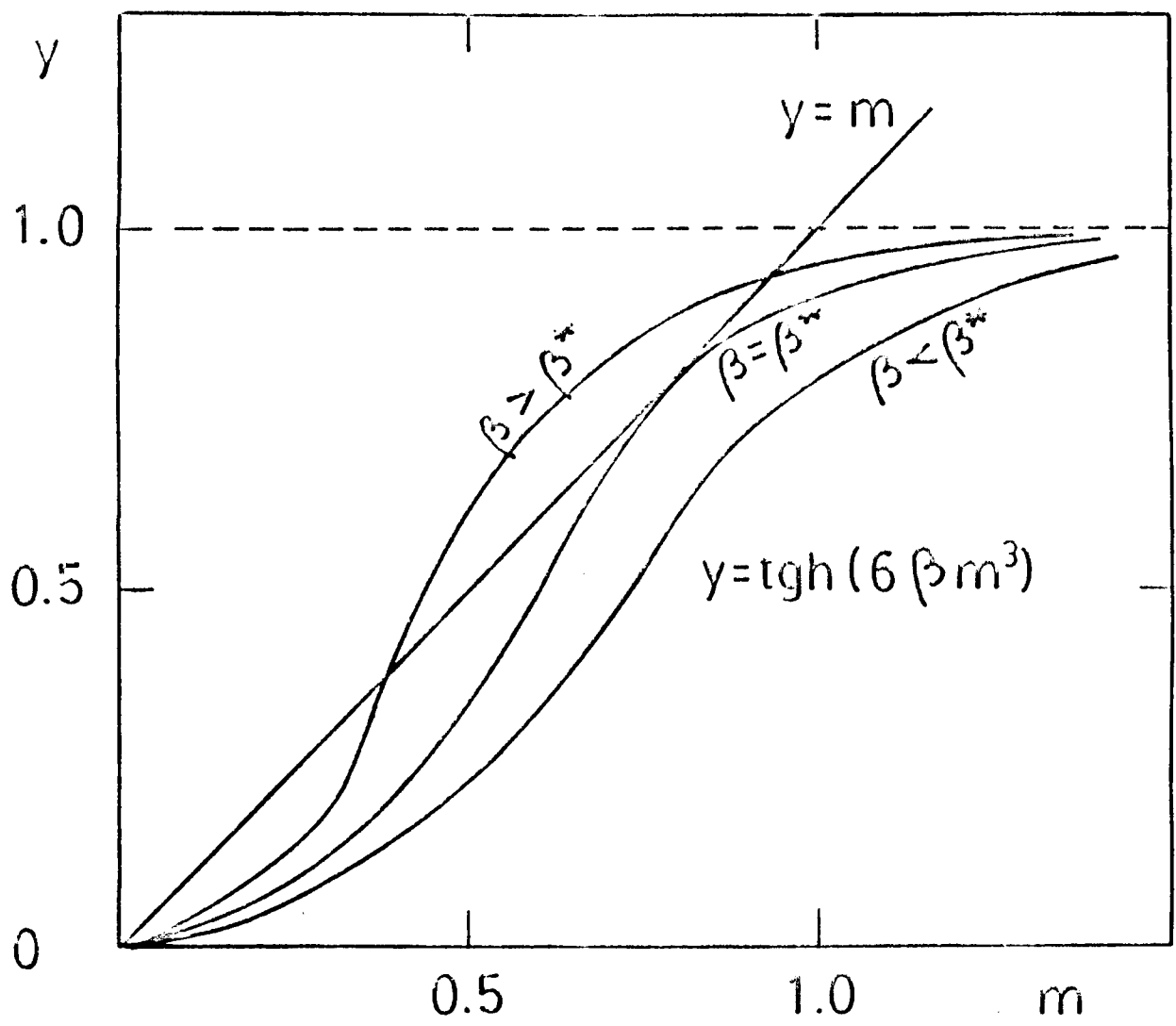


Fig.1

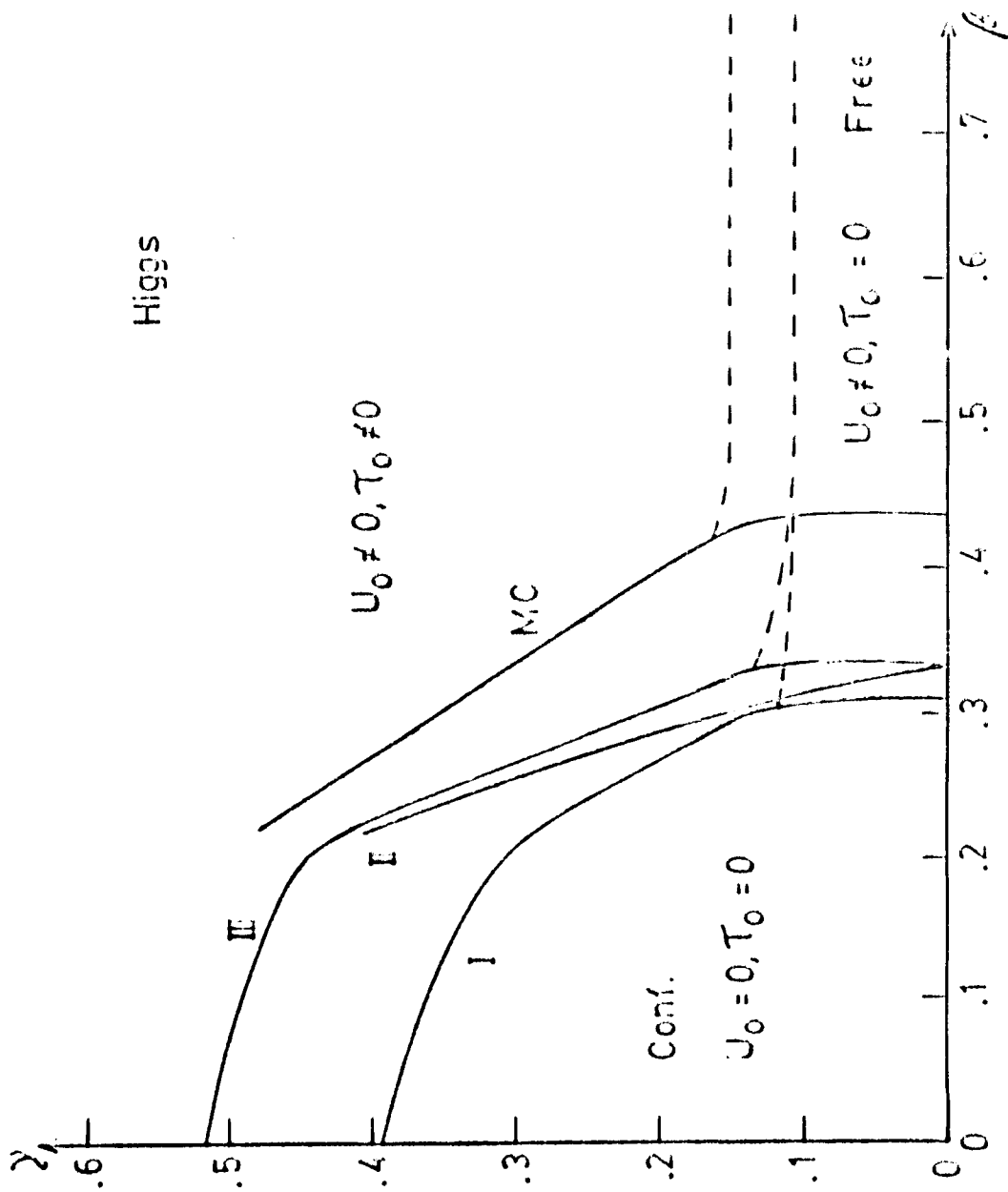


Fig. 2-a

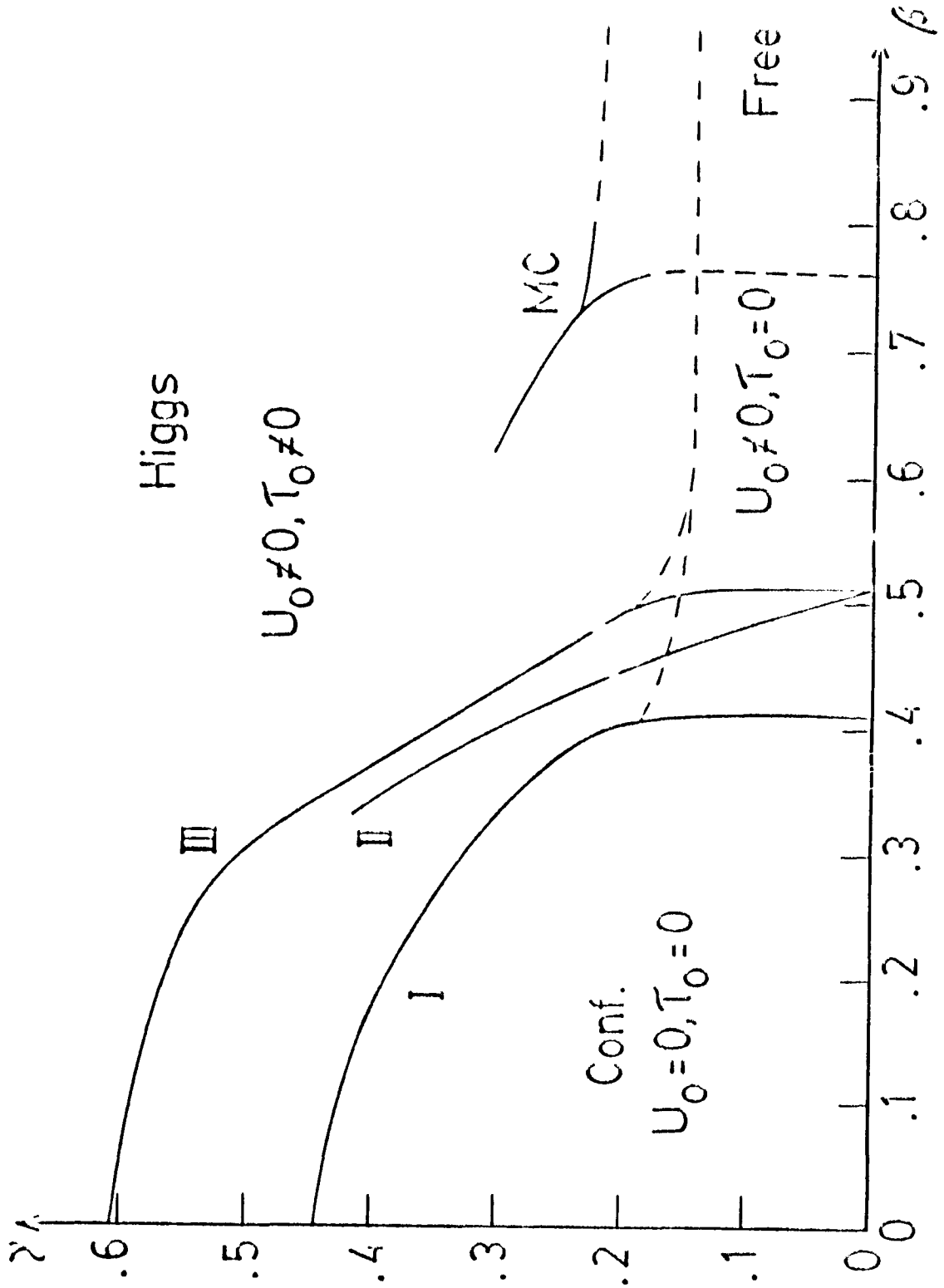


Fig. 2-6

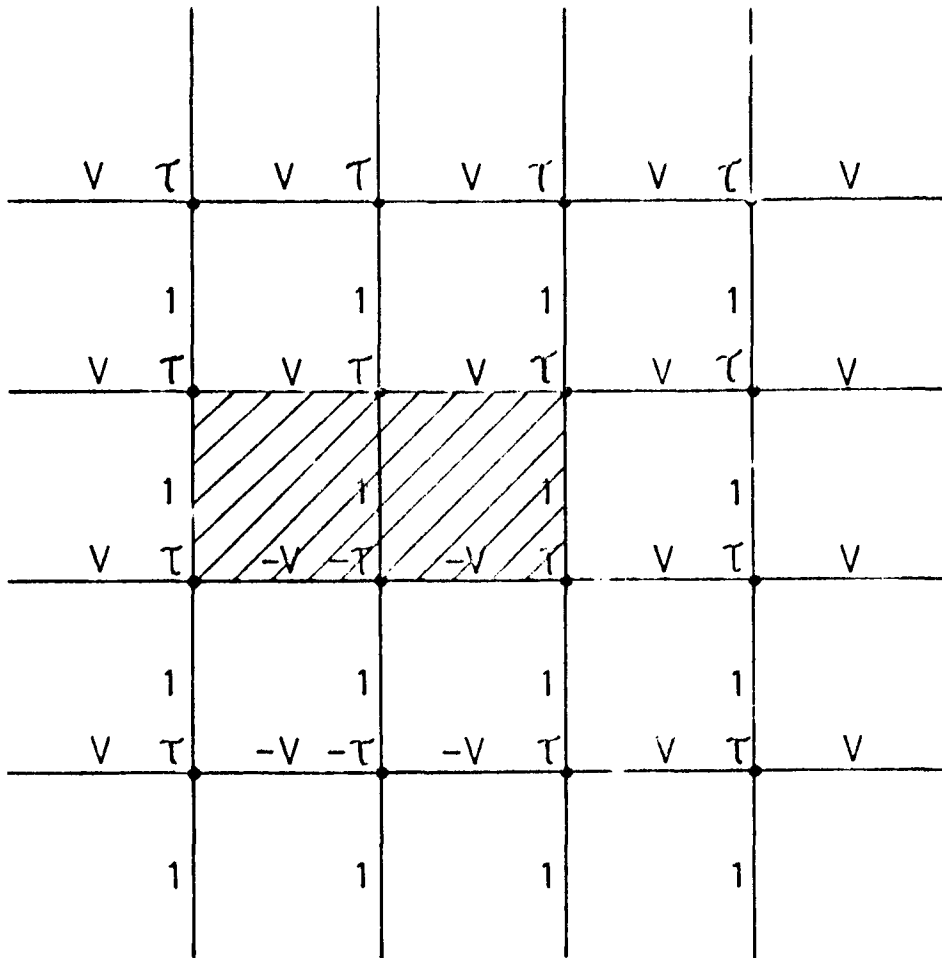


Fig. 3

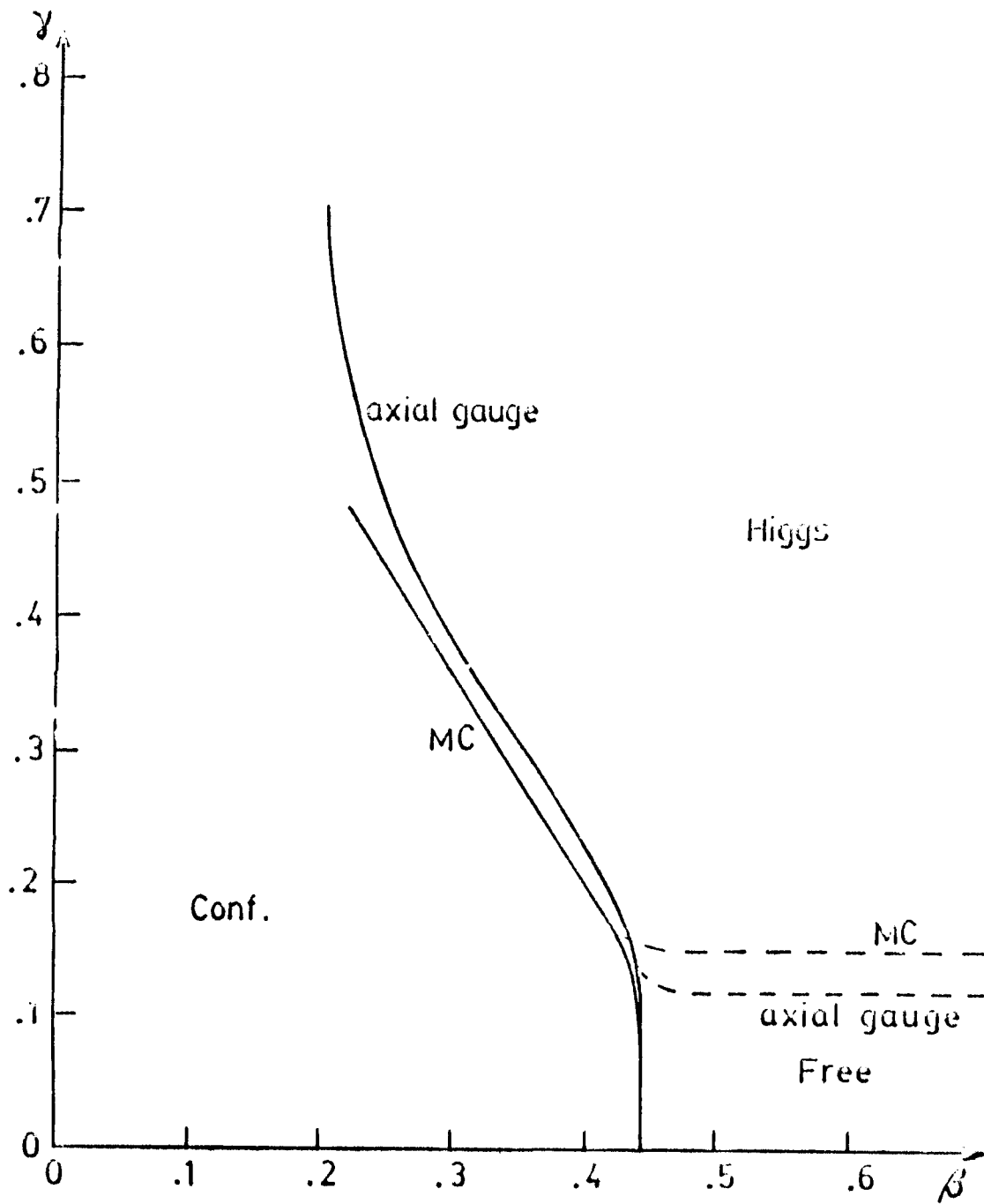


Fig. 4

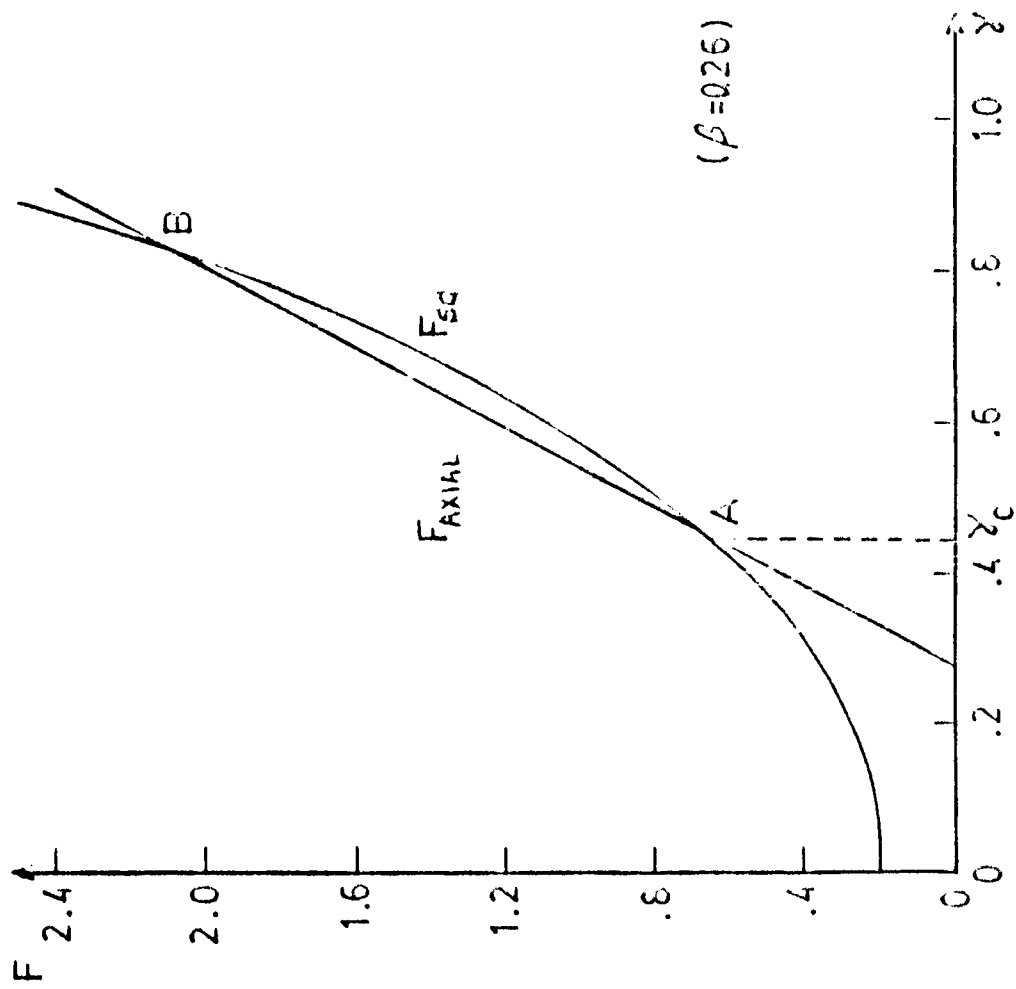


Fig. 5

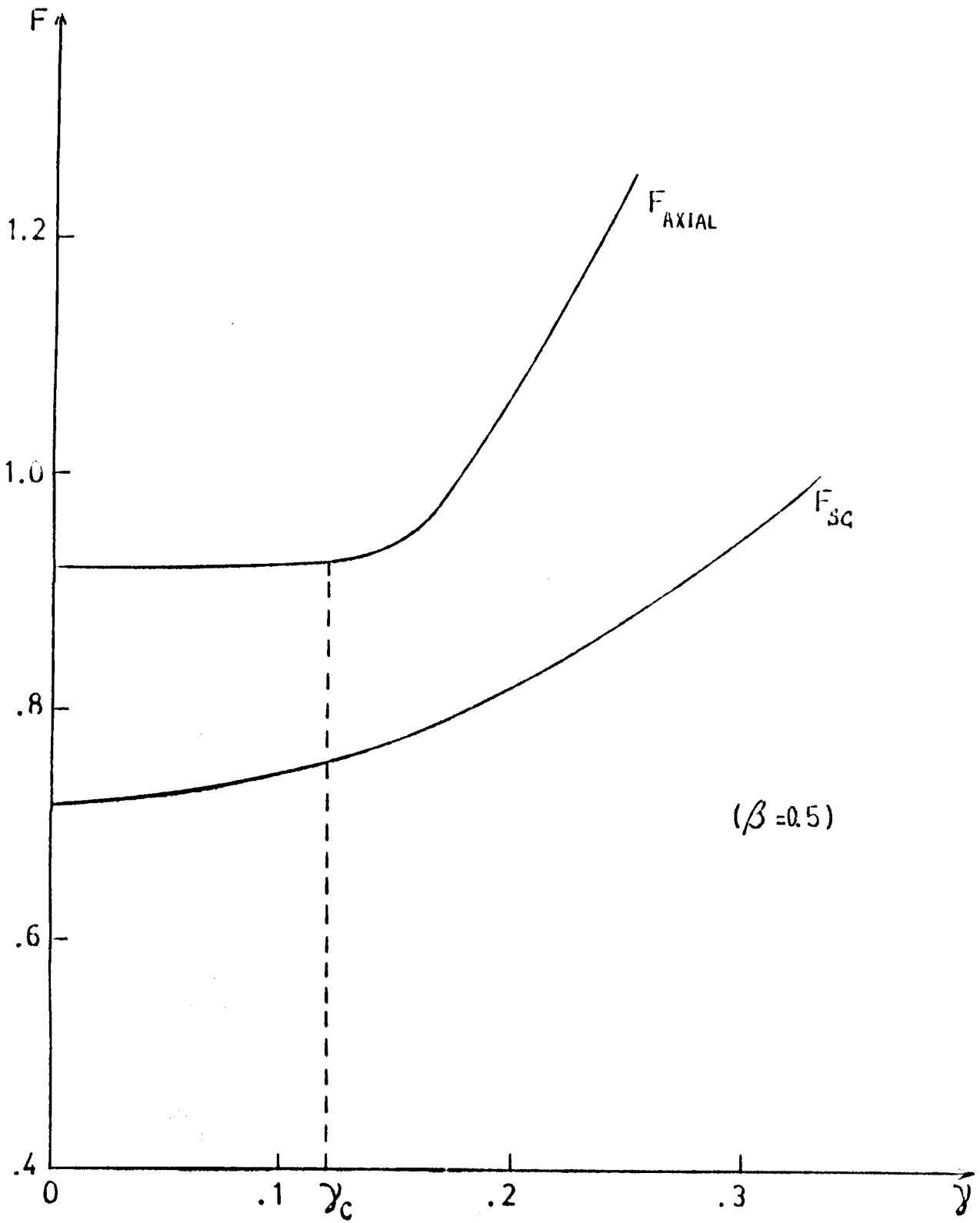


Fig. 6

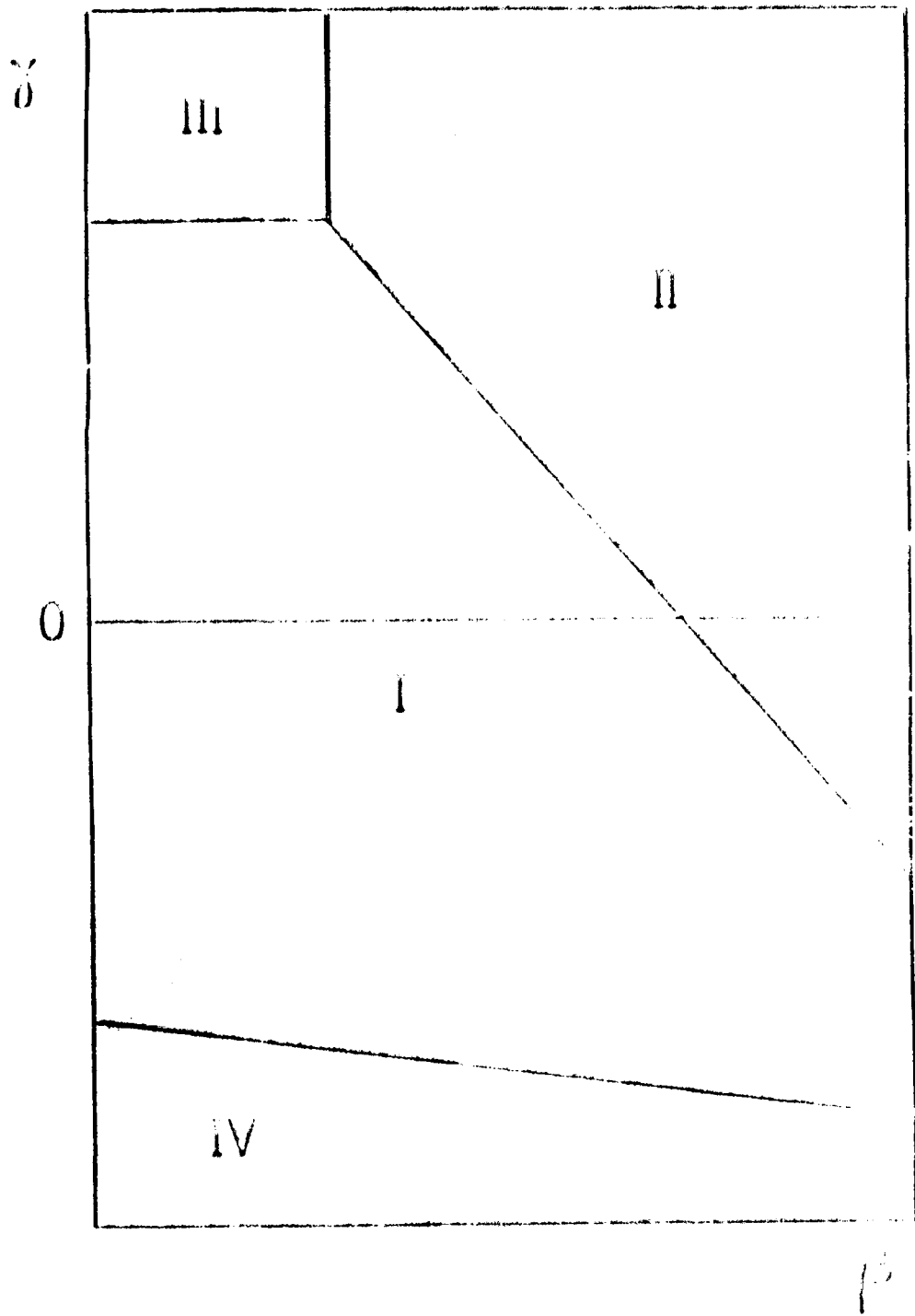
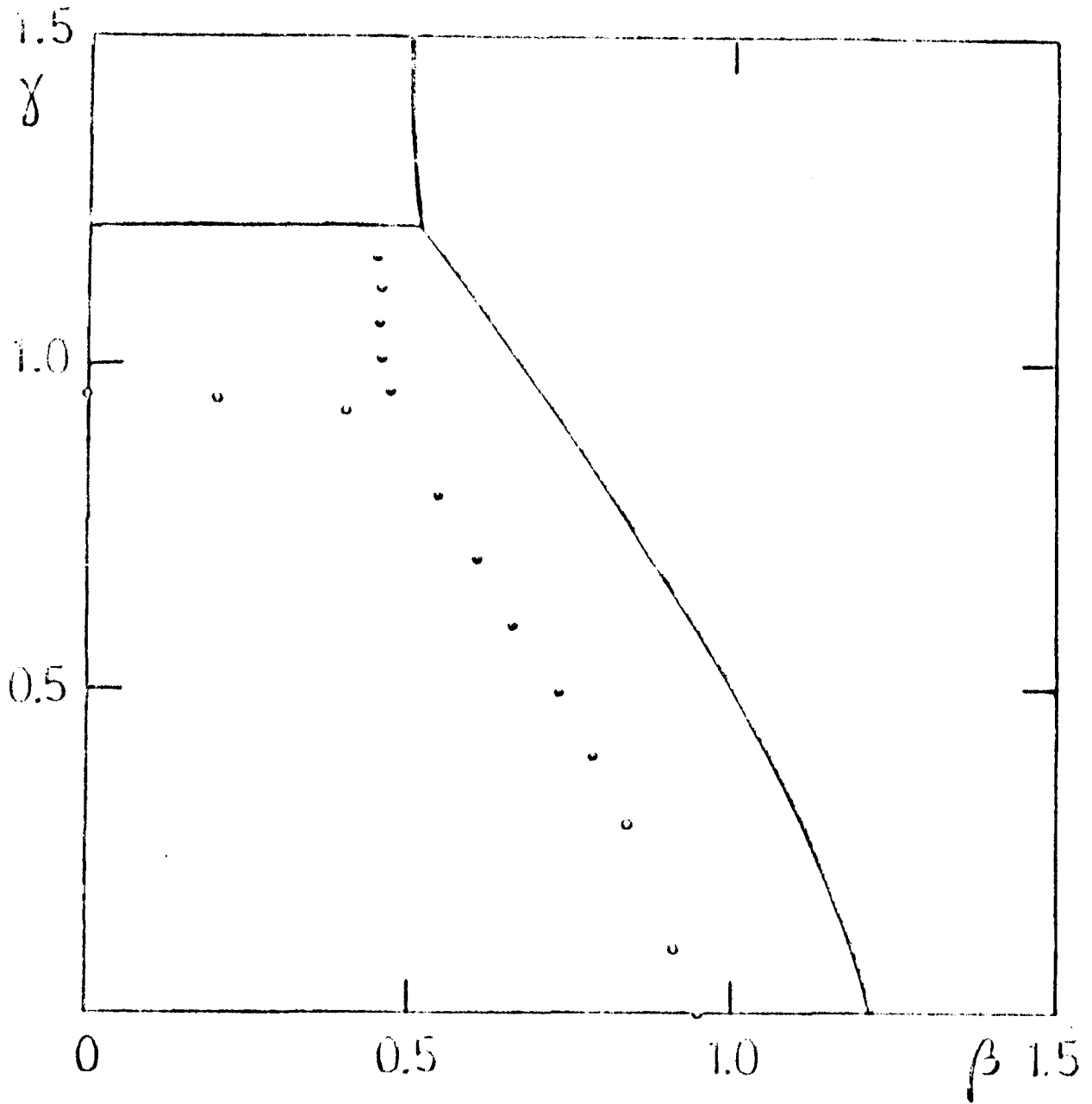


Fig. 7



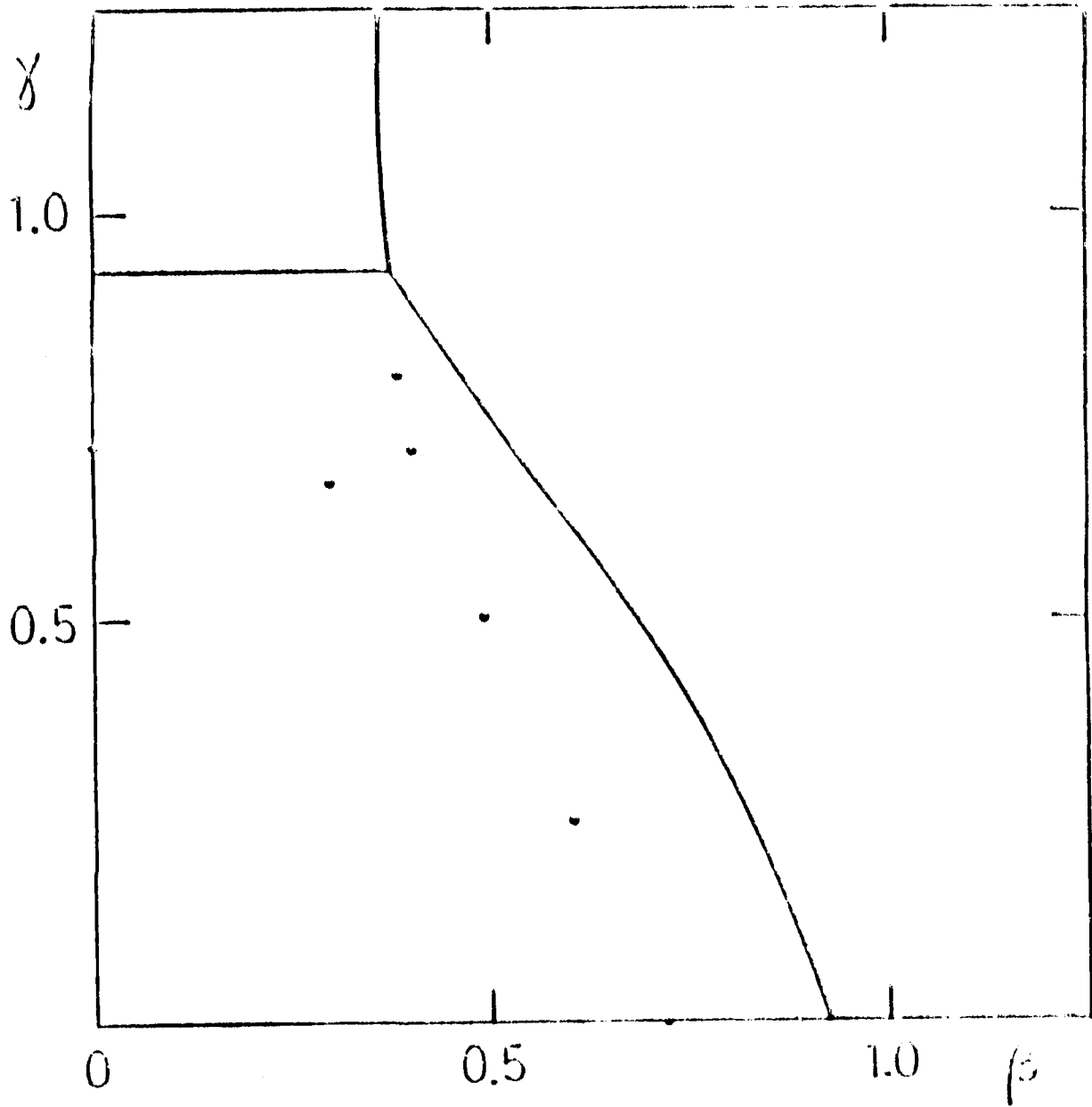


Fig. 9

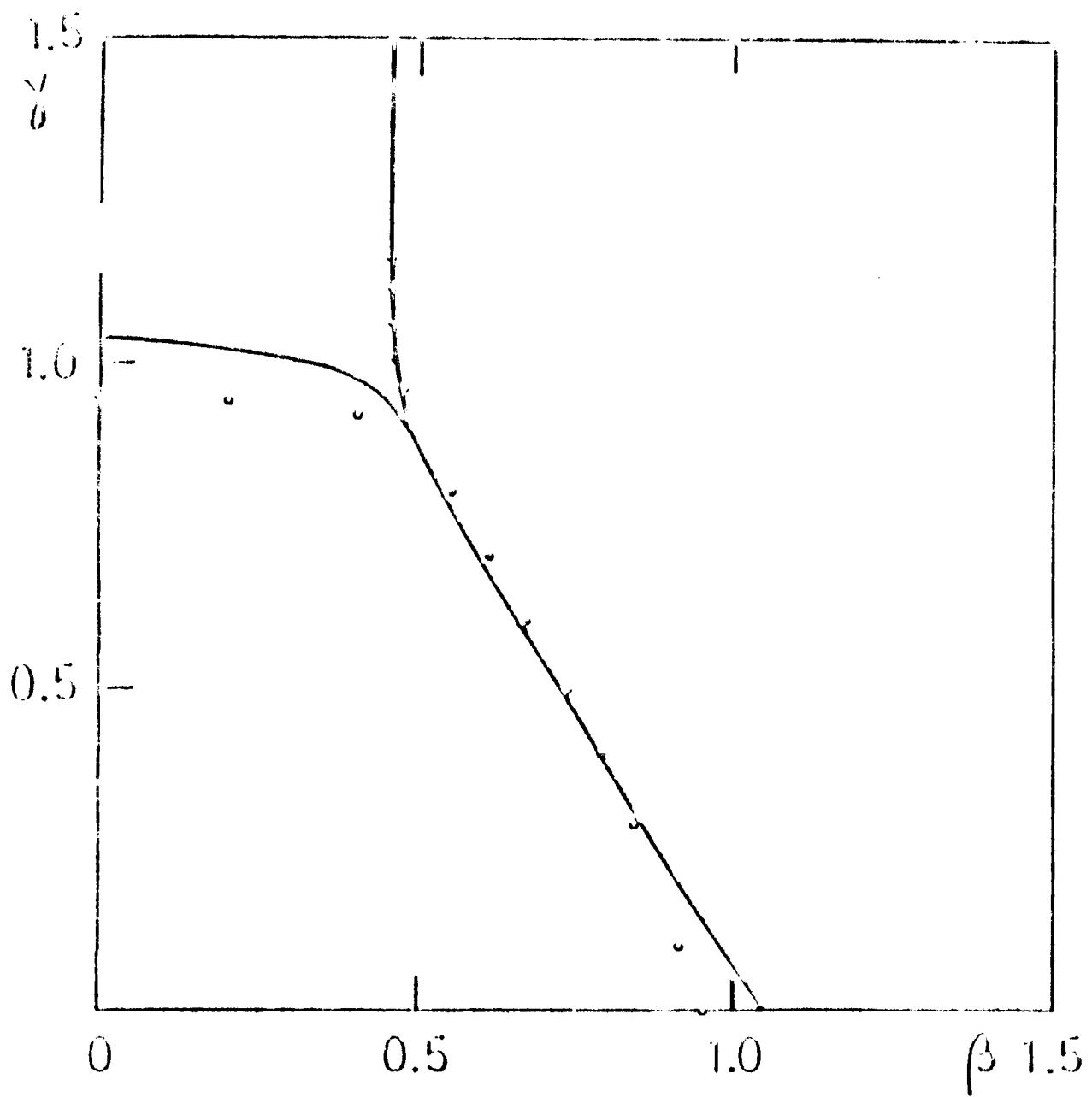


Fig.10

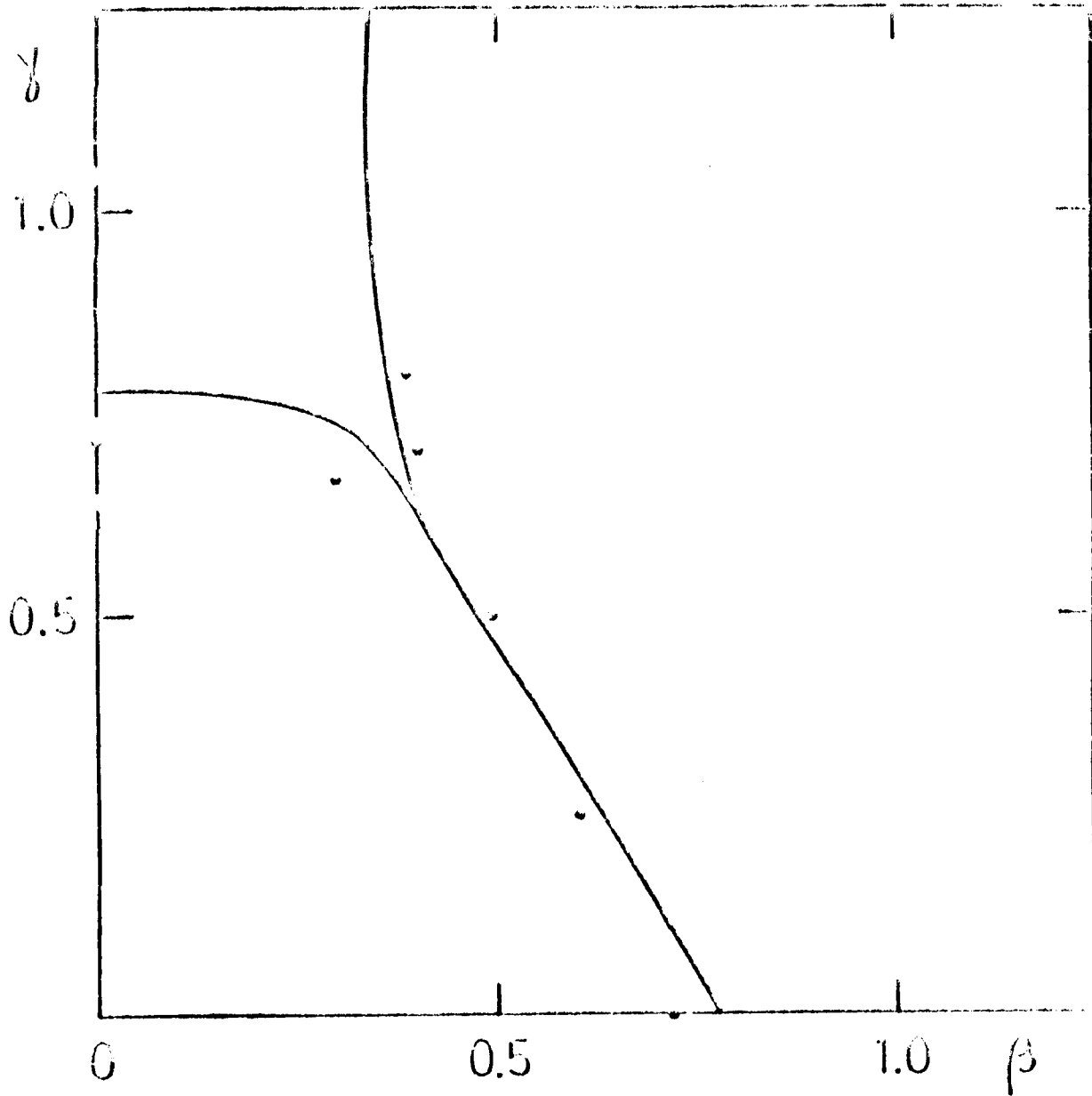


Fig.11

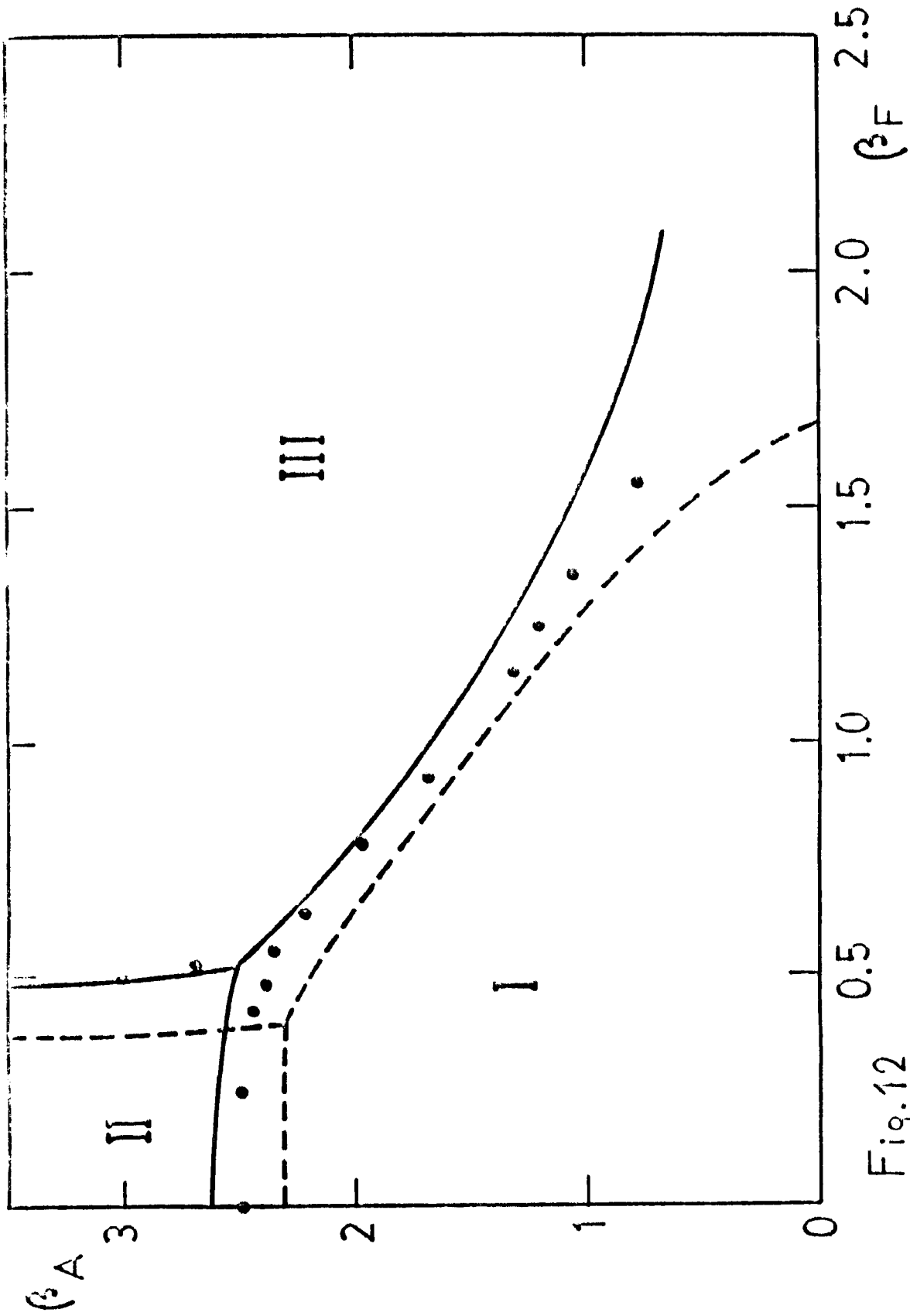


Fig.12

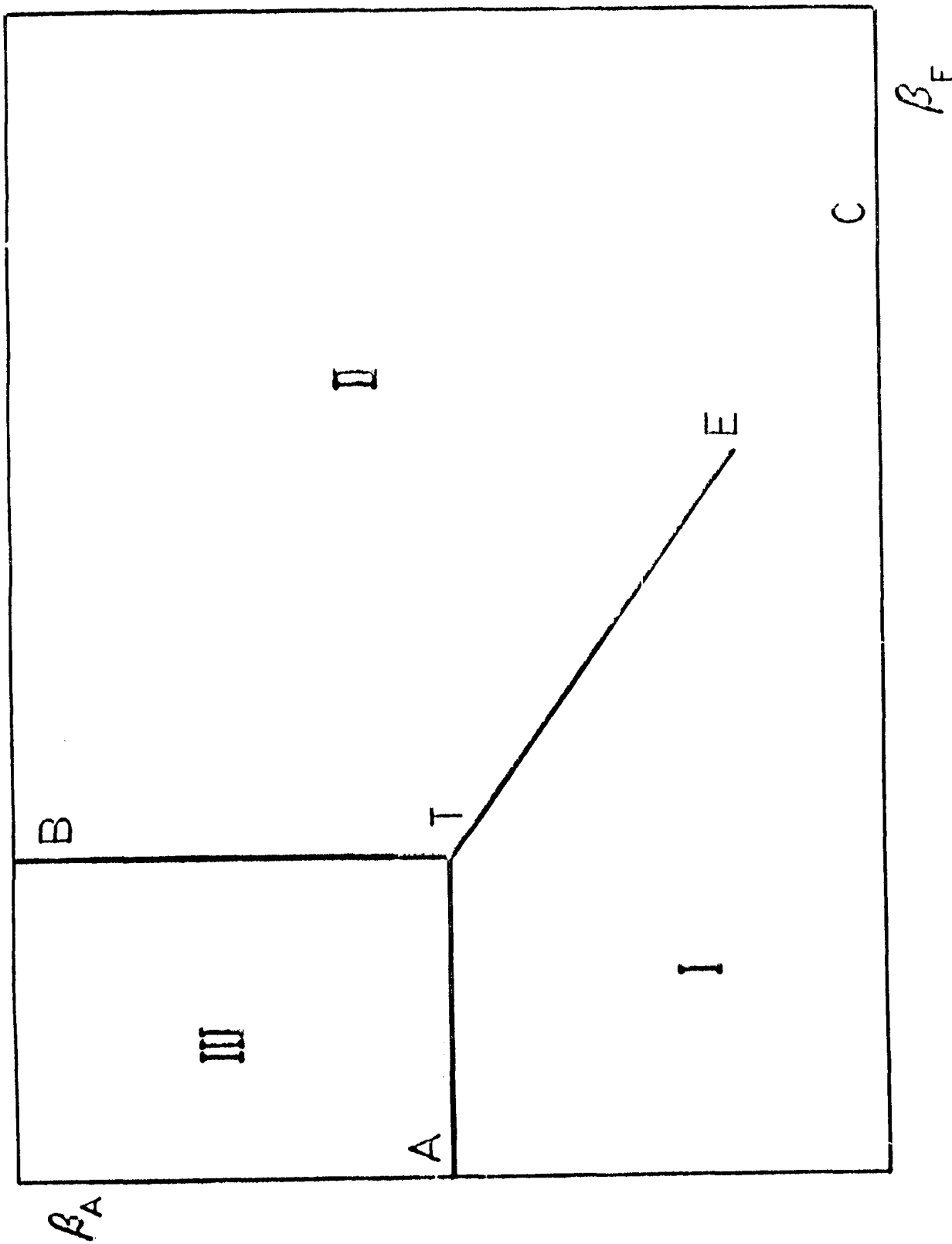


Fig. 13

CAPITULO III

METODO VARIACIONAL HAMILTONIANO

III.a Introducción

En este capítulo estudiaremos las teorías de medida en la red en formulación Hamiltoniana (sec. I.d) por medio del método variacional<sup>1</sup> (Rayleigh-Ritz). Esta técnica nos permite obtener una cota superior para la energía del estado fundamental de un Hamiltoniano(H). Se basa en la conocida desigualdad,

$$\epsilon_0 \leq \langle H \rangle_\psi = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}, \quad (1)$$

donde  $\epsilon_0$  es la energía exacta del estado fundamental de H y  $|\psi\rangle$  es una función de prueba arbitraria con ciertos parámetros  $\{\beta^m\}$  que minimizan  $\langle H \rangle_\psi$ .

Debido a la analogía existente entre  $\epsilon_0$  y la energía libre clásica (sec.I.d) se dice que H presenta una transición de fase de n-ésimo orden cuando  $d^m \epsilon_0 / d\lambda^m$  es discontinua (suponemos que el Hamiltoniano se escribe como un término de energía cinética más un potencial,  $H = H_0 + \lambda V$  siendo  $\lambda$  un parámetro vinculado con la inversa de la temperatura). Una forma práctica para obtener el orden de la transición es observar el comportamiento de los parámetros variacionales  $\{\beta^m\}$  que minimizan  $\langle H \rangle_\psi$  en función de  $\lambda$ . Si algún  $\beta^m$  varía discontinuamente de un mínimo a otro estamos en presencia de una transición de primer orden (fig. 1a). En cambio si un parámetro variacional tiene un comportamiento como el indicado en la fig.1b la transición es de segundo orden. Para transiciones de orden superior es necesario observar las derivadas de  $\beta^m$  respecto de  $\lambda$ .

Veamos ahora qué estados de prueba se utilizan habitualmente. Para fijar ideas analicemos la electrodinámica (QED) sin fermiones. El Hamiltoniano del continuo puede discretizarse de la siguiente manera,<sup>2</sup>

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int d^3x (E_i^2 + B_i^2) \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k,\lambda} E_{k,\lambda}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\gamma} [1 - \cos(\omega_{\gamma} B_{\gamma})] \quad (2)$$

donde hemos definido el campo magnético como  $B_p = (\nabla \times A)_p = \frac{1}{\alpha} [A_\lambda(x) + A_\lambda(x+\lambda) - A_\lambda(x_i) - A_\lambda(x_j)]$  siendo  $A_\lambda(x)$  el potencial vector ubicado en las uniones de la red.  $E_\lambda(x)$  es el campo eléctrico que satisface la relación de conmutación  $[E_\lambda(x), A_j(x')] = \alpha^2 \delta_{i,j} \delta_{x,x'}$ . El resto de la nomenclatura es igual a la usada en capítulos anteriores. En el límite  $\alpha^2 q \rightarrow 0$  el miembro de la derecha de la ec.(2) tiende al límite continuo. La versión en la red que hemos obtenido de la electrodinámica es llamada "compacta". Notemos que hay una gran arbitrariedad en la elección del término potencial, o sea, el dependiente de  $B_p$ .  $g$  es una cierta constante de acoplamiento sin significado físico en el continuo pero que produce interacciones entre fotones en la red. Se demuestra (sec.I.e) que en esta versión compacta en el límite  $g \rightarrow \infty$  hay confinamiento explícito o sea la energía potencial de dos cargas de prueba de masa infinita ( $e^- e^+$ , por ejemplo) crece linealmente con la distancia (L) entre ellas (para  $L \gg 1$ ). Si en la ec.(2) se hace el cambio de variables  $E_\lambda(x) \rightarrow g E_\lambda(x)$ ,  $B_p \rightarrow \theta_p / g$ ,  $A_\lambda(x) \rightarrow A_\lambda(x)/g$  y  $\partial/\partial q \rightarrow g \partial/\partial q$  el Hamiltoniano resultante es (tomando  $\alpha = 1$ ),

$$H = \frac{1}{2} \left[ g^2 \sum_{x,i} E_i^2(x) + \frac{2}{g^2} \sum_p (1 - \cos \theta_p) \right], \quad (3)$$

donde  $\theta_p = \theta_i(x) + \theta_j(x+\lambda) - \theta_i(x+i) - \theta_j(x)$  siendo  $\theta_i(x) = g A_i(x)$ . Debido a la periodicidad del potencial,  $\theta_p$  puede restringirse al intervalo  $[-\pi, \pi]$  y el conmutador del campo eléctrico con  $\theta_p$ , indica que  $E$  solo puede tomar valores enteros. El límite continuo se recupera ahora cuando  $g$  (adimensional)  $\rightarrow 0$ . Destaquemos que para una teoría no abeliana en la red  $g$  es el acoplamiento entre gluones y por lo tanto posee significado físico. Para la QED es sólo un parámetro introducido por la red.

El Hamiltoniano ec.(3) es invariante ante la transformación de medida espacial,

$$G_x = e^{i \alpha_x (\nabla \cdot E)_x}, \quad (4.a)$$

$$(\nabla \cdot E)_x = \sum_{l \in L^+} E_l - \sum_{l \in L^-} E_l, \quad (4.b)$$

donde  $x$  es un sitio de la red,  $\alpha_x$  es un ángulo arbitrario y  $L^\pm(L^-)$  indica el conjunto de uniones  $(x,i)$  ( $(x-i,i)$ ). Es fácil ver que el Hamiltoniano es invariante ante la operación,

$$G_x H G_x^{-1} = H. \quad (5)$$

El generador de la transformación (4.a) es  $(\nabla \cdot \mathbf{E})_x$ . De la ec. (5) se verifica que

$$(\nabla \cdot \mathbf{E})_x = 0, \quad (6)$$

o sea obtenemos la ley de Gauss en la red en ausencia de cargas<sup>3</sup>. El espacio de estados físicos debe satisfacer ec.(6) y por lo tanto debe ser invariante ante transformaciones de medida.

Para aplicar el método variacional debemos elegir un adecuado estado de prueba. Si se busca información respecto del estado fundamental se debe elegir un "Ansatz" sin nodos e invariante ante la ec. (4.a). Un estado variacional posible es,

$$|\psi\rangle = \exp\left\{f(\{\theta_p\}, \{\beta\})\right\} |0\rangle_E, \quad (7)$$

donde  $|0\rangle_E$  es el vacío de la parte eléctrica de H y f es una función de las variables angulares (operadores)  $\theta_p$  y de los parámetros  $\{\beta\}$ . El estado ec.(7) es invariante ante la ec.(4.a). Como caso particular de la ec.(7) obtenemos el estado de plaqueta independiente,<sup>4,5,6,7,8,9</sup>

$$|\psi\rangle = \exp\left\{\frac{\beta}{2} \sum_p \cos \theta_p\right\} |0\rangle_E. \quad (8)$$

Otros estados de prueba utilizados en la literatura son los de unión independiente<sup>9,10,11,12,13</sup>

$$|\psi\rangle = P|\phi\rangle = P \prod_{x,i} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m(\beta) |m\rangle_{xi} \right], \quad C_m(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) e^{\beta \cos \varphi}, \quad (9)$$

donde  $|m\rangle_{xi}$  es autoestado del operador  $E_i(x)$  con autovalor n y P es un operador de simetrización ante transformaciones de medida pues  $|\psi\rangle$  no es invariante ante ellas,

$$P = \prod_x \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha_x}{2\pi} e^{i\alpha_x (\nabla \cdot \mathbf{E})_x}. \quad (10)$$

En general la presencia del operador P hace difícil los cálculos con el estado ec.(9) aunque mantener la invariancia de medida es fundamental para obtener resultados cualitativamente correctos (ref.13). Es importante destacar que la norma de los estados ec.(7,8,9

es igual a la función de partición de un modelo clásico en  $d$  dimensiones si el Hamiltoniano está definido en  $d+1$  dimensiones. Por ejemplo con el estado ec.(8) se obtiene como "modelo equivalente" una teoría de medida  $U(1)$ ,

$$\langle \psi | \psi \rangle = \prod_{x,i} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_{x,i}}{2\pi} e^{i \sum_p \cos(\theta_p)} \quad , \quad (11)$$

mientras que con la ec.(9) se obtiene,

$$\langle \psi | \psi \rangle = \prod_x \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha_x}{2\pi} e^{i \sum_{x,i} \cos(\alpha_x - \alpha_{x+i})} \quad , \quad (12)$$

es decir la función de partición del modelo XY.

Es fácil deducir que el cálculo de  $\langle \psi | H | \psi \rangle$  se reduce a evaluar el valor medio de ciertos operadores en el modelo equivalente. En general estos cálculos no son triviales. Por ejemplo si se desea estudiar un Hamiltoniano realista en  $3+1$  dimensiones los modelos equivalentes en 3 dimensiones no son solubles exactamente. Para su cálculo aproximado se recurre a alguna de las técnicas enunciadas en los capítulos I y II. Por ejemplo pueden usarse las simulaciones de Monte Carlo los desarrollos en serie de alta y baja temperatura o las técnicas de campo medio mejoradas con la aproximación de Bethe-Peierls.<sup>15</sup> En el caso particular de  $2+1$  dimensiones y estados tipo ec.(8) el modelo equivalente es resoluble exactamente.

Destaquemos que estos cálculos variacionales pueden repetirse, por ejemplo, en el sector del espacio de Hilbert con un par fermión-antifermión estáticos.<sup>2,9,16</sup> En el límite de acoplamiento fuerte el estado fundamental en este subespacio es

$$|\psi\rangle_{\uparrow\downarrow} = q_{\uparrow}^{\dagger}(r) \prod_{(x,i) \in C} e^{i\theta_i(x)} q_{\downarrow}(s) |0\rangle_E \quad , \quad (13)$$

donde  $|0\rangle_E$  es el vacío eléctrico y  $C$  es la curva de mínima longitud que une los sitios  $r$  y  $s$ .  $q_{\uparrow}, q_{\downarrow}^{\dagger}$  son operadores fermiónicos ubicados en los sitios. Cuando  $q_{\uparrow} \rightarrow \infty$  por analogía con la ec.(13) se puede proponer como estado variacional a

$$|\psi\rangle_{\uparrow\downarrow} = \sum_c f(c) q_{\uparrow}^{\dagger}(r) \prod_{(x,i) \in C} e^{i\theta_i(x)} q_{\downarrow}(s) |0\rangle_E \quad , \quad (14)$$

donde la suma en  $c$  es sobre todas las curvas que unen  $\Gamma$  y  $s$  cada una de ellas con un peso  $f(c)$  que es el parámetro variacional.

Un razonamiento análogo nos permite obtener una estimación para la energía del primer nivel excitado. En el límite  $g \rightarrow \infty$  el primer excitado (en el sector sin cargas) es,

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_p}} \sum_p \cos \theta_p |0\rangle_p, \quad (15)$$

donde  $N_p$  es el número de plaquetas.

En consecuencia para valores finitos de  $g$  se propone el siguiente estado,

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_p}} \sum_p \left[ \cos \theta_p - \frac{\langle \psi | \cos \theta_p | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \right] |\psi\rangle, \quad (16)$$

donde  $|\psi\rangle$  es una aproximación variacional al estado fundamental (por ej. ec.(8,9)). La forma más general de escribir un estado ortogonal al fundamental es

$$|\tilde{\psi}\rangle = \left[ \hat{\Theta} - \frac{\langle \psi | \hat{\Theta} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \right] |\psi\rangle, \quad (17)$$

donde  $\hat{\Theta}$  es un operador que puede contener parámetros variacionales adicionales. La ec.(16) es sólo un caso particular de la ec.(17).

Antes de pasar directamente a las aplicaciones en las próximas secciones, destaquemos algunos otros detalles del método variacional.

i) Ultimamente se han utilizado con cierto éxito estados tipo gaussianos.<sup>2,17,18</sup> Para el caso de la electrodinámica dicho estado es,

$$|\psi\rangle = P \left( \prod_p \sum_{m_p=-\infty}^{\infty} \right) e^{-\frac{1}{2g^2} \sum_{p,p'} (\theta_p - 2\pi m_p) \Delta_{pp'} (\theta_{p'} - 2\pi m_{p'})} \quad (18)$$

donde  $P$  es el proyector sobre el sector invariante de medida definido en la ec.(10) y  $\Delta_{pp'}$  es una función que será considerada como parámetro variacional. Si  $\Delta_{pp'} \propto \delta_{pp'}$  recuperamos el estado tipo ec.(8). Al permitir que  $\Delta_{pp'}$  acople plaquetas tan alejadas como uno quiera se introducen correlaciones de largo alcance las cuales son muy importantes en la fase de acoplamiento débil. Su utilización en el caso de QED en 2+1 dimensiones permite obtener una buena estimación para la tensión

de la cuerda en ese modelo.<sup>18</sup> Lamentablemente su aplicación a modelos no abelianos es muy complicada y no se ha progresado en esa dirección

ii) Al igual que para el estado gaussiano, en el Ansatz de plaqueta independiente también puede tomarse como parámetro variacional a una función del ángulo  $\theta_p$ , es decir se propone<sup>19</sup>

$$|\psi\rangle = \prod_p f(\theta_p) |0\rangle_E, \tag{19}$$

donde  $f(\theta_p)$  satisface una cierta ecuación diferencial obtenida al minimizar la funcional  $\langle H \rangle_\psi$ . Esta aproximación también presenta dificultades al pretender ser generalizada a otros modelos realistas.

iii) Los métodos variacionales pueden también aplicarse en el contexto del grupo de renormalización en espacio real. En la ref. 20 se ha propuesto que los estados que se mantienen en cada bloque contengan un parámetro variacional el cual se determina minimizando la energía tras un gran número de iteraciones.

iv) El método variacional puede utilizarse también en formulación Lagrangiana,<sup>21</sup> debido a que la función de partición de un cierto modelo es igual al autovalor más grande de la matriz de transferencia correspondiente elevado al número de sitios en la dirección temporal. Habitualmente se usan estados de plaqueta independiente.

v) Sería muy interesante complementar el método variacional aquí expuesto, el cual da una cota superior a la energía, con alguna técnica que nos provea de un límite inferior a la misma. Existen intentos en esta dirección.<sup>22</sup>

### III.b Aproximación de Bethe-Peierls para modelos Lagrangianos y Hamiltonianos.

En esta sección aplicaremos<sup>23</sup> la aproximación de Bethe-Peierls<sup>24</sup> al modelo de Ising en d dimensiones (clásico) y a la teoría Z(2) de medida (cuántica) en 2+1 dimensiones. Dicha aproximación es una mejora a los cálculos habituales de campo medio descritos en el capítulo II y consiste en igualar a su valor medio a todas las variables de la red fuera de un cierto volumen finito de la misma, obteniéndose la magnetización mediante una ecuación de autoconsistencia. Si el volumen tratado exactamente se reduce a un sitio recuperamos los resultados de campo medio.

Analicemos primeramente el modelo de Ising clásico. Debemos obtener la solución de la ecuación trascendental,

$$m = \frac{\sum_{\{S_x \in V\}} S_x \exp\left\{\beta \left[ \sum_{\text{uniones}} (SS') + (2d-1)m \sum_{x'} S_{x'} \right]\right\}}{\sum_{\{S_x \in V\}} \exp\left\{\beta \left[ \sum_{\text{uniones}} (SS') + (2d-1)m \sum_{x'} S_{x'} \right]\right\}}, \quad (20)$$

donde V es el volumen tratado exactamente,  $S_x$  es una variable interior cualquiera y le llamamos  $x'$  a los sitios de la frontera.

En el caso de modelos de spines sabemos que el campo medio predice transiciones de segundo orden o sea a partir de un cierto valor  $\beta_c$  en la ec.(20) la raíz  $m=0$  (que existe siempre) se hace doble y para  $\beta > \beta_c$  una solución evoluciona a partir de  $m=0$  hacia valores positivos. La temperatura crítica se obtiene igualando las derivadas en  $m=0$  en ambos lados de la ec.(20). La expresión resultante puede simplificarse usando el hecho de que para todos los L sitios en la frontera de V conectados a un cierto sitio interior se verifica la siguiente igualdad,

$$\sum_{S_{x_1}} \sum_{S_{x_2}} \exp\left[\beta m (2d-1) (S_{x_1} + S_{x_2} + \dots)\right] = \left[ \sum_{S_{x'}} \exp\left[\beta m (2d-1) S_{x'}\right] \right]^L. \quad (21)$$

De esta manera se obtienen las siguientes ecuaciones para  $\beta_c$ :

$$\begin{aligned} 1 &= 2d\beta_c, \\ 1 &= 2d(2d-1)\beta_c \tanh(\beta_c), \\ 1 &= (2d-1)^2 \beta_c \tanh(\beta_c) (1 + \tanh(\beta_c)), \\ 1 &= 2(2d-1)\beta_c \tanh(\beta_c) \left[ \frac{(3d-2)e^{2\beta_c} - d\bar{e}^{2\beta_c} + (2d-2)}{e^{2\beta_c} + \bar{e}^{2\beta_c} + 2} \right], \\ 1 &= 4(2d-1)(2d-2)\beta_c \tanh(\beta_c) \left[ \frac{1 + e^{4\beta_c}}{e^{4\beta_c} + \bar{e}^{4\beta_c} + 6} \right], \end{aligned} \quad (22)$$

para los casos a, b, c, d y e de la fig.2. Los resultados para  $\beta_c$  se resumen en la tabla 1 donde son comparados con resultados de desarrollos en serie y decimación. Vemos que se obtiene una apreciable mejora al pasar del caso a) al b) pero al aumentar el volumen tratado exactamen-

te las mejoras se hacen más pequeñas mostrando una convergencia lenta a los valores aceptados.

Numéricamente podríamos tratar volúmenes más grandes sin demasiado esfuerzo de computación pero creemos que los casos que hemos estudiado son suficientes para deducir el comportamiento cualitativo de esta aproximación.

Podría pensarse que el tratamiento arriba descrito mejoraría, sin aumentar el esfuerzo analítico o numérico, considerando una aproximación de probabilidad media<sup>25</sup> en vez de campo medio. Esta aproximación corresponde a reemplazar la magnetización externa fija  $m$  por un campo que aparece con probabilidad  $[P(S_{z=+1})]$ . La ecuación de auto-consistencia para dicha probabilidad es,

$$P(S_X) = \frac{\sum_{\{S_{x \in V} = \pm 1\}} \exp \left[ \beta \sum_{\ell} (SS')_{\ell} \right] \left[ \sum_{S_{z=+1}} P(S_{z'}) \exp(\beta S_{z'} S_X) \right]^{2d-1}}{\sum_{\{S_{x \in V} = \pm 1\}} \exp \left[ \beta \sum_{\ell} (SS')_{\ell} \right] \left[ \sum_{S_{z=\pm 1}} P(S_{z'}) \exp(\beta S_{z'} S_X) \right]^{2d-1}}, \quad (23)$$

donde  $V=V$  sin el sitio  $X$ . El resto de la notación se ha explicado en la ec.(20). Notemos que la suma en el denominador (que normaliza la probabilidad) incluye al sitio  $X$ . Consideremos de nuevo los cuatro casos de la fig.2 y usemos también el truco de igualar las derivadas a ambos lados con respecto a  $X=P(S_{z=+1})$  para  $X=1/2$ , usando  $P(S_{z=-1})=1-P(S_{z=+1})$ . De esta manera se obtienen ecuaciones trascendentales a partir de la ec.(22) reemplazando el factor  $\beta_c$ , que siempre aparece en el miembro de la derecha, por  $t_0 h \beta_c$ . Las soluciones de estas ecuaciones también se incluyen en la tabla 1. Desafortunadamente la mejora, comparada con el tratamiento previo ec.(20), es muy pequeña.

Veamos cómo podemos generalizar la aproximación de Bethe-Peierls para modelos cuánticos. Estudiaremos la teoría  $Z(2)$  de medida la cual se define mediante el siguiente Hamiltoniano,

$$H = - \sum_{x,i} \sigma_{x,i} - \lambda \sum_{x,l > j} (\sigma_{x,l} \sigma_{x,j})_{x,l,j} . \quad (24)$$

La notación ha sido explicada en el capítulo II ( $\lambda$  es un parámetro). Se sabe<sup>26</sup> que este modelo presenta una transición de fase de segundo orden para un cierto valor  $\lambda_c$ . En la tabla 2A podemos ver algunas pre-

dicciones para  $\lambda_c$  usando diferentes aproximaciones.

Un estado de prueba que ha sido utilizado en 2+1 dimensiones es el de plaqueta independiente (sec.III.a)

$$|\psi\rangle = \prod_{p(4)} e^{\lambda p} \left[ \prod_{i \in p} \hat{\sigma}_{3p} \right] |0\rangle_{\sigma_i} \quad (25)$$

donde  $\beta$  es el parámetro variacional,  $\hat{\sigma}_{3p} = (\sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_4)$  y  $|0\rangle_{\sigma_i}$  significa el autoestado de  $\sigma_i$  con autovalor +1 para todas las uniones de la red.  $|\psi\rangle$  es invariante ante transformaciones de medida.

La norma del estado ec.(25) es igual a la función de partición de una teoría Z(2) de medida clásica en una dimensión menos al cual llamamos modelo equivalente,

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{\{\sigma_{3p} = \pm 1\}} \exp \left[ \beta \sum_p \sigma_{3p} \right] \quad (26)$$

En la ec.(26) podemos realizar un cambio de variable de unión a plaqueta con jacobiano igual a 1 (ver cap.IV) y de esta manera obtener una expresión sencilla para la energía,

$$E(\beta) = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{N_\lambda \langle \psi | \psi \rangle} = -\frac{1}{\cosh^2 \beta} - \frac{\lambda}{2} \tanh \beta \quad (27)$$

Precisamente la posibilidad de obtener resultados cerrados para  $E(\beta)$  nos llevó a elegir la dimensión 2+1.

Minimizando la ec.(27) respecto de  $\beta$  se obtiene,

$$-E(\beta^m) = \begin{cases} 1 + \frac{\lambda^2}{16} & (\lambda \leq 4) \quad (28.a) \\ \frac{\lambda}{2} & (\lambda \geq 4) \quad (28.b) \end{cases}$$

es decir existe una transición de segundo orden en  $\lambda_c = 4$  donde  $\beta$  va a infinito y permanece allí. Notemos que la ec.(28.a) corresponde a los primeros valores del desarrollo perturbativo de acoplamiento fuerte (ver ec. (34) más abajo) mientras que en la zona de acoplamiento débil la ec.(28.b) da al menos el resultado trivial.

Tratemos de mejorar estos resultados de manera análoga a lo hecho con el modelo de Ising. La primera generalización que no destruye la posibilidad de un tratamiento analítico es proponer el si-

guiente estado variacional,

$$|\Psi\rangle = \prod_{p(2)} \exp \left[ \frac{\beta}{2} (\hat{\sigma}_{p_1} + \hat{\sigma}_{p_2} + \delta \hat{\sigma}_{p_1} \hat{\sigma}_{p_2}) \right] |0\rangle_{\delta_1}, \quad (29)$$

donde la notación se muestra en la fig.3 y  $|0\rangle_{\delta_1}$  es el mismo estado utilizado en la ec.(25).  $\delta$  es un parámetro adicional. Cada  $C_p$  pertenece a un único  $p(2)$ . En este caso también podemos obtener resultados exactos para la energía como en la ec.(28),

$$E(\beta, \delta) = - \left[ \frac{\cosh(\beta\delta)}{2(e^{\beta\delta} \cosh 2\beta + e^{-\beta\delta})} + \frac{3 \cosh^2 \beta}{(e^{\beta\delta} \cosh 2\beta + e^{-\beta\delta})^2} \right] - \frac{\lambda}{2} \left[ \frac{\text{sh } 2\beta}{\cosh 2\beta + e^{-2\beta\delta}} \right]. \quad (30)$$

Si se toma  $\delta = 0$  se recupera el resultado de la ec.(27). Destaquemos que en el cálculo de  $\langle \hat{\sigma}_1 \rangle_\Psi$  debemos considerar separadamente los casos en que la unión está dentro de  $p(2)$  o cuando pertenece a la frontera entre dos  $p(2)$ . La transición aparece ahora en  $\lambda_c = 3.85$  donde  $\delta$  va a  $\infty$ . Veremos que ésta es una tendencia general, es decir, en los próximos casos la transición siempre tiene lugar cuando el parámetro variacional que une todas las variables de plaqueta dentro del volumen considerado, va a  $\infty$ .

Consideremos ahora el caso de cuatro plaquetas, es decir, un estado de prueba del tipo,

$$|\Psi\rangle = \prod_{p(4)} \psi(\hat{\sigma}_{p_1}, \hat{\sigma}_{p_2}, \hat{\sigma}_{p_3}, \hat{\sigma}_{p_4}) |0\rangle_{\delta_1} = \prod_{p(4)} \exp \left\{ \frac{\beta}{2} [\hat{\sigma}_{p_1} + \hat{\sigma}_{p_2} + \hat{\sigma}_{p_3} + \hat{\sigma}_{p_4} + \delta (\hat{\sigma}_{p_1} \hat{\sigma}_{p_2} + \hat{\sigma}_{p_1} \hat{\sigma}_{p_3} + \hat{\sigma}_{p_1} \hat{\sigma}_{p_4} + \hat{\sigma}_{p_2} \hat{\sigma}_{p_4} + \hat{\sigma}_{p_2} \hat{\sigma}_{p_3}) + \mu (\hat{\sigma}_{p_1} \hat{\sigma}_{p_4} + \hat{\sigma}_{p_2} \hat{\sigma}_{p_3}) + \xi \hat{\sigma}_{p_1} \hat{\sigma}_{p_2} \hat{\sigma}_{p_3} \hat{\sigma}_{p_4}] \right\} |0\rangle_{\delta_1}. \quad (31)$$

La notación se explica en la figura 3. En este caso necesitamos 5 parámetros si se insiste en escribir  $\psi(\hat{\sigma}_{p_1}, \hat{\sigma}_{p_2}, \hat{\sigma}_{p_3}, \hat{\sigma}_{p_4})$  de la manera más general posible. La expresión para  $E(\beta, \delta, \mu, \xi)$  es muy larga y no la reproduciremos aquí. En este caso la transición aparece en  $\lambda_c = 3.68$  ( $\delta \rightarrow \infty$ ). Aunque usando rutinas bien conocidas el máximo de la energía puede encontrarse fácilmente con suficiente precisión, repetimos los cálculos con menos parámetros variacionales para observar si nuestros resultados son muy sensibles a ese número. Se mantuvo el parámetro  $\delta$  para tener una clara señal de transición de fase. Tomando  $\delta, \mu \rightarrow 0$  en la ec.(31) se obtiene  $\lambda_c = 3.70$  lo cual difiere poco del resultado obtenido con cuatro parámetros. Esta situación es similar al caso del modelo de Ising clásico en el cual la mejora utilizando probabilidad media no cambió apreciablemente los resultados. Parece ser entonces que lo prin-

principal es el número de variables considerado en el Ansatz y no la manera en la cual éstas se manipulan.

Las siguientes mejoras son obvias. Por ejemplo los estados con seis y nueve plaquetas son:

$$|\psi\rangle = \prod_{p(6)} \exp \left\{ \frac{\beta}{2} \left[ \sum_{i=1}^6 \hat{\sigma}_{p_i} + \delta (\hat{\sigma}_{p_1} \hat{\sigma}_{p_2} + \hat{\sigma}_{p_1} \hat{\sigma}_{p_3} + \hat{\sigma}_{p_2} \hat{\sigma}_{p_6} + \hat{\sigma}_{p_6} \hat{\sigma}_{p_5} + \hat{\sigma}_{p_5} \hat{\sigma}_{p_4} + \hat{\sigma}_{p_4} \hat{\sigma}_{p_1}) + \mu \hat{\sigma}_{p_1} \hat{\sigma}_{p_5} \right. \right. \\ \left. \left. + \epsilon [(\hat{\sigma}_{p_1} \hat{\sigma}_{p_2} \hat{\sigma}_{p_4} \hat{\sigma}_{p_5}) + (\hat{\sigma}_{p_2} \hat{\sigma}_{p_3} \hat{\sigma}_{p_5} \hat{\sigma}_{p_6})] + \delta_{(i=1)} \prod_{j=1}^6 \hat{\sigma}_{p_j} \right] \right\} |0\rangle_{\sigma_i} \quad (32)$$

$$|\psi\rangle = \prod_{p(9)} \exp \left\{ \frac{\beta}{2} \left[ \sum_{i=1}^9 \hat{\sigma}_{p_i} + \delta (\hat{\sigma}_{p_1} \hat{\sigma}_{p_2} + \hat{\sigma}_{p_2} \hat{\sigma}_{p_3} + \hat{\sigma}_{p_3} \hat{\sigma}_{p_6} + \hat{\sigma}_{p_6} \hat{\sigma}_{p_5} + \hat{\sigma}_{p_5} \hat{\sigma}_{p_4} + \hat{\sigma}_{p_4} \hat{\sigma}_{p_1}) \right. \right. \\ \left. \left. + \mu \hat{\sigma}_{p_5} (\hat{\sigma}_{p_2} + \hat{\sigma}_{p_6} + \hat{\sigma}_{p_4} + \hat{\sigma}_{p_1}) + \epsilon (\hat{\sigma}_{p_1} \hat{\sigma}_{p_2} \hat{\sigma}_{p_4} \hat{\sigma}_{p_5} + \hat{\sigma}_{p_2} \hat{\sigma}_{p_3} \hat{\sigma}_{p_5} \hat{\sigma}_{p_6} + \hat{\sigma}_{p_5} \hat{\sigma}_{p_4} \hat{\sigma}_{p_1} \hat{\sigma}_{p_2} + \hat{\sigma}_{p_4} \hat{\sigma}_{p_1} \hat{\sigma}_{p_6} \hat{\sigma}_{p_3}) \right. \right. \\ \left. \left. + \delta_{(i=1)} \prod_{j=1}^9 \hat{\sigma}_{p_j} \right] \right\} |0\rangle_{\sigma_i} \quad (33)$$

La notación se explica en la figura 3. Con estos estados de prueba el número de posibles parámetros variacionales crece enormemente. En consecuencia mantuvimos sólo cinco parámetros como máximo. Los resultados se muestran en la tabla 2B. Vemos que al igual que para el modelo de Ising la convergencia es bastante lenta.

Por completitud discutamos los resultados que se obtienen para  $\lambda_c$  mediante los desarrollos perturbativos<sup>4b</sup> (método de Rayleigh-Schrödinger, sec.I.g). La energía del estado fundamental resulta ser,

$$E^-(\lambda) = \begin{cases} -1 - \frac{\lambda^2}{16} - \frac{\lambda^4}{3072} - \frac{\lambda^6}{196608} & (\lambda \ll 1), \\ -\frac{\lambda}{2} \left[ 1 + \frac{4}{2\lambda^2} + \frac{5}{32\lambda^4} \right] & (\lambda \gg 1). \end{cases} \quad (34.a)$$

$$(34.b)$$

La ec.(34.a) coincide con el desarrollo de ref. 27 obtenido computacionalmente. Por medio de la ec.(34) podemos obtener una estimación gruesa para el valor de  $\lambda_c$  buscando el sector donde ambos desarrollos se encuentran (presumiblemente con igual pendiente). En la fig.4 reproducimos la ec.(34). Ambas curvas son casi tangentes en la zona donde se espera la transición. Si se refina la fig.4 veríamos que la ec.(34.b) proporciona una energía menor que la ec.(34.a) en el intervalo (3.17, 3.48) donde las curvas permanecen casi en contacto (diferencia  $\sim 10^{-3}$ ). Entonces la estimación es  $3.17 \leq \lambda_c \leq 3.48$ .

Otro criterio para el cálculo de  $\lambda_c$  en una transición confinante-desconfinante como la de este modelo es buscar dónde la masa del primer excitado se anula (glueball si  $\lambda \ll 1$  y monopolo si  $\lambda \gg 1$ ). No podemos usar un criterio similar para la tensión de la cuerda debido a

la transición de arrugamiento (roughening) presente en nuestra teoría.<sup>27</sup>

El estado de glueball se define mediante,

$$|g\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_p}} \sum_p (\hat{G}_3 \hat{G}_3 \hat{G}_3 \hat{G}_3)_p |0\rangle_{G_3}, \quad (35)$$

donde  $|0\rangle_{G_3}$  fue definido en la ec.(25) y  $N_p$  es el número de plaquetas. Su masa es,<sup>29</sup>

$$m_g \cong 8 - \frac{3\lambda^2}{4} + \frac{43}{768} \lambda^4. \quad (36)$$

El estado tipo monopolo<sup>26</sup> es,

$$|m\rangle = \prod_{\hat{x} \gg 0} \hat{G}_1(\vec{r} - x\hat{y}, \hat{x}) |0\rangle_{G_3}, \quad (37)$$

es decir, una cadena de operadores  $\hat{G}_1$  de  $x$  a  $\infty$  en alguna dirección.  $|0\rangle_{G_3}$  es, en este caso, un autoestado de  $\hat{G}_3$  en cada unión con autovalor +1. Su masa es,

$$m_m \cong \lambda \left[ 2 - \frac{4}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^2} \right]. \quad (38)$$

Usando aproximantes de Padé [2,2] se obtiene que  $m_g$  se anula en  $\lambda_c = 7.23$ , muy lejos de los valores aceptados, mientras que  $m_m = 0$  en  $\lambda_c = 2.50$  que es sólo una estimación gruesa de  $\lambda_c$ . Es evidente que se necesitan series más largas para obtener resultados aceptables.

En resumen en esta sección hemos presentado una especie de desarrollo perturbativo alrededor de las aproximaciones de campo medio y variacional. La mejora en la temperatura crítica en el modelo de I-sing clásico es apreciable especialmente si  $d$  es grande donde obtenemos un  $\beta_c$  equidistante entre los resultados de campo medio a orden cero y los desarrollos en serie. En baja dimensión, para el mismo modelo ( $d=2$ ), nuestro resultado representa una mejora menor. La convergencia es muy lenta mostrando la importancia de las correlaciones de largo alcance en el modelo.

Sería muy interesante desarrollar un método de extrapolación del volumen  $V$  tratado exactamente a  $\infty$ . Para ello necesitaríamos leyes de escaleo similares a las usadas en la aproximación de red finita (ver sec.III.d).

Con respecto a la aproximación variacional Hamiltoniana, el acuerdo entre la energía perturbativa  $E_p$  de la ec.(34) y la energía

variacional  $E_v$  es muy buena en la zona de acoplamiento fuerte. Por ej. en la tabla 3 indicamos los resultados para  $\lambda = 2$  y 3 usando los diferentes estados de prueba descritos en esta sección. La diferencia entre  $E_p$  y  $E_v$  (9 plaquetas) es de sólo un 0.1% ( $\lambda = 2$ ). Con respecto al valor del parámetro crítico notamos de nuevo que la convergencia hacia los valores aceptados es lenta.

Un estado de prueba tipo campo medio fue usado en este modelo.<sup>10,15</sup> En este caso los resultados para  $E(\beta)$  no pueden obtenerse exactamente. El mejor valor obtenido con este Ansatz para el parámetro crítico es  $\lambda_c = 2.6$ .

El hecho de que el grupo de renormalización permita obtener mejores resultados puede entenderse debido a que en este caso se tienen en cuenta correlaciones de largo alcance al contrario de lo que ocurre con nuestros estados variacionales que son de carácter local. Sin embargo es importante destacar que nuestra aproximación a pesar de no ser cuantitativamente precisa en comparación con técnicas refinadas, es muy simple y provee resultados razonables. Por el contrario, hemos probado que buscar dónde se anula la masa del glueball o monopolo da malos resultados. Se necesitarían más términos de la serie. La situación es muy similar a lo que ocurre con la tensión de la cuerda en la ref.30. También remarcamos que en nuestro caso podríamos estar en una situación análoga a la planteada en la ref.31 para la QED en 2+1 dimensiones donde la excitación escalar parece no ser estable debido a una posible mezcla con otros estados. En esta última referencia los desarrollos en serie perturbativos se hacen mediante una red finita. Seguramente la aplicación de una técnica similar para el modelo tratado en esta sección mejoraría mucho los resultados.

### III.c Estudio variacional de la teoría SU(2) de medida

En esta sección estudiaremos<sup>32</sup> mediante la aproximación variacional Hamiltoniana la teoría SU(2) de medida en cuatro dimensiones la cual se define mediante,

$$H = \frac{g^2}{2} \left[ \sum_{x,i} E_i^2(x) - \frac{\lambda}{2} \sum_p \text{tr}_F(U_p + h.c.) \right], \quad (39)$$

donde  $\lambda = 4/g_g^4$ ,  $g_g$  es el acoplamiento y  $\text{tr}_F(U_p)$  es la traza del producto

de variables  $U_\lambda(x)$  en la representación fundamental del grupo SU(2) a lo largo de una plaqueta. El operador campo eléctrico se define en cada sitio mediante el conmutador,

$$[E^\alpha, U_{ab}] = T_{ac}^\alpha U_{cb} \quad , \quad (40)$$

donde  $\alpha$  es índice de color y  $T^\alpha$  es el correspondiente generador de transformaciones infinitesimales ( $\alpha = 1, 2, 3$ ;  $T^\alpha = \frac{\sigma^\alpha}{2}$  en SU(2)). Notemos que la ec.(39) es una generalización del Hamiltoniano abeliano ec.(3)

Como estado fundamental proponemos,

$$|\psi\rangle = \exp\left\{\sum \left(\{U_\lambda(x)\}, \{\beta_j\}\right)\right\} |0\rangle_E \quad , \quad (41)$$

por ser invariante de medida y por no tener nodos.  $|0\rangle$  es el autoestado del campo eléctrico con autovalor 0 y la función S depende de combinaciones de lazos cerrados de variables de unión  $U_\lambda(x)$  y de un conjunto de parámetros variacionales  $\{\beta_j\}$ . La norma de  $|\psi\rangle$  es,

$$\langle\psi|\psi\rangle = \prod_{x,i} \int dU_i(x) e^S \quad , \quad (42)$$

y es igual a la función de partición de un modelo Lagrangiano en d dimensiones con acción S (modelo equivalente). El cálculo de  $\langle H \rangle_\psi$  se basa entonces en la evaluación de promedios estadísticos en dicho modelo equivalente. La correcta elección de la función S es el detalle básico del método. Debe ser suficientemente flexible como para reproducir el comportamiento del estado fundamental en todo el rango de parámetros. La complicación analítica de S está limitada por la correspondiente dificultad en la evaluación de los promedios estadísticos lo cual es muy importante en 3+1 dimensiones.

Para la teoría SU(2) el estado variacional más frecuentemente usado es el de plaqueta independiente,

$$|\psi\rangle = \exp\left\{\frac{\beta}{2} \sum_p \text{Tr}_{1/2}(U_p)\right\} |0\rangle_E \quad , \quad (43)$$

el cual, debido a que las plaquetas son sólo espaciales, corresponde a fluctuaciones magnéticas en cada punto en el límite continuo,

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{continuo}} \exp\left\{-\frac{\beta}{2} \int d^d x B^2(x)\right\} |0\rangle_E \quad . \quad (44)$$

El estado ec.(43) reproduce en el límite de acoplamiento fuerte el primer orden del desarrollo perturbativo al igual que ocurrió en la sec.III.b para el modelo Z(2) de medida. En 2+1 dimensiones hay argumentos cualitativos<sup>33</sup> que indican que el estado (43) es una buena aproximación para cualquier acoplamiento. Se demuestra fácilmente<sup>34</sup> que el estado confina siempre y el modelo equivalente (teoría de medida bidimensional) puede resolverse exactamente.

Para modelos de spin o quirales (variables U(x) en los sitios de la red) el estado análogo a la ec.(43) es el de uniones independientes,

$$|\psi\rangle = \exp\left\{\frac{\beta}{4} \sum_{x,c} \text{tr}_F(U_x U_{x+c}^\dagger + \text{h.c.})\right\} |0\rangle_L, \quad (45)$$

el cual ha sido utilizado para grupos abelianos<sup>35,36</sup> y no abelianos donde se lo conoce como estado de Jastrow<sup>38</sup> debido a su aplicación original en problemas de varios cuerpos.

Volviendo a la teoría SU(2) calculemos el valor de expectación del Hamiltoniano ec.(39) usando el estado ec.(43).

El valor medio del operador  $E_\lambda^z(x)$  es proporcional al correspondiente de la parte magnética de la ec.(39) por medio de la identidad<sup>5,7</sup>

$$\int \prod_x dU_x f(\{U_x\}) E_\lambda^z f(\{U_x\}) = \frac{1}{2} \int \prod_x dU_x f(\{U_x\}) E_\lambda^z \log f(\{U_x\}). \quad (46)$$

Eligiendo

$$f(\{U_x\}) = \exp\left[\frac{\beta}{2} \sum_p \text{tr}_{1/2}(U_p)\right], \quad (47)$$

y puesto que  $E_{1/2}^z = \frac{3}{4} U_{1/2}$  se obtiene

$$\left\langle \sum_x E_x^z \right\rangle_\psi = \frac{3\beta}{4} \left\langle \sum_p \text{tr}_{1/2}(U_p) \right\rangle. \quad (48)$$

La expresión que debe ser minimizada es finalmente

$$\frac{\langle H \rangle_\psi}{N_p} = \frac{g^2}{2} \left( \frac{3\beta}{4} - \lambda \right) \left\langle \text{tr}_{1/2}(U_p) \right\rangle (\beta), \quad (49)$$

donde  $N_p$  es el número de plaquetas. Este resultado es válido para cualquier dimensión.

Un estado de plaqueta independiente más general puede obtenerse sumando en la acción del modelo equivalente sobre todas las representaciones irreducibles del grupo, es decir,

$$|\tilde{\psi}\rangle = \exp\left[\sum_P \sum_{j=\frac{1}{2}, 1, \dots} \left(\frac{\beta_j}{2j} \text{tr}_j(U_P)\right)\right] |0\rangle_E, \quad (50)$$

donde  $\beta_j$  son los parámetros variacionales.

La generalización de la ec.(49) es,

$$\frac{\langle H \rangle_{\tilde{\psi}}}{N_P} = \frac{g^2}{2} \left[ \sum_j j(j+1) (\beta_j \langle \text{tr}_j(U_P) \rangle(\beta) - \lambda \langle \text{tr}_{1/2}(U_P) \rangle(\beta)) \right], \quad (51)$$

donde los promedios estadísticos deben evaluarse con la acción

$$S = \sum_P \sum_j \beta_j \text{tr}_j(U_P). \quad (52)$$

Considerando que

$$\text{tr}_j(U) = U_{2j} \left[ \text{tr}_{1/2}(U) \right], \quad (53)$$

donde  $U_{2j}(x)$  es el polinomio de Chebychev de segundo tipo y orden  $2j$  las únicas magnitudes que deben evaluarse son  $\langle \text{tr}_{1/2}^{(m)}(U_P) \rangle$ , con el factor de Boltzmann construido con la ec.(52). Consideremos los siguientes casos particulares,

a) 2+1 dimensiones

Los promedios en el modelo equivalente pueden calcularse exactamente y manteniendo en la ec.(52) sólo la representación fundamental, se obtiene

$$\langle \text{tr}_{1/2}(U_P) \rangle = 2 \frac{I_2(2\beta)}{I_1(2\beta)}, \quad (54)$$

donde  $I_\nu(x)$  es la función de Bessel modificada de orden  $\nu$ .

La energía variacional como función de  $\lambda$  se muestra en la fig.5 y no se observan discontinuidades en ella ni en sus derivadas indicando una ausencia de transición de fase como se esperaba. El cálculo de la tensión de la cuerda<sup>5,6</sup> es trivial y muestra una fase confiante para todo  $\lambda$ .

Manteniendo en la ec.(51) hasta cuatro parámetros variacio-

nales, los resultados para  $\lambda = 4$  y  $8$ , por ejemplo, se ven en la tabla 4.a. La mejora en la energía variacional debido a la inclusión del término adjunto es de  $\sim 0.4\%$  mientras que la influencia de representaciones superiores es despreciable ( $\sim 0.01\%$ ) debido a que los parámetros correspondientes se mantienen muy chicos.

b) 3+1 dimensiones

El modelo equivalente es una teoría de medida en 3 dimensiones y para el cálculo de los promedios estadísticos se debe recurrir a técnicas aproximadas. Las simulaciones de Monte Carlo darían los resultados más precisos pero perdiendo el control analítico y la simplicidad de los cálculos. Aquí usaremos el método de plaqueta media (ver cap. IV) el cual se basa en el cambio de variables unión-plaqueta. Mediante este procedimiento aparece una identidad de Bianchi por cada cubo tridimensional de la red,

$$\delta(B_c - 1) = \delta(U_{12}(x) U_{23}(x) U_{43}(x+\hat{y}) U_{42}(x+\hat{z}) U_{13}(x+\hat{x}) U_{14}(x) - 1), \quad (55)$$

donde cada variable de plaqueta se indica mediante dos direcciones y un índice de sitio. Realizando ese cambio de variables se obtiene

$$\langle \text{tr}_{1/2} U_p \rangle = \frac{1}{Z} \prod_p \int dU_p \text{tr}_{1/2}(U_p) \prod_{\text{cubos}} \delta(B_c - 1) \exp \left\{ \beta \sum_p \text{tr}_{1/2}(U_p) \right\}. \quad (56)$$

Destaquemos que en dos dimensiones no aparecen vínculos en el cambio de variables. El tratamiento numérico de la ec.(56) consiste en fijar todas las variables de plaqueta, excepto un número finito de ellas, a su valor medio  $\langle U \rangle$  el que se evalúa por autoconsistencia. El uso de variables de plaqueta asegura automáticamente la invariancia de medida.

Considerando sólo una plaqueta exactamente en la ec.(56) la ecuación de autoconsistencia es,

$$\langle U \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{j_1, j_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots} (2j_1 + 1)^{-4} (2j_2 + 1)^{-4} U_{2j_1}^5 \left( \frac{\langle U \rangle}{Z} \right) U_{2j_2}^5 \left( \frac{\langle U \rangle}{Z} \right) \times \int dU e^{\beta \text{tr} U} U_{2j_1} \left( \frac{\text{tr} U}{2} \right) U_{2j_2} \left( \frac{\text{tr} U}{2} \right) \text{tr}_{1/2}(U). \quad (57)$$

donde  $j_1, j_2$  son variables asociadas con los cubos vinculados con la

plaqueta tratada exactamente y  $Z$  difiere del numerador sólo en la ausencia del factor  $\tau_{1/2}(U)$ . La demostración de la ec.(56) es completamente análoga a la realizada en la ref.40 para el caso de cuatro dimensiones. Aunque la ec.(57) presenta varias raíces debemos mantener sólo aquella que satisfaga los límites,

$$\langle U \rangle_{\beta=0} = 0, \quad \langle U \rangle_{\beta \rightarrow \infty} \rightarrow 1. \quad (58)$$

La solución numérica de la ec.(57) con valores máximos de  $j_1$  y  $j_2$  igual a  $1/2$  se compara en fig.6 con datos de Monte Carlo<sup>39</sup> y desarrollos en serie.<sup>41</sup> El acuerdo es excelente con una diferencia máxima de 0.5% para  $\beta=4$ . La tabla 5 indica que al considerar representaciones superiores se mejoran los resultados (por ej. se obtienen diferencias de 0.1% en  $\beta=15$  con  $j_1, j_2$  hasta 2 inclusive). La aproximación de Bethe-Peierls<sup>3</sup> estudiada en la sec.III.b permitiría una mejora adicional pero no se ha usado aquí debido a su lenta convergencia.

Existen otras posibles alternativas analíticas en vez del método de plaqueta media. Entre ellas se encuentra la técnica Lagrangiana variacional<sup>24</sup> (ya mencionada en la sec.III.a) que se ha aplicado al grupo SU(2) en 3 dimensiones con resultados<sup>42</sup> comparables a los nuestros. El grupo de renormalización (Migdal-Kadanoff) fue usado<sup>43</sup> en cuatro dimensiones con diferencias de hasta 10% respecto de Monte Carlo. El campo medio con correcciones radiativas (cap. 11) presumiblemente no daría resultados precisos debido a la baja dimensión de nuestro problema. En general todas estas técnicas son más difíciles de aplicar que el método de plaqueta media. Además este último puede generalizarse fácilmente para estados que involucren más de una plaqueta.

Vayamos a los resultados obtenidos con el estado ec.(43). La fig.7 muestra que la energía variacional como función de  $\lambda$  es cualitativamente similar al caso de 2+1 dimensiones.

Analizando el valor  $\beta_m$  del parámetro variacional (fig.8) que minimiza  $\langle H \rangle_\psi$  se observa que, para  $\lambda$  chico,  $\beta_m \sim 2\lambda^{1/2}$  como en  $d=2$ . La energía variacional es también igual al caso bidimensional, es decir,  $E \sim -\lambda^{3/2}/3$  para  $\lambda \ll 1$ . El hecho de que el primer sumando del desarrollo perturbativo de la energía del estado fundamental sea reproducido correctamente por el estado ec.(43) es válido para cualquier grupo y dimensión.

Por completitud, la fig.7 muestra también la energía correspondiente al estado de campo medio o unión independiente,<sup>8</sup>

$$|\Phi\rangle = \exp \left\{ \frac{\beta}{2} \sum_{\ell} \text{tr}_{\gamma/2} (u_{\ell}) \right\} |0\rangle_E, \quad (59)$$

la cual resulta ser,

$$\frac{\langle \Phi | H | \Phi \rangle}{N_p \langle \Phi | \Phi \rangle} = \frac{g^2}{2} \left\{ \frac{3\beta}{8} \frac{I_2(2\beta)}{I_1(2\beta)} - 2\lambda \left[ \frac{I_2(2\beta)}{I_1(2\beta)} \right]^4 \right\}. \quad (60)$$

Este estado exhibe una transición de fase en  $\lambda_c=1.30$  lo cual es incorrecto. La fig.7 muestra que el estado de plaqueta independiente es mejor que el de unión independiente sobre todo el rango de  $\lambda$ . Posiblemente esto se debe a que el estado ec.(59) no es invariante ante transformaciones de medida pero su simetrización nos lleva a expresiones matemáticas de difícil tratamiento. Por ejemplo recordando que el modelo equivalente de la teoría U(1) de medida es el XY de spin (sec.III.a) entonces el equivalente al SU(2) de medida sería el SU(2) quiral, el que debería ser estudiado mediante técnicas de Monte Carlo si se pretenden obtener resultados confiables.

Comparar la energía de los estados de las ec.(43) y (59) no es inútil ya que para el caso U(1) ellos se cruzan.<sup>6</sup> Este hecho indica que el verdadero estado fundamental para  $\lambda \gg 1$  es más parecido a un estado de campo medio que a uno de plaqueta independiente.

En resumen en esta sección hemos aplicado el método variacional Hamiltoniano en 3+1 dimensiones a la teoría SU(2) de medida usando estados de plaqueta independiente. Es destacable que los cálculos en el modelo equivalente pueden realizarse analíticamente con gran precisión por medio de la técnica de plaqueta media. Debemos observar no obstante que el estado utilizado tiende a favorecer el desorden o confinamiento. Por ej. se ha demostrado que el parámetro crítico para la teoría Z(2) de medida en 2+1 dimensiones es mayor que el obtenido mediante otras técnicas.<sup>23</sup> En las teorías Z(N) de medida sólo se reproduce<sup>35</sup> la transición Coulomb-Higgs es decir aquella donde el acoplamiento crítico crece con N. Es decir la teoría U(1) de medida en 3+1 dimensiones no presenta transiciones lo cual es incorrecto. Quizás incluyendo interacciones entre plaquetas en los estados de prueba se mejoren los resultados. Así ocurre en el caso de 2+1 dimensiones (ver sec.III.b). Estados de este tipo son imprescindibles para el estudio

de lazos de Wilson espaciales. Incluyendo el siguiente orden perturbativo en la ref.44 la fase de acoplamiento fuerte estaría muy bien tratada. Cálculos de este tipo en 3+1 dimensiones parecen factibles y la única dificultad está en la evaluación de integrales múltiples cuando se usa el método de plaqueta media. Sería interesante analizar si el grupo de renormalización o el método Lagrangiano variacional puede adaptarse a estos cálculos.

Está claro que la única posibilidad de obtener resultados del continuo reside en considerar "clusters" grandes pero finitos de variables interactuantes y buscar un sector de parámetros donde se verifiquen las leyes de escaleo esperadas cerca del continuo. Los cálculos de Monte Carlo indican que en la zona del "crossover" (o sea donde la teoría cambia de un comportamiento de acoplamiento fuerte a uno de acoplamiento débil) se observa el continuo aún para una longitud de correlación chica (2 ó 3 espaciamientos de red). Entonces tomando "clusters" de ese tamaño quizás se mejoren bastante los resultados.

Al terminarse el trabajo que forma esta sección se recibió un preprint<sup>45</sup> con resultados similares a los nuestros pero obtenidos mediante una simulación de Monte Carlo en el modelo equivalente. En particular la fig.1 de ese trabajo coincide con nuestra fig.7.

### III.d Método variacional mejorado

La técnica que será descrita en esta sección<sup>46</sup> tiene muchas similitudes con el bien conocido método de Lanczos<sup>47</sup> para la tridiagonalización de matrices. En realidad nuestra idea está inspirada en un trabajo reciente<sup>48</sup> donde se modifica la aproximación de Lanczos para extender el rango del desarrollo de acoplamiento fuerte.

Supongamos que se esté estudiando un cierto Hamiltoniano H mediante el método variacional. Se toma como estado de prueba a un cierto  $\psi_0$  dependiente de algunos parámetros variacionales  $\{\beta\}$ . Si se opera con H sobre  $\psi_0$  el resultado siempre puede escribirse como,

$$H\psi_0 = \xi_0\psi_0 + b\tilde{\psi}_0, \tag{61}$$

donde  $\tilde{\psi}_0$  es un estado ortogonal a  $\psi_0$ . La constante  $\xi_0$  ( $= (\psi_0, H\psi_0)$ ) es la energía variacional de  $\psi_0$  es decir, si minimizamos  $\xi_0$  respecto de  $\{\beta\}$  obtenemos una cota superior para la energía del verdadero estado funda-

mental  $\tilde{\Phi}$ . La otra constante  $b = (\tilde{\Psi}_0, H\Psi_0)$  mide de alguna manera en cuánto difieren  $\Psi_0$  y  $\tilde{\Phi}$ . Los estados  $\Psi_0, \tilde{\Psi}_0$  están normalizados a 1. La ec. (61) puede pensarse como la definición de  $\tilde{\Psi}_0$ . Ahora la idea es obvia. Podemos mejorar el estado de prueba inicial considerando como nuevo Ansatz la combinación lineal normalizada,

$$\Psi_1 = \frac{\Psi_0 + \alpha_1 \tilde{\Psi}_0}{\sqrt{1 + \alpha_1^2}}, \quad (62)$$

donde  $\alpha_1$  es un nuevo parámetro variacional que puede obtenerse fácilmente minimizando la energía del estado ec.(62),

$$\alpha_1 = f - \sqrt{f^2 + 1}, \quad (63)$$

donde

$$f = \frac{\langle H^2 \rangle_0 - 2\langle H \rangle_0 \langle H \rangle_0 + \langle H \rangle_0^2}{2(\langle H^2 \rangle_0 - \langle H \rangle_0^2)^{3/2}}, \quad (64.a)$$

y

$$\langle H^m \rangle_0 = (\Psi_0, H^m \Psi_0). \quad (64.b)$$

Se puede demostrar que el estado ec.(62) suplementado con la ec.(63) es el autoestado de menor energía de la matriz  $2 \times 2$ ,

$$\begin{pmatrix} \epsilon_0 & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad (65)$$

donde  $c = (\tilde{\Psi}_0, H\tilde{\Psi}_0)$ . En general el Hamiltoniano puede escribirse como un término de energía cinética y otro de energía potencial, es decir,  $H = H_0 + xV$  donde  $x$  es un parámetro. Si tomamos como estado inicial  $\Psi_0$  el estado fundamental de  $H_0$  recobramos el método de acoplamiento fuerte ( $x \ll 1$ ) de la ref.(48). Sin embargo si  $\Psi_0$  es suficientemente bueno en los límites  $x=0$  e  $\infty$ , demostraremos más adelante que nuestra aproximación da buenos resultados para todo  $x$ .

Usando la ec.(63) puede evaluarse la energía variacional mejorada,

$$\xi_1 = \xi_0 + \alpha_1 b \quad . \quad (66)$$

La ec.(66) debe minimizarse (habitualmente en forma numérica) con respecto a los parámetros  $\{\alpha\}$  ( los que en general no coinciden con el conjunto  $\{\beta\}$  que minimiza  $\xi_0$  ). El método puede ser iterado fácilmente, es decir, de  $H$  actuando sobre  $\psi_1$  obtenemos un estado  $\tilde{\psi}_1$  ortogonal a  $\psi_1$ . El nuevo estado variacional es,

$$\psi_2 = \frac{\psi_1 + \alpha_2 \tilde{\psi}_1}{\sqrt{1 + \alpha_2^2}} \quad . \quad (67)$$

Los valores de  $\alpha_2$  y  $\xi_2$  (la energía de  $\psi_2$ ) se obtienen de las ecuaciones (63) y (66) respectivamente cambiando  $\psi_0, \tilde{\psi}_0$  por  $\psi_1, \tilde{\psi}_1$ . Usando la ec.(62),  $\alpha_2$  y  $\xi_2$  pueden escribirse como función de  $\langle H^m \rangle_0$ . Notemos que en el primer paso de nuestro método iterativo necesitamos conocer  $n=1,2,3$  en la ec.(64.b) y en el segundo,  $n=1, \dots, 5$ . En general por cada iteración se agregan dos potencias más de  $H$ .

Ahora debemos probar nuestra aproximación en modelos no triviales. Tomemos como primer ejemplo a la ecuación de Mathieu que tiene muchísimas aplicaciones en física,

$$\left[ -\frac{d^2}{d\theta^2} - x \cos \theta \right] \psi(\theta) = E \psi(\theta) \quad . \quad (68)$$

Es la ecuación de Schrödinger para el péndulo cuántico en un campo gravitatorio, para una partícula en un potencial periódico unidimensional y para el efecto Stark de un rotador rígido. Esta ecuación también aparece en mecánica estadística para el gas de Coulomb unidimensional.<sup>49</sup> En teorías de medida esta ecuación se ha estudiado<sup>50</sup> cuidadosamente debido a su parecido con las teorías de Yang-Mills. En teorías en la red también corresponde a la ecuación de autovalores para el modelo de una plaqueta<sup>51</sup> (formulación Hamiltoniana) donde  $x$  es proporcional a  $g^4$  siendo  $g$  el acoplamiento. Por esta razón nos referiremos a la región  $x \ll 1 (x \gg 1)$  en la ec.(68) como la zona de acoplamiento fuerte(débil). La ec. de Mathieu también ha sido analizada mediante la aproximación de integral de fase.<sup>52</sup>

Trataremos de reproducir los resultados exactos conocidos para el estado fundamental de la ec.(68) usando como función de prueba

inicial a,

$$\psi_0(\theta) = \exp \left\{ \frac{\beta}{2} \cos \theta \right\}, \quad (69)$$

donde  $\beta$  es un parámetro variacional. Se puede demostrar que este Ansatz reproduce el primer término del desarrollo perturbativo en las regiones de acoplamiento fuerte y débil (ver ec.(72)). Recordemos que estados de este tipo han sido utilizados en las secciones III.b y c. La energía de orden cero es,

$$\xi_0(x, \beta) = \left( \frac{\beta}{4} - x \right) \frac{I_1(x)}{I_0(x)}, \quad (70)$$

donde  $I_n(\beta)$  son las funciones de Bessel modificadas de orden n. En la tabla 6 pueden observarse los resultados para las tres primeras iteraciones del método. El acuerdo con los valores exactos<sup>53</sup> es excelente en todo el rango de x.

La convergencia es muy rápida como se muestra en la fig.9 donde se grafica el error relativo,

$$\Delta_i = (\xi_{i+1} - \xi_i) / \xi_{i+1}, \quad (71)$$

siendo  $\xi_i$  la energía de la i-ésima iteración. Notemos que el error se reduce aproximadamente en un orden para cada iteración.  $\Delta_i$  tiene un máximo en  $x \sim 1$ .

En la fig.10 comparamos nuestros resultados con los desarrollos de acoplamiento fuerte<sup>53</sup> y débil<sup>54</sup> para el estado fundamental de la ec. de Mathieu. Por completitud reproducimos aquí los primeros sumandos de estos desarrollos (para la serie de acoplamiento débil hay más términos disponibles en la ref.54),

$$\xi_{sc} \approx -0.5 x^2 + 0.218750 x^4 - 0.204389 x^6 + 0.232907 x^8, \quad (72.a)$$

$$\xi_{wc} \approx -x + \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^8} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} - \frac{6}{2^{12} x} - \frac{53}{2^{18}} \left(\frac{x}{2}\right)^{3/2} - \frac{594}{2^{24} x^2} - \frac{7422}{2^{28}} \left(\frac{x}{2}\right)^{5/2}. \quad (72.b)$$

Notemos que nuestra energía variacional en la fig.10 (que es indistinguible del resultado exacto) interpola suavemente entre ambos desarrollos. En la tabla 7 completamos el análisis mostrando como varía el parámetro  $\beta$  que minimiza la energía en ciertos puntos representativos. De todos estos resultados se deduce que nuestro método trabaja bien

al menos para este problema de mecánica cuántica.

Como segundo ejemplo estudiemos una teoría en la red. Consideremos el modelo de Ising en una dimensión definido mediante el Hamiltoniano,

$$H = - \sum_i \sigma_i^x - x \sum_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z, \quad (73)$$

donde  $\sigma_i^x, \sigma_i^z$  son matrices de Pauli y la suma es sobre los sitios  $i$  de una red finita de  $N$  sitios (se suponen condiciones periódicas de contorno). La energía exacta del estado fundamental de la ec.(73) es bien conocida,<sup>55</sup>

$$\mathcal{E}_{\text{exacto}} = - \sum_{\substack{k=0 \\ (k \text{ impar})}}^{2N-1} \left[ (1-x)^2 + 4x \sin^2 \left( \frac{\pi k}{2N} \right) \right]^{1/2}. \quad (74)$$

Como función de prueba inicial elegimos el análogo de la ec.(69) es decir,

$$\Psi_0 = \exp \left\{ \frac{\beta}{2} \sum_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \right\} |0\rangle_{\sigma_i^x}, \quad (75)$$

donde  $|0\rangle_{\sigma_i^x}$  fue definido en la sec.III.b. La energía por sitio a orden cero es,

$$\mathcal{E}_0(x, \beta) = - \frac{[\cosh^{-2} \beta + x (\tanh \beta + \coth \beta \cdot \tanh^N \beta)]}{[1 + \tanh^N \beta]}. \quad (76)$$

En la tabla 8 podemos ver los resultados para las tres primeras iteraciones considerando cadenas de diferentes longitudes en  $x=1$  donde aparece una transición de fase para el sistema infinito. En la tabla 9 también mostramos el resultado para la tercera iteración en  $x=0.5$  y  $2$ . El acuerdo con los valores exactos es excelente. La convergencia es más rápida en el régimen de acoplamiento fuerte debido a que el estado ec.(75) reproduce los primeros valores de la serie perturbativa para  $x \ll 1$  al menos para la cadena infinita, mientras que en la zona de acoplamiento débil sólo proporciona el sumando principal. Los resultados son muy buenos y demuestran que el método es capaz de tratar sistemas en la red.

En resumen en esta sección hemos propuesto un método sistemático para mejorar un estado de prueba en la aproximación variacional. Los resultados muestran que la técnica trabaja bien y converge muy rápido a la energía correcta del estado fundamental de los modelos analizados. En futuras publicaciones aplicaremos el método a teorías de medida en una red finita, usando técnicas de extrapolación bien conocidas<sup>55</sup> para obtener los resultados del sistema infinito. Seguiremos esta aproximación porque no podemos evaluar  $\langle H \rangle_0$  exactamente en una red infinita para teorías de medida realistas (al menos para el tipo de funciones de prueba utilizadas en este trabajo). Por supuesto nuestro mayor interés es aplicar estas ideas a sistemas no abelianos en 3+1 dimensiones. Otra aplicación interesante reside en el grupo de renormalización en espacio real<sup>56</sup> donde es necesario evaluar los estados de menor energía de un bloque de variables.

Luego de finalizado este trabajo recibimos un preprint<sup>57</sup> donde también se propone un método variacional mejorado para sistemas en la red, el cual tiene muchas similitudes con nuestra técnica. Por ejemplo en ambos casos es necesaria la evaluación de  $\langle H \rangle_0$  (ec. (64.b)). Una comparación detallada entre ambas aproximaciones sería muy interesante.

### III.e Conclusiones

En las secciones precedentes hemos estudiado mediante el método variacional Hamiltoniano diversas teorías de medida en la red. Los resultados son aceptables y pueden ser mejorados sistemáticamente mediante la técnica desarrollada en la sec. III.d. Debido a que en la formulación Hamiltoniana no existen resultados precisos equivalentes a los valores que se obtienen con simulaciones de Monte Carlo en la formulación Lagrangiana, no hemos podido comparar nuestras predicciones con valores confiables. Sin embargo, de observar la convergencia de la energía del estado fundamental a medida que se mejoran los estados de prueba puede estimarse la confiabilidad de un cierto valor numérico.

Existen numerosos problemas aún no estudiados mediante la técnica variacional. Por ejemplo el reproducir la transición de fase presente en la teoría  $SO(3)$  parece ser una tarea difícil con estados tipo plaqueta independiente. Nuevos estados con correlaciones entre

plaquetas deben ser propuestos. La introducción de campos de materia en el cálculo es también muy importante. Por completitud en la ref.58 se citan muchos otros trabajos vinculados con la técnica variacional la que se ha convertido en un tema de gran importancia en el ámbito de las teorías de medida en la red.

REFERENCIAS

1. A. Messiah, "Mecánica Cuántica", vol.2, cap.18 (ed. Tecnos, 1965).
2. S. Drell, H. Quinn, B. Svctitsky y M. Weinstein, Phys. Rev. D19, 619 (1979).
3. J. Kogut y L. Susskind, Phys. Rev. D11, 395 (1975).
4. J. Cardy y H. Hamber, Nucl. Phys. B170 (FS1), 79 (1980).
5. P. Suranyi, Nucl. Phys. B210, 519 (1982).
6. T. Hofsäss y R. Horsley, Phys. Lett. 123B, 65 (1983).
7. H. Arisue, M. Kato y T. Fujiwara, Prog. Theor. Phys. 70, 229 (1983)
8. J. Crispim Romão y R. Vilela Mendes, CERN 3427;  
J. Crispim Romão, S. Eleutério y R. Vilela Mendes, Lisboa preprint (1984);  
R. Vilela Mendes, Bielefeld preprint (1984).
9. W. Langguth, DESY T-83-03.
10. D. Boyanovsky, R. Deza y L. Masperi, Phys. Rev. D22, 3034 (1980).
11. D. Horn y E. Katznelson, Phys. Lett. 91B, 397 (1980);  
D. Horn y E. Katznelson, Nucl. Phys. B190 (FS3) 237 (1981);  
D. Horn, Phys. Rep. 67C, 103 (1980);  
D. Horn y S. Yankielowicz, Phys. Lett. 85B, 347 (1979).
12. C. Omero, Phys. Lett. 110B, 265 (1982).
13. L. Masperi y C. Omero, Phys. Lett. 107B, 207 (1981).
14. D. Horn y M. Karliner, Fermilab preprint 83/61.
15. C. Omero, A. Della Selva, R. Deza, N. Parga y L. Masperi, Phys. Rev D26, 3641 (1982).
16. T. Eguchi y S. Wadia, Phys. Rev. Lett. 43, 665 (1979).
17. D. Horn y M. Weinstein, Phys. Rev. D25, 3331 (1982).
18. P. Suranyi, Phys. Lett. 122B, 279 (1983).
19. U. Heller, Phys. Rev. D23, 2357 (1981).
20. S. Drell, M. Weinstein y S. Yankielowicz, Phys. Rev. D16, 1769 (1977)
21. N. Hari Dass, A. Patkós y F. Deák, Nucl. Phys. B205 (FS5), 414 (1982)  
N. Hari Dass, P. Lauwers y A. Patkós, Phys. Lett. 130B, 292 (1983).
22. R. Pearson, Phys. Rev. D14, 1686 (1976); Phys. Rev. B16, 1109 (1977);  
R. Blankenbecler y J. Fulco, Phys. Rev. D17, 514 (1978).
23. E! Dagotto y A. Moreo, Phys. Rev. D29, 300 (1984).
24. H. Bethe, Proc. R. Soc. London 150, 552 (1935); R. Peierls, *ibid* 154 207 (1936).
25. R. Jengo, comunicación personal.
26. J. Kogut, Rev. Mod. Phys. 51, 659 (1979).

27. L. Marland, J. Phys. A14, 2047 (1981).
28. A. Hasenfratz, E. Hasenfratz y P. Hasenfratz, Nucl. Phys. B180(FS2) 353 (1981).
29. J. Banks y D. Sinclair, Phys. Rev. D23, 2962 (1981).
30. J. Kogut, R. Pearson, J. Shigemitsu y D. Sinclair, Phys. Rev. D22, 2447 (1980).
31. V. Alessandrini, V. Hakim y A. Krzywicki, Nucl. Phys. B200(FS4), 355 (1982).
32. E. Dagotto y A. Moreo, Phys. Rev. D29, 2350 (1984).
33. R. Feynman, Nucl. Phys. B188, 479 (1981).
34. M. Halpern, Phys. Rev. D19, 517 (1979).
35. E. Dagotto, L. Masperi y A. Moreo, Bariloche preprint.
36. P. Ruján, Physica 96A, 379 (1979).
37. R. Anishetty y A. Bovier, Phys. Lett. 135B, 435 (1984).
38. R. Jastrow, Phys. Rev. 98, 1479 (1955).
39. E. D'Hoker, Nucl. Phys. B180(FS2), 341 (1981);  
J. Ambjørn, A. Hey y S. Otto, Nucl. Phys. B210(FS6), 347 (1982).
40. G. Batrouni, Nucl. Phys. B208, 12 (1982).
41. G. Münster, Phys. Lett. 95B, 59 (1980).
42. A. Patkós y F. Deák, Z. Phys. C9, 359 (1981);  
A. Patkós, Phys. Lett. 110B, 391 (1982).
43. S. Caracciolo y P. Menotti, Nucl. Phys. B180 (FS2), 428 (1981);  
M. Nauenberg y D. Toussaint, Nucl. Phys. B190(FS3), 217 (1981).
44. J. Greensite, Nucl. Phys. B158, 469 (1979); B166, 113 (1980).
45. D. Horn y M. Karliner, Fermilab preprint 83/61.
46. E. Dagotto y A. Moreo, "An improved Hamiltonian variational technique for lattice models", Bariloche preprint.
47. C. Lanczos, J. Res. Nat. Bur. Stand. 45, 255 (1950);  
H. Roomany y H. Wyld, Phys. Rev. D21, 3341 (1980).
48. J. Alberty, J. Greensite y A. Patkós, "Extending the reach of strong coupling: an iterative technique for Hamiltonian lattice models", NBI-HE-83-35.
49. A. Lenard, J. Math. Phys. 2, 682 (1961).
50. H. Neuberger, Phys. Rev. D17, 498 (1978).
51. D. Robson y D. Webber, Z. Phys. C7, 53 (1980);  
S. Wadia, Phys. Lett. 93B, 403 (1980).
52. E. Floyd, J. Math. Phys. 17, 880 (1976);  
N. Fröman, J. Phys. A12, 2355 (1979).

53. National Bureau of Standards (NBS) , "Tables relating to Mathieu functions", 2nd.ed.(U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.,1967).
54. M. Stone y J. Reeve, Phys. Rev. D18, 4746 (1978).
55. C. Hamer y M. Barber, J. Phys. A14, 241 (1981).
56. S. Drell, M. Weinstein y S. Yankielowicz, Phys. Rev. D16, 1769 (1977).
57. D. Horn y M. Weinstein, "The t-expansion: A non perturbative analytic tool for Hamiltonian systems", SLAC-Pub-3322.
58. S. Drell, M. Weinstein y S. Yankielowicz, Phys. Rev. D14, 487 y 1627 (1976);  
S. Drell, B. Svetitsky y M. Weinstein, SLAC-Pub-1999(agosto 1977);  
S. Drell y M. Weinstein, Phys. Rev. D17, 3203 (1978);  
R. Pearson, Phys. Rev. A18, 2655 (1978);  
S. Ben-Menahem, Phys. Rev.D20, 1923 (1979);  
A. Patkós y F. Ruján, Phys. Lett. 88B, 363 (1979);  
S. Svetitsky, S. Drell, H. Quinn y M. Weinstein, Phys. Rev.D22; 490 (1980);  
D. Horn, Phys. Rev. D23, 1824 (1981);  
J. Bronzan, Phys. Rev. D23, 2349 (1981);  
G. Aldazabal, D. Boyanovsky, V. Baltar,L. Masperi y C. Omero,Phys Rev.D24, 2274 (1981);  
J. Greensite y J. Primack, Nucl. Phys. B180, 170 (1981);  
M. Weinstein, Phys. Rev. D26, 839 (1982);  
R. Jengo, L. Masperi y C. Omero, Nucl. Phys.B200(FS4), 121 (1982).  
T. Banks y A. Zaks, Nucl. Phys. B200, 391 (1982);  
G. Fox, R. Gupta, O. Martin y S. Otto, Nucl. Phys.B205(FS5), 188 (1982);  
N. Hari Dass, P. Lauwers y A. Patkós, NIKHEF-H/82-22;  
N. Hari Dass y P.Lauwers, NIKHEF-H/82-23;  
A. Patkós y N. Hari Dass, NBI-HE-82-18 y 28;  
C. Di Lieto, Phys. Rev. D28, 373 (1983);  
R. Gupta, CALT-68--1010 (marzo 1983);  
A. Patkós, ITP-Budapest report n°422 (junio 1983);  
M. Hellmund, KMU-HEP 83-10 (octubre 1983);  
T. Matsui, PURD-TH-83-6;  
N. Hari Dass, P. Lauwers y A. Patkós, NIKHEF-H/83-10 y 34;  
P. Amundsen y P. Damgaard, Phys. Rev. D29, 323 (1984)
59. M. Fisher y D. Gaunt, Phys. Rev. 133, A224 (1964).
60. G. Martinelli y G. Parisi, Nucl. Phys.B180(FS2), 201 (1981).

61. E. Fradkin y S. Raby, Phys. Rev. D20,2566 (1979).
62. P. Pfeuty y R. Elliot, J. Phys. C4,2370 (1971).
63. H. Roomany y H. Wylđ, Phys. Rev. D21,3341 (1980).
64. A. Irving y A. Thomas ,Nucl. Phys.B200 (FS4),424 (1982).
65. J. Kogut y D. Sinclair, Phys. Lett. 81A,149 (1981).
66. D. Horn y S. Yankielowicz, Nucl. Phys. B161,533 (1979);  
H. Hamber, Phys. Rev. D24,941 (1981).

EXPLICACION DE LAS TABLAS :

1. Resultados para  $\beta_c$  obtenidos a partir de la ec.(22) (a,b,c,d,e) y por medio de la aproximación de probabilidad media ec.(23) (a',b',c',d',e') en función de la dimensión. Los resultados "exactos" provienen de la ref.59 y los de decimación de la ref.60.
2. Valores críticos para el modelo Z(2) de medida en 2+1 dimensiones usando diferentes aproximaciones (A), en comparación con nuestros resultados (B) (los números entre corchetes indican el número de parámetros variacionales y X la cantidad de plaquetas consideradas exactamente).
3. Energía perturbativa y variacional mejorada para  $\lambda=2$  y 3 en el modelo Z(2) de medida en 2+1 dimensiones (X indica las plaquetas consideradas exactamente).
- 4.a Energía variacional en 2+1 dimensiones usando el estado ec.(50) con diferente número de parámetros variacionales ( $\lambda=4$  y 8 como ej.).
- 4.b Valores de los parámetros  $\beta_j$  correspondientes a la última columna de la tabla 4.a.
5.  $\langle \text{tr}_{\lambda} U \rangle$  a partir de la ec.(57) para diferentes valores de  $j_{\dots, \lambda}$  ( $\beta=8$  y 15 como ejemplos). La última columna es un fiteo de los resultados de Monte Carlo<sup>39</sup> es decir  $\langle \text{tr}_{\lambda} U \rangle \approx 2 - \frac{(\beta^4 - 0.5)}{2} \beta^{-2}$ .
6. La energía  $\xi_i$  de la i-ésima iteración comparada con el resultado exacto para la energía del estado fundamental de la ecuación de Mathieu en algunos valores representativos de x (se omite el signo(-) para todas las energías).
7. Evolución del parámetro variacional  $\beta_m$  que minimiza la energía de cada iteración. Los valores correspondientes para la tercer iteración son aproximadamente iguales a los de la segunda.
8. La energía por unidad de sitio  $\xi_i$  obtenida mediante nuestro método iterativo para el estado fundamental de la cadena de Ising con N sitios en x=1, comparados con los valores exactos (el signo (-) de todas las energías se omite).
9. La energía por unidad de sitio  $\xi_3$  para el modelo de Ising comparada con los valores exactos en x=0.5 y 2. N es el número de sitios (para N=2 la energía  $\xi_4$  es virtualmente idéntica a  $\xi_{\dots, 1}$  como en x=1 y por ello no la mostramos en la tabla).

EXPLICACION DE LAS FIGURAS :

1. Comportamiento del parámetro variacional ( $\beta^m$ ) que minimiza la energía en una transición de primer orden (a) o segundo orden (b) en función del acoplamiento  $\lambda$ .
2. Volúmenes considerados exactamente en la aproximación de Bethe-Peierls. Las líneas continuas indican uniones tratadas exactamente. Las líneas rayadas señalan el acoplamiento con el campo medio (solo mostramos algunos de ellos). Los círculos llenos son llamados sitios interiores y los abiertos son sitios de frontera.
3. Plaquetas consideradas en los diversos estados de prueba usados en la aproximación variacional Hamiltoniana mejorada.
4. Desarrollos de acoplamiento fuerte y débil para el estado fundamental de la energía.
5. Energía variacional en 2+1 dimensiones usando el estado ec.(43). La línea rayada representa el primer orden en un desarrollo perturbativo ( $E = -\lambda^{3/2}/3$ ).
6.  $\langle \text{tr}_{1/2} U \rangle$  en la aproximación de plaqueta media en una teoría de medida SU(2) Lagrangiana (línea continua) en 3 dimensiones (con  $j_{\text{máx}} = 1/2$  en la ec.(57)) comparado con resultados de Monte Carlo (•) tomados de la ref.39 y desarrollos en serie (línea punteada-rayada) de la ref. 41.
7. Energía variacional en 3+1 dimensiones usando el estado ec.(43) y  $j_{\text{máx}} = 1/2$  en la ec.(57). La línea rayada representa el primer orden en un desarrollo perturbativo ( $E = -\lambda^{3/2}/3$ ) mientras la línea punteada-rayada es la energía variacional usando el estado de unión ec.(59) (no invariante ante transformaciones de medida).
8. Evolución del parámetro variacional ( $\beta_m$ ) que minimiza la energía en 3+1 dimensiones usando el estado ec.(43). La línea rayada representa el primer orden del desarrollo perturbativo ( $\beta_m = 2\lambda/3$ ).
9. El error relativo  $\Delta_i = (\xi_{\text{exacto}} - \xi_i) / \xi_{\text{exacto}}$  para la ecuación de Mathieu. x está en la zona de máximo error.
10. Gráfico de la energía  $\xi_3$  de la tercera iteración para la ecuación de Mathieu (línea continua) comparada con el desarrollo de acoplamiento fuerte (SC) (ec.(72.a)) (línea rayada) y el de acoplamiento débil (WC) (ec.(72.b)) (línea rayada-punteada). El resultado exacto para el estado fundamental de este modelo es indistinguible de  $\xi_3$ .

dimension	a	a'	b	b'	c	c'	d	d'	e	e'	"exact"	Decimation
2	.2500	.2554	.2927	.2971	.2978	.3020	.3022	.3061	.3073	.3112	.4407	.4407
3	.1667	.1682	.1836	.1846	.1849	.1859	.1861	.1871	.1868	.1877	.2217	.24
4	.1250	.1257	.1340	.1344	.1346	.1350	.1351	.1354	.1352	.1356	.1499	.13
5	.1000	.1003	.1056	.1058	.1059	.1061	.1061	.1063	.1062	.1064	.1140	.06

Table 1

Tabla 2

	Renormalization group	Finite Lattice	Perturbative expansion	1/N expansion
critical parameter $\lambda_c$	3.28 (ref.61) 3.33 (ref.66)	3.125(ref.63) 3.23 (ref.64)	3.08(ref.62)	3.055(ref.65)

Tabla 2 A

					X X X
			X X	X X X	X X X
	X	XX	X X	X X X	X X X
critical parameter $\lambda_c$	4.00[1]	3.85[2]	3.68[4],3.70[2]	3.61[5],3.63[2]	3.55[5],3.58[2]

Tabla 2 B

	Perturbative Energy Eq. (34)	Variational energy				
		X	X X	X X	X X X	X X X
$\lambda = 2$	-1.2555	-1.2500	-1.2512	-1.2525	-1.2529	-1.2533
$\lambda = 3$	-1.5926	-1.5625	-1.5683	-1.5752	-1.5768	-1.5789

Tabla 3

TABLA 4

(a)					
Maximum representation considered in Eq. (50)					
	$\lambda$	1/2	1	3/2	2
Variational Energy	4	-3.3194	-3.3329	-3.3334	-3.3335
	8	-8.8248	-8.8408	-8.8412	-8.8412

(b)					
	$\lambda$	$B_{1/2}$	$B_1$	$B_{3/2}$	$B_2$
	4	2.421	-0.232	0.040	-0.005
	8	3.238	-0.285	0.029	0.008

TABLA 5

$j_{\max}$						
$B$	1/2	1	3/2	2	MC	
$\langle \text{tr}_{1/2} U \rangle$	8	0.847	0.872	0.872	0.871	0.870
	15	0.911	0.920	0.927	0.931	0.932

Tabla 6

$x$	$\epsilon_0$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_3$	$\epsilon_{\text{exact}}$
0.2	0.019616	0.019660	0.019661	0.019662	0.019662
0.6	0.156542	0.158303	0.158355	0.158357	0.158358
1.0	0.372644	0.378172	0.378456	0.378478	0.378489
2.0	1.056478	1.069194	1.069984	1.070079	1.070130
5.0	3.469634	3.483862	3.484201	3.484233	3.484245
10.0	7.819052	7.828273	7.828344	7.828347	7.828347

Tabla 7

$x$	I T E R A T I O N S		
	0	1	2
0.6	1.05	1.08	1.09
1.0	1.52	1.59	1.61
2.0	2.29	2.36	2.40
5.0	3.53	3.51	3.54

Tabla 8

N	$\epsilon_0$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_3$	$\epsilon_{\text{exact}}$
2	1.414212	1.414214	1.414214	1.414214	1.414214
4	1.295736	1.306562	1.306563	1.306563	1.306563
6	1.262972	1.286631	1.287754	1.287768	1.287901
8	1.253184	1.276674	1.280274	1.281069	1.281458
10	1.250757	1.270855	1.275597	1.277208	1.278490

Tabla 9

N	X = 0.5		X = 2.0	
	$\epsilon_3$	$\epsilon_{\text{exact}}$	$\epsilon_3$	$\epsilon_{\text{exact}}$
4	1.067889	1.067889	2.135779	2.135779
6	1.064113	1.064116	2.128215	2.128231
8	1.063631	1.063635	2.127043	2.127270
10	1.063554	1.063560	2.126515	2.127121

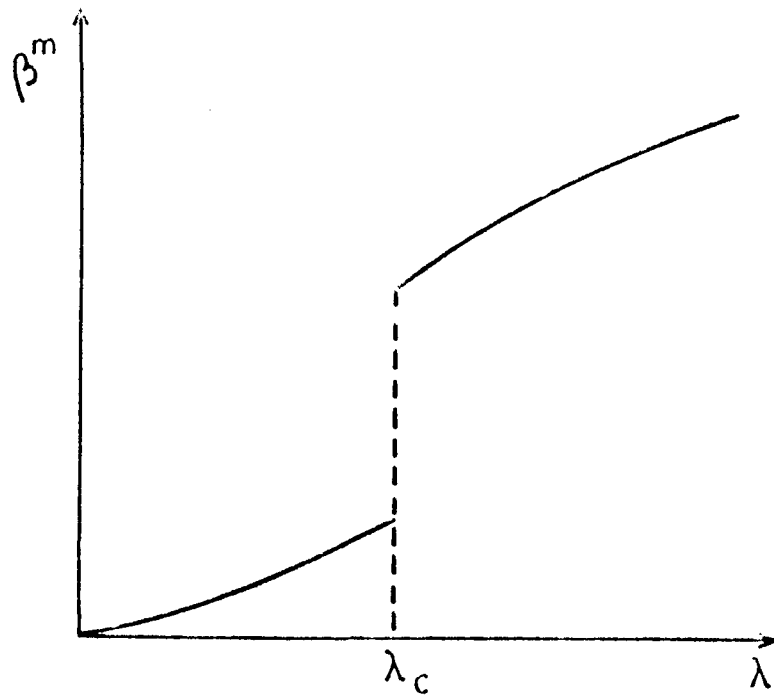


Fig.1 a

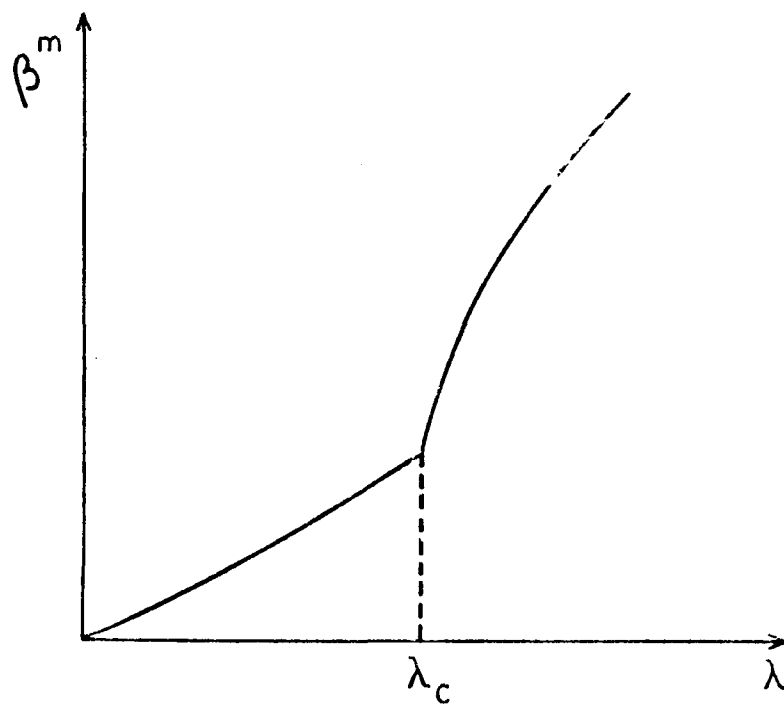
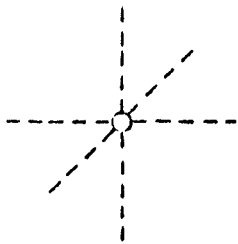
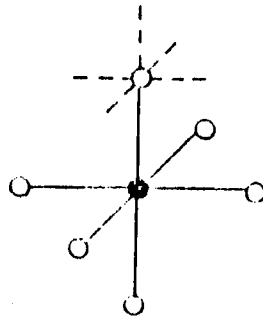


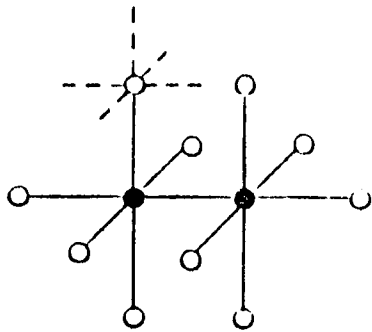
Fig.1 b



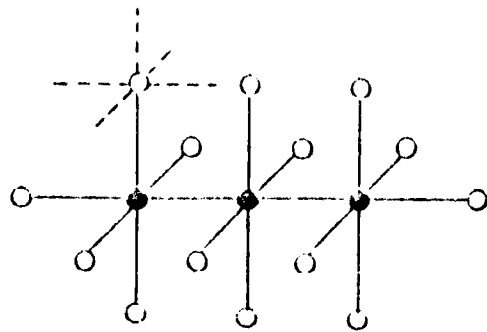
(1a)



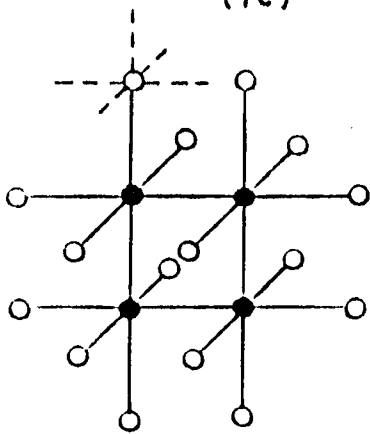
(1b)



(1c)



(1d)



(1e)

Fig. 2

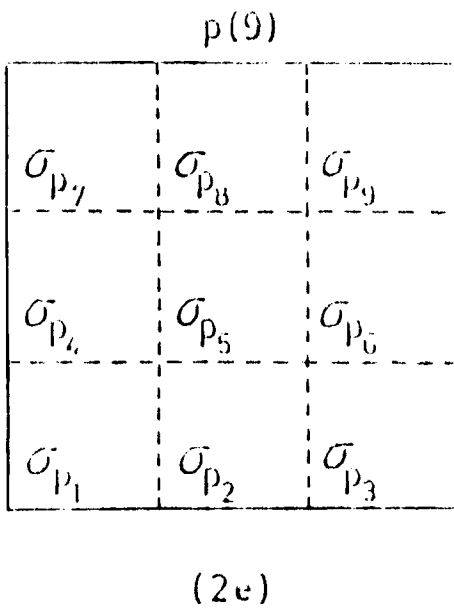
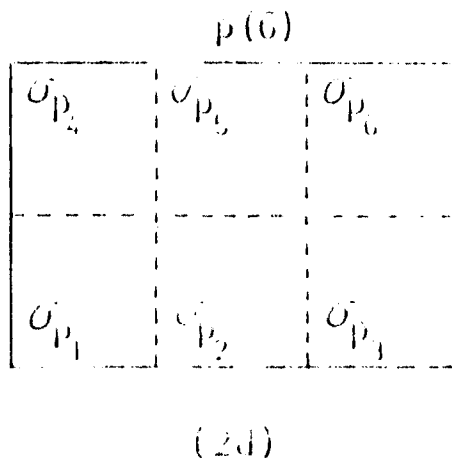
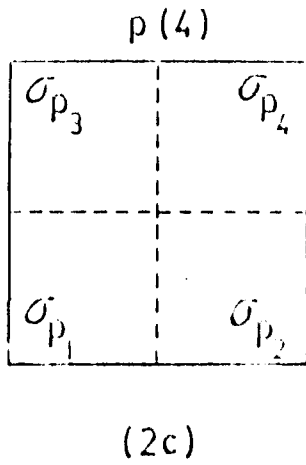
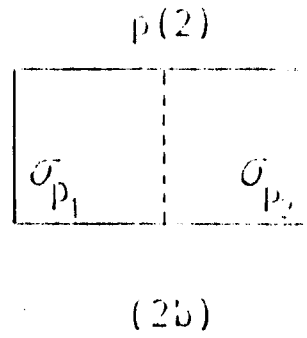
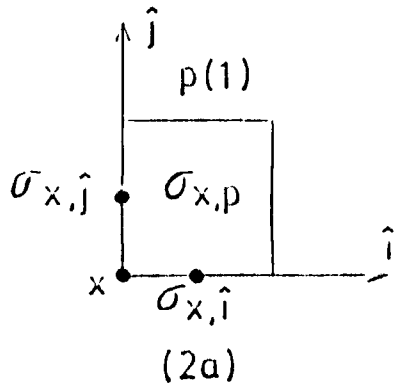


Fig. 3

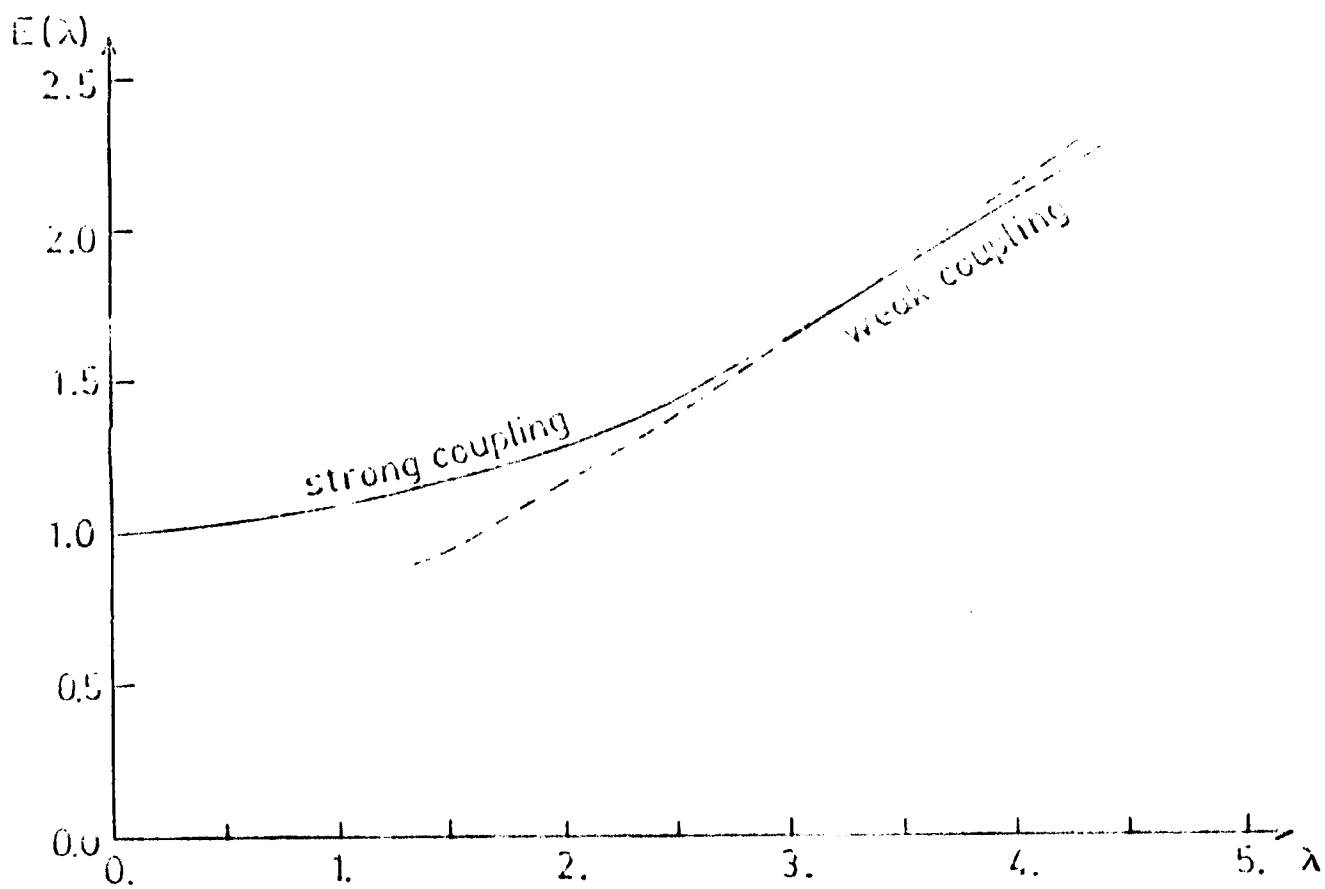


Fig. 4

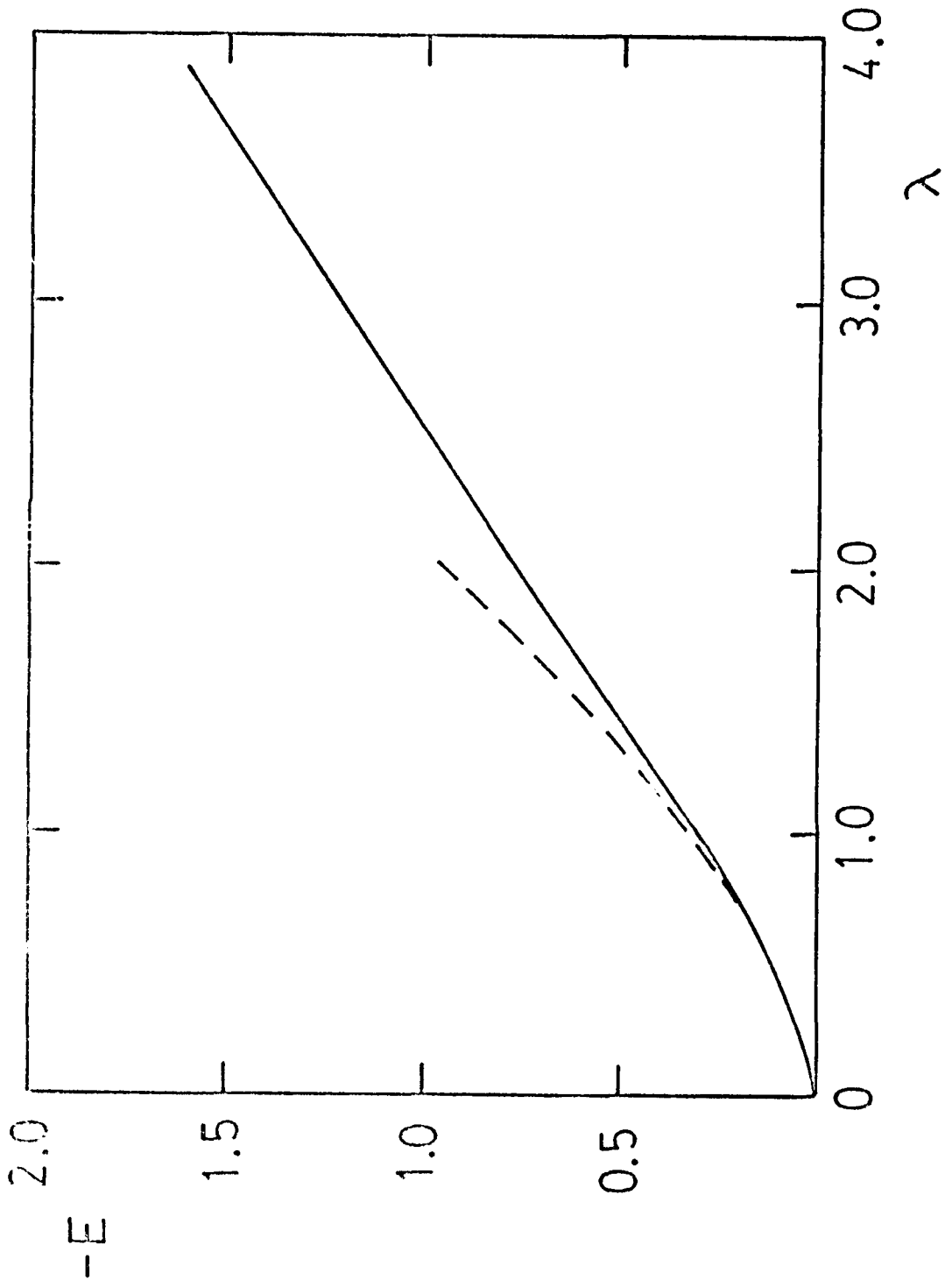


Fig. 5

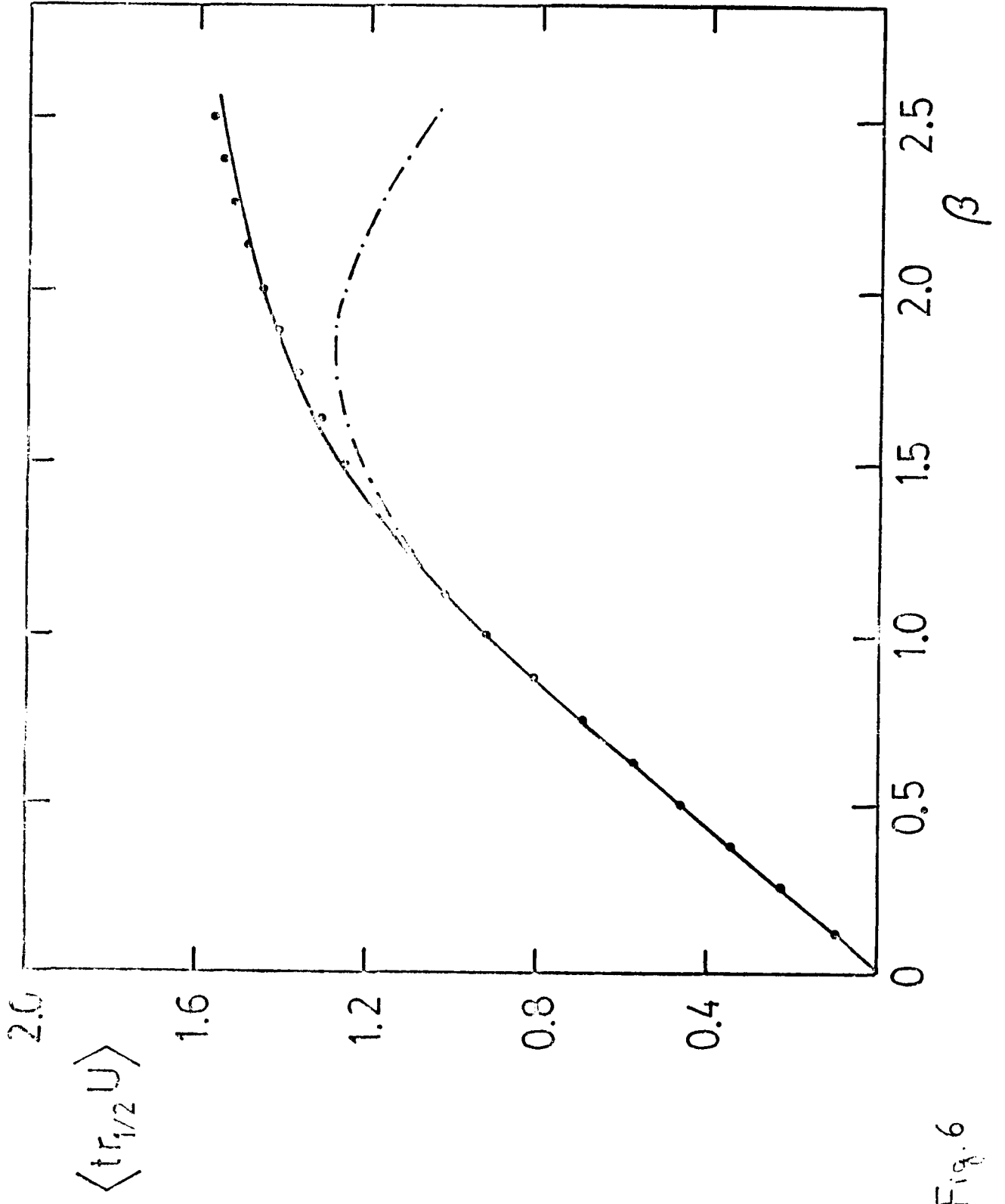


Fig. 6

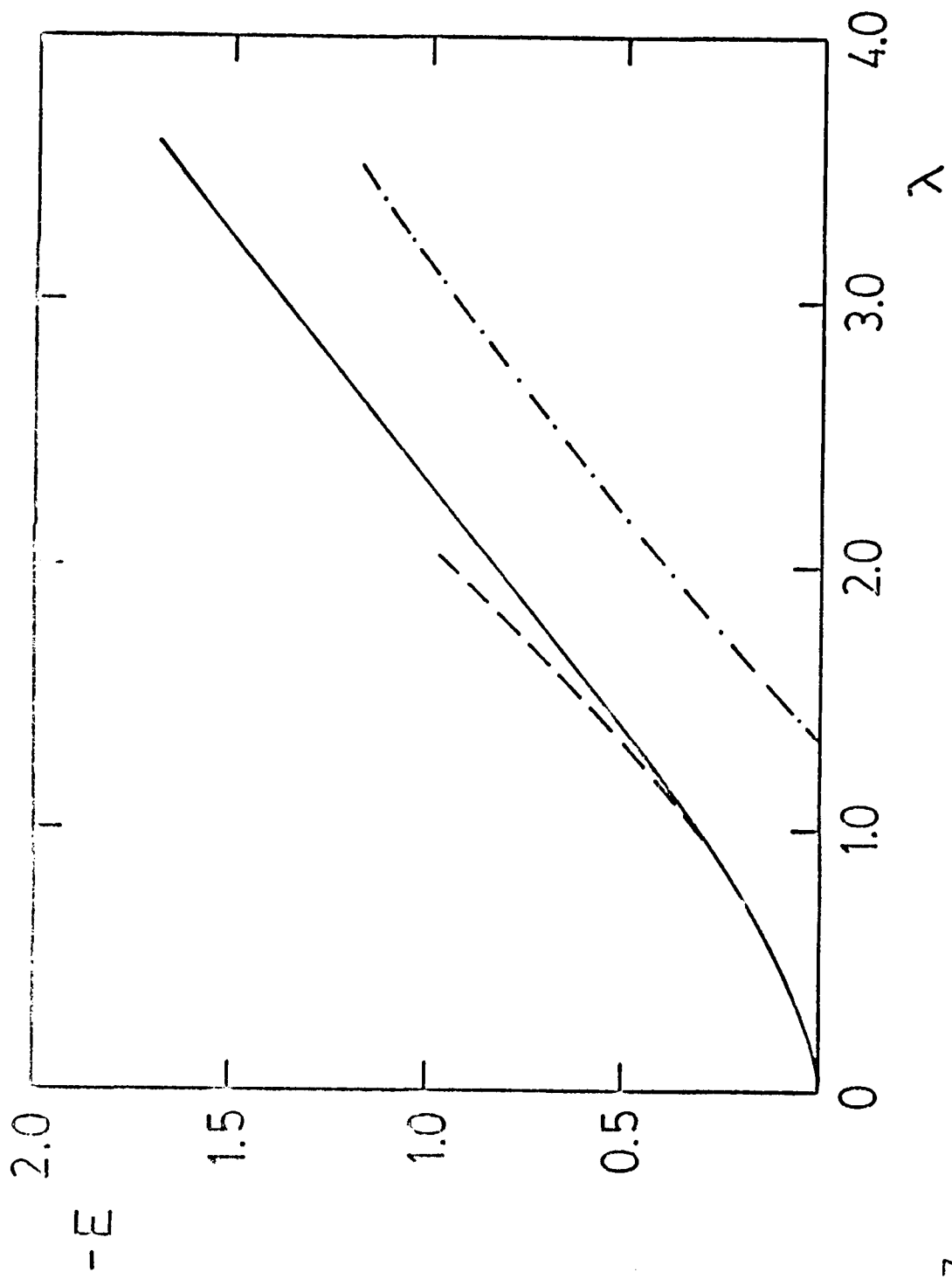


Fig. 7

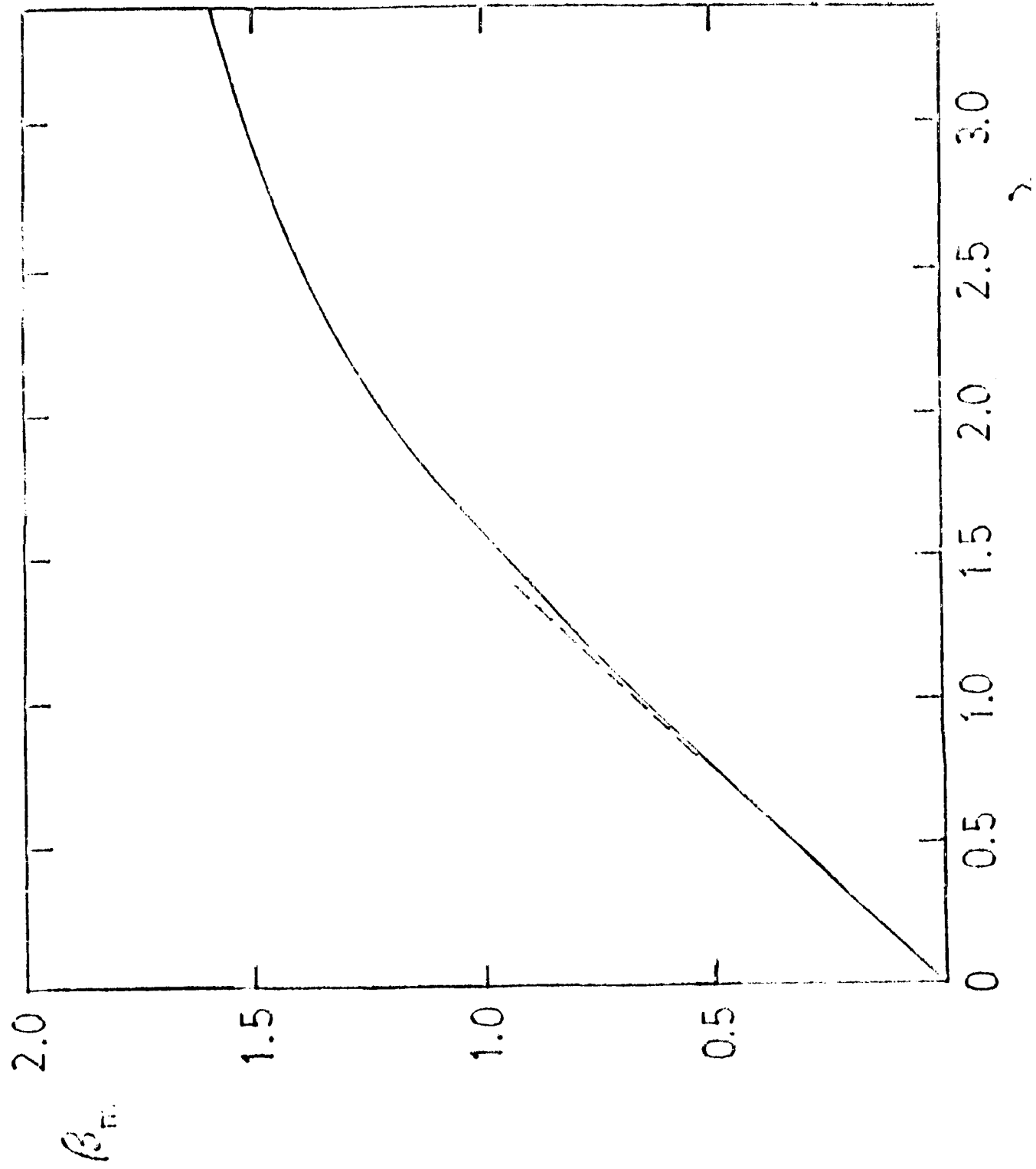


Fig.8

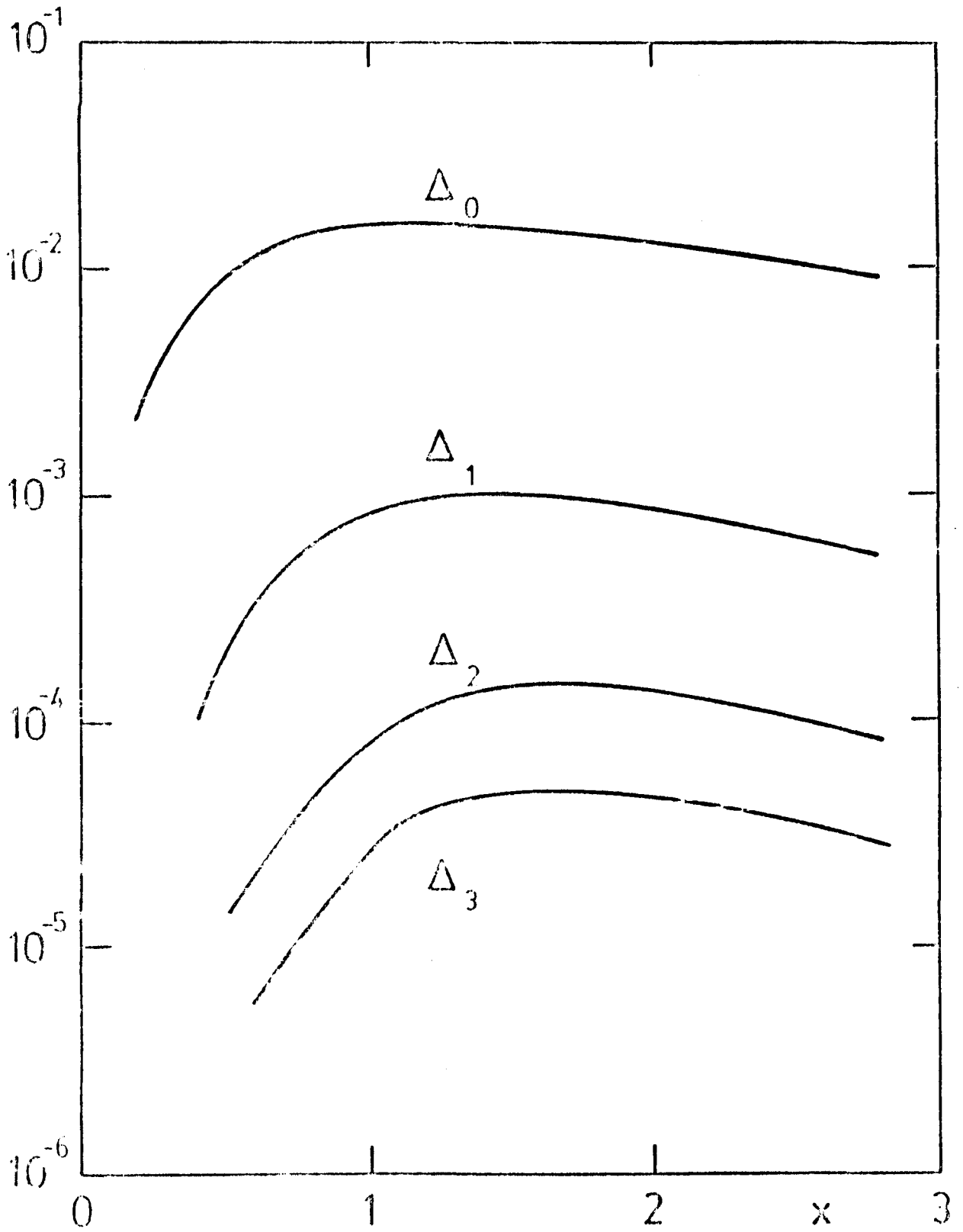


Fig.9

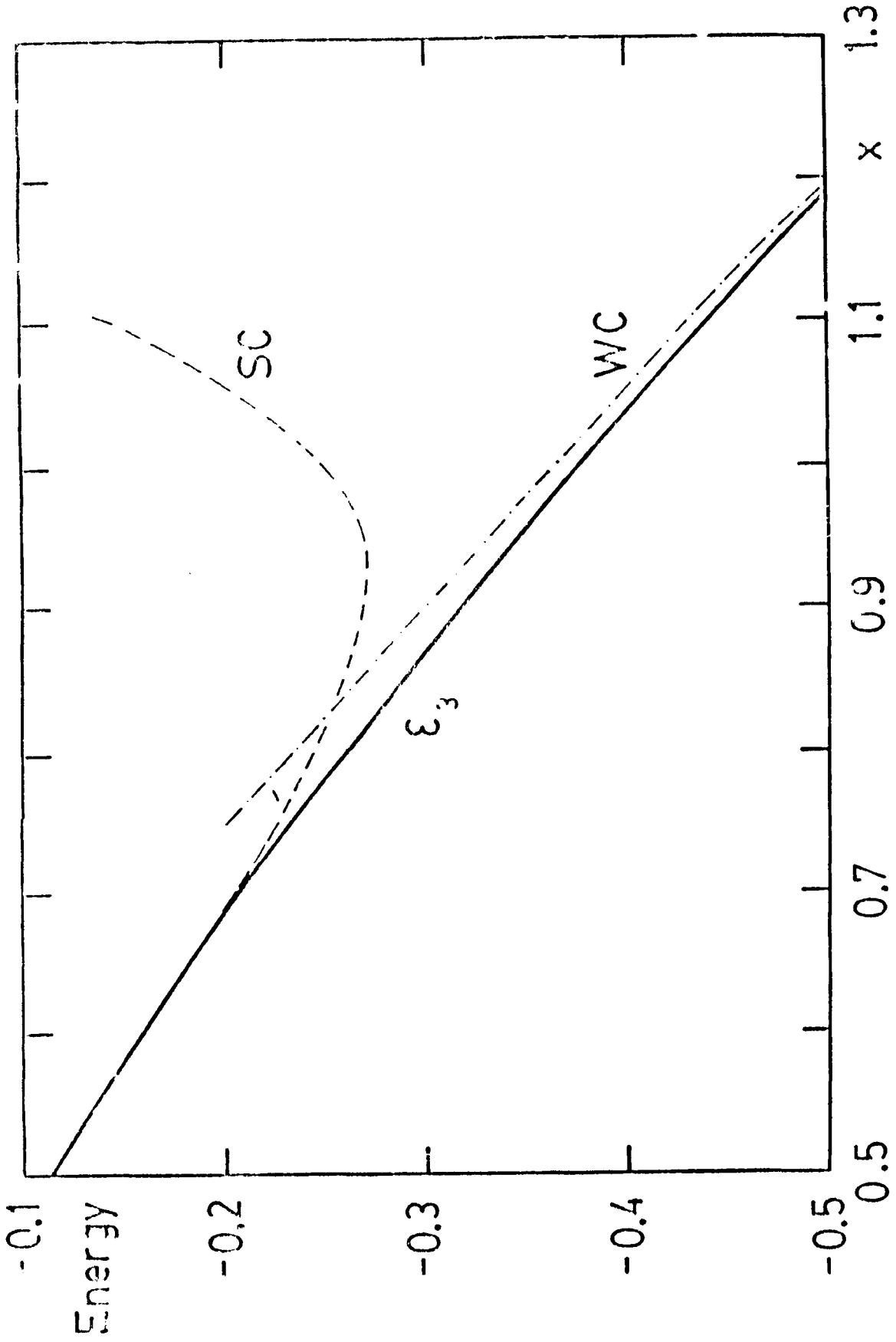


Fig.10

CAPITULO IV

CAMPO MEDIO EN VARIABLES DE  
PLAQUETA

IV.a Desarrollo del formalismo

En el contexto de las teorías de medida en el continuo se ha demostrado<sup>1</sup> que mediante el cambio de variables del potencial vector  $A_\mu(x)$  al tensor de fuerzas  $F_{\mu\nu}(x)$ , la funcional generatriz en el vacío<sup>2</sup> (función de partición) puede escribirse como,

$$Z = \int \mathcal{D}F(x) \delta\{I[F(x)]\} e^{-\frac{1}{4} \int d^4x F^2(x)}, \quad (1)$$

donde la función  $I[F(x)]$  representa la identidad de Bianchi<sup>3</sup> en cada punto del espacio o sea, (QED)

$$I[F(x)] = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\nu\rho}, \quad \mu, \nu, \rho, \sigma = 0, 1, 2, 3, \quad (2)$$

En la demostración de la ec.(1) se ha adoptado la medida axial es decir,  $A_3(t, x, y, z) = A_1(t, x, y, z_0) = A_2(t, x_0, y, z) = A_0(t, x_0, y_0, z) = 0$ , donde  $(t_0, x_0, y_0, z_0)$  es un cierto punto arbitrario del espacio-tiempo.

La versión en la red de la ec.(1) se obtiene mediante el cambio de variables de unión ( $U_\mu(x)$ ) a plaqueta ( $U_\mu$ ) y ha sido desarrollada en la ref.4 siguiendo las ideas de la versión en el continuo. La expresión final para la función de partición de una teoría que sólo incluya campos de medida es,

$$Z = \prod_p \int dU_p \prod_c \delta(U_c - 1) e^{S(\{U_p\})}, \quad (3)$$

donde  $S(\{U_p\})$  es una cierta acción arbitraria dependiente de las variables de plaqueta y  $\prod_c \delta(U_c - 1)$  nos indica que la integración debe realizarse teniendo en cuenta el vínculo  $U_c = 1$  en cada cubo tridimensional ( $c$  (identidad de Bianchi en la red)). Por ej. para la QED en tres dimensiones (indicando cada variable de plaqueta mediante dos direcciones

y un sitio, es decir  $U_{\mu\nu}(x) = U_p$ ,  $U_c$  es,

$$U_c = U_{12}(x+\hat{z})U_{12}^*(x)U_{13}(x)U_{13}^*(x+\hat{y})U_{23}(x+\hat{x})U_{23}^*(x), \quad (4)$$

donde cada variable de unión pertenece al grupo  $U(1)$ . En otras palabras, la ec.  $U_c=1$  indica que el flujo de campo magnético proveniente de cada cubo de la red se debe anular (cubo espacial).

Destaquemos que en el caso bidimensional no hay cubos y por lo tanto la transformación unión-plaqueta tiene jacobiano 1 en lugar de las identidades de Bianchi, lo cual permite que la función de partición se factorice. Hemos utilizado este hecho en la sec. III.b al resolver exactamente el modelo equivalente al  $Z(2)$  de medida Hamiltoniano en 2+1 dimensiones.

El hecho de que aparezca el vínculo  $U_c=1$ , puede visualizarse fácilmente a partir de la ec. (4) reemplazando cada variable de plaqueta por un producto de cuatro variables de unión (ver sec. I.c). Cada una de estas últimas aparece dos veces, conjugada y sin conjugar y por lo tanto  $U_c$  es igual a 1. En el caso no abeliano existen ciertas complicaciones que se discutirán en la sección IV.b.

Luego de escribir la función de partición en términos de variables de plaqueta como en la ec. (3) estamos en condiciones de realizar la aproximación de plaqueta media<sup>5,6</sup> la cual es muy similar a la técnica de campo medio "naive" descrita en la sec. II.a. Consideremos que todas las variables de plaqueta en la red se igualan a su valor medio salvo una que es mantenida "viva". La ecuación de autoconsistencia resultante es (recordar sec. II.c),

$$\langle P_m \rangle = \langle \text{Re } U^m \rangle \simeq \frac{1}{Z} \sum_{\substack{\{m_i = -\infty\} \\ i=1,2,3,4}}^{+\infty} \prod_{i=1}^4 \langle P_{m_i} \rangle^5 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos(m\theta) e^{i \sum_j m_j \theta} \quad (QED) \quad (5)$$

y debemos buscar raíces de la misma que pertenezcan al intervalo (0,1) Notemos que al ser la variable de plaqueta una magnitud invariante ante transformaciones de medida, su valor medio puede ser distinto de cero al contrario de lo que ocurre en la versión "naive" del campo medio en variables de unión (sec. II.a).

En la ec. (3) sobreviven cuatro identidades de Bianchi si la dimensión de la red es 4. En la ec. (5) se han desarrollado en caracteres las funciones delta,

$$\delta(U_c - 1) = \sum_{n_i = -\infty}^{+\infty} \chi_m(U_c) . \quad (6)$$

Para el caso de una teoría abeliana como la considerada aquí,  $\chi_m(U_c) = U_c^m$ . Además recordemos que de cada cubo sólo se ha mantenido "viva" la plaqueta U es decir,

$$\chi_m(U_c) \simeq \langle P_m \rangle^5 \chi_m(U) . \quad (7)$$

Destaquemos que se ha introducido una variable distinta por cada potencia de U al igual que en la sec. II.c y d. La ec. (5) es aún demasiado complicada y no puede resolverse exactamente para un grupo con infinitas representaciones. En consecuencia truncamos las sumas en la ec. (6) manteniendo las representaciones de menor dimensión. Por ej. si se permite que  $n_i$  tome sólo el valor 0 se obtiene para la energía por unidad de plaqueta,

$$\langle P_1 \rangle = \frac{I_1(\beta)}{I_0(\beta)} . \quad (8)$$

La ec. (8) coincide con el primer orden del desarrollo en caracteres de  $\langle P_1 \rangle$ . Si se permite además que  $n_i$  tome los valores  $\pm 1$  se debe resolver la siguiente ecuación de autoconsistencia,

$$\langle P_1 \rangle = \frac{I_1(\beta) + 4 \langle P_1 \rangle^5 (I_2(\beta) + I_0(\beta))}{I_0(\beta) + 8 \langle P_1 \rangle^5 I_1(\beta)} , \quad \langle P_m \rangle = \langle P_m \rangle , \quad (9)$$

la cual en el límite  $\langle P_1 \rangle \ll 1$  nos permite recuperar los dos primeros sumandos de la serie de acoplamiento fuerte. En consecuencia el desarrollo en caracteres al cual nos referimos en I.g se reproduce en la aproximación de plaqueta media de la siguiente manera: al no considerar ninguna identidad de Bianchi ( $n_i = 0$ ) se obtiene el primer sumando de la serie, al considerar cuatro de esas identidades adyacentes y  $n_i \neq 0$  recuperamos los siguientes sumandos, etc.. O sea el desarrollo de acoplamiento fuerte tiende a restaurar las identidades de Bianchi en la red. Este aspecto fue estudiado en detalle en la ref.5.

La eq. (9) tiene una raíz entre 0 y 1 para valores de  $\beta$  menores que 0.93 o sea cerca del lugar donde está ubicada la transición que muestran las simulaciones de Monte Carlo ( $\beta = 1.005$ ). Dicha raíz

prácticamente coincide en el intervalo  $(0, 0.93)$  con los resultados del desarrollo de acoplamiento fuerte para  $\langle P_1 \rangle$ . Para todo  $\beta$  existe la raíz  $\langle P_1 \rangle = 1$  (si se considera en la ec. (5) la suma completa sobre  $n$ ). El agregado de términos de orden superior no altera demasiado estos resultados. En la ref. 5 se argumenta que este comportamiento indica la presencia de una transición de fase.

En las próximas secciones aplicaremos esta técnica al estudio de modelos no abelianos con acciones mixtas los cuales presentan diagramas de fase altamente no triviales.

Para finalizar esta introducción al método de plaqueta media destaquemos algunos detalles importantes:

i) Una desventaja de esta técnica es que la introducción de campos de materia (por ejemplo a través de un acoplamiento tipo  $\phi_x^\dagger U_\mu(x) \phi_{x+\mu}$ ) no es una tarea sencilla debido a que una variable de unión escrita en términos de variables de plaqueta nos conduce a expresiones difíciles de manejar.

ii) Al igual que en los capítulos II y III aquí también pueden mejorarse sistemáticamente los resultados obtenidos, mediante la aproximación de Bethe-Peierls<sup>8</sup>, es decir en la ec. (3) se mantienen "vivas" varias plaquetas en vez de una sola. De esta manera se tendrían en cuenta correlaciones importantes en las zonas críticas.

A pesar de que las técnicas de campo medio en variables de unión o plaqueta en general predicen con gran precisión los diagramas de fase de las teorías de medida en la red, está claro que debido a su carácter local, el límite continuo no puede ser reproducido con estos métodos pues allí las fluctuaciones de muy largo alcance son fundamentales. No obstante en las simulaciones de Monte Carlo se ha comprobado que en la zona posterior al "crossover" en los grupos SU(2) y SU(3), las magnitudes físicas siguen aproximadamente las predicciones del grupo de renormalización (sec. I.f) y por lo tanto de allí pueden obtenerse valores numéricos del límite continuo. Quizás esa región pueda reproducirse con precisión mediante la aproximación de Bethe-Peierls. Esta posibilidad (también remarcada en la ref.9) justifica los esfuerzos en el desarrollo de estas técnicas.

iii) En la ref.5 se realiza la aproximación adicional  $\langle R_e U \rangle \approx \langle R_e U \rangle^n$  y de esa manera sólo se debe resolver una ecuación en  $\langle R_e U \rangle$ . Esta suposición es razonable sólo en la zona de acoplamiento débil. El método expuesto en esta sección (o sea resolver el sistema ec. (5)) es más riguroso.

iv) En teorías de spin puede realizarse el cambio de variables de sitio a unión.<sup>40</sup> Tomemos el ejemplo del modelo XY bidimensional el que está descrito por la función de partición,

$$Z = \prod_x \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_x}{2\pi} e^{(\beta \sum_{x,\mu} \cos(\theta_{x+\mu} - \theta_x))} \quad (11)$$

$\theta_x$  es una variable de sitio acoplada entre próximos vecinos. Se desea hacer el cambio de variables  $\theta_\mu(x) = \theta_{x+\mu} - \theta_x$  donde  $\theta_\mu(x)$  es un campo localizado en la unión que une los sitios  $x$  y  $x+\mu$ . En este caso el jacobiano de la transformación nos indica que la suma de las variables  $\theta_\mu(x)$  a lo largo de una plaqueta se debe anular o sea,

$$\theta_p = \sum_{\text{plaqueta}} \theta_\mu(x) \quad (12)$$

La función de partición puede escribirse como,

$$Z = \prod_{x,\mu} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_\mu(x)}{2\pi} \prod_p \delta(e^{i\theta_p} - 1) e^{(\beta \sum_{x,\mu} \cos \theta_\mu(x))} \quad (13)$$

Al igual que en el caso de las teorías de medida, en la ec.(13) podría desarrollarse una aproximación de unión media. Se está trabajando activamente en esa dirección.

v) En las ref.11,12 se ha escrito el Hamiltoniano de la electrodinámica sólo en función de la variable angular de plaqueta  $\theta_p$ , representando la primer formulación en la red en términos de estas variables.

vi) Un aspecto aún no desarrollado de la técnica de plaqueta media consiste en reescribir la aproximación como el orden cero de un desarrollo en lazos al igual que se realizó en el capítulo II con la aproximación de campo medio en variables de unión. Un primer intento puede consistir en reescribir la identidad de Bianchi como,

$$\prod_c \delta(U_c - 1) = e^{\sum_c \log \left[ \sum_m \chi_m(U_c) \right]} \quad (14)$$

y luego pasar a variables sin vínculos como en la sección II.c. Si bien los resultados obtenidos mediante la aproximación de saddle-point complementada con la ec.(14) muestran ciertas inconsistencias, se continuará investigando este tema.

vii) Ya se ha remarcado claramente que la técnica de plaqueta media da

buenos resultados en la zona de acoplamiento fuerte y en ese sentido es de alguna manera complementaria al método de campo medio en variables de unión (cap. II). Una situación similar ocurre en los cálculos variacionales Hamiltonianos (VHT) (cap. III) donde los estados de plaqueta son buenos si  $\beta \ll 1$  (en realidad la analogía no es completa pues los estados de plaqueta no predicen la transición de la QED, mientras que la técnica de plaqueta media sí lo hace). En ambas formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana sería muy útil desarrollar un método mixto unión-plaqueta para obtener buenos resultados en todo el rango de parámetros. Recordemos además que en VHT el cálculo de la energía variacional para un problema de 3+1 dimensiones se reduce a evaluar valores medios en un modelo equivalente Lagrangiano en 3 dimensiones. En este último la técnica de plaqueta media puede utilizarse con confianza debido a la baja dimensión del problema.

#### IV.b Aplicación de la técnica de plaqueta media a la teoría SU(2) mixta

En esta sección estudiaremos la teoría SU(2) mixta fundamental-adjunta mediante la técnica de plaqueta media<sup>6</sup>. La acción que describe el modelo es

$$S = \sum_P \left[ \frac{\beta_F}{2} \text{tr}_{1/2}(U_P) + \frac{\beta_A}{3} \text{tr}_1(U_P) \right]. \quad (15)$$

La notación y las principales características de esta teoría ya fueron discutidas en la sección II.d y por lo tanto aquí sólo nos restringiremos a los resultados obtenidos.

La identidad de Bianchi es, en este caso,

$$U_c = U_{\alpha\beta}(x) U_{\beta\gamma}(x) U_{\alpha\gamma}(x + \hat{\beta}) U_{\alpha\beta}^\dagger(x + \hat{\gamma}) U_{\beta\gamma}^\dagger(x + \hat{\alpha}) U_{\alpha\gamma}^\dagger(x) = I, \quad (16)$$

donde cada  $U \in \text{SU}(2)$ .

En realidad la ec. (16) es la versión "abelianizada" de la verdadera identidad de Bianchi la cual contiene también variables de unión. Se demostró en las ref. 4 y 5 que el considerar a la ec. (16) como vínculo es correcto sólo si se considera exactamente un número finito de variables lo cual ocurre en la aproximación que usaremos.

Las ecuaciones de plaqueta media se obtienen fácilmente si-

guiendo los pasos de la sec.IV.a. Si se considera sólo una plaqueta "viva" se obtiene, en 4 dimensiones,

$$\langle P_j \rangle = \frac{\langle \text{tr}_j U_p \rangle}{2j+1} \approx \frac{1}{Z} \int dU \prod_{c=1}^4 \delta(U_c - 1) \left( \frac{\text{tr}_j U}{2j+1} \right) e^{\frac{\beta_F}{2} \text{tr}_{1/2} U + \frac{\beta_A}{3} \text{tr}_1 U} \quad (17)$$

La función  $\delta$  puede desarrollarse como,

$$\delta(U_c - 1) = \sum_{j=0, \frac{1}{2}, \dots} (2j+1) \chi_j(U_c), \quad (18)$$

donde  $\chi_j(U_c)$  es el caracter de la identidad de Bianchi el que a su vez se aproxima como,

$$\chi_j(U_c) \approx \langle P_j \rangle^5 \chi_j(U), \quad (19)$$

donde U es la variable de plaqueta no igualada a su valor medio. Finalmente el sistema de ecuaciones que debe resolverse es,

$$\langle P_j \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{j_1, \dots, j_4} \prod_{\lambda=1}^4 (2j_\lambda + 1) \langle P_{j_\lambda} \rangle^5 \int dU \left( \frac{\text{tr}_j U}{2j+1} \right) e^{\sum_{\lambda=1}^4 \beta_{j_\lambda} U} \prod_{\lambda=1}^4 \chi_{j_\lambda}(U). \quad (20)$$

Notemos que se ha introducido un parámetro distinto por cada representación. Obviamente por razones prácticas el número de representaciones que se debe considerar en la ec.(20) debe ser chico y para resolverla usamos el método iterativo.

Para obtener el diagrama de fases de la teoría SU(2) mixta estudiamos numéricamente el sistema de ecuaciones no lineales (20) con  $j_{\max} = 3/2$ . Aunque las contribuciones de muchas configuraciones  $(j_1, j_2, j_3, j_4)$  son despreciables no podemos seleccionar las más importantes "a priori" y por lo tanto todas deben considerarse. Entre las posibles soluciones de la ec.(20) nos interesa hallar aquella que satisface  $0 \leq \langle P_j \rangle \leq 1, \forall j$ .

El resultado para el eje fundamental puede verse en la fig.1 Correctamente no hay evidencia de que exista una transición de fase. En la zona de acoplamiento fuerte el acuerdo entre el  $\langle P_{1/2} \rangle$  obtenido con la técnica de plaqueta media y los resultados de Monte Carlo<sup>13</sup>(MC) es excelente. No obstante en la zona del "crossover" las discrepancias son de alrededor del 15%. Por ejemplo en  $\beta_F = 3$  nuestro resultado es  $\langle P_{1/2} \rangle \approx 0.83$  mientras MC da  $\approx 0.74$ .

Observamos que eligiendo un valor de  $j_{max}$  más chico aproximamos mejor el valor correcto pero la convergencia a un valor fijo, aproximadamente independiente de  $j_{max}$ , se obtiene recién para  $j_{max} > 3/2$ . En consecuencia no es recomendable tomar un valor de  $j_{max}$  demasiado pequeño. Una situación similar ocurre cuando se realiza además la aproximación indicada en pág. 439. En ese caso el valor obtenido interpola entre las simulaciones de Monte Carlo y nuestro resultado (en  $\beta_F = 3$  con  $j_{max} = 3/2$  da  $\approx 0.78$ ). En realidad una aproximación de plaqueta media (de características tipo acoplamiento fuerte) combinada con la aprox. de pág. 439 (válida en la región de acoplamiento débil) se compensan de alguna manera para dar un resultado casualmente mejor que el obtenido mediante el sistema de ecuaciones ec. (20).

En la fig. 2 se han graficado los resultados para el eje adjunto. Una transición de primer orden se ve claramente en  $\beta_A \approx 2.49$  en excelente acuerdo con los resultados de Monte Carlo.<sup>14</sup> Al igual que en el eje fundamental, la región de acoplamiento fuerte es reproducida con gran precisión mientras que en la zona de  $\beta_A$  grande se observa una diferencia apreciable entre los resultados de plaqueta media y Monte Carlo.

Antes de describir el plano  $(\beta_A - \beta_F)$  completo debemos verificar si nuestra técnica predice correctamente la transición para  $\beta_A \gg 1$  la que presenta características similares a la de la teoría  $Z(2)$  de medida.<sup>15</sup> En el apéndice de este capítulo se prueba que en el límite en que  $j_{max}$  va a infinito se recupera la ecuación aproximada para la teoría  $Z(2)$ . Obviamente el método es útil solo si se puede simular la transición eligiendo un  $j_{max}$  no demasiado grande. En la práctica se comprueba que este es realmente el caso. Por ej. en la fig. 3 se ven los resultados con  $j_{max} = 3/2$  y  $\beta_A = 10$ . La transición aparece levemente corrida del verdadero valor ( $\beta_F = 0.40$  en lugar de  $\beta_F = 0.44$ ). Notemos que la comparación con las simulaciones de Monte Carlo en la zona de  $\beta_F \ll 1$  no es tan buena como en las figuras 1, 2 debido a que se ha considerado un  $j_{max}$  finito.

En la fig. 4 presentamos los resultados para el diagrama de fases completo. El acuerdo con las simulaciones de Monte Carlo<sup>16</sup> es muy bueno. El punto triple se encuentra localizado en  $(\beta_F = 0.46, \beta_A = 2.39)$ . Notemos que se reproduce correctamente la existencia de un punto final cerca del eje fundamental el cual está ubicado en  $(\beta_F = 1.87, \beta_A = 0.27)$ .

Resumiendo, en esta sección hemos aplicado la técnica de plaqueta media a la teoría  $SU(2)$  mixta. Todas las características del diagrama de fases obtenido mediante simulaciones de Monte Carlo<sup>16</sup> fue-

ron reproducidas correctamente incluyendo la existencia de un punto final cerca del eje fundamental. Los valores numéricos también son muy precisos. Es de destacar que un cálculo análogo mediante la técnica de campo medio en variables de unión (sec.II. d) demanda considerable esfuerzo pues es imprescindible introducir correcciones gaussianas para obtener resultados aceptables. Sin embargo mediante la aproximación de plaqueta media se obtiene igual precisión mucho más sencillamente. Más aún, en este último caso el considerar representaciones de orden superior es inmediato.

IV. c Aplicación de la técnica de plaqueta media a la teoría SU(3) mixta

En esta sección aplicaremos la técnica desarrollada en IV.a a la teoría SU(3) de medida en la red<sup>17</sup> considerando distintas representaciones en la acción.

Primeramente analizaremos el siguiente caso,

$$S = \frac{\beta_3}{3} \sum_p \text{Re } \chi_3(U_p) + \frac{\beta_8}{9} \sum_p \text{Re } \chi_8(U_p), \quad (22)$$

donde 3(8) indica la representación fundamental (adjunta) de SU(3). Esta teoría ha sido analizada mediante simulaciones de Monte Carlo<sup>18</sup> en una red de 4<sup>4</sup> sitios. El modelo no presenta transiciones de fase en el eje fundamental<sup>19</sup> aunque, al igual que para el grupo SU(2), aparece un brusco cambio de comportamiento entre la región de acoplamiento fuerte y débil ("crossover"). En el eje adjunto aparece una transición de primer orden<sup>20</sup> en  $\beta_8 = 7.2$  (en la ec.(22) el factor 1/9 se ha elegido para ser consistente con la ref.18. Los resultados de la ref.20 deben ser modificados en un factor 9/8 para compararlos con los nuestros). Si  $\beta_8 \gg 1$  obtenemos un modelo Z(3) con una transición de primer orden en el punto autodual  $\beta_3 = 0.67$ . Para aplicar la técnica de plaqueta media a esta acción debemos resolver numéricamente un sistema de ecuaciones análogo al de la ec.(20), es decir,

$$\langle P_\lambda \rangle = \frac{\langle \text{Re } \chi_\lambda(U) \rangle}{\dim \lambda} = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^4 \sum_{r_i} (\dim r_i) \langle P_{r_i} \rangle^5 \int dU \frac{\text{Re } \chi_\lambda(U)}{\dim \lambda} \chi_{r_i}(U) e^{S(U)}, \quad (23)$$

donde  $\lambda$  y  $r_\lambda$  indican representaciones del grupo SU(3).

En la ec. (23) consideramos sólo las representaciones de menor dimensión o sea las  $3, \bar{3}, 6, \bar{6}$  y 8 (la adjunta es real) y potencias de  $\langle P_r \rangle$  no superiores a 10. Con esta aproximación se observó convergencia ( el manejo de las representaciones unitarias en grupos SU(N) puede estudiarse en la ref.21).

En la fig.5 graficamos  $\langle E_3 \rangle = 1 - \langle P_3 \rangle$  para el eje fundamental comparando los resultados con las simulaciones de Monte Carlo<sup>13</sup> y los desarrollos en serie.<sup>22</sup> No aparece ninguna transición de fase. Como esperábamos la aproximación de plaqueta media reproduce con gran precisión la región de  $\beta_3$  chico, pero además brinda resultados muy precisos en la zona del "crossover" donde los desarrollos en serie no sirven. En consecuencia la aproximación utilizada no es sólo una suma parcial del desarrollo de acoplamiento fuerte sino que contiene además información acerca de la zona de acoplamiento débil.

En la fig.6 analizamos  $\langle E_8 \rangle = 1 - \langle P_8 \rangle$  en el eje adjunto. En este caso se observa claramente un salto en  $\beta_8 = 7.5$  indicando la presencia de una transición de primer orden muy cerca de los resultados de Monte Carlo. En la fig.7 se estudia el plano  $\beta_3 - \beta_8$  completo. La posición del punto final es predicha con gran precisión. Otro hecho interesante es que para  $\beta_8 \gg 1$  se observa la esperada transición tipo Z(3). En la fig.8 graficamos los resultados para  $\langle E_3 \rangle$  en  $\beta_3 = 30$  y los comparamos con los valores de Monte Carlo<sup>23</sup> y también con resultados obtenidos mediante plaqueta media directamente en el modelo Z(3) de medida. Estos últimos valores provienen de resolver numéricamente la ecuación,

$$\langle P_1 \rangle \approx \frac{1}{Z} \prod_{\lambda=1}^4 \sum_{m_\lambda=0,1,2} \langle P_{m_\lambda} \rangle^5 \sum_{U \in Z(3)} \text{Re } U^{m_\lambda+1} e^{S_{Z(3)}}, \quad (24.a)$$

donde

$$\langle P_m \rangle = \langle \text{Re } U^m \rangle, \quad (\langle P_1 \rangle = \langle P_2 \rangle), \quad (24.b)$$

y  $S_{Z(3)}$  es la acción Z(3) habitual. La ec.(24) es una generalización inmediata de la ec.(23). Para  $\beta_3 > 0.68$  la ec.(24) no tiene raíces menores que 1. Siguiendo la ref.5 esto se interpreta como una transición de fase la que se encuentra muy cerca del punto autodual. Una situación muy similar ocurre en la teoría Z(2) de medida.<sup>5</sup> Para  $\beta_3 > \beta_{3c}$  podemos usar argumentos de dualidad<sup>24</sup> para completar el diagrama de fases. Los

resultados que se obtienen directamente a partir de la teoría SU(3) son aceptables pero la transición de fase se encuentra en  $\beta_3 \approx 0.92$  (ver fig. 8). Al igual que para el modelo SU(2) se puede demostrar que la ec.(23) en el límite  $\beta_3 \rightarrow \infty$  es estrictamente igual a la ec.(24.a) sólo si se consideran infinitas representaciones. En la práctica este número es finito y pudo haber originado el corrimiento en  $\beta_{3c}$ .

Para completar el análisis de la teoría SU(3) también estudiamos una acción que mezcla las representaciones de dimensión 3 y 6,

$$S = \sum_{\gamma} \left[ \frac{\beta_3}{3} \text{Re } \chi_3(U_{\gamma}) + \frac{\beta_6}{6} \text{Re } \chi_6(U_{\gamma}) \right]. \quad (25)$$

Este modelo fue estudiado mediante simulaciones de Monte Carlo en una red pequeña (<sup>25</sup>3<sup>4</sup> sitios). Acciones mixtas involucrando representaciones de dimensión 3, 6 y 8 también han sido estudiadas en el contexto de acciones en la red estables bajo transformaciones del grupo de renormalización.<sup>26</sup> Una línea de transiciones de primer orden comienza en el eje  $\beta_6$  y termina en un punto final cerca del eje fundamental. El resultado obtenido mediante el método de plaqueta media se muestra en la fig.9. De nuevo, al igual que para la acción fundamental-adjunta, la posición predicha para el punto final es bastante precisa.

En resumen en esta sección hemos demostrado que la técnica de plaqueta media propuesta en las ref.5,6 es un método muy útil para la predicción de diagramas de fases en la teoría SU(3) de medida. Al igual que se remarcó en la sección IV.b estos resultados pueden mejorarse sistemáticamente por medio de la aproximación de Bethe-Peierls.

APENDICE :

En este apéndice demostraremos la afirmación presentada en la sec. IV.b o sea que la ec.(20) se reduce en el límite  $\left( \begin{matrix} \beta_A \rightarrow \infty \\ j_{\max} \rightarrow \infty \end{matrix} \right)$  a la ec. de plaqueta media de la teoría Z(2) de medida.

Cuando  $\left( \beta_A = \infty, \frac{1}{3} \text{tr}_1(U) \right)$  se congela en 1. En consecuencia recordando que  $\text{tr}_1 U = \text{tr}_{1/2}^2 U - 1$  está claro que  $\frac{1}{2} \text{tr}_{1/2} U$  se comporta como una variable del grupo Z(2) es decir sus valores posibles son  $\pm 1$ . Generalizando estas ideas se puede demostrar que,

$$P_j = \frac{\text{tr}_j U}{2j+1} = \begin{cases} +1, & j = 0, 1, 2, \dots, \\ \pm 1, & j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \end{cases} \quad (A1)$$

o sea

$$\langle P_{1/2} \rangle = \langle P_{3/2} \rangle = \langle P_{5/2} \rangle = \dots \quad (A2)$$

Tomando  $j=1/2$  en la ec.(20) y reemplazando  $\int dU$  por  $\frac{1}{2} \sum_{U=\pm 1}$  se obtiene,

$$\langle P_{1/2} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{j_\ell\}} \prod_{\ell=1}^{j_{\max}} (2j_\ell+1)^2 \langle P_{j_\ell} \rangle^5 \cdot \frac{1}{2} \sum_{U=\pm 1} e^{\beta U} U \prod_{\ell=1}^4 \left[ \frac{\chi_{j_\ell}(U)}{2j_\ell+1} \right], \quad (A3)$$

donde  $j_{\max}$  se introduce para regularizar la expresión. En la ec.(A3) la contribución a  $\langle P_{1/2} \rangle^5$  proviene de un  $j_\ell$  semientero y los otros enteros. La correspondiente contribución a  $\langle P_{1/2} \rangle^{10}$  viene de dos  $j_\ell$  semienteros y dos enteros y así sucesivamente. Llamando X a la siguiente expresión,

$$X = \frac{\sum_{j_{\text{entero}}}^{j_{\max}} (2j+1)^2}{\sum_{j_{\text{semientero}}}^{j_{\max}} (2j+1)^2}, \quad (A4)$$

la ec.(A3) es

$$\langle P_{1/2} \rangle = \left( \sinh \beta + 4X \cosh \beta \langle P_{1/2} \rangle^5 + 6X^2 \sinh \beta \langle P_{1/2} \rangle^{10} + 4X^3 \cosh \beta \langle P_{1/2} \rangle^{15} + X^4 \sinh \beta \langle P_{1/2} \rangle^{20} \right) / \left( \cosh \beta + 4X \sinh \beta \langle P_{1/2} \rangle^5 + 6X^2 \cosh \beta \langle P_{1/2} \rangle^{10} + 4X^3 \sinh \beta \langle P_{1/2} \rangle^{15} + X^4 \cosh \beta \langle P_{1/2} \rangle^{20} \right). \quad (A5)$$

Cuando  $j_{\max}$  va a  $\infty$ ,  $X \rightarrow 1$  y la ec.(A5) se reduce a la ecuación de plaqueta media para la teoría Z(2) de medida (ref.5, ec.(4.3)).

REFERENCIAS

1. M. Halpern, Phys. Rev. D19, 517 (1979).
2. C. Itzykson y J. B. Zuber, "Quantum Field Theory" (Mc Graw-Hill, 1980), pág. 443.
3. W. Drechsler y M. Mayer, "Fiber bundles techniques in gauge theories", Lecture notes in Physics n°67, pág. 39 y 53.
4. G. Batrouni, Nucl. Phys. B208, 467 (1982).
5. G. Batrouni, Nucl. Phys. B208, 12 (1982).
6. E. Dagotto y A. Moreo, "Mean plaquette treatment of the mixed fundamental-adjoint SU(2) lattice gauge theory", Bariloche preprint, aceptado en Phys. Rev. D.
7. B. Lautrup y M. Nauenberg, Phys. Lett. 95B, 63 (1980).
8. E. Dagotto y A. Moreo, Phys. Rev. D29, 300 (1984).
9. J. M. Drouffe y J. B. Zuber, Phys. Rep. 102, 1 (1983).
10. G. Batrouni y M. Halpern, CLNS-84/601 y 602 (febrero 1984).
11. S. Drell, H. Quinn, B. Svetitsky y M. Weinstein, Phys. Rev. D19, 619 (1979).
12. U. Heller, Phys. Rev. D23, 2357 (1981).
13. J. Greensite y B. Lautrup, Phys. Lett. 104B, 41 (1981).
14. J. Greensite y B. Lautrup, Phys. Rev. Lett. 47, 9 (1981).
15. M. Creutz, Phys. Rev. Lett. 42, 1390 (1979).
16. G. Bhanot y M. Creutz, Phys. Rev. D24, 3212 (1981).
17. E. Dagotto y A. Moreo, "Mean plaquette analysis of the SU(3) lattice gauge theory", Bariloche preprint.
18. G. Bhanot, Phys. Lett. 108B, 337 (1982).
19. M. Creutz y K. Moriarty, Phys. Rev. D26, 2166 (1982).
20. M. Creutz y K. Moriarty, Nucl. Phys. B210(FS6), 50 (1982) ;  
J. M. Drouffe, K. Moriarty y G. Münster, Phys. Lett. 115B, 301 (1982)
21. I. Bars y F. Green, Phys. Rev. D20, 3311 (1979);  
C. Itzykson y J. B. Zuber, J. Math. Phys. 21, 411 (1980).
22. G. Bhanot y C. Rebbi, Phys. Rev. D24, 3319 (1981);  
R. Edgar, L. Mc Crossen y K. Moriarty, J. Phys. G7, L85 (1981).
23. M. Creutz, L. Jacobs y C. Rebbi, Phys. Rev. D20, 1915 (1979).
24. C. P. Korthals Altes, Nucl. Phys. B142, 315 (1978).
25. C. Bachas y R. Dashen, Nucl. Phys. B210 (FS6), 583 (1982).
26. D. Horn y C. Zachos, ANL-HEP-PR-83-56.

EXPLICACION DE LAS FIGURAS:

1.  $\langle \text{tr}_{4/2} U \rangle / 2$  en la aproximación de plaqueta media (línea continua) para el eje  $\beta_A = 0$  comparado con resultados de Monte Carlo ( $\bullet$ ) tomados de la ref.13.
2.  $\langle \text{tr}_4 U \rangle / 3$  en la aproximación de plaqueta media para el eje  $\beta_A = 0$ . Los resultados de Monte Carlo son de la ref.14.
3.  $\langle \text{tr}_{4/2} U \rangle / 2$  en la aproximación de plaqueta media para  $\beta_A = 10$ . Los puntos de Monte Carlo son de la teoría  $Z(2)$  de medida (ref.15).
4. El diagrama de fases completo de la teoría  $SU(2)$  de medida (fundamental-adjunto) (línea continua). Los puntos son resultados de Monte Carlo de la ref.16.
5.  $\langle E_3 \rangle$  para el eje fundamental. La línea continua es el resultado de plaqueta media, la línea rayada es el desarrollo de acoplamiento fuerte y los puntos ( $\bullet$ ) son resultados de Monte Carlo de la ref. 19.
6. Resultados de plaqueta media para  $\langle E_B \rangle$  en el eje adjunto. Los puntos de Monte Carlo ( $\bullet$ ) son de la ref.20.
7. El diagrama de fases para la teoría  $SU(3)$  de medida (fundamental-adjunta). Los resultados de Monte Carlo provienen de la ref.18 y todos indican transición de primer orden.
8.  $\langle E_3 \rangle$  en la aproximación de plaqueta media para  $\beta_A = 30$  comparado con resultados en la misma aproximación para  $1 - \langle P_1 \rangle$  en una teoría  $Z(3)$  de medida (línea rayada) y puntos de Monte Carlo de la ref.23.
9. El diagrama de fases de la teoría  $SU(3)$  mixta con representaciones de dimensión 3 y 6. Los resultados de Monte Carlo son de la ref.25. Representan transiciones de primer orden.

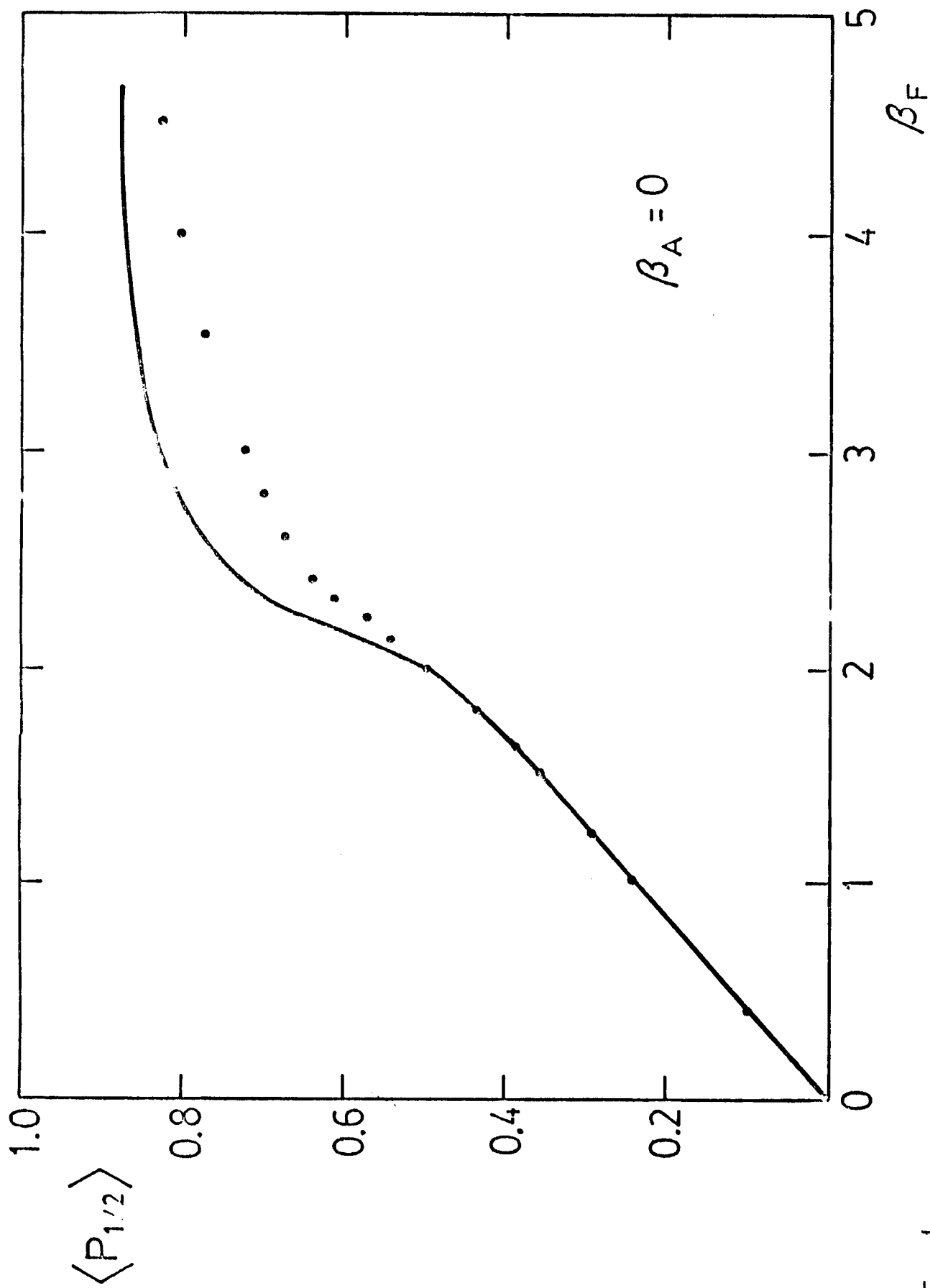


Fig.1

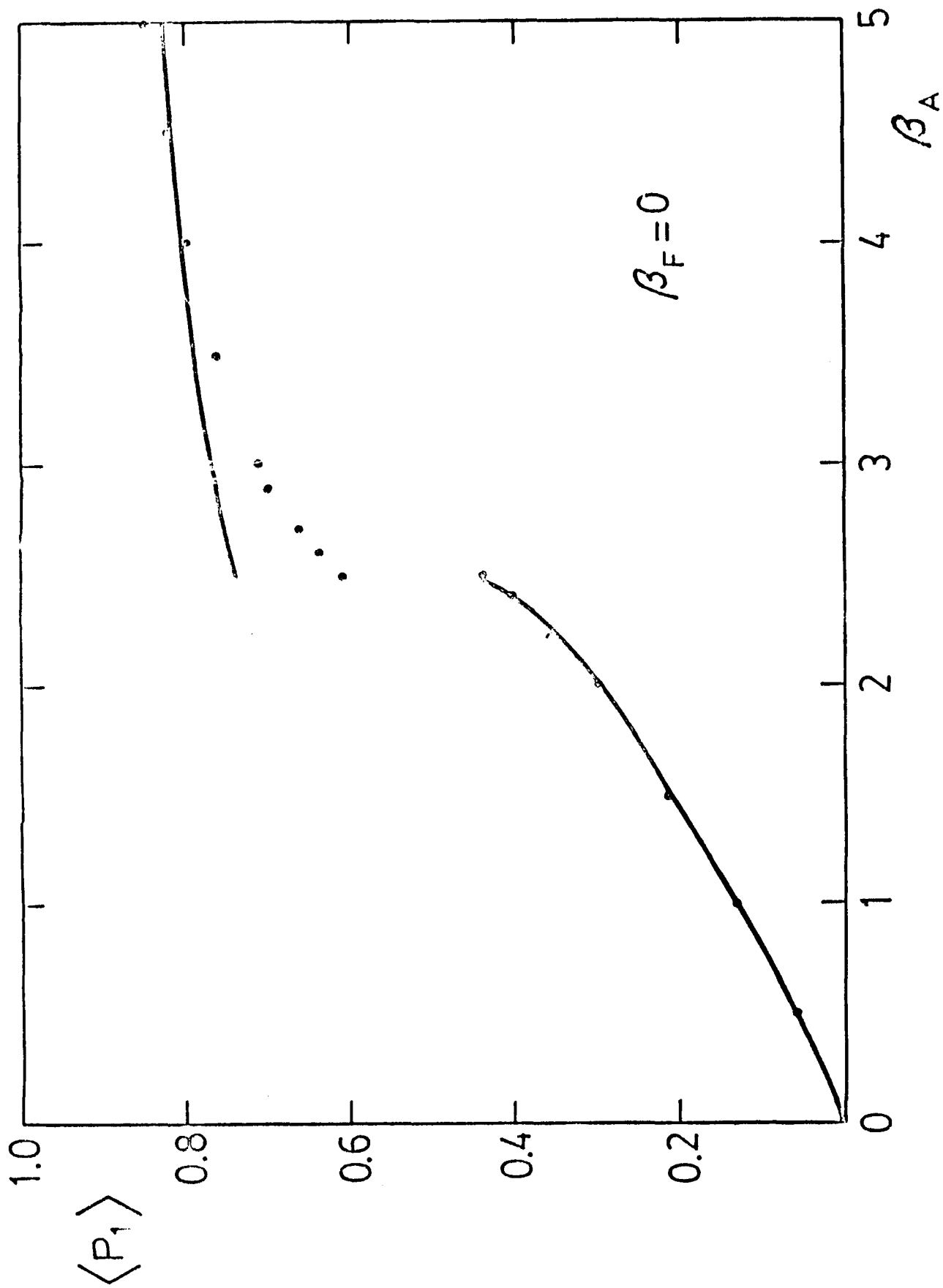


Fig. 2

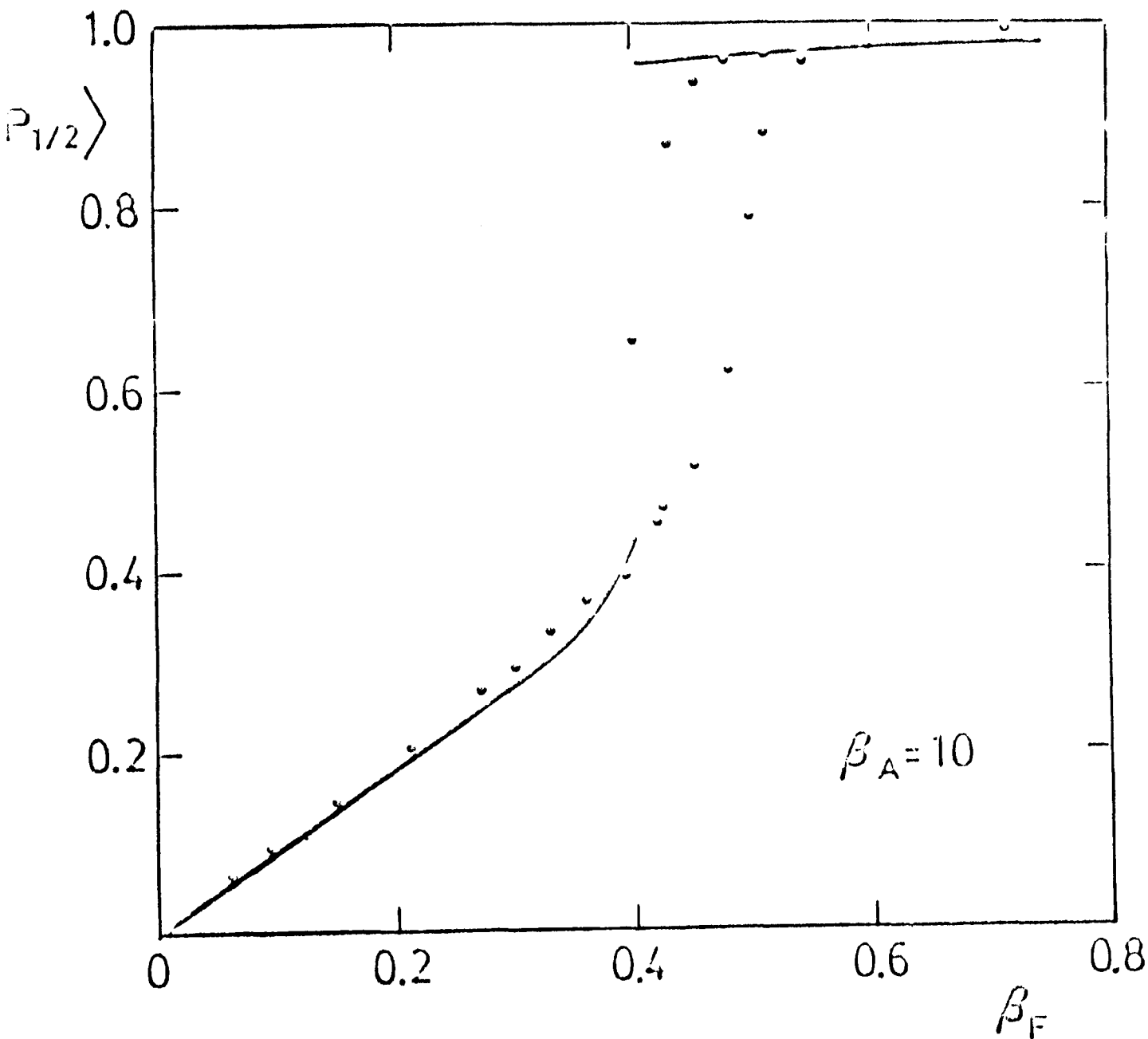


Fig. 3

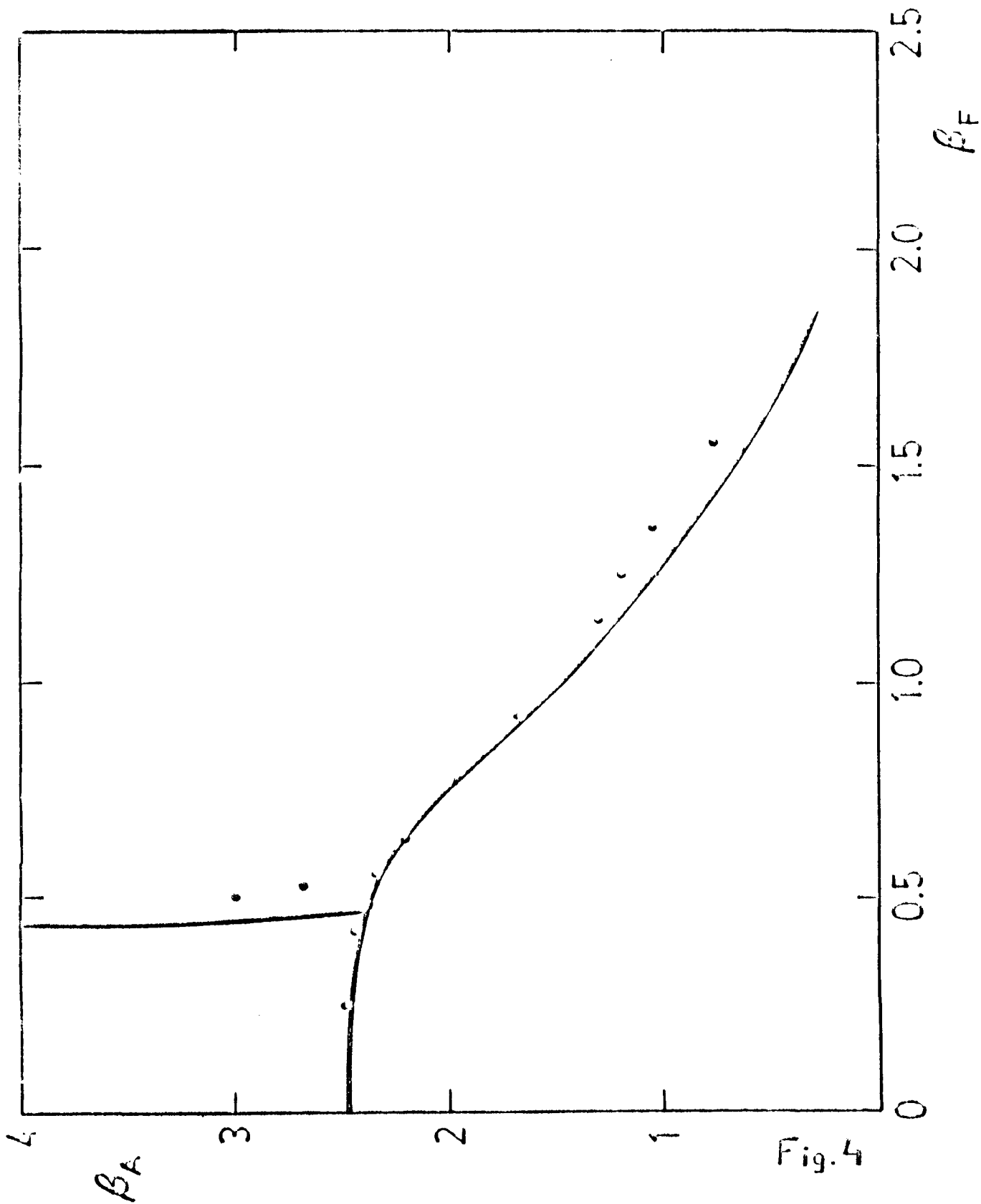


Fig.4

CENTRO ATOMICO BARILESCHE  
BIBLIOTECA

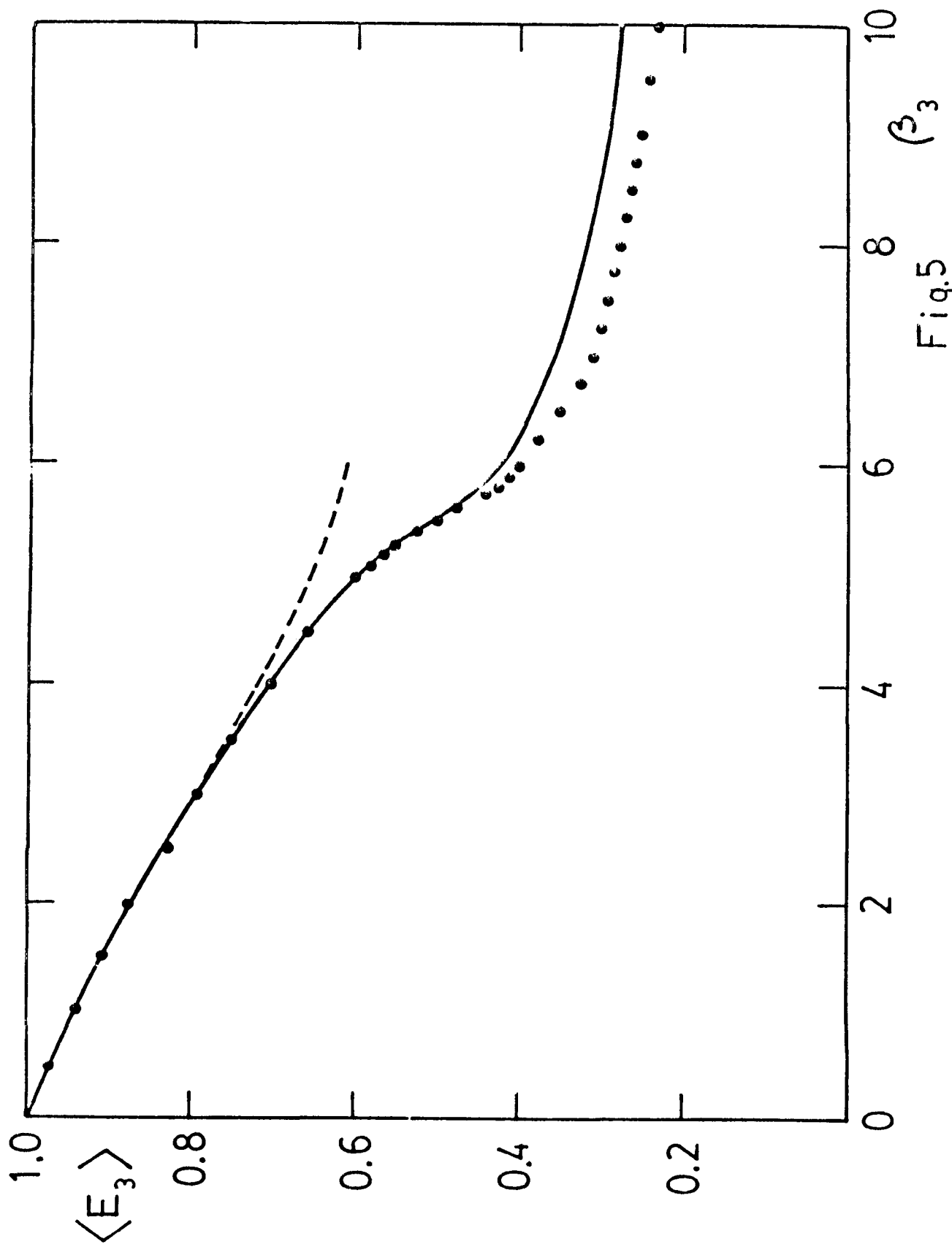


Fig.5

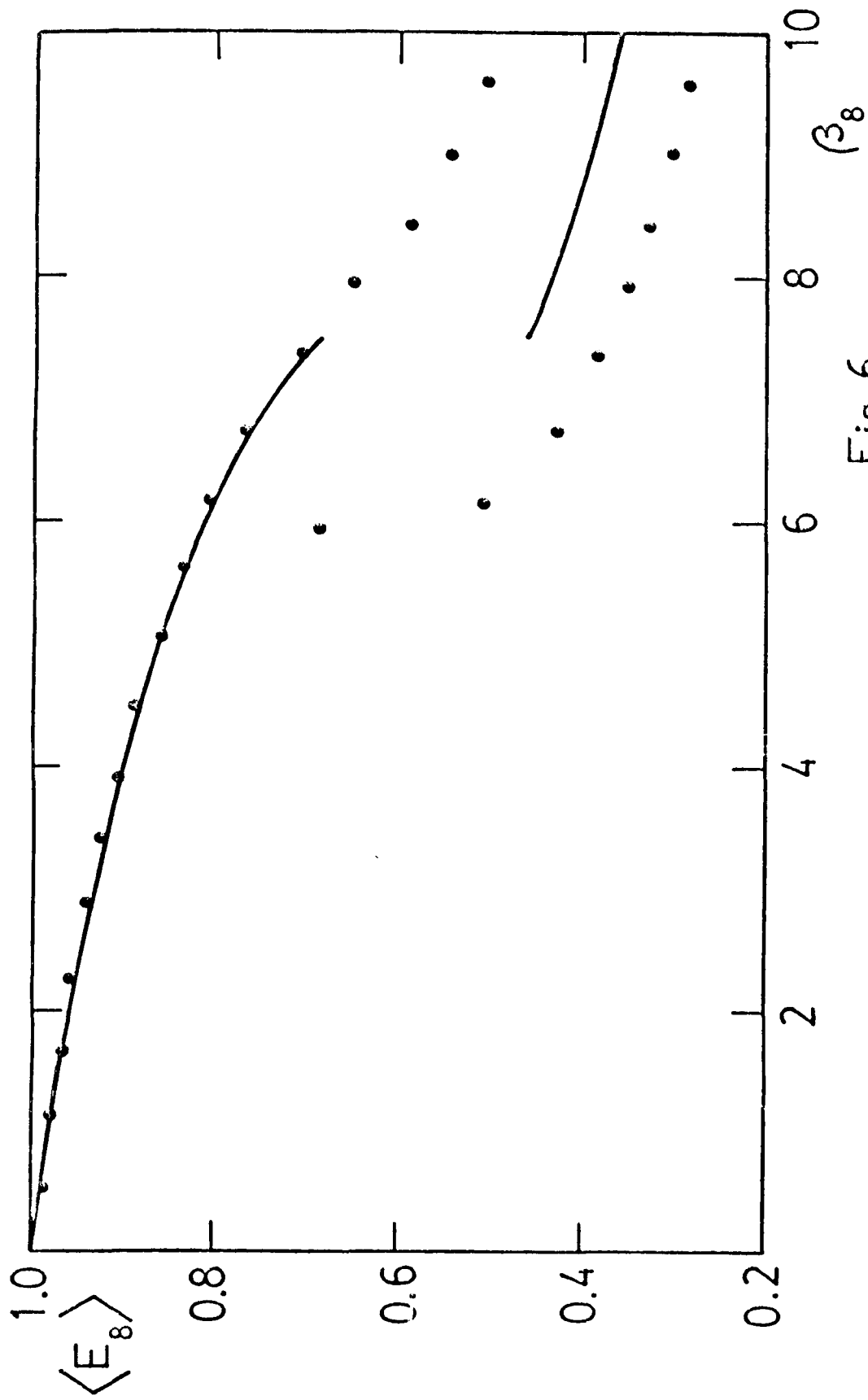


Fig. 6

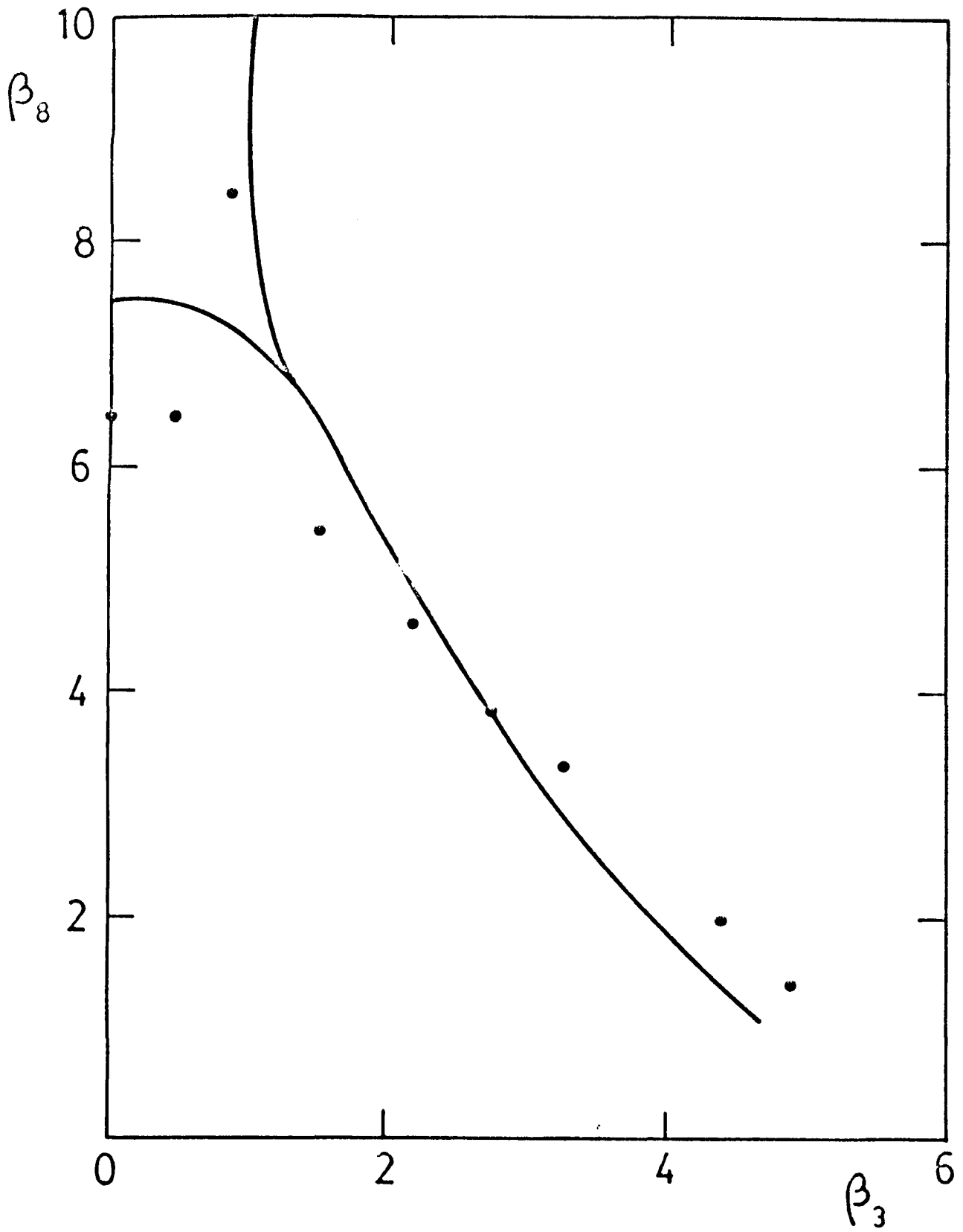


Fig.7

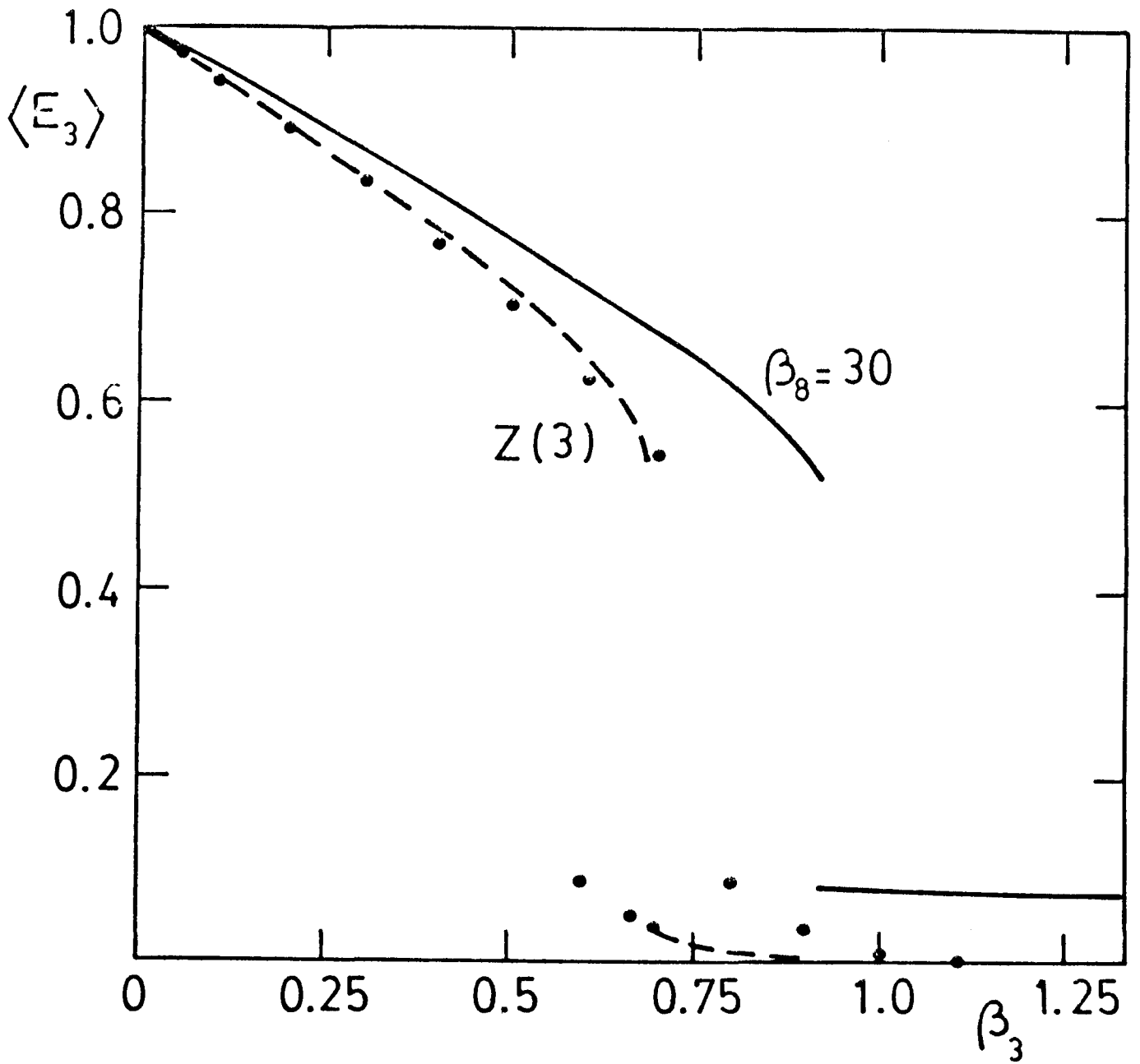


Fig.8

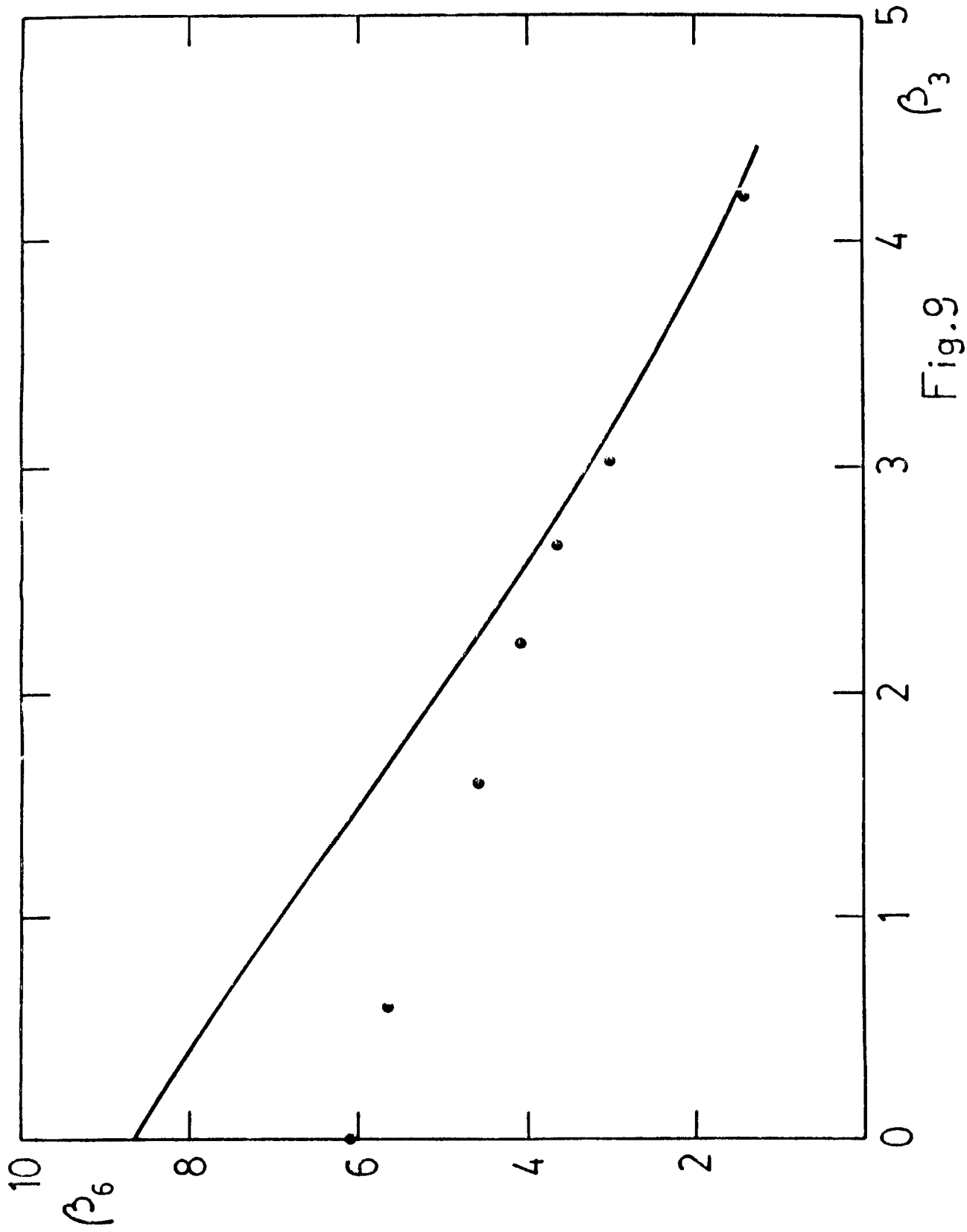


Fig.9

## AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer especialmente a mi esposa, amiga y colega Adriana Moreo por la gran ayuda que me ha brindado en los trabajos que hemos hecho en conjunto y que componen gran parte de esta tesis.

También deseo manifestar mi gratitud

A Andrés García por su infinita paciencia al brindarme su ayuda cada vez que se la solicité.

A Luis Masperi por haber aceptado el padrinazgo de esta tesis y por las discusiones y comentarios sobre los trabajos aquí presentados.

A N. Parga y L. Bruschi por las numerosas charlas científicas que hemos compartido.

A mi familia por la ayuda moral y material que me ha brindado durante todos los años de mi educación.

Representaron para mí un gran incentivo la correspondencia y discusiones personales mantenidas con T. González Arroyo, H. Ceccatto, G. Batrouni y E. Fradkin.

Finalmente quiero manifestar mi agradecimiento al CONICET por su apoyo económico.

