

09.70.17

C. N. E. A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº 1	AÑO 1970

CNRC - PI-I

CALCULO Y APLICACIONES DE LA DISTRIBUCION DE CAMINOS EN UN
DETECTOR CILINDRICO

Eduardo A. Gandolfi

C E N T R O N A C I O N A L D E R A D I A C I O N C O S M I C A

Serie: Publicaciones Internas

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas
Comisión Nacional de Energía Atómica - Facultad de Ciencias Exactas
y Naturales

Buenos Aires, ARGENTINA

Junio de 1970

CALCULO Y APLICACIONES DE LA DISTRIBUCION DE CAMINOS EN UN
DETECTOR CILINDRICO

por

Eduardo A. Gandolfi

CALCULO Y APLICACIONES DE LA DISTRIBUCION DE CAMINOS EN UN DETECTOR CILINDRICO

1. Introducción

Para la detección de partículas cargadas y radiación electromagnética (rayos X y γ) es común la utilización de detectores de diversos tipos, de configuración geométrica cilíndrica. Tales son, por ejemplo, los contadores Geiger-Müller, contadores proporcionales, detectores de centelleo y detectores Cerenkov. En todos los casos la radiación incidente puede recorrer distintos caminos a través del detector, dependiendo la longitud recorrida, del punto de incidencia sobre su superficie externa y de la dirección del recorrido, supuesto rectilíneo, en relación con su eje.

La respuesta del detector depende por una parte de la energía depositada en el mismo por la radiación incidente, la que en caso de partículas ionizantes en general, es función del recorrido, como lo es también su eficiencia.

Así, el conteo de un contador cilíndrico, para partículas de una misma ionización específica, está dado en general por

$$N = \int_E \int_{\Omega} \frac{dj(E, \theta, \phi)}{dE} S_d(\theta, \phi) d\Omega dE$$

donde $\frac{dj(E, \theta, \phi)}{dE}$ es la intensidad diferencial unidireccional de la radiación de energía E, incidente en la dirección (θ, ϕ) .

$S_d(\theta, \phi)$

es el área del detector proyectada normalmente a la dirección (θ, ϕ) y

$\epsilon = \epsilon(E, \theta, \phi, P)$

es la eficiencia de detección para radiación de energía E , incidente según la dirección (θ, ϕ) en el punto P de la superficie del detector.

Además de la dependencia con E incluída en ϵ , en las variables (θ, ϕ) y P está contenida su dependencia con el recorrido en el detector. Usualmente, esta dependencia detallada es ignorada haciendo la suposición de que todas las partículas (o radiación electromagnética) recorren en el detector un camino medio $\bar{l}$. Así por ejemplo, para un contador Geiger-Müller la eficiencia está dada por

$$\epsilon(E) = 1 - \exp\{-j_p \rho \bar{l}\}$$

donde $j_p(E)$ es la ionización específica primaria y ρ es la densidad del gas de llenado.

Expresiones similares a la anterior, son generalmente consideradas buenas aproximaciones a los fines de la corrección por ineficiencia de distintos detectores, aunque pueden dar valores que difieren del real, en decenas de porcientos. Por otra parte, la bondad de una dada aproximación depende de la clase y dimensiones del detector, así como del tipo y distribución angular de las partículas o radiación electromagnética que sobre él incidan.

Para la corrección por ineficiencia del conteo produci-

do por partículas o radiación electromagnética, dentro de un rango de energía $E_1; E_2$ se utiliza la siguiente expresión:

$$N' (E_1; E_2) = \frac{1}{\bar{\epsilon}_{12}} N (E_1; E_2)$$

donde N es el conteo sin corrección, N' es el conteo corregido y $\bar{\epsilon}_{12}$ es la eficiencia media en el intervalo $E_1; E_2$.

En ciertos casos puede ser de interés, no solo para un cómputo más preciso de la eficiencia, sino a otros fines, el cálculo de la distribución de los caminos recorridos en el detector, por radiación que tenga una distribución angular conocida. En lo que sigue, calcularemos esa expresión y la aplicaremos para el caso de un detector cilíndrico, con su eje coincidente con el eje de simetría de la distribución angular $f(\theta)$ de la radiación incidente.

2. Cálculo de la distribución de caminos recorridos en un detector cilíndrico

Para calcular la distribución de los caminos, deduciremos inicialmente las áreas del detector cilíndrico proyectadas normalmente a la dirección (θ, ϕ) , tal que las partículas que la atraviesan recorren en el detector un camino igual o mayor que 1.

Supondremos que el eje del detector es vertical, y que la distribución angular de la radiación incidente tiene simetría axial respecto de la dirección vertical, es decir, es independiente del ángulo azimutal ϕ . Consideraremos además partículas de energía suficientemente alta como para atravesar íntegramente el detector, sin sufrir deflexión en su camino.

Llamaremos $P = P(x_o, y_o, z_o)$ y $Q = Q(x_s, y_s, z_s)$ los puntos de incidencia y salida de una partícula que llega al detector según un ángulo zenital θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$). Sin perder generalidad, podremos suponer que la trayectoria - rectilínea - está contenida en un plano paralelo al plano de coordenadas XZ.

Eligiendo el plano XY coincidente con la base superior del cilindro, y el eje Z positivo hacia abajo, la posición del punto de incidencia P permite distinguir, para un cilindro de diámetro D y altura L, dos casos:

1º) P está en la base superior, o sea

$$x_o^2 + y_o^2 \leq D^2/4 \quad ; \quad z_o = 0$$

2º) P está en la superficie lateral, o sea

$$x_o^2 + y_o^2 = D^2/4 \quad ; \quad 0 < z_o \leq L$$

La condición impuesta sobre el plano de la trayectoria hace que en ambos casos sea $y_s = y_o$, y además, siempre valgan las relaciones

$$z_s - z_o = l \cos \theta \quad (1)$$

$$x_s - x_o = - l \sin \theta \quad (2)$$

$$\text{donde} \quad l = + \sqrt{(x_s - x_o)^2 + (z_s - z_o)^2} \quad (3)$$

es el camino recorrido en el detector. Dada una sección paralela al plano XZ, el máximo recorrido posible, función de y_o , está dado por la diagonal de la sección rectangular:

$$l_M(y_o) = \sqrt{(D^2 + L^2 - 4y_o^2)} \quad (4)$$

Obviamente el máximo recorrido posible en el detector es

$$l_M = \sqrt{(D^2 + L^2)} \quad (5)$$

1º) Caso: P se halla en la base superior ($z_0 = 0$)

De la relación (1) resulta que, dado un ángulo de incidencia θ , la coordenada z_s de los puntos de salida, para partículas que recorren en el cilindro exactamente la distancia l_1 es

$$z_s = l_1 \cos \theta = \text{constante} \quad (6)$$

Estos puntos de salida pueden hallarse sobre la superficie lateral ($0 < z_s < L$) o sobre la base inferior ($z_s = L$). Cuando el punto de salida se encuentra en la superficie lateral, es

$$x_s^2 + y_s^2 = D^2/4 \quad (7)$$

o lo que es equivalente

$$x_s^2 + y_o^2 = D^2/4 \quad (8)$$

y se puede obtener inmediatamente la relación que liga las coordenadas (x_o, y_o) de P. Usando (1), (2) y (3), se tiene

$$x_s^2 - 2x_s x_o + x_o^2 = l_1^2 \sin^2 \theta \quad (9)$$

o su equivalente

$$\frac{D^2}{4} - y_o^2 - 2x_o \left(\frac{D^2}{4} - y_o^2 \right)^{1/2} + x_o^2 = l_1^2 \sin^2 \theta \quad (10)$$

Es fácil ver que esta condición la cumplen los puntos de la base superior situados sobre un arco de circunferencia de radio $\frac{D}{2}$, centro sobre el eje X y abscisa $x_o = l_1 \sin \theta$, cuyas coordenadas y_o están comprendidas entre los límites

$$\pm \frac{(D^2 - l_1^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}{2}$$

En efecto, la ecuación de esa circunferencia es:

$$(l_1 \sin \theta - x_o)^2 + y_o^2 = \frac{D^2}{4}$$

que por (2) es equivalente a la relación (8).

Si $l_1 = \frac{L}{\cos \theta}$, o sea, los puntos Q se hallan en la base inferior, también vale la propiedad anterior.

Por otra parte, dado un ángulo θ , para los puntos de incidencia situados en la intersección de la base superior con el círculo de radio $D/2$ y centro en

$$x_c = l_1 \sin \theta \quad ; \quad y_c = 0$$

el camino l recorrido en el cilindro es mayor o igual que l_1 , independiente de la posición de z_s . (Fig. 1)

El área de la intersección de los dos círculos está dada por

$$A(l_1, \theta) = 4 \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{D^2 - l_1^2 \sin^2 \theta}} dy \int_{\frac{l_1 \sin \theta}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{D^2 - 4y^2}} dx$$

$$A(l_1, \theta) = \frac{D^2}{2} \arccos \frac{l_1 \sin \theta}{D} - \frac{l_1 \sin \theta}{2} \sqrt{D^2 - l_1^2 \sin^2 \theta} \quad (11)$$

y por consiguiente el área proyectada normalmente a la dirección θ , para la que el camino recorrido es mayor o igual que l_1 será

$$A(l_1, \theta) \cos \theta$$

2°) Caso: P se halla sobre la superficie lateral

Por consiguiente vale

$$x_o^2 + y_o^2 = D^2/4$$

y dado un ángulo de incidencia θ , y un recorrido l_1 , el valor límite de y_o para el cual es $l \gg l_1$ estará dado por

$$y_o^M = \pm \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - l_1^2 \sin^2 \theta} \quad (12)$$

por otra parte, el máximo z_o posible se deduce de (1) y resulta

$$z_o \leq L - l \cos \theta = z_o^M \quad (13)$$

Es fácil ver que independientemente de que el punto de salida se encuentre en la superficie lateral o base inferior, las partículas que penetran por el elemento de superficie lateral limitado por (12) y (13) tendrán en el cilindro un recorrido mayor o ~~menor~~ ^{igual} que l_1 .

El área de la proyección de ese elemento de la superficie lateral sobre un plano paralelo al YZ es

$$B(l_1, \theta) = 2 y_{OZ}^{M M} = \sqrt{D^2 - l_1^2 \sin^2 \theta} \cdot (L - l_1 \cos \theta) \quad (14)$$

y su proyección normal a la dirección θ , es

$$B(l_1, \theta) \sin \theta$$

Finalmente, el área de un cilindro con eje vertical, proyectada normalmente a la dirección θ , para la que el recorrido de las partículas es mayor o igual que l es

$$S_L(l, \theta) = A(l, \theta) \cos \theta + B(l, \theta) \sin \theta$$

$$S_L(l, \theta) = D^2 \left\{ \frac{1}{2} \cos \theta \arccos \frac{l \sin \theta}{D} + \left(\frac{L}{D} - \frac{3}{2} \frac{1}{D} \cos \theta \right) \sin \theta \sqrt{1 - \frac{(l \sin \theta)^2}{D^2}} \right\} \quad (15)$$

También podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2} S_L(l, \theta) &= \frac{1}{2} \cos \theta \arccos \frac{l \sin \theta}{D} - \frac{3}{2} \frac{1}{D} \cos \theta \sin \theta \sqrt{1 - \frac{(l \sin \theta)^2}{D^2}} + \\ &+ \frac{L}{D} \sin \theta \sqrt{1 - \frac{(l \sin \theta)^2}{D^2}}, \end{aligned} \quad (16)$$

(16) muestra que el segundo miembro es similar para todos los centelleadores de un mismo L/D .

La expresión (16) es igualmente válida para el caso en que la

radiación incidente sea electromagnética, siendo l el camino que la radiación incidente en el punto P puede atravesar (si no interaccúa) en la dirección θ .

Si $f(\theta)$ es la distribución cenital de la radiación incidente - supuesta independiente del ángulo azimutal ϕ - la integral

$$\int_{\Omega} f(\theta) \frac{dS_{\perp}}{dl} d\Omega = \frac{d}{dl} \int_{\Omega} f(\theta) S_{\perp}(l, \theta) d\Omega \quad (17)$$

para todas las direcciones provenientes del hemisferio superior puede considerarse como el factor geométrico diferencial $\frac{dG}{dl}$, representando $\frac{dG}{dl}$ el factor geométrico ($\text{cm}^2 \cdot \text{estereoradian}$) del detector para partículas que, al atravesarlo, recorren un camino entre l y $l+dl$. Obviamente, será

$$-\int_{l=0}^{l_M} \frac{dG}{dl} dl = G_0$$

el factor geométrico para la distribución $f(\theta)$ dada.

Recordemos que en el caso que estamos analizando, con el eje del cilindro vertical, es

$$\text{para } f(\theta) = 1 \quad G_0 = \frac{\pi^2}{2} DL \left(1 + \frac{1}{2} \frac{D}{L} \right)$$

$$\text{y para } f(\theta) = \cos^2 \theta \quad G_0 = \frac{\pi^2}{8} DL \left(1 + \frac{D}{L} \right)$$

El factor geométrico diferencial puede calcularse directamente utilizando (17), y resulta en general,

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{D^2} \frac{dG}{dl} &= 2\pi \int f(\theta) \frac{d}{dl} \left(\frac{1}{2} \cos\theta \arccos \frac{l \sin\theta}{D} - \frac{3}{2} \frac{l}{D} \sin\theta \cos\theta \right. \\
 &\quad \left. \cdot \sqrt{1 - \frac{(l \sin\theta)^2}{D^2}} \right) \sin\theta \, d\theta + 2\pi \frac{L}{D} \int \frac{d}{dl} \left(\sin\theta \sqrt{1 - \frac{(l \sin\theta)^2}{D^2}} \right) \sin\theta \, d\theta \\
 &= \pi \frac{D^2}{l^3} \left\{ \int_0^{1/D} f(\theta) \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} \, du + 3 \int_0^{1/D} f(\theta) \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}} \, du + 6 \int_0^{1/D} \frac{u^4}{\sqrt{1+u^2}} \, du + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{L}{D} \int_0^{\pi/2} f(\theta) \frac{u^4}{\sqrt{1-u^2}} \, d\theta \right\} \quad (18)
 \end{aligned}$$

donde $u = \frac{1}{D} \sin\theta$

En forma abreviada podemos escribir

$$-\frac{1}{D^2} \frac{dG}{dl} = \pi \frac{D^2}{l^3} \left\{ F_1\left(\frac{1}{D}\right) + 2 \frac{L}{D} F_2\left(\frac{1}{D}\right) \right\} \quad (18')$$

El primer término dentro del corchete de (18') es sólo función de $1/D$ y por consiguiente similar para todos los detectores cilíndricos, mientras que el segundo término incluye la dependencia en L/D .

Para detectores cilíndricos con el eje horizontal puede calcularse el factor geométrico diferencial en forma similar, aunque en este caso la integración es más complicada pues el área proyectada es también función del ángulo azimutal ϕ , $S_{\perp} = S_{\perp}(l, \theta, \phi)$.

Utilizando la relación (18) se ha calculado numéricamente $\frac{dG}{dl} \, dl$ para $f(\theta)=1$ y $f(\theta)=\cos^2\theta$. El programa de cálculo utilizado, en lenguaje Autocode, se incluye en el Apéndice I.

En las figuras 3a y 3b se muestran los resultados del cálculo para algunos valores de L/D . Por otra parte, el cálculo sistemático efectuado para distintos casos para los que $0 < \frac{L}{D} \leq 2$, permite dedu-

cir algunas consecuencias interesantes referentes a la posición del máximo (o los máximos) de la distribución de caminos.

Para $f(\theta) = \cos^2 \theta$ y $L/D \leq 1$ existe un camino más probable l_p que coincide con la altura del detector ($l_p = L$). La forma y ancho de la distribución depende de L/D .

Para $f(\theta) = \cos^2 \theta$ y $L/D > 1$, la distribución de caminos tiene dos máximos correspondientes a $l = D$ y $l = L$. La altura relativa del primer máximo respecto del segundo crece con L/D y llega a ser mayor que uno.

Para $f(\theta) = 1$, la distribución de caminos tiene dos máximos, uno para $l = L$ y otro para $l = D$. Para valores pequeños de L/D , el primero supera al segundo, pero por lo menos desde $L/D = 0.8$, la altura del máximo correspondiente a $l = D$ es mucho mayor que la correspondiente a $l = L$.

La eficiencia de un contador Geiger-Müller con eje vertical, para partículas cargadas de energía E estará ahora dada correctamente por

$$\epsilon(E) = - \frac{1}{G_0} \int_{l=0}^{l_M} \{1 - \exp(-j_p \rho l)\} \frac{dG}{dl} dl$$

En lo que sigue aplicaremos la expresión $\frac{dG}{dl}$ al cálculo de

- a) el espectro de las pérdidas medias de energía que sufren las partículas cargadas relativísticas que inciden sobre un detector con distribución angular conocida;
 - b) la eficiencia de un centellador de ioduro de sodio NaI(Tl) para fotones monoenergéticos incidentes con distribución angular isotrópica.
3. Espectro de las pérdidas de energía, en un centelleador, para partículas relativísticas.

La energía media depositada en un centelleador de densidad ρ , por una partícula que atraviesa integramente recorriendo un camino l , está dada por

$$\delta E = \int_0^{\rho l} - \frac{dE}{dx} dx$$

donde $-\frac{dE}{dx} = k_{col}(E)$ es la pérdida media de energía, por colisiones, que la partícula sufre en el medio. En general $\frac{dE}{dx}$ es función de la energía de la partícula incidente, pero para

partículas relativísticas esta función es lentamente variable y en lo que sigue la consideraremos constante ($-\frac{dE}{dx} = k = \text{cte}$).

Por lo tanto resulta

$$\delta E = k \rho l$$

Ignorando inicialmente las fluctuaciones estadísticas de las pérdidas por colisión, la distribución de las pérdidas medias de energía resulta equivalente a la distribución de los caminos recorridos en el centelleador. En efecto, el número de partículas relativísticas detectadas, cuyo recorrido en el centelleador está comprendido entre l y $l + dl$, está dado por

$$\frac{dN}{dl} dl = \int_{\Omega} J_0 f(\theta, \phi) \bar{\epsilon}(l) \frac{dS_d}{dl} d\Omega dl$$

donde $J_0 f(\theta, \phi)$ es el espectro integral unidireccional de las partículas relativísticas, $\bar{\epsilon}(l)$ es la eficiencia media (para las distintas energías) de detección. En lo que sigue supondremos $\bar{\epsilon}(l) = 1$ lo que significa que, dentro del rango $l = 0$ a $l = l_M$ toda partícula relativística que atraviesa el detector es detectada y además produce una salida luminosa proporcional a la pérdida de energía que experimenta.

Esto hace que podamos escribir

$$\frac{dN}{dl} dl = J_0 \frac{dG}{dl} dl \quad \text{y también}$$

$$\frac{dN}{dE} dE = J_0 \frac{dG}{dl} dl \quad (19)$$

donde $\frac{dN}{dE} dE$ es el número de partículas relativísticas detectadas cuya pérdida de energía está comprendida entre E y $E + dE$.

La igualdad (19) significa que la pérdida de energía media más probable $\left(\frac{dN}{dE}\right)_m$ coincide con la correspondiente al recorrido más probable l_p , y su valor será $k \rho l_p$.

Midiendo con un analizador multicanal el espectro de altura de pulsos producidos por partículas relativísticas conocidas su forma debería reproducir la de la distribución de caminos hallada. Así, utilizando los mesones μ de la radiación cósmica secundaria al nivel del mar, el máximo del espectro medido podría hacerse corresponder con la pérdida de energía correspondiente al camino más probable ($\delta E = k \rho l_p$). De este modo puede hallarse la equivalencia entre amplitud de pulsos (número de canal del analizador) y pérdida de energía media en el centelleador utilizado, para las partículas en cuestión.

Sin embargo, antes de comparar el espectro de energías medido $\frac{dN}{dE} dE$ con la distribución calculada mediante $\frac{dG}{dl} dl$, hay que tener en cuenta que, dado un camino recorrido l , la pérdida de energía real sufre fluctuaciones estadísticas alrededor del valor medio $k \rho l$. Esta distribución estadística, que llamaremos $D(E, E')$, hace que una partícula que recorre un camino l produzca una pérdida de energía correspondiente al valor medio para el recorrido l' . Como $D(E, E')$ es equivalente a $D(l, l')$, el espectro real medido estará dado por

$$\frac{dN(E)}{dE} dE = \frac{dN(l)}{dl} dl = \int_0^{l_m} D(l', l) \frac{dG(l')}{dl(l')} dl' dl$$

$$E' = k \rho l' \quad ; \quad E = k \rho l$$

La forma de $D(E, E')$ depende del espesor del material atravesado y de la energía máxima transferible a un electrón en una interacción electromagnética, lo que es función del impulso de la partícula incidente.

Generalmente la distribución es asimétrica, tendiendo a ser gaussiana para condiciones particulares del problema (Rossi, 1952)

En el caso que nos interesa, la distribución de pérdidas de energía es asimétrica - y el valor medio difiere del más probable-. Sin embargo, simplemente para mostrar su influencia aproximaremos a $D(E', E)$ por una función triangular, alrededor de E' , con un ancho total a altura mitad $\left(2\frac{E - E'}{E} = R\right)$ del 20%. Resulta así

$$D(l', l) = \frac{R - 1}{R^2 l'^2} + \frac{1}{R^2 l'^2} \quad (1 - R)l' \leq l \leq l'$$

$$D(l', l) = \frac{(1 + R)}{R^2 l'^2} - \frac{1}{R^2 l'^2} \quad l \leq l \leq (1 + R)l'$$

Esta función triangular está normalizada por la condición

$$\int_{(1-R)l'}^{(1+R)l'} D(l', l) dl = 1$$

El programa de cálculo utilizado para corregir por efectos de resolución la distribución de caminos dado por $\frac{dG}{dl}$ dl se incluye en el Apéndice II.

En la figura 4a se muestra la deformación de la distribución de caminos por "efectos de la resolución" para el caso $L/D = 2/5$ y $f(\theta) = \cos^2 \theta$; es evidente que la distribución modificada tiene su máximo para un valor de L/D superior en algunos por cientos al más probable L/D .

En la figura 4b se muestra la comparación del espectro de pérdidas de energías de mesones μ relativísticos, donde la pérdida de energía correspondiente al máximo del espectro medido se ha hecho equivaler a $(kpl_p)^*$ siendo este valor el correspondiente al camino más probable en la distribución modificada.

4. Eficiencia de un centellador de NaI(Tl).

La eficiencia de un centellador para la detección de fotones de una energía $E = h\nu$ depende del camino recorrido en el centellador. Para un haz paralelo monoenergético que recorre en el cristal de densidad ρ un camino $l\rho(\text{cm})$, la eficiencia está dada por

$$\epsilon_{\nu} = 1 - \exp(-\mu_{\nu}\rho l) \quad (20)$$

donde μ_{ν} es el coeficiente másico ($\text{cm}^2.\text{g}^{-1}$) de atenuación total para fotones de energía E .

En el caso en que el haz no es paralelo, sino tiene una cierta distribución angular, evidentemente existirá una cierta distribución de caminos recorridos en el cristal y la expresión de la eficiencia resulta más compleja.

Wolicki, Jastrow y Brooks (1957) han calculado la eficiencia de cristales de NaI(Tl) de distintas dimensiones para el caso relativamente simple de una fuente radioactiva puntual, de emisión isotrópica, colocada a lo largo del eje del cristal y a distintas distancias de su cara superior. Sus resultados se utilizan comunmente para efectuar las correcciones por eficiencia en el caso en que el detector está sumergido en un flujo isotrópico de radiación X, por ejemplo, el flujo de fotones secundarios de la radiación cósmica en la atmósfera terrestre o fondo difuso de la radiación X galáctica.

Para fotones de baja energía ($< 100 \text{ keV}$) y cristales cuyas dimensiones contienen algunas longitudes de interacción ($\lambda_{\nu} = 1/\mu_{\nu}$) los valores de eficiencia que se obtienen de

sus curvas para el caso de una fuente puntual directamente aplicada sobre el centro de la cara superior del cristal son una muy buena aproximación al de la incidencia isotrópica sobre toda la cara del del cristal. Sin embargo es obvio que para energías mayores, y por lo tanto λ_v mayores, los "efectos de borde" para la radiación incidente en partes del cristal alejados del eje y sobre sus caras laterales modifican la eficiencia real en relación con el valor calculado en la forma más simple.

Utilizando los resultados del §2 para el caso en que la radiación incidente sea isotrópica, podemos definir una eficiencia efectiva de un cristal cilíndrico cuya relación altura/diámetro sea L/D, por la relación

$$\epsilon_v = \frac{\int_0^L \{1 - \exp(-\mu_v \rho l)\} \frac{dG}{dI} dl}{\frac{dG}{dI} L} \quad (21)$$

o lo que es equivalente

$$\epsilon_v = \frac{1}{G(0)} \int_0^L \{1 - \exp(-\mu_v \rho l)\} \frac{dG}{dI} dl \quad (22)$$

Usando la definición (22) con $\frac{dG}{dI}$ dado como antes por (17) se calcularon numéricamente la eficiencia de tres cristales de NaI usados comunmente en el laboratorio, con L/D = 2/7 y 2/5 (L = 1.27 cm), y L/D = 1 (L = 2.54 cm), para fotones de energías entre 10 keV y 100 MeV, de incidencia isotrópica.

El cálculo se efectuó con una computadora Mercury (Ferranti) y el programa correspondiente, en lenguaje Autocode, se incluye en el Apendice 3. Los valores del coeficiente másico de atenua_

ción total μ_v para el NaI son los dados por Siegbahn (1966). Los valores calculados para los tres casos se dan en la Tabla I. En las Fig. 5a-c se representan los valores calculados comparándolos con los de Wolicki et al. Es evidente que los valores obtenidos por esos autores resultan sistemáticamente superiores a los calculados en el presente trabajo, llegando a apartarse en un 30%, en la zona de los 5 MeV para el cristal $L/D = 2/7$ ($L = 1.27$ cm).

En el gráfico 5a se representa también la eficiencia calculada utilizando el espesor medio $\bar{l}$, y la relación (20), la que desde unos 400 keV en adelante se acerca considerablemente a nuestros cálculos más completos.

Por otra parte, al utilizar en el cálculo de la eficiencia el coeficiente de atenuación total, aquella debe considerarse un límite superior del valor real, ya que en el rango comprendido entre aproximadamente 100 keV y 5 MeV, al coeficiente utilizado contribuye en elevada proporción el coeficiente de dispersión Compton, y en estos procesos de dispersión, especialmente para γ fotones de energías próximas al extremo inferior del rango mencionado, una porción considerable de los fotones que interactúan son dispersados conservando prácticamente la energía inicial y por lo tanto, a los efectos de la detección deberían ser ignorados.

Con los valores dados en las tablas para ϵ_v pueden hallarse fácilmente las eficiencias efectivas medias en un intervalo (E_1, E_2) correspondientes a fotones incidentes con un espectro diferencial $\frac{dI}{dE}$, siendo

$$\bar{\epsilon}(E_1, E_2) = \frac{\int_{E_1}^{E_2} \epsilon(E) \frac{dj}{dE} dE}{\int_{E_1}^{E_2} \frac{dj}{dE} dE}$$

donde $\frac{dj}{dE}$ es el espectro diferencial de la radiación incidente.

REFERENCIAS

- Rossi B., High Energy Particles, Cap , Prentice Hall, 1952.
- Sieghahn K ed., Alpha-, Beta-, and Gamma-Ray Spectroscopy, Vol 1, pag 841- North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1966.
- Wolicki E.A., R.Jastrow y F.Brooks, Calculated Efficiencies of NaI Crystals, NRL Report-4833, 1956.

TABLA I

E	L/D= 2/7	L/D= 2/5	L/D= 1
MeV	L=1.27 cm	L=1.27 cm	L=1.27 cm
0.010	1.000	1.000	1.000
0.015	1.000	0.999	0.999
0.020	0.998	0.997	0.998
0.030	0.991	0.989	0.992
0.033	0.989	0.986	0.989
0.033	0.999	0.998	0.999
0.040	0.998	0.996	0.997
0.050	0.994	0.993	0.994
0.060	0.990	0.988	0.991
0.080	0.978	0.973	0.979
0.100	0.959	0.950	0.961
0.150	0.876	0.851	0.883
0.200	0.749	0.714	0.769
0.300	0.551	0.512	0.575
0.400	0.445	0.413	0.472
0.500	0.391	0.357	0.410
0.600	0.354	0.321	0.372
0.800	0.307	0.277	0.323
1.000	0.276	0.249	0.291
1.500	0.231	0.207	0.243
2.000	0.200	0.186	0.219
3.000	0.189	0.168	0.198
4.000	0.182	0.162	0.192
5.000	0.180	0.160	0.189
6.000	0.181	0.161	0.190
8.000	0.184	0.164	0.193
10.000	0.189	0.169	0.199
15.000	0.204	0.183	0.215
20.000	0.217	0.194	0.228
30.000	0.238	0.213	0.250
40.000	0.252	0.226	0.265
50.000	0.265	0.238	0.279
60.000	0.273	0.246	0.287
80.000	0.286	0.258	0.301
100.000	0.295	0.267	0.311

APENDICE I

CALCULO DEL FACTOR GEOMETRICO DIFERENCIAL IMPRESION

```
X=50
300,-99
620,0
380,-1*
LEER(A)
91)LEER(D)
LEER(H)
IMPRIMIR(D)2,4
IMPRIMIR(H)2,4
NUEVA LINEA
X30=H/D
X24=1+X30X30
X24=ψRAIZ(X24)
X24=100X24
M=ψPENT(X24)
M=M+1
PRINT(M)3,1
NUEVA LINEA
L=180
X1=.5π/L
X2=0
X3=0
X4=0
I=0(1)M
X2=.01I
X5=0
X6=0
J=0(1)L
>CALCULO DEL INTEGRANDO
X7=ψSEN(X6)
X8=ψCOS(X6)
X9=X2X8
X10=X30-X9
SALTAR1,0>X10
X11=X2X7
X12=-X11X11+1
SALTAR1,0>X12
X13=ψRAIZ(X12)
X14=-3X9+2X30
X15=X13/X11
X16=ψARCTAN(1,X15)
SALTAR92,A≠0
21)X17=X16X8X8X8X7+X14X8X8X13X7X7
SALTAR93
92)X17=X16X8X7+X14X13 X7X7
93)X18=πX17
X5=X5+X18
SALTAR1,0>J
SALTAR1,J>L
```

APENDICE I (CONTINUACION)

```
K=ψINTER(J,1)
X5=X5+X18
SALTAR1,K≠1
X5=X5+2X18
1)X6=X6+X1
REPETIR
X20=.333333333X5X1
SALTAR24,I>1
X21=X20
PRINT(X21)3,6
NUEVA LINEA
24)X22=X3-X20
X3=X20
SALTAR22,0>I.
PRINT(X22)2,6
NUEVA LINEA
22)REPETIR
620,20
620,30
620,13
JUMP91
100)X16=.5π
SALTAR21
ψSEN
ψRAIZ
ψARCTAN
CIERRE
→
```

Este programa calcula $-\frac{1}{D} \frac{dG}{dI} dI$.

Datos

1) Un número A $\begin{cases} = 0 & \text{si } f(\theta) = \cos^2 \theta \\ \neq 0 & \text{si } f(\theta) = 1 \end{cases}$

2) Diámetro del cristal D(cm).

3) Altura del cristal H(cm).

APENDICE II

PERDIDA DE ENERGIA EN CENTELLEADORES.
CORRECCION POR RESOLUCION.

```
Y→200
X→200
READ (H)
ψ10(0,H)
620,30
620,13
620,13
READ(E')
READ(B)
READ(C)
READ(M)
READ(E)
PRINT(E')1,2
PRINT(B)2,3
PRINT(C)2,3
PRINT(M)3,0
PRINT(E)3,3
620,30
620,13
M=M-1
F=1-E'
F'=1+E'
G=1/E'
U'=0
J=0(1)200
U'=.005+.01J
A'=GF'
B'=GF
ψ6(0)X0,M
I=0(1)M
V'=.005+.01I
X'=G/V'
JUMP2,V'>U'
Z=A'-U'X'
JUMP3,0>Z
Z=.01ZX'XI
4)YJ=YJ+Z
JUMP3
2)Z=X'U'-B'
JUMP3,0>Z
Z=.01ZX'XI
JUMP4
3)Z=0
REPEAT
REPEAT
ψ6(0)X0,1
Y0=X0
K=0(1)200
PRINT(YK)0,6
620,30
```

APENDICE II (CONTINUACION)

620,13
REPEAT
END
CLOSE
→

Calcula $\frac{1}{J_0} \frac{dN}{dE} dE$ para partículas relativísticas ($\delta E = k\rho l$)

teniendo en cuenta las fluctuaciones estadísticas en las pérdidas de energía. Es equivalente a calcular $\frac{dG^*}{dl}(l) dl$ aplicando la distribución $D(E', E)$

$$\text{con } \frac{1}{D^2} \frac{dN}{dE} dE = \frac{1}{D^2} \frac{dG^*}{dl} dl = \frac{1}{D^2} \int_{l'=0}^{l_M} D(l', l) \frac{dG}{dl'}(l') dl' dl$$

Datos

- 1) Cantidad de valores de $\frac{1}{D^2} \frac{dG}{dl'}$, dl' .
- 2) Tabla de valores de $\frac{-1}{D^2} \frac{dG}{dl'}$, dl' .
- 3) Resolución.
- 4) Diámetro del cristal D (en cm).
- 5) Altura del cristal.
- 6) Idem 1).
- 7) El primer valor de los resultados del Apéndice I ($\frac{1}{D^2} G_0$).

APENDICE III

EFICIENCIA DE CENTELLADORES

```
IMPRESION
Y+300
91)LEER(D)
LEER(H)
LEER(M)
LEER(X)
PRINT(D)2,5
PRINT(H)2,5
PRINT(M)3,0
PRINT(X)3,6
NUEVA LINEA
L=0
I=1(1)M
LEER(YI)
REPETIR
1)A=0
U'=0
LEER(E)
IMPRIMIR(E)5,0
LEER(U)
IMPRIMIR(U)3,4
I=1(1)M
U'=.01+U'
B=ψEXP(-UDU'+.005UD)
F=YIB
A=A+F
REPETIR
L=L+1
A=A/X
PRINT(1-A)1,6
NUEVA LINEA
JUMP1,L#51
JUMP91
ψEXP
CLOSE
→
```

Este programa calcula la eficiencia para la detección de radiación electromagnética de un centelleador inorgánico (en este caso de NaI), teniendo en cuenta la distribución de caminos en el cristal de la radiación incidente.

DATOS

- 1) Diámetro del cristal D.
- 2) Altura del cristal H.
- 3) Límite superior de integración.

APENDICE III (CONTINUACION)

- 4) El primer valor de los resultados del cálculo de factor geométrico diferencial ($-\frac{1}{D^2} G_0$).
- 5) Tabla de valores de $-\frac{1}{D^2} \frac{dG}{dl} dl$.
- 6) Tabla de coeficientes de atenuación total.

DESCRIPCION DE LAS FIGURAS

- Fig. 1a - Esquema del sistema de coordenadas utilizado. Se muestran los recorridos ($\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$) en el detector, de dos partículas que lo atraviesan totalmente en un plano paralelo al plano XZ.
- Fig. 1b - Se muestra, en rayado, el área de la base superior del detector por la que penetran partículas que, incidiendo con un ángulo zenital θ en un plano paralelo al XZ, recorren en el mismo una longitud $l \geq l_1$.
- Fig. 1c - Área sensible de la base superior (vista desde arriba), para partículas que incidendo con un ángulo zenital θ en un plano paralelo al XZ, recorren en el detector una longitud $l \geq l_1$.
- Fig. 2a - Se muestra, en rayado, la porción de superficie lateral por la que penetran partículas relativísticas que, incidendo con un ángulo zenital θ , recorren en el detector es $l \geq l_1$. Estas partículas inciden en planos paralelos al plano XZ.
- Fig. 2b - Se muestra, en rayado, las áreas sensibles efectivas, $A(l_1, \theta)$ y $B(l_1, \theta)$, para partículas que, incidendo con un ángulo zenital θ , recorren en el detector en un plano paralelo al XZ, un camino $l \geq l_1$ penetrando por su base superior o su superficie lateral, respectivamente.
- Fig. 3a - Resultados del cálculo de $-\frac{1}{D^2} \frac{dG}{dl} \delta l$ en función de l/D , para partículas relativísticas, incidentes con

distribución angular isotrópica ($f(\theta) = 1$), para tres valores de L/D . Para el cálculo se ha tomado $\frac{\delta l}{D} = 0.01$.

Fig. 3b

- Resultados del cálculo de $-\frac{1}{D^2} \frac{dG}{dl} \delta l$ en función de l/D , para partículas relativísticas incidentes con una distribución angular $f(\theta) = \cos^2 \theta$. Para el cálculo se ha tomado $\delta l/D = 0.01$.

Fig. 4a

- Para el caso $L/D = 0.4$ y $f(\theta) = \cos^2 \theta$, se muestra el efecto de la dispersión estadística (supuesta triangular) en las pérdidas de energía que sufren mesones μ relativísticos que atraviesan el detector, para $R = 20\%$ y 30% . La distribución de pérdidas medias de energía es considerada proporcional a la distribución de caminos recorridos $\left(-\frac{1}{D^2} \frac{dG}{dl} \delta l \right)$.

Fig. 4b

- Se compara el espectro de pérdida de energía de mesones μ relativísticos medido al nivel del mar con un cristal de NaI para el que $L/D = 0.4$ ($L = 1.27$ cm), con la distribución de pérdidas de energía calculada y corregida con $R = 20\%$. La distribución calculada se ha normalizado en el máximo del espectro medido. El ajuste es correcto alrededor del máximo. La discrepancia por encima de 7.5 MeV se debe, en parte, al hecho de que la dispersión en las pérdidas de energía media no es triangular, y a que no todas las partículas incidentes son relativísticas. El exceso de cuentas por debajo de los 5.3 MeV se debe en parte a la exis

tencia de otras partículas no relativísticas.

Fig. 5a,b,c - Resultados del cálculo de eficiencias de tres cristales de NaI(Tl), para fotones incidentes con distribución isotrópica. Se comparan, además, con las eficiencias calculadas por Wolicki, E.A., R.Jastrow y F.Brooks (1956).

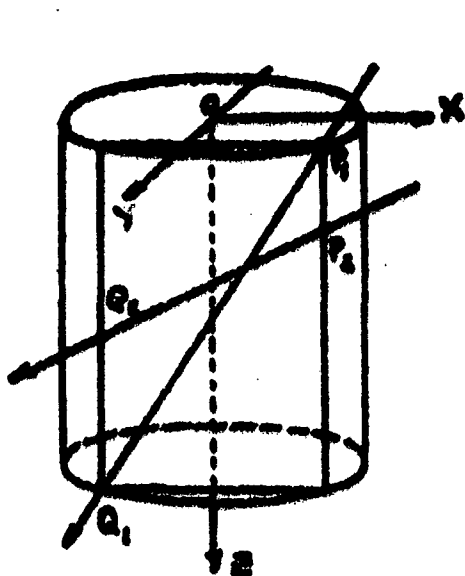


Fig. 1a

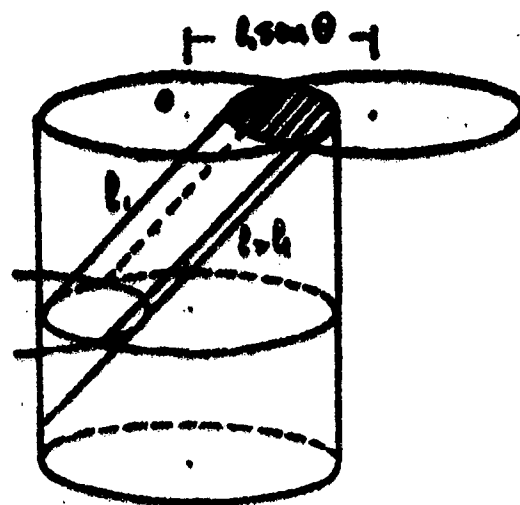


Fig. 1b

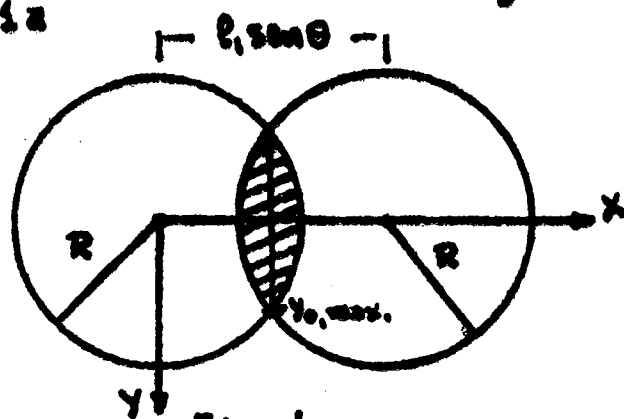


Fig. 1c

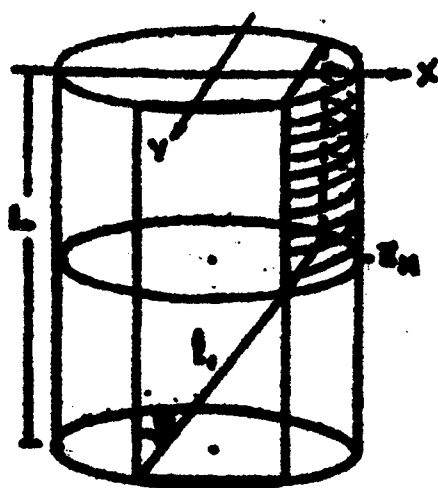


Fig. 2a

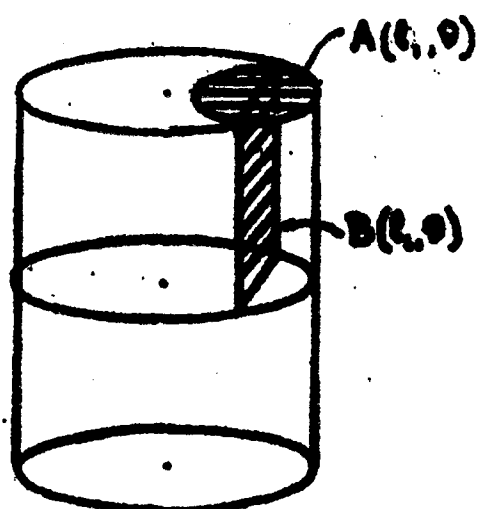


Fig. 2b

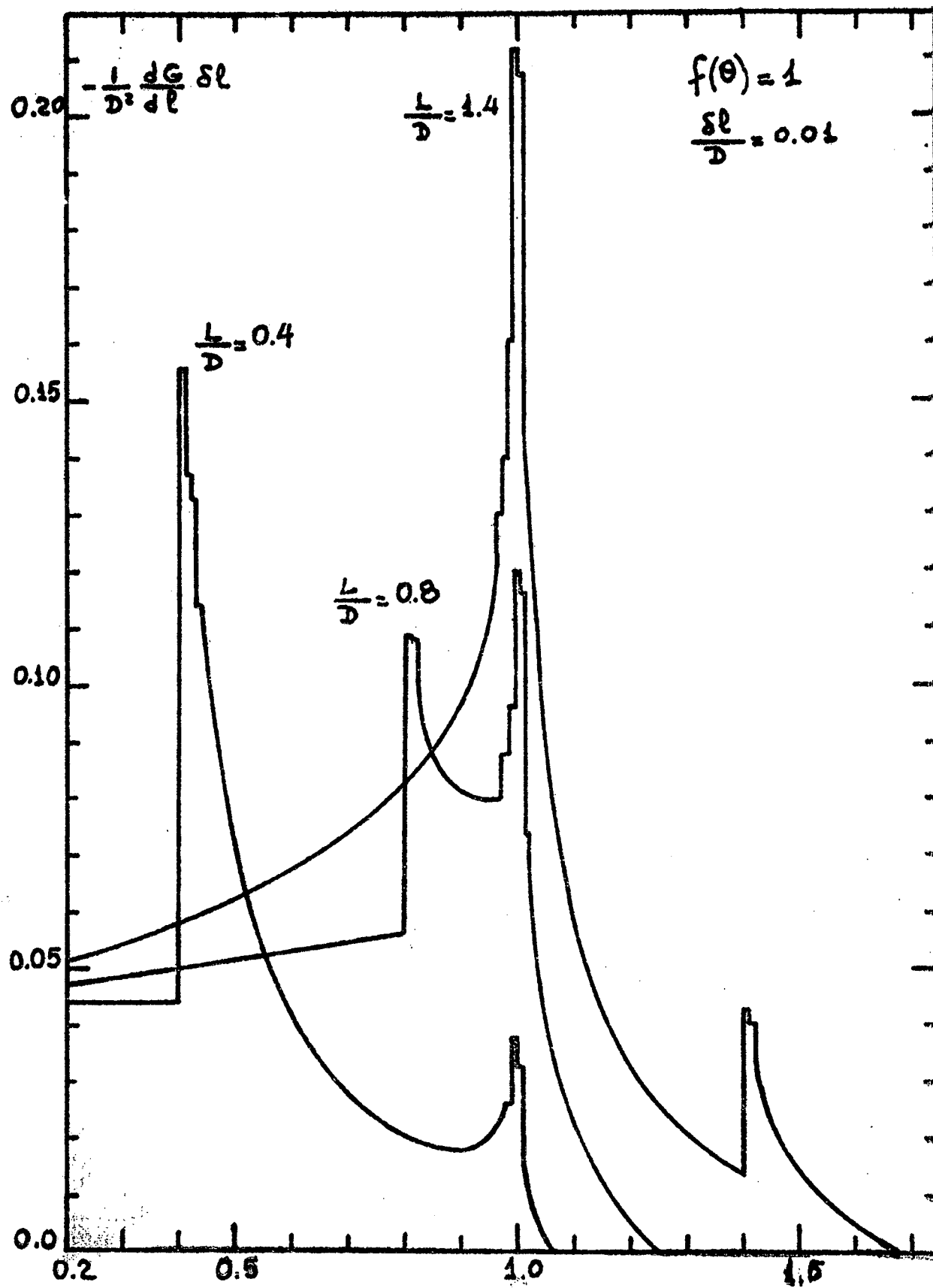


fig. 3a

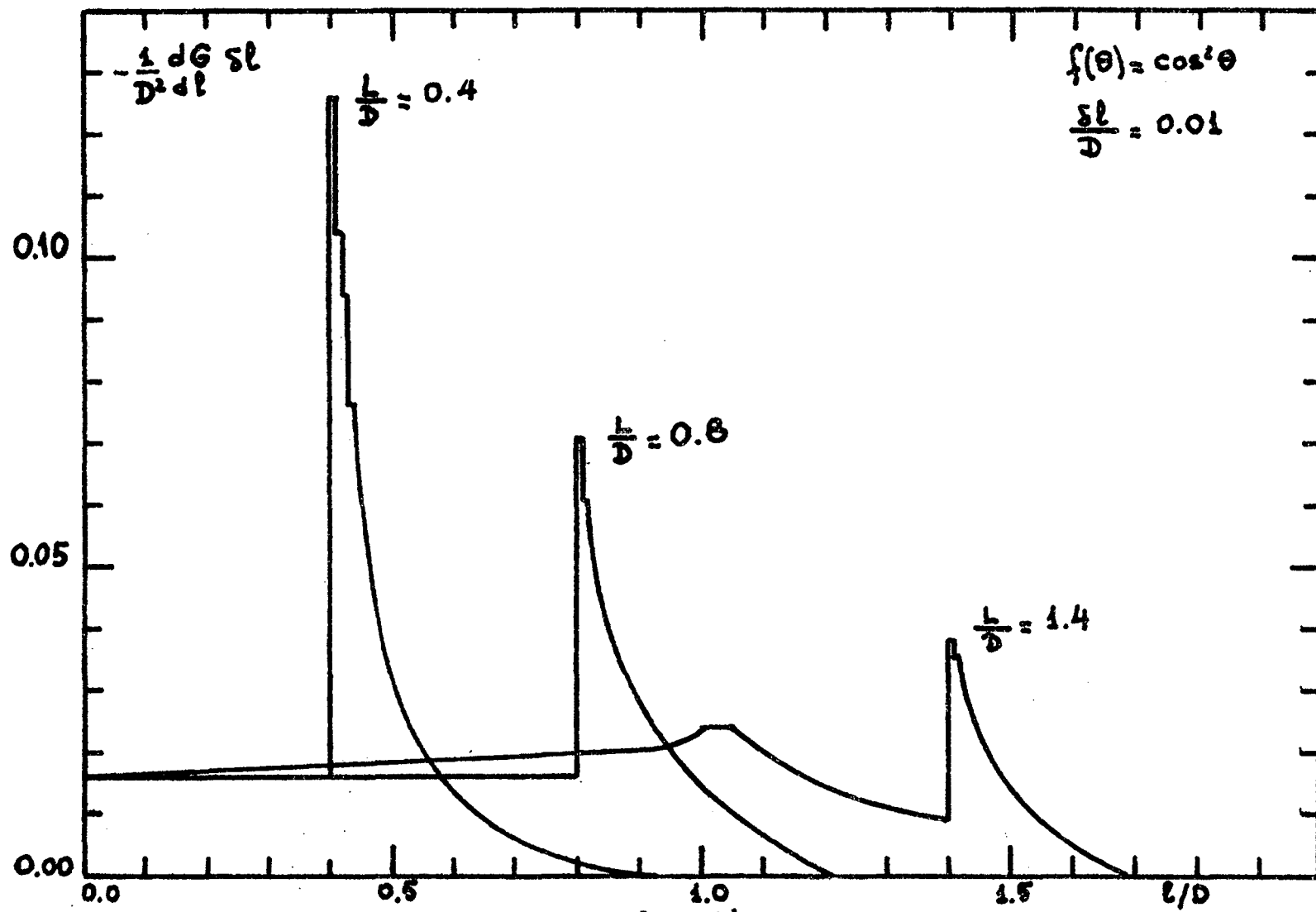


fig. 3b

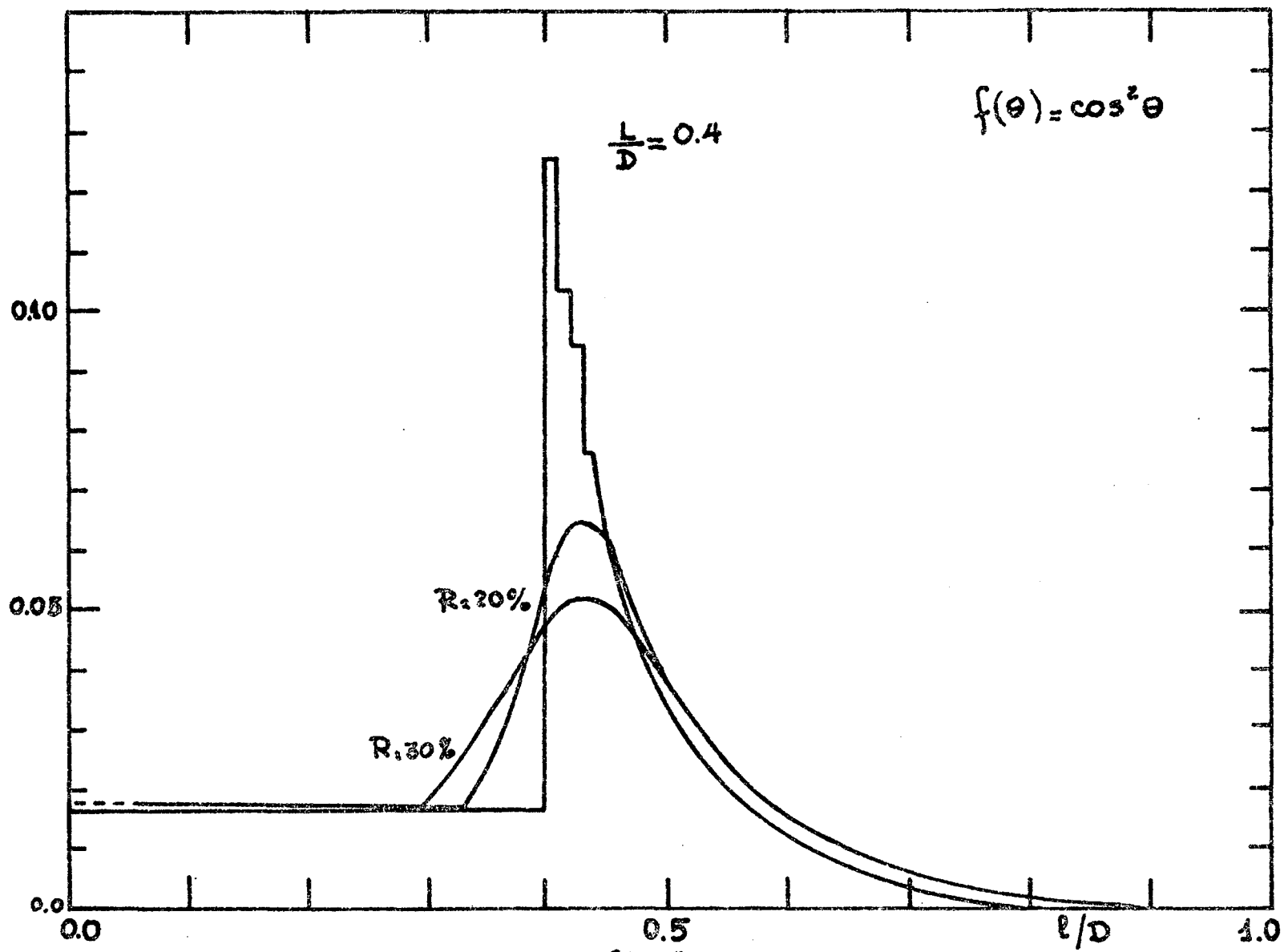


fig. 4 a

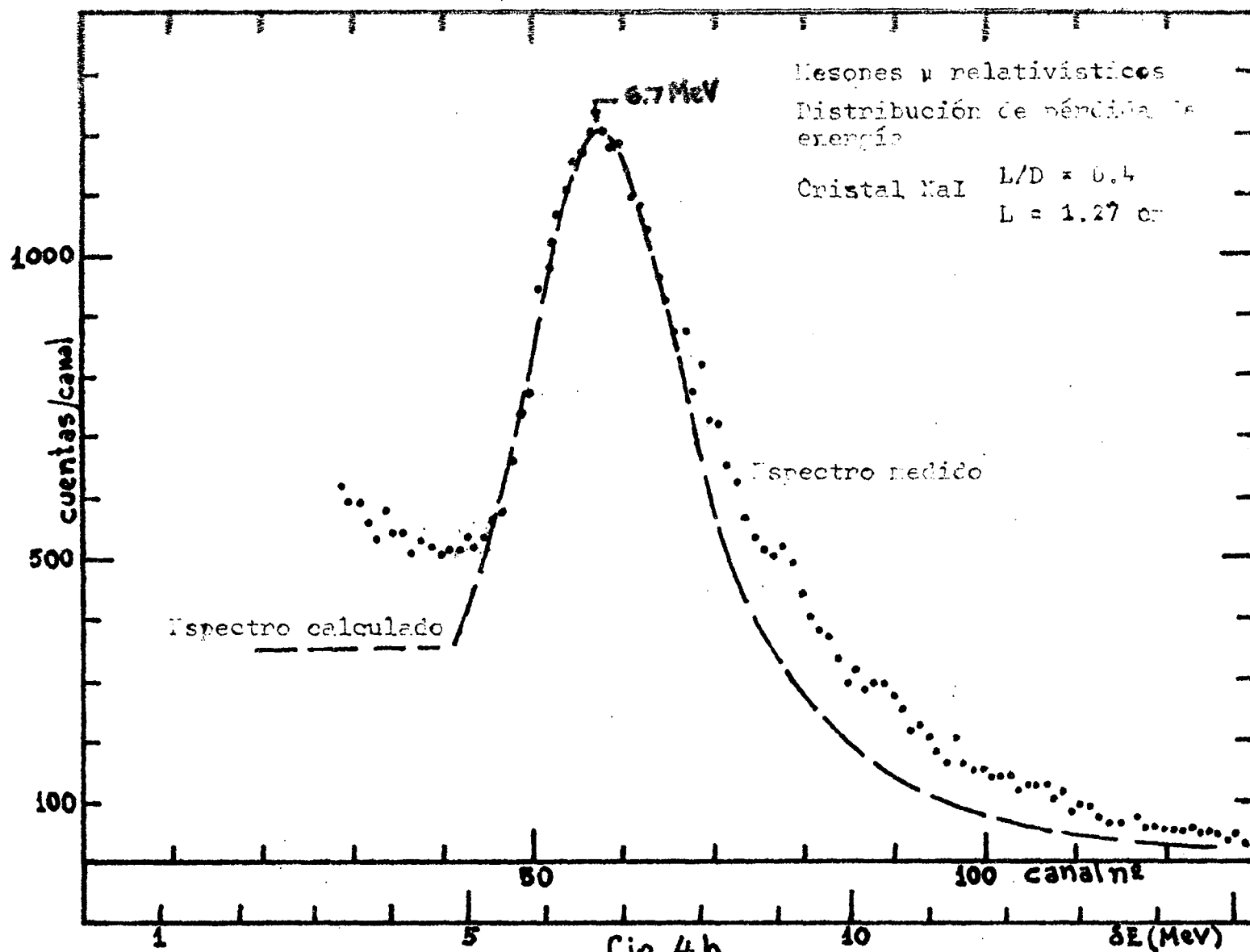


fig. 4 b

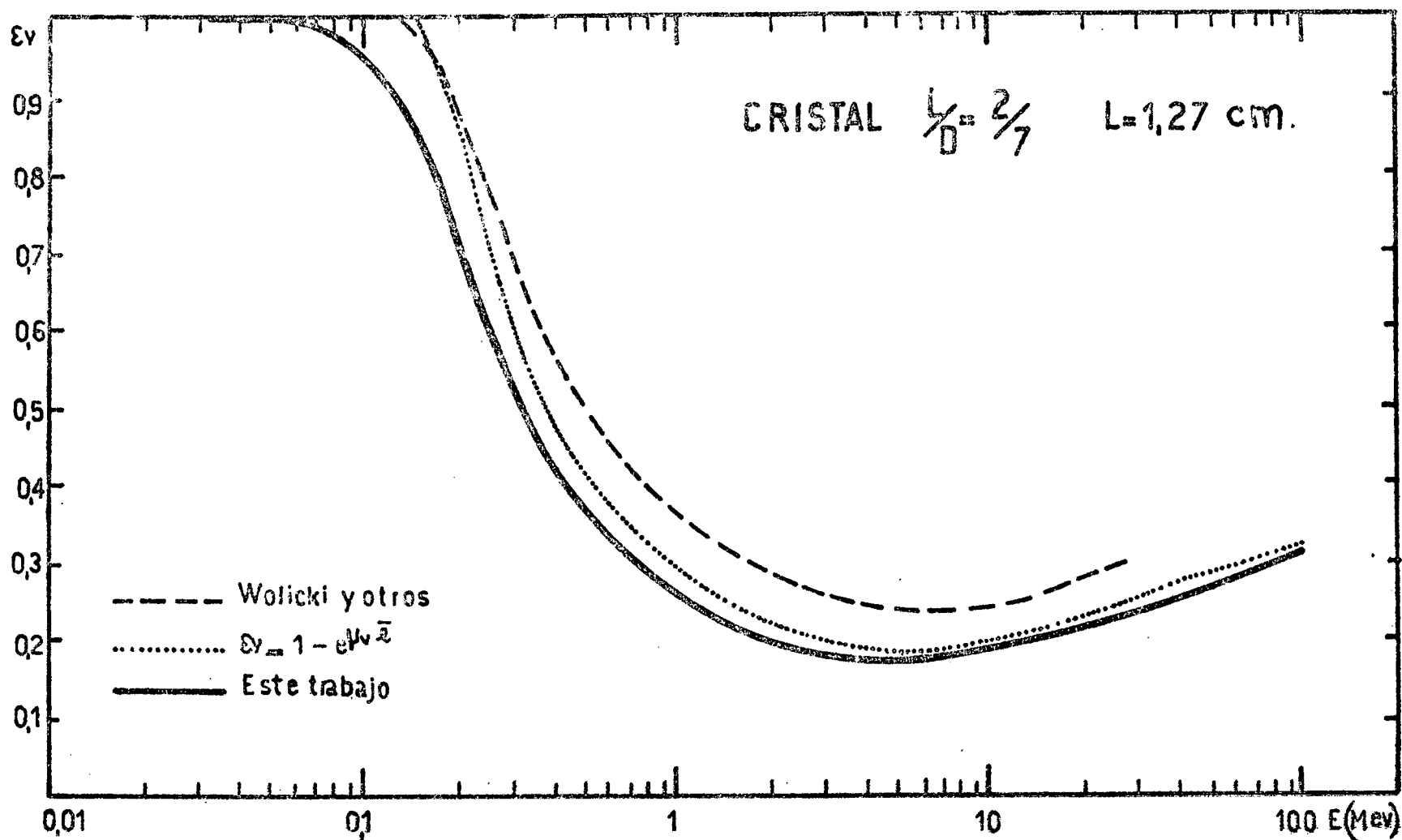


Fig. 5a

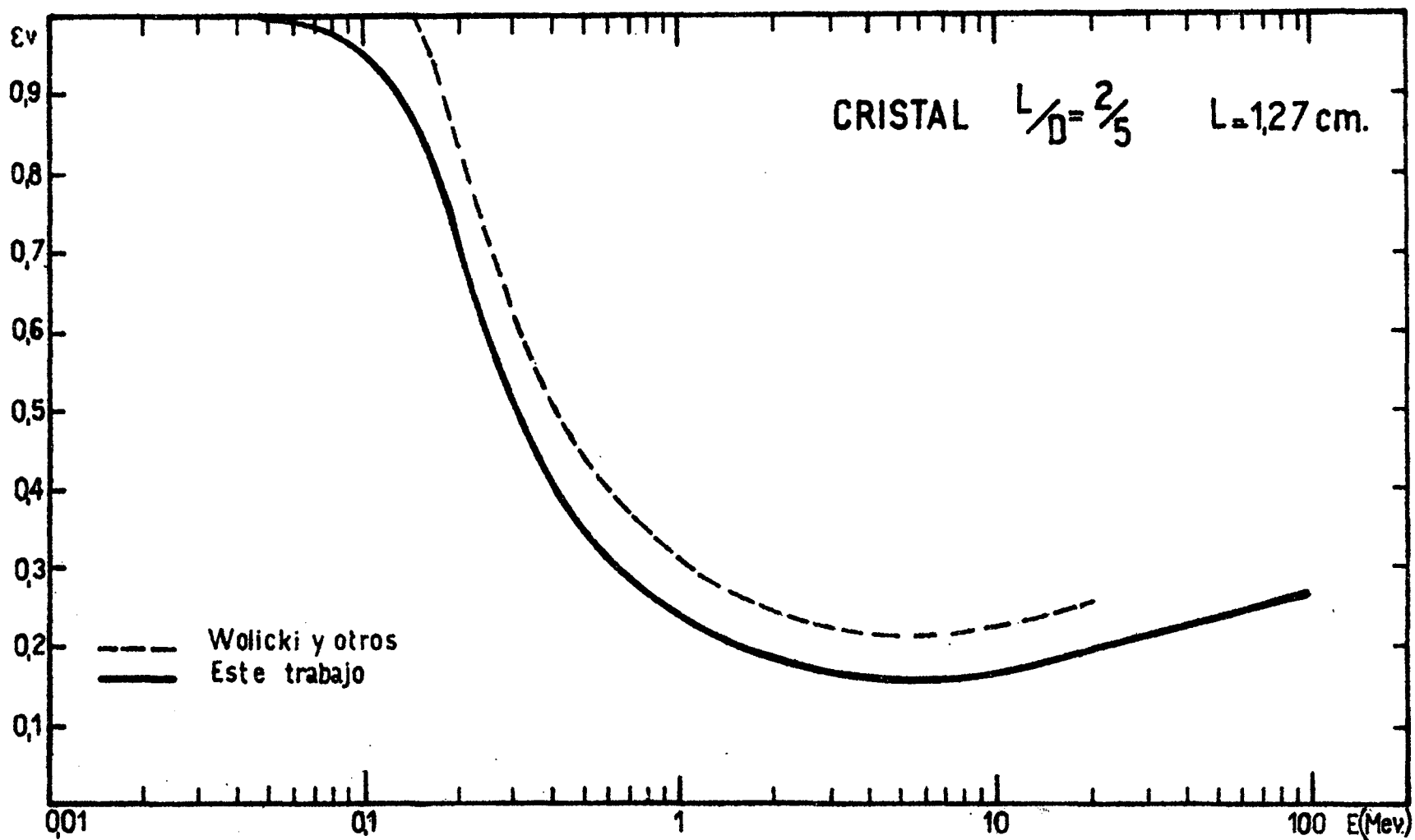


Fig. 56

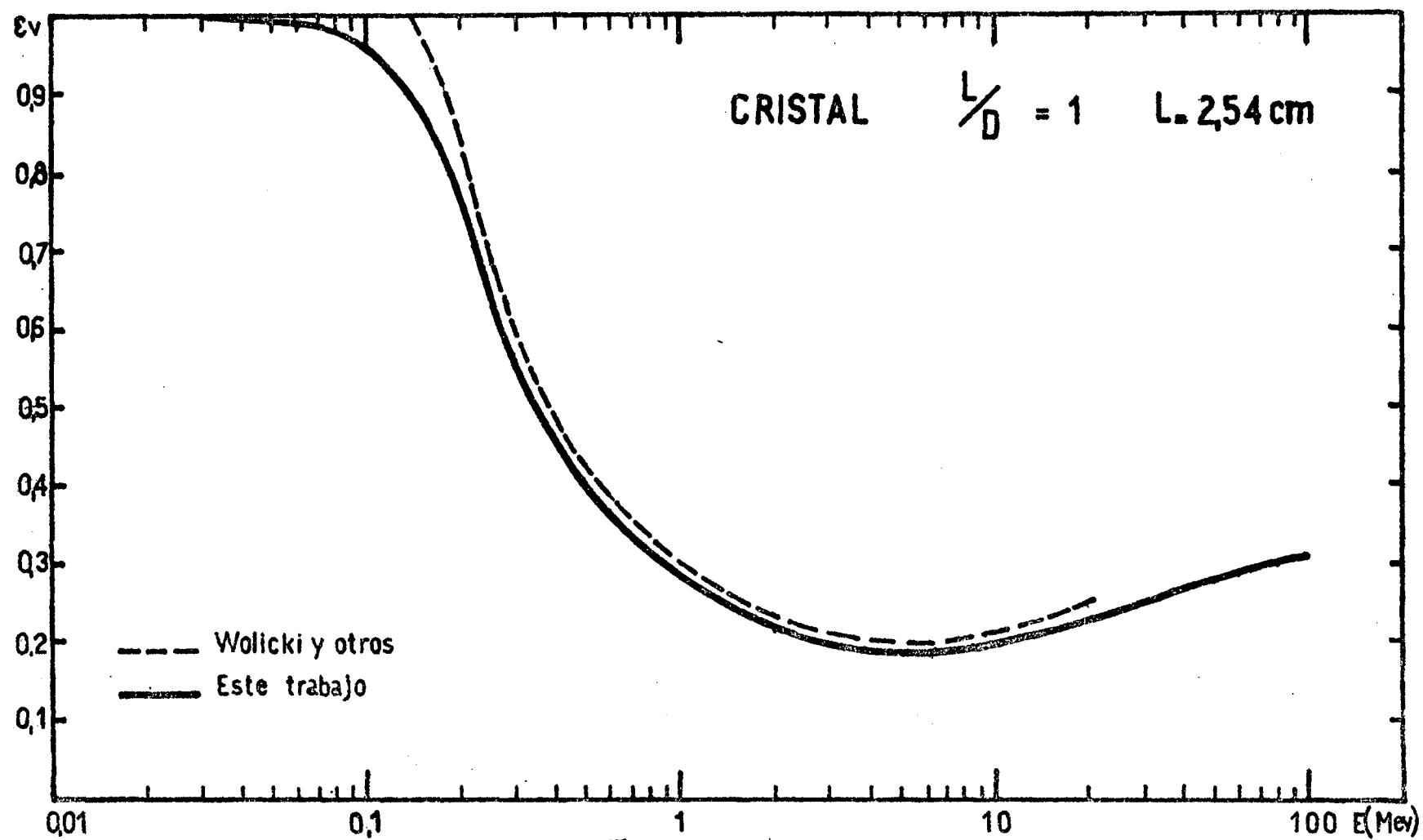


Fig. 5c