

RESOLUCION POR ELEMENTOS FINITOS DE LAS ECUACIONES TERMOHIDRAULICAS DEL FLUJO DE CREEPING PLANO

Sergio Pissanetzky

Centro Atómico Bariloche - Instituto Balseiro
Comisión Nacional de Energía Atómica y
Universidad Nacional de Cuyo

1. INTRODUCCION

Son muy frecuentes los problemas de intercambio de calor en reactores nucleares que deben ser tratados numéricamente teniendo en cuenta el flujo viscoso del fluido incompresible y la conducción y convección del calor en el mismo. El flujo se llama creeping cuando el término de inercia en la ecuación de Navier-Stokes puede ser omitido porque las partículas del fluido no sufren aceleraciones apreciables ya sea por moverse lentamente o por hacerlo casi en línea recta. Si además la viscosidad del fluido se supone independiente de la temperatura, la ecuación de Navier-Stokes queda desacoplada de la ecuación térmica y puede resolverse separadamente. En este caso, la solución dinámica, una vez determinada, se reemplaza en la ecuación térmica como dato, y la ecuación térmica se resuelve, obteniéndose la distribución final de temperatura. En el caso más general, la viscosidad del fluido, y también su densidad si fuera necesario, se consideran funciones de la temperatura. Este caso se resuelve iterativamente: primero se suponen valores conocidos fijos para los parámetros, se resuelve el problema térmico, se calculan nuevos valores para los parámetros, y se continúa iterando hasta obtener convergencia. Ambos casos pueden ser tratados en 2 dimensiones con el programa BLARMON2 que aquí presentamos y que es una extensión y generalización del programa BLARMON1 /1/.

Por otra parte, la ecuación cuasi-bi-armónica que rige el flujo de creeping y que este programa resuelve, es la misma ecuación que rige la deformación estática de placas: por lo tanto, también se pueden resolver problemas de placas con bordes apoyados y/o empotrados, con o sin apoyos intermedios, con cargas arbitrarias y de forma y espesor irregulares.

2. ECUACIONES TERMOHIDRAULICAS DEL FLUJO DE CREEPING

La ecuación dinámica fundamental para el flujo de fluidos viscosos incompresibles es la ecuación de Navier-Stokes /2/:

$$\frac{Dv_i}{Dt} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{1}{\rho} F_i \quad (1)$$

donde $\vec{v}(x,y,z,t)$ es la velocidad del fluido, $p(x,y,z,t)$ su presión, ρ la densidad constante, $\eta(x,y,z,t)$ la viscosidad, y F una fuerza volumétrica por unidad de volumen del fluido que es comúnmente el peso, pero que puede in-

cluidas otras fuerzas también. $D\vec{v}/Dt$ es la aceleración sustancial de las partículas del fluido. La ecuación de Navier Stokes para flujo de creeping es:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \right] + f_i = 0 \quad (2)$$

y es lineal, lo cual hace mucho más sencilla su resolución numérica. Nótese que, como se anticipó, hemos evitado hacer la suposición usual de que η sea constante.

Cuando el fluido es incompresible, la ecuación de continuidad toma una forma sencilla:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3)$$

Finalmente, el sistema de 5 ecuaciones con las 5 incógnitas $\vec{v}$, p , T , donde $T(x,y,z,t)$ es la temperatura del fluido, se completa con la ecuación de transferencia térmica en la que omitimos el término de disipación viscosa, generalmente pequeño /2/:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)T = \frac{1}{\rho c_p} \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (4)$$

donde k es la conductividad térmica y c_p es el calor específico a presión constante, y k puede, en general, ser función de las coordenadas y del tiempo.

Las ecuaciones (2) y (3) pueden resolverse por separado, hallando $\vec{v}$ y p . Este tratamiento es válido para problemas desacoplados en que la distribución de temperaturas en el fluido no afecta su movimiento, y excluye explícitamente los casos de convección libre, aunque la misma sea muy lenta. Una vez hallado $\vec{v}$, se lo reemplaza en la ecuación (4), la que se convierte en lineal y puede resolverse numéricamente. Finalmente, conocida T , se hallan los flujos calóricos en las superficies que confinan al fluido:

$$\vec{q} = -k \nabla T \quad (5)$$

Para flujo plano, la ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

Introducimos la función corriente, definida por:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

que reemplazadas en la (2), y eliminando p por derivación cruzada, dan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] + 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] = \\ = - \frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (8)$$

Las condiciones de borde son:

$$\psi = \text{dato}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \text{dato}$$

sobre todo el borde, donde n es la normal al borde.

Una vez resuelto el problema dinámico, que hemos considerado desacoplado del térmico, se conoce $\dot{v}(x,y)$, y se puede resolver el problema térmico por medio de la forma estacionaria bidimensional de la ec.(4):

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\rho c_p} \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (9)$$

requiriendo como datos de borde los valores de T o de $\partial T / \partial n$ sobre toda la frontera. La ecuación (9) es una ecuación de difusión.

3. ELEMENTOS FINITOS

Si en la ecuación (8) reemplazamos la solución exacta ψ y hacemos los cálculos indicados, el resultado será exactamente 0. Pero ψ no se conoce, y lo vamos a aproximar por medio de otra función $\bar{\psi}$, expresada como una suma de otras funciones sencillas $N_i(x,y)$ multiplicadas por coeficientes constantes ψ_i a ser determinados:

$$\bar{\psi} = N_i \psi_i$$

donde usamos el convenio de suma sobre índices repetidos, omitiendo el símbolo $\sum_i$. Las funciones N_i , sencillas y conocidas, constituyen el espacio fini-

to de funciones en el que trataremos de encontrar la mejor aproximación posible $\bar{\psi}$ a la solución ψ de la ecuación (8). Las funciones N_i pueden ser elegidas de muchas maneras diferentes, pero en el método de Elementos Finitos, esas funciones se eligen, precisamente, como los elementos finitos, también llamadas funciones interpolantes o funciones de forma, de la siguiente manera:

a) El recinto de interés se aproxima por medio de una red de elementos finitos, que consiste en un conjunto de figuras geométricas sencillas, llamadas también elementos finitos. En dos dimensiones, estas figuras son triángulos o cuadriláteros.

b) Se asigna un conjunto de nodos. Lo más sencillo es colocar nodos en todos los vértices de los elementos, pero puede haber nodos también en los lados o dentro de los elementos. Sea N la cantidad total de nodos.

c) A cada nodo i se asigna una función interpolante N_i , que es distinta de cero solamente en los elementos que tienen el nodo i como uno de sus nodos, y que dentro de esos elementos es un polinomio sencillo en x,y . La elección más sencilla es usar polinomios lineales y exigir que N_i tome el valor 1 en el nodo i y decaiga linealmente hasta anularse sobre todos los lados opuestos de los elementos. Pero otras elecciones son también posibles, por ejemplo para resolver la ecuación cuasi-biarmónica usaremos polinomios de tercer grado definidos sobre una red de triángulos con nodos solamente en los vértices, pero además asignaremos tres funciones interpolantes a cada nodo i .

d) Una consideración importante para elegir las N_i es el grado de continuidad que se requiere de la función $\bar{\psi}$ y sus derivadas respecto de x e y . Cuando se eligen N_i lineales, $\bar{\psi}$ resulta una función continua con derivadas primeras acotadas pero discontinuas (continuidad C^0). Eso es satisfactorio para aproximar la solución de una ecuación diferencial de segundo orden /3/, como por ejemplo la ecuación de Laplace. Pero para una ecuación de cuarto orden, como la cuasi-biarmónica, se requiere que $\bar{\psi}$ y sus derivadas primeras sean continuas, mientras que sus derivadas segundas pueden ser discontinuas pero acotadas (continuidad C^1). Esto se logra usando polinomios cúbicos para las N_i e imponiendo ciertas condiciones en las fronteras entre elementos: si la continuidad de las derivadas primeras se logra exactamente, los elementos se llaman conformes, pero si se logra sólo aproximadamente, se llaman nó conformes. En este trabajo usaremos elementos no conformes, los que en la práctica dan resultados numéricos mejores que los conformes /3/ y el método de Galerkin /4/ para resolver la ecuación (8), llegándose al siguiente sistema de ecuaciones lineales /1/:

$$A_{ij}\psi_j = b_i$$

donde:

$$A_{ij} = \int_V n \left[4 \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \right] dV$$

$$b_i = \int_V N_i \left[- \frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \right] dV$$

Estas integrales son calculadas numéricamente en forma automática por el programa BIARMON2 /5/.

4. UN PROBLEMA EJEMPLO

Para ilustrar el funcionamiento del programa se presenta la resolución de un problema en el recinto plano con barreras ilustrado en la Figura 1. Las líneas de corriente obtenidas también se muestran en la Figura 1, pudiéndose apreciar que la velocidad del fluido se anula sobre las paredes y es mayor en zonas alejadas de las paredes. En la Figura 2 se muestra la resolución del problema térmico para un caso en que los bordes del recinto se encuentran a 100°C y el fluido entra a 20°C .



FIGURA 1

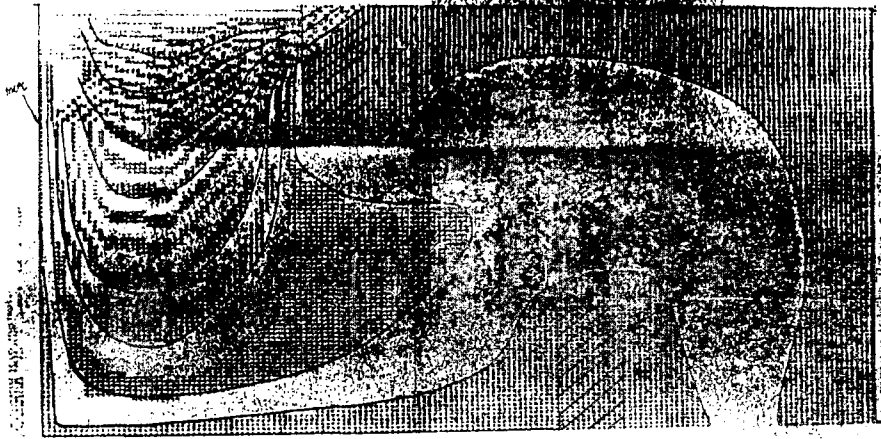


FIGURA 2

REFERENCIAS

- /1/ S.Pissanetzky "Modelación de problemas de flujo viscoso, plano e incompresible con término de inercia omitido. El programa BIARMON1" CAB-NT 4/81 y CNEA-NT 7/81"
- /2/ L.D.Landau, E.M.Lifshitz "Fluid Mechanics", Pergamon Press, Oxford, 1959.
- /3/ O.C.Zienkiewicz, "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill, London, 1971.
- /4/ L.J.Segerlind, "Applied Finite Element Analysis", J.Wiley & Sons, 1976.
- /5/ S.Pissanetzky, "Numerical quadrature in the finite element method", CAB-NT 3/81 y CNEA-NT 5/81.