

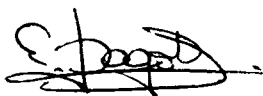
02.85.01

C. N. E. A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº 1	AÑO 1985

METODOS ANALITICOS APLICADOS AL ESTUDIO DE TEORIAS

DE MEDIDA Y DE SPIN EN LA RED

Tesis presentada ante el Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, para optar al título de Doctor en Física.



Dr. Elbio Dagotto
Asesor científico



Dr. Luis Masperi
Asesor científico



Lic. Adriana Morici
Doctorando

San Carlos de Bariloche

Resumen

Uno de los temas de mayor interés actualmente en teoría de campos es el estudio de las interacciones entre quarks y gluones (interacciones fuertes). Los quarks serían los constituyentes de la materia hadrónica y la teoría que explica su comportamiento es una teoría de medida, la cromodinámica cuántica (QCD). A diferencia de la electrodinámica cuántica (QED), la constante de acoplamiento efectiva de la QCD no es pequeña (a gran distancia) lo que impide su estudio mediante los conocidos métodos perturbativos aplicados con éxito a la QED. Como herramienta alternativa para estudiar la QCD surgió la técnica conocida como teorías de medida en la red; este procedimiento consiste en discretizar el espacio-tiempo a fin de realizar los cálculos (mediante métodos no perturbativos) y una vez finalizados éstos tomar el límite continuo. Esto último no es nunca sencillo de realizar. Como paso previo deben estudiarse los diagramas de fases de las teorías en el espacio-tiempo discreto ya que sólo en los puntos críticos de segundo orden pueda considerarse el límite continuo. A fin de realizar el estudio de los diagramas de fases existen métodos numéricos y analíticos.

En esta tesis se investigaron y desarrollaron los siguientes puntos:

a) Se propuso una técnica variacional en formulación hamiltoniana que permite el mejoramiento sistemático de un estado de prueba a fin de calcular con gran exactitud la energía del estado fundamental y primer excitado de la teoría.

b) Se extendió la técnica de campo medio en variables de plaqueta a modelos de spin. Así surge el método de campo medio en variables de unión que permite obtener una buena aproximación de los diagramas de fases para modelos de spin abelianos y no abelianos.

c) En los últimos tiempos ha habido mucho interés en el estudio de sistemas de medida con o sin materia a temperatura finita. El conocimiento del comportamiento de los sistemas en estos casos arroja luz sobre los orígenes del universo así como también se relaciona con el estudio de plasmas de quarks. En esta tesis se propone un nuevo método analítico, más sencillo que los usados anteriormente, para estudiar teorías de pura medida a temperatura finita y, por primera vez, se estudió, de manera analítica, un modelo no abeliano.

d) Como paso fundamental hacia el estudio de la QCD es necesario analizar teorías de medida con campos de materia. En este trabajo se estudió una teoría de medida abeliana con materia fermiónica en el límite de acoplamiento fuerte. Obtuvimos interesantes resultados que son aplicables también a teorías no abelianas.

Abstract

One of the more interesting subjects in field theory is, at present, the study of interactions between quarks (strong interactions). Quarks would be the constituents of matter and Quantum Chromodynamics is the gauge theory which explains their behavior. The well known perturbative methods that we apply in Quantum Electrodynamics (QED) are now useless because the effective coupling constant is not small. Fortunately we have an alternative tool to study QCD: lattice gauge theories. This new method is based on a discretization of the space-time which allows us to perform non-perturbative calculations; then we must take the continuum limit. This last step is a very difficult one. First of all we must study the phase diagram of the theory because we can recover the continuum only at the second order critical points. To study phase diagrams there are numerical and analytical methods.

In this thesis we have investigated the following items:

- a) In the frame of a variational hamiltonian formulation we propose a systematic method for the improvement of any given trial wave function. In such a way we can obtain very accurate values for the ground and first excited state energy of the analyzed theory.
- b) We develop a mean-field-like approximation for lattice spin models in the link formulation which is a generalization of the mean-plaquette technique. We obtain very accurate results for the phase diagrams of abelian and non-abelian spin models in two dimensions.
- c) Recently, much work have been devoted to the study of lattice gauge theories with and without matter at finite temperature. The behavior of the systems when temperature is different from

zero is related to the early universe and quark plasmas. In this thesis we propose a new and very simple analytical method which allows us to study lattice gauge theories at finite temperature. We consider abelian models and, for the first time, a non abelian theory with analytical methods.

d) QCD is a lattice gauge theory with fermionic matter fields. Thus, the inclusion of matter fields becomes very important to understand QCD. We analyze an abelian lattice gauge theory with fermionic matter at the strong coupling limit. We obtain very interesting results which are valid also for non abelian gauge theories.

INDICE

pág.

Capítulo I: Introducción.....	1
I-I: Cromodinámica Cuántica.....	2
I-II: Teorías de medida en la red.....	4
I-III: Fermiones en la red.....	6
I-IV: Simetría quiral.....	11
I-V: Temperaturas finitas.....	18
I-VI: Puntos críticos.....	24
I-VII: Métodos analíticos.....	25
Capítulo II: Técnica variacional mejorada para modelos en la red.....	42
II-I: Introducción.....	44
II-II: Descripción del método.....	45
II-III: Resultados.....	47
II-IV: Conclusiones.....	54
Capítulo III: Análisis de modelos de spin en la red mediante el método de campo medio en variables de unión.....	64
III-I: Introducción.....	66
III-II: Descripción del método.....	66
III-III: Resultados.....	69
III-IV: Conclusiones.....	73
Capítulo IV: Aproximación de campo medio en variables de plaqueta para teorías en la red a temperatu- ras finitas.....	78
IV-I: Introducción.....	80
IV-II: Descripción del método.....	80
IV-III: Resultados.....	83
IV-IV: Conclusiones.....	86
Capítulo V: Aproximación de campo medio para teorías de medida en la red abelianas y no abelianas a temperatura finita.....	92
V-I: Introducción.....	94
V-II: Aproximación de Bethe-Peierls.....	96

V-III: Modelos abelianos.....	98
V-IV: Modelos no abelianos.....	103
V-V: Conclusiones.....	111
Capítulo VI: Teoría $Z(2)$ de medida en la red con fermio- nes de Kogut-Susskind en el límite de aco- plamiento fuerte.....	121
VI-I: Introducción.....	123
VI-II: Teoría $Z(2)$ de medida con fermiones de Kogut- Susskind.....	124
VI-III: Ejemplo unidimensional.....	126
VI-IV: Extensión a d dimensiones.....	130
VI-V: Conclusiones.....	133
Apéndice.....	137

CAPITULO I

INTRODUCCION

I-I Cromodinámica cuántica

En 1968, en Stanford, California, se llevaron a cabo experimentos de dispersión (1) que básicamente consistían en bombardear blancos de protones con electrones a altas energías. Del análisis de los productos de decaimiento se concluyó que los protones estaban formados por constituyentes (aparentemente sin estructura) a los que se denominó partones.

Ya en 1964 Gell-Mann y Zweig (2) habían postulado que los protones y demás hadrones conocidos estaban constituidos por entidades básicas a las que llamaron quarks. De esta forma lograron explicar una gran cantidad de resonancias mesónicas y bariónicas como estados ligados de varios quarks o de pares quark-antiquark.

En la década del '70 se realizaron nuevos experimentos con neutrinos en el CERN. Estos, junto con los de Stanford, llevaron a pensar que quarks y partones eran una misma cosa. Así los quarks dejaron de ser meros entes matemáticos y comenzaron a tener una realidad física.

A esta altura de los acontecimientos se hizo imprescindible construir una teoría que explicara las interacciones entre quarks.

Esta teoría debía cumplir tres requisitos fundamentales:

a) Invariancia de medida

Se dice que una teoría es invariante de medida cuando su lagrangiano L permanece invariante ante una transformación local del tipo

$$g(x)Lg^{-1}(x) , \quad (I-I-1)$$

$$\text{con} \quad g(x) = \exp [i\mathcal{A}^\alpha(x)T^\alpha] , \quad (I-I-2)$$

T^α son los generadores del grupo de medida G y $\mathcal{A}^\alpha$ son funciones de las coordenadas del espacio físico.

La electrodinámica cuántica (QED) es una teoría de medida con $G=U(1)$. La teoría de Salam-Weinberg, que explica las interacciones electrodébiles (3), es invariante de medida ante $G=SU(2)\times U(1)$. Dado el éxito que ambas han tenido en la explicación de fenómenos físicos se creyó conveniente que la teoría que explicara las interacciones fuertes también tuviera esta propiedad.

b) Libertad asintótica

Experimentalmente se determinó que a pequeñas distancias los quarks se comportan como partículas libres que no interactúan entre sí. Esta propiedad se conoce como libertad asintótica e implica que para impulsos k grandes la constante de acoplamiento efectiva de la teoría $g(k)$ debe tender a cero.

c) Confinamiento

Otro hecho experimental es que jamás se observó un quark libre. Estos sólo han sido detectados formando bariones (tres quarks) o mesones (par quark-antiquark). Esta propiedad debe ser respetada por la teoría. Así surge la condición de que $g(k)$ para k pequeño debe ser grande.

La teoría que parece reunir las condiciones pedidas más arriba es la cromodinámica cuántica (QCD). Es una teoría de medida con $G=SU(3)$. Se verifica que posee libertad asintótica mediante métodos perturbativos (4) ya que en este límite la constante de acoplamiento $g(k)$ es pequeña. Si la QCD posee o no la propiedad de confinamiento es una cuestión que aún no está completamente aclarada. Cuando $k \ll 1$ no es posible aplicar

métodos perturbativos pues la constante de acoplamiento es grande. Este parecía un problema sin solución hasta que en 1974 K. Wilson (5) propuso la técnica conocida con el nombre de teorías de medida en la red. Mediante este método se evitan las divergencias ultravioletas ya que la inversa del espaciado de red actúa como cut-off. Como veremos en la próxima sección las principales ventajas de esta técnica son: i) se conserva la invariancia de medida; ii) se pueden aplicar las técnicas conocidas de mecánica estadística para atacar el problema.

I-II Teorías de medida en la red

Veremos cómo se pasa una teoría del continuo a la red. En espacio de Minkowsky el lagrangiano que caracteriza a una teoría de medida no abeliana es (6),

$$L = \frac{i}{2} [\bar{\psi}(x) \delta^\mu (\partial_\mu \psi(x)) - (\partial_\mu \bar{\psi}(x)) \delta^\mu \psi(x)] - m \bar{\psi}(x) \psi(x) - g \bar{\psi}(x) \delta^\mu \psi(x) A_\mu(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (\text{I-II-1})$$

g es la constante de acoplamiento; $A_\mu = A_\mu^a T^a$ es el potencial vector; T^a son los generadores del grupo de medida G ; $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g C^{abc} [A_\mu^b, A_\nu^c]$ es el tensor de campos; C^{abc} son las constantes de estructura del grupo G cuya álgebra es $[T^a, T^b] = C^{abc} T^c$; $\psi(x)$ son los campos de materia que, en este ejemplo, son fermiónicos (también pueden considerarse teorías con campos de materia bosónicos o escalares); δ^μ son las matrices de Dirac y m es el parámetro que corresponde a la masa de las partículas asociadas a los campos de materia.

La funcional generatriz (7) para esta teoría es,

$$Z = \int [d\phi] \exp\{-iS[\phi, J]/\hbar\}, \quad (\text{I-II-2})$$

$[d\phi]$ indica que debe integrarse sobre todas las configuraciones

posibles de los campos $(A, \bar{\psi}$ y $\psi)$. $S = \int d^4x L$ es la acción de la teoría, J son fuentes que se agregan a fin de calcular las funciones de Green mediante derivación respecto de ellas. Estas fuentes, al final de los cálculos, se igualan a cero.

Ahora pasaremos de espacio de Minkowsky a espacio euclídeo vía una rotación de Wick (8), o sea, mediante la transformación,

$$x^0 \longrightarrow -ix_4 \quad \delta^0 \longrightarrow \delta_4 \quad \partial_0 \longrightarrow i\partial_4 \quad A^0 \longrightarrow iA_4 \quad (I-II-3)$$

$$x^k \longrightarrow x_k \quad \delta^k \longrightarrow i\delta_k \quad \partial_k \longrightarrow \partial_k \quad A^k \longrightarrow A_k$$

Se obtiene,

$$L_E = -\frac{1}{2} [\bar{\psi}(x) \delta_\mu (\partial_\mu \psi(x) - (\partial_\mu \bar{\psi}(x)) \delta_\mu \psi(x)] - m \bar{\psi}(x) \psi(x) + \\ + i g \bar{\psi}(x) \delta_\mu \psi(x) A_\mu(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 F_{\mu\nu}^2] \quad (I-II-4)$$

La funcional generatriz toma la forma,

$$Z = \int [d\phi] \exp[-S[\phi, J]/\hbar]. \quad (I-II-5)$$

Ahora Z tiene la misma forma que una función de partición si hacemos la identificación $S \rightarrow$ energía, $\hbar \rightarrow$ temperatura y para atacar el problema de teoría de campos pueden usarse todas las técnicas de Mecánica Estadística. Obviamente para recuperar los valores de las magnitudes físicas en espacio de Minkowsky debemos volver a aplicar la rotación de Wick.

El paso siguiente para aplicar las técnicas de teorías de medida en la red es discretizar el espacio tiempo. De esta forma,

$$S_E = \int d^4x L_E \longrightarrow a^4 \sum_x L_E, \quad (I-II-6)$$

$$\partial_\mu \psi(x) \longrightarrow \frac{\psi(x+\hat{\mu}) - \psi(x-\hat{\mu})}{2a}, \quad (I-II-7)$$

$$1 + \frac{igaA_\mu(x)}{2} \longrightarrow U_\mu(x) = \exp\{igaA_\mu(x)/2\}, \quad (\text{I-II-8})$$

a es el espaciamiento de red. Así se obtiene,

$$S_F = -a^3 \sum_{x,\mu} \frac{1}{2} [\bar{\psi}(x) \delta_\mu U_\mu(x) \psi(x+\hat{\mu}) - \bar{\psi}(x+\hat{\mu}) \delta_\mu U_\mu^\dagger(x) \psi(x)] + S_G - a^4 m \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x), \quad (\text{I-II-9})$$

$$S_G = \frac{1}{g^2} \sum_p \text{Re tr} (UUU^\dagger U^\dagger)_p. \quad (\text{I-II-10})$$

Los U son elementos del grupo de medida G y, en general, suelen ser matrices; por eso en (I-II-10) se toma la traza del producto. El índice p se refiere a plaqueta. Una plaqueta, en el caso de una red cúbica, es cada uno de los cuadrados elementales de la red. S_G es conocida con el nombre de acción de Wilson. Las teorías caracterizadas sólo por S_G (sin materia) se conocen con el nombre de teorías de pura medida. Su estudio arroja luz sobre el comportamiento de teorías de medida con campos de materia en el límite en que dicha materia es muy masiva. Además el estudio de las teorías de pura medida es interesante de por sí ya que son altamente no triviales, poseen ricas estructuras y permiten estudiar estados ligados de gluones (glueballs).

Sin embargo la inclusión de materia en la teoría es fundamental porque la QCD no es una teoría de pura medida; en ella las partículas asociadas a los campos de medida son los gluones (equivalentes a los fotones en QED) y las partículas asociadas a los campos de materia son los quarks. Es de gran interés estudiar teorías con materia fermiónica, cosa que haremos en el capítulo VI, ya que los quarks son fermiones(9). Es el momento, entonces, de discutir cómo se llevan los campos fermiónicos a la red.

Ya hemos visto cómo se lleva a la red la teoría completa; sin embargo no todo es tan simple como parece. Cuando, como en el ejemplo explicado, los campos de materia son fermiónicos si uno pasa a la red siguiendo los pasos antedichos al volver al continuo encontrará más fermiones que los que tenía inicialmente la teoría. Para entender cómo se manifiesta este fenómeno, estudiemos la diferencia que existe al tratar campos bosónicos y fermiónicos.

La ecuación de Klein-Gordon en 1+1 dimensiones describe un campo de bosones libres,

$$\ddot{\phi} = \nabla^2 \phi - m^2 \phi, \quad (\text{I-III-1})$$

con una energía $E^2 = p^2 + m^2$ para las ondas planas; p es el impulso. Llevando la ecuación a la red se obtiene,

$$a^2 \ddot{\phi} = (d^+ + d^- - 2) \phi - a^2 m^2 \phi, \quad (\text{I-III-2})$$

con $d^\pm \phi(x) = \phi(x \pm 1)$, a es el espaciamiento de red. Una solución de la ecuación es

$$\phi = \exp\{ikxa + iEt\}, \quad (\text{I-III-3})$$

donde $-\pi < ka < \pi$. Reemplazamos ec. (I-III-3) en ec. (I-III-2) y obtenemos

$$-E^2 \phi = \frac{[\exp(ika) + \exp(-ika) - 2]}{a^2} \phi - m^2 \phi. \quad (\text{I-III-4})$$

Entonces la relación de energía-momento es,

$$E^2 = m^2 - 2 \frac{(\cos ka - 1)}{a^2}. \quad (\text{I-III-5})$$

En el límite continuo $ka \ll 1$ se obtiene

$$E^2 = m^2 + k^2, \quad (I-III-6)$$

que es la relación esperada en el continuo (ver Fig.1-a).

Ahora repitamos lo mismo con la ecuación de Dirac,

$$i\dot{\psi} = -i\gamma_5 \partial_z \psi, \quad (I-III-7)$$

con

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad m = 0. \quad (I-III-8)$$

Consideremos los autoestados de γ_5

$$\gamma_5 \chi_{\pm} = \pm \chi_{\pm}. \quad (I-III-9)$$

Una solución de la ecuación es

$$\psi_{\pm} = \exp\{-ikz + iEt\} \chi_{\pm}. \quad (I-III-10)$$

Entonces la relación de dispersión es (ver Fig. 1-b)

$$E = \pm k \quad -\infty < k < \infty. \quad (I-III-11)$$

Si pasamos a la red la ecuación queda

$$i\dot{\psi}(x) = \frac{i}{2a} \gamma_5 [\psi(x+1) - \psi(x-1)]. \quad (I-III-12)$$

Una solución es

$$\psi_{\pm} = \exp\{-kxa + Et\} \chi_{\pm}. \quad (I-III-13)$$

Reemplazando la ec. (I-III-13) en la ec. (I-III-12) obtenemos

$$-E = \pm \frac{i}{2a} [\exp(ika) - \exp(-ika)] = \mp \frac{\text{sen } ka}{a} . \quad (\text{I-III-14})$$

Tomando el límite continuo ($ka \ll 1$),

$$E = \pm k . \quad (\text{I-III-15})$$

Pero si $ka = \pi - k'a$ cuando $k'a \ll 1$ tenemos

$$E = \mp k' . \quad (\text{I-III-16})$$

Entonces en vez de una partícula, al volver al continuo, tenemos dos! (Ver Fig. 1-c).

Afortunadamente este problema conocido como duplicación de especies (10) puede solucionarse. Existen tres formas de hacerlo, a saber:

a) Método de Wilson:

Este método consiste en agregar un término en la acción (intrascendente cuando $a \rightarrow 0$) de manera de hacer desaparecer los mínimos de E vs ka en $ka = \pm\pi$. En nuestro ejemplo con la ecuación de Dirac la nueva versión en la red sería,

$$i \dot{\psi}(x) = -\frac{i \delta_x}{2a} [\psi(x+1) - \psi(x-1)] + \frac{B \delta_o}{2a} [2\psi(x) - \psi(x-1) - \psi(x+1)] , \quad (\text{I-III-17})$$

donde B es una constante. Poniendo $\psi = \exp\{i(-kxa + Et)\}\chi$ en la ecuación de movimiento queda

$$-E\chi = -\delta_x \frac{\text{sen } ka}{a} + 2B\delta_o \frac{\text{sen}^2(ka/2)}{a} . \quad (\text{I-III-18})$$

Entonces,

$$E^2 = \frac{\text{sen}^2 ka}{a^2} + 4B^2 \frac{\text{sen}^4(ka/2)}{a^2} , \quad (\text{I-III-19})$$

que, como vemos, no se anula en $ka = \pm\pi$. Este término va a cero en el límite continuo y sus efectos se muestran en la Fig. 1-d.

El costo de emplear este método, como veremos luego, es la pérdida de la simetría quiral.

b) Método de la derivada de SLAC(11):

Este método consiste en redefinir las derivadas haciéndolas no locales. Este procedimiento volvería muy engorrosos los cálculos analíticos, por lo tanto no lo analizaremos en detalle.

c) Método de Kogut-Susskind:

Este procedimiento también recibe el nombre de "staggered fermions" y se basa en lo siguiente. Pongamos una sola componente $\phi(x)$ del espinor en cada sitio de la red. Entonces consideremos la siguiente ecuación,

$$\dot{\phi}(x) = -\frac{1}{2a} [\phi(x+1) - \phi(x-1)]. \quad (\text{I-III-20})$$

Para identificar un campo de Dirac de dos componentes debemos descomponer la red en una subred par (x es un entero par) y una subred impar (x es un entero impar),

$$\psi_1(x) = \phi(x) \quad , \quad x \text{ par} \quad (\text{I-III-21})$$

$$\psi_2(x) = \phi(x) \quad , \quad x \text{ impar} \quad (\text{I-III-22})$$

donde

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{I-III-23})$$

Ahora la ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}_1(x) &= -\frac{1}{2a} [\Psi_2(x+1) - \Psi_2(x-1)] , \\ \dot{\Psi}_2(x) &= -\frac{1}{2a} [\Psi_1(x+1) - \Psi_1(x-1)] ,\end{aligned}\tag{I-III-24}$$

que debe compararse con la ecuación en el continuo

$$\dot{\Psi} = -\gamma_5 \partial_z \Psi = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_z \Psi ,$$

$$\text{o} \quad \dot{\Psi}_1 = -\partial_z \Psi_2 \quad \text{y} \quad \dot{\Psi}_2 = -\partial_z \Psi_1 .\tag{I-III-25}$$

La correspondencia entre la ec. (I-III-24) y la ec. (I-III-25) es clara. Este método evita la duplicación de especies duplicando el tamaño del cubo unidad en el espacio real.

Este método tiene la virtud de preservar un remanente de la simetría quirál tal como veremos en la próxima sección.

I-IV Simetría quirál

La simetría quirál es de fundamental importancia pues permite explicar, en el continuo, el hecho de que el pión tenga una masa tan pequeña respecto de los demás mesones.

Antes de ver cómo se deduce la anterior afirmación digamos que un lagrangiano tiene simetría quirál ante un grupo $G \times G$ si

$$L = u L u^\dagger = u_\gamma L u_\gamma^\dagger ,\tag{I-IV-1}$$

con $u = \exp(-i w^\wedge T^\wedge)$ y $u_\gamma = \exp(-i \theta^\wedge T^\wedge \delta_\gamma)$, $w^\wedge$ y $\theta^\wedge$ son parámetros que no dependen de las coordenadas, por lo tanto se dice que estas transformaciones son globales. $T^\wedge$ son los generadores de G , grupo al que pertenecen u y u_γ .

Ahora volvamos a la QCD. Si esta teoría es confinante, cosa

que se espera y desea, los parámetros m_f que dan la masa de los distintos quarks no son cantidades observables; esto no significa que sus valores no puedan ser calculados. Las interacciones fuertes presentan una simetría aproximada $SU(3)$ de sabor lo que implica que $m_u = m_d = m_s$. $u=up$, $d=down$, $s= strange$, son los nombres de los tres quarks más livianos; u , d y s también se denominan sabores de los quarks. Puesto que la simetría de isospín ($SU(2)$ de sabor) es una simetría mucho más conservada que la $SU(3)$ la relación $m_u = m_d$ se cumple con más precisión que $m_d = m_s$. Los parámetros de masa c , b y t ($c=charm$, $b=bottom$, $t=top$, los tres restantes sabores de los quarks conocidos hasta ahora) serán mucho mayores que los de u, d y s debido a que en el espectro hadrónico no hay rastros de una simetría $SU(4)$ o mayor de sabor.

Si ponemos $m_u = m_d$, estamos diciendo que el isospín se conserva exactamente. En este límite el neutrón y el protón tienen la misma masa y lo mismo ocurre con los tres piones π^+ , π^0 y π^- . Pero esto no explica la pequeñez de la masa del pión ($m_\pi/m_{nucleón}=0.14$) lo que hace al pión tan especial entre los hadrones. Para entender esto Nambu y Chou (12) sugirieron que hay un límite en el cual el pión es un bosón de Goldstone sin masa asociado con una ruptura espontánea de simetría. Este límite es, por supuesto, una estructura teórica idealizada. Como ejemplo Nambu y Jona-Lasinio (13) crearon un modelo no renormalizable cuyos campos fundamentales son campos nucleónicos sin masa que poseen, por lo tanto, simetría quiral. La ruptura espontánea de la simetría quiral da masa a los nucleones y aparece un bosón de Goldstone sin masa que se identifica con el pión.

Traslademos estas ideas a la QCD. Para ello consideraremos el límite idealizado correspondiente a $m_u = m_d = 0$.

La densidad lagrangiana que posee simetría quiral en este límite es

$$L_q = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi, \quad (I-IV-2)$$

donde

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D_\mu = \partial_\mu + ig A_\mu(x). \quad (I-IV-3)$$

La densidad lagrangiana completa de la QCD puede escribirse en la forma,

$$L = L_q - (m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d) + L_{scbt}, \quad (I-IV-4)$$

donde L_{scbt} contiene términos que involucran solamente a los quarks s , c , b y t . Consideremos a L_q como la densidad lagrangiana no perturbada. El límite idealizado de simetría quiral corresponde al problema sin perturbar.

Se demuestra que m_u y m_d son realmente pequeñas comparadas con las masas de los nucleones. Entonces L_q dará una descripción razonablemente buena de la física hadrónica "ordinaria" en la cual la extrañeza y sabores mayores no juegan un papel directo.

Nuestro sistema "sin perturbar" descrito por L_q es invariante ante las siguientes transformaciones globales:

$$[SU(2)]_V: \psi \longrightarrow \exp(-i\vec{\epsilon} \cdot \vec{\Sigma}/2) \psi, \quad (I-IV-5)$$

$$[U(1)]_V: \psi \longrightarrow \exp(-i\alpha) \psi, \quad (I-IV-6)$$

$$[SU(2)]_A: \psi \longrightarrow \exp(-i\vec{\epsilon} \cdot \vec{\Sigma}_5/2) \psi, \quad (I-IV-7)$$

$$[U(1)]_A: \psi \longrightarrow \exp(-i\beta \Sigma_5) \psi. \quad (I-IV-8)$$

donde $\vec{\epsilon}$, $\vec{\theta}$, α y β son constantes reales arbitrarias y $\vec{\Sigma}$ son los tres generadores de $SU(2)$. Los subíndices V y A corresponden a

vector y vector axial, respectivamente. Las corrientes de Noether asociadas son,

$$J_{\mu}^k = \bar{\psi} \gamma_{\mu} \tau_k \psi \quad \text{corriente de isospín} \quad (\text{I-IV-9})$$

$$j_{\mu} = \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi \quad \text{corriente bariónica} \quad (\text{I-IV-10})$$

$$J_{\mu}^{k5} = \bar{\psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 \tau_k \psi \quad (\text{I-IV-11})$$

$$j_{\mu}^5 = \bar{\psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 \psi \quad , \quad (\text{I-IV-12})$$

donde $k=1,2,3$.

La corriente bariónica se conserva también en el sistema perturbado definido por L. La corriente de isospín se conserva en tanto $m_u=m_d$. Las corrientes axiales se conservan sólo en el límite de simetría quiral sin considerar anomalías de origen topológico.

¿Cómo se manifiestan estas simetrías en la naturaleza? $[SU(2)]_V$ y $[U(1)]_V$ se manifiestan directamente como conservación de isospín y conservación del número bariónico respectivamente. En particular los hadrones se clasifican en multipletes de isospín fácilmente reconocibles. Una manifestación directa de $[SU(2)]_A$ requeriría que cada multiplete de isospín esté acompañado por otro multiplete de partículas de igual masa pero paridad opuesta. En el espectro hadrónico no hay rastros de este multiplete. Por ejemplo, no existe un isodoblete de partículas parecidas al neutrón y al protón pero con paridad opuesta. Si suponemos que el mundo real está bien aproximado por el límite de simetría quiral concluimos que $[SU(2)]_A$ está espontáneamente rota. Esto implica la existencia de un bosón de Goldstone pseudoescalar con $I=1$ (I es el isospín) al cual identificamos con el pión "no perturbado". El pión físico corresponde al estado perturbado del bosón de Goldstone cuya masa proviene de m_u y m_d .

Cómo se manifiesta $[U(1)]_A$ constituyó un enigma durante mucho tiempo ya que su manifestación explícita sería la existencia de bariones de paridad opuesta a la de los conocidos. Como estas partículas no se encuentran en el espectro hadrónico podríamos pensar en una ruptura espontánea de simetría; esto implicaría la existencia de un bosón de Goldstone con $I=0$. Sin embargo no existe ninguna partícula que pueda identificarse con este bosón debido a que los mesones η y η' , posibles candidatos, superan ampliamente la cota máxima para la masa de esta partícula calculada por Weinberg (14). t'Hooft (15) finalmente resolvió el problema demostrando que dicho bosón no es una partícula física debido a cuestiones topológicas en las cuales no entraremos.

Veremos ahora qué queda de esta simetría quiral cuando pasamos del continuo a la red.

Hagamos una transformación de medida global a la acción euclídea en la red (ec.(I-II-9)):

$$g = \exp(i\vec{\theta} \cdot \vec{T} \delta_s) = \cos(\vec{\theta} \cdot \vec{T}) + i \delta_s \sin(\vec{\theta} \cdot \vec{T}) \quad , \quad (I-IV-13)$$

$$\psi(x) \longrightarrow \exp(i\vec{\theta} \cdot \vec{T} \delta_s) \psi(x) \quad , \quad (I-IV-14)$$

$$\psi^+(x) \longrightarrow \psi^+(x) \exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{T} \delta_s) \quad , \quad (I-IV-15)$$

donde $\vec{T}$ son los generadores del grupo de sabor. $4N_f$ es el número de componentes de ψ . Recordemos que $\bar{\psi} = \psi^\dagger \delta_0$ y $\{\delta_\mu, \delta_s\} = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} g S_g g^{-1} &= -a^3 \sum_{x,\mu} \frac{1}{2} [\psi^\dagger(x) g^{-1} \delta_0 \delta_\mu U_\mu(x) g \psi(x+\hat{\mu}) - \psi^\dagger(x+\hat{\mu}) g^{-1} \delta_0 U_\mu^\dagger(x) \delta_\mu g \psi(x)] + \\ &+ g S_g g^{-1} - a^4 m \sum_x \psi^\dagger(x) g^{-1} \delta_0 g \psi(x) = \\ &= -a^3 \sum_{x,\mu} \frac{1}{2} [\bar{\psi}(x) \delta_\mu U_\mu(x) \psi(x+\hat{\mu}) - \bar{\psi}(x+\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x) \delta_\mu \psi(x)] + S_g + \\ &+ a^4 m \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x) \quad . \end{aligned} \quad (I-IV-16)$$

Si $m=0$, S_E permanece invariante. También S_E es invariante ante la transformación $h=\exp(i\vec{\theta} \cdot \vec{T})$ entonces S_E tiene simetría $U(4N_f) \times U(4N_f)$ quiral.

Pero esta S_E tiene el problema de la duplicación de especies. Veamos qué ocurre si usamos el método de Wilson para evitar el inconveniente. En este caso tenemos,

$$S_w = S_E(m=0) + K \sum_{x,\mu} [\bar{\psi}(x) U_\mu(x) \psi(x+\hat{\mu}) + \bar{\psi}(x+\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x) \psi(x)], \quad (I-IV-17)$$

$$\begin{aligned} g S_w g^{-1} &= g S_E(m=0) g^{-1} + K \sum_{x,\mu} [\psi^\dagger(x) g^{-1} \delta_0 U_\mu(x) g \psi(x+\hat{\mu}) + \\ &\quad + \psi^\dagger(x+\hat{\mu}) g^{-1} \delta_0 U_\mu^\dagger(x) g \psi(x)] = \\ &= S_E(m=0) - K \sum_{x,\mu} [\bar{\psi}(x) U_\mu(x) \psi(x+\hat{\mu}) + \bar{\psi}(x+\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x) \psi(x)], \end{aligned}$$

(I-IV-18)

K es una constante. Vemos que la invariancia quiral se ha perdido. ¿Qué ocurre si usamos el método de Kogut-Susskind? Veremos una forma equivalente a la mostrada en la sección (I-III) de aplicar el método de "staggered fermions" a la acción euclídea. Trabajaremos en el espacio euclídeo de cuatro dimensiones ($d=4$). En cada sitio $x=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ de la red haremos una transformación unitaria,

$$\psi(x) = A(x) \chi(x), \quad \bar{\psi}(x) = \bar{\chi}(x) A^\dagger(x), \quad (I-IV-19)$$

donde $A(x) = \delta_1^{x_1} \delta_2^{x_2} \delta_3^{x_3} \delta_4^{x_4}$. S_E escrita en función de las variables χ es diagonal en el espacio de spines, es decir, es una suma de cuatro acciones idénticas. Si consideramos un solo sabor $N_f=1$ entonces S_E describe 16 partículas en el límite continuo; por lo tanto cada una de las cuatro acciones en la representación describe cuatro partículas. Entonces con el fin de reducir el número de partículas en el continuo consideramos como una nueva acción,

$$S_{K-S} = \frac{a^3}{2} \sum_{\mu} \eta_{\mu}(x) [\bar{\chi}(x+\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \chi(x) - \bar{\chi}(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \chi(x+\hat{\mu})] - \\ - a^4 m \sum_x \bar{\chi}(x) \chi(x) , \quad (I-IV-20)$$

donde $\eta_{\mu}(x) = (-1)^{x_1+x_2+x_3}$. El factor $\eta_{\mu}(x)$ proviene de la conmutación de las matrices $\hat{\gamma}$. Estas fases son el único remanente del álgebra de dichas matrices. Las variables de Grassmann $\bar{\chi}(x)$, $\chi(x)$ no tienen índice de spin.

Se puede demostrar que las cuatro partículas que aparecen en el continuo pueden identificarse con cuatro sabores (16). Esos campos en el continuo se construyen con una combinación de los grados de libertad fermiónicos de cada hipercubo (16 sitios si $d=4$) de la red. Por lo tanto hay que considerar redes con un número par de sitios. Esta es la misma conclusión a la que llegamos en el ejemplo unidimensional empleado para explicar el método de Kogut-Susskind.

Notemos que S_{K-S} , cuando $m=0$, es invariante ante la transformación global $U(1) \times U(1)$ definida a continuación,

$$\chi(x) \longrightarrow \begin{cases} V \chi(x) \\ W \chi(x) \end{cases} \quad \bar{\chi}(x) \longrightarrow \begin{cases} \bar{\chi}(x) W^* & (x \text{ par}) \\ \bar{\chi}(x) V^* & (x \text{ impar}) \end{cases} \quad (I-IV-21)$$

donde $V, W \in U(1)$ (un sitio x es par (impar) si $\sum_{i=1}^d x_i$ es par (impar)). Esta simetría es un remanente continuo de la simetría quiral que, al igual que ella, se rompe ante la presencia de términos de masa fermiónica; este hecho permite realizar interesantes estudios de las propiedades de los sistemas fermiónicos.

Es de gran interés estudiar el comportamiento de $\langle \bar{\chi} \chi \rangle$, el parámetro de orden de la simetría quiral, en función de la temperatura. Al llegar a este punto nos preguntamos cómo se

introduce la temperatura en estas teorías y qué importancia tiene su estudio. Esto será discutido en la próxima sección.

I-V Temperaturas finitas

Para entender cómo se introduce la temperatura en estas teorías primeramente debemos pasar de la formulación con que trabajamos hasta ahora (lagrangiana), a una formulación hamiltoniana.

Formulación hamiltoniana

Conociendo el lagrangiano de la teoría que queramos estudiar, nuestro problema consiste en evaluar en el espacio-tiempo discreto la funcional generatriz

$$Z = \int [d\phi] \exp\{-S_E[\phi]/\hbar\} \quad (I-V-1)$$

Uno de los métodos usados en Mecánica Estadística para evaluar la función de partición es la matriz de transferencia (17). Si se descompone el modelo $(d+1)$ -dimensional en un número muy grande de sistemas d -dimensionales el peso estadístico de un determinado estado puede escribirse como el producto de factores que representan, cada uno de ellos, la contribución de cada subsistema al modelo. Para fijar ideas examinaremos el caso en que $d+1=2$ y el grupo de gauge G es $Z(N)$. Entonces se tiene una red bidimensional en cada punto de la cual hay una variable $s(n_1, n_2)$ que puede tomar N valores. La red posee M_2 filas y M_1 columnas ($M_1, M_2 = M$). En este caso los subsistemas están constituidos por el conjunto de variables a lo largo de una columna. El estado de la columna n_1 está descripto por el conjunto $\mu^{n_1} = [s(n_1, 1), s(n_1, 2), \dots, s(n_1, M_2)]$, habiendo N^{M_2} estados posibles para cada columna. Si se usan condiciones periódicas de contorno, la energía E del sistema se puede escribir como

$$E = \sum_{n_1=1}^{M_1} E_c(\mu^{n_1}, \mu^{n_1+1}) \quad (I-V-2)$$

$E_c(\mu^{n_1}, \mu^{n_1+1})$ es la energía correspondiente tanto a las interacciones entre las columnas n_1 y n_1+1 como a lo que ocurre dentro de la columna n_1 . Al escribir la función de partición se puede descomponer el factor de Boltzmann $\exp(-\beta E)$ en factores $\exp[-\beta E_c(\mu, \mu')] = T(\mu, \mu')$,

$$Z = \sum_{\mu^1} \sum_{\mu^2} \dots \sum_{\mu^{M_1}} T(\mu^1, \mu^2) T(\mu^2, \mu^3) \dots T(\mu^{M_1}, \mu^1) \quad (I-V-3)$$

Se puede pensar a $T(\mu, \mu')$ como un elemento de la matriz cuadrada de N^{M_2} filas. De esta forma Z se escribirá como un producto de matrices

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\mu^1} \sum_{\mu^3} \dots \sum_{\mu^{M_1}} T^2(\mu^1, \mu^3) T(\mu^3, \mu^4) \dots T(\mu^{M_1}, \mu^1) = \\ &= \sum_{\mu^1} T^{M_1}(\mu^1, \mu^1) = \text{Tr}(T^{M_1}) \quad (I-V-4) \end{aligned}$$

T es la matriz de transferencia. Como la traza de una matriz es igual a la suma de sus autovalores

$$Z = \sum_{\lambda=1}^{N^{M_2}} (\Lambda_{\lambda})^{M_1} \quad (I-V-5)$$

donde Λ_{λ} son los autovalores de T .

Si $M_1, M_2 \rightarrow \infty$ lo que ocurre en el límite termodinámico, sólo el mayor autovalor Λ_0 será importante en el cálculo de la energía libre:

$$\begin{aligned} F(\beta) &= - \lim_{M_1, M_2 \rightarrow \infty} \frac{\beta^{-1}}{M_1 M_2} \ln Z(\beta, M_1, M_2) = \\ &= \lim_{M_2 \rightarrow \infty} - \frac{1}{\beta M_2} \ln \Lambda_0(M_2) \quad (I-V-6) \end{aligned}$$

Si se considera un eje temporal en la dirección horizontal de la red se puede pensar que a tiempo $t=t_0$ los N valores

posibles de la variable $s(t, i)$ son los autoestados del operador $\hat{s}(i)$

$$\hat{s}(i)|n(i)\rangle = \exp\{i2\pi n(i)/N\}|n(i)\rangle \quad . \quad (I-V-7)$$

El estado de la columna es

$$|n\rangle = \prod_{i=1}^{N_2} |n(i)\rangle \quad . \quad (I-V-8)$$

Entonces la matriz de transferencia se puede pensar como un operador $\hat{T}$ que actúa en el espacio de los $|n\rangle$. De esta forma el problema de determinar el mayor autovalor de $\hat{T}$ es equivalente al de calcular la energía del estado fundamental E_0 del hamiltoniano cuántico unidimensional $\hat{H}_s$ definido por

$$\hat{T} = \exp(-\xi \hat{H}_s) \quad , \quad (I-V-9)$$

donde ξ es el espaciamiento de la red en la dirección temporal.

Lo hecho arriba permite pasar de una formulación lagrangiana a una formulación hamiltoniana en una dimensión menos. De (I-V-9) tenemos que

$$\hat{H}_s = -\frac{1}{\xi} \ln \hat{T} \quad . \quad (I-V-10)$$

En general $\hat{H}_s$ tiene una expresión complicada; para simplificarla puede pasarse al límite continuo en t haciendo $\xi \rightarrow 0$. Así queda

$$\hat{T} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \exp(-\xi \hat{H}) = 1 - \xi \hat{H} + \dots \quad (I-V-11)$$

donde $\hat{H}$ es el hamiltoniano asociado a Z .

Mediante pasos similares se llega a la misma conclusión en el caso de que las variables de la teoría tomen valores en un grupo de gauge continuo.

Acabamos de demostrar que

$$Z = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{[\phi]} \langle \phi | T^M | \phi \rangle = \lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ \beta = 1/T \rightarrow \infty}} \sum_{[\phi]} \langle \phi | \exp(-\beta M H) | \phi \rangle . \quad (\text{I-V-12})$$

La función de partición para una teoría definida por un hamiltoniano H a una temperatura T es

$$Z(T) = \sum_{[\phi]} \langle \phi | \exp(-H/T) | \phi \rangle , \quad (\text{I-V-13})$$

esta definición es consistente con la suposición de que todo lo antedicho valía a $T=0$ pues

$$Z(0) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{[\phi]} \langle \phi | \exp(-H/T) | \phi \rangle , \quad (\text{I-V-14})$$

que coincide con con la ec. (I-V-12) si identificamos $\beta M = \beta$ con $1/T$.

Entonces si definimos $\beta = 1/T$ tenemos

$$Z(\beta) = \sum_{[\phi]} \langle \phi | \exp(-\beta H) | \phi \rangle . \quad (\text{I-V-15})$$

Ahora podemos aplicar, a la inversa, el método de matriz de transferencia y obtendremos una expresión para $Z(\beta)$ en función de la densidad lagrangiana de la teoría

$$Z(\beta) = \int [d\phi] \exp \left\{ - \int_0^\beta dt \int_V d^3x \, L_\epsilon(\phi) \right\} . \quad (\text{I-V-16})$$

Esta es la función de partición de una teoría a T finita. Al llevar esta teoría a la red, la dirección temporal tendrá N_t sitios ($N_t = \beta$) y en dicha dirección deberemos aplicar condiciones periódicas de contorno (18).

A continuación discutiremos la importancia de estudiar modelos a temperatura finita. Como ya se explicó, hay evidencia experimental de que la materia está constituida por quarks. Debido a la propiedad de confinamiento es imposible

X

separar físicamente a un hadrón en los tres quarks que lo constituyen. Por lo tanto, en lo que a existencia individual se refiere, el hadrón se comporta como elemental. Sin embargo a densidades o temperaturas suficientemente altas el concepto de materia hadrónica se pierde. Esto se debe a que una vez que tenemos hadrones que se penetran mutuamente cada quark encuentra muchos otros quarks muy cerca suyo, a una distancia menor que el radio de un hadrón. En este caso no parece haber forma de que un dado quark identifique a aquéllos con los que a baja densidad formaba un hadrón; por lo tanto se ha producido un desconfinamiento.

El mecanismo que produce el desconfinamiento de los quarks a altas densidades es el apantallamiento de la carga de color (19) (hay un color asociado a cada uno de los ocho generadores del grupo $SU(3)$ de color). Esto puede entenderse mediante un ejemplo de mecánica estadística. En materia atómica de alta densidad el potencial de Coulomb de largo alcance que une iones y electrones formando átomos eléctricamente neutros es parcialmente apantallado por las otras cargas presentes y se transforma en un potencial de corto alcance,

$$\frac{e_s^2}{r} \longrightarrow \frac{e_s^2}{r} e^{-r/r_0} \quad . \quad (I-V-17)$$

Aquí r denota la distancia desde la carga de prueba e_s . El radio de apantallamiento de Debye r_0 es inversamente proporcional a la densidad de carga n ,

$$r_0 \sim n^{-1/3} \quad . \quad (I-V-18)$$

Entonces, a una densidad suficientemente alta, r_0 será más pequeño que el radio atómico r_A . Un electrón dado ya no puede sentir la fuerza de ligadura de "su" átomo y, por lo tanto, queda libre; en ese momento la materia aisladora se vuelve conductora (20). Se espera que el desconfinamiento en QCD sea el análogo de lo que ocurre en QED (transición Mott). Puesto que el

apantallamiento es un fenómeno que ocurre a alta densidad y, por lo tanto, de corto alcance, la diferencia entre QED y QCD en cuanto al comportamiento de las fuerzas a grandes distancias no es, en este caso, importante.

Teniendo en cuenta lo explicado más arriba, la "conductividad de color" (σ_c) de la materia que interactúa fuertemente será una señal natural de la transición desconfiante ya que deberá anularse en el caso de materia aislante y se hará distinta de cero cuando el sistema se convierta en un plasma conductor de color. En sólidos aislantes, sin embargo, la conductividad eléctrica σ_e no es estrictamente 0 para $T > 0$ pero es exponencialmente pequeña (20)

$$\sigma_e \sim \exp(-\Delta E/T) \quad , \quad (I-V-19)$$

con ΔE igual a la energía de ionización. Por encima de la temperatura de la transición de Mott σ_e es distinta de 0 debido a que el apantallamiento de Debye disolvió globalmente las ligaduras entre los iones y electrones; sin embargo, por debajo de este punto pueden producirse localmente algunos electrones libres por ionización por lo que σ_e será pequeña pero no nula. El fenómeno correspondiente en la QCD es la producción de pares quark-antiquark en forma de un hadrón (21). Si tratamos de separar un quark de un hadrón dado, el potencial confinante crecerá con la distancia de separación hasta alcanzar el valor m_H del estado $q\bar{q}$ más bajo; en este punto, se creará un nuevo hadrón cuyo antiquark neutraliza al quark que tratábamos de separar y así la separación es posible. La producción local de hadrones juega el papel de la ionización; por lo tanto se espera que σ_c no sea estrictamente 0 en la fase confinante, sino

$$\sigma_c \sim \exp(-m_H/2T) \quad . \quad (I-V-20)$$

Podemos tomar el límite en que $m_H \rightarrow \infty$; esto equivale a estudiar una teoría de pura medida a temperatura finita. En este

caso la ecuación (I-V-20) nos dice que

$$\sigma_c \begin{cases} = 0 & T \leq T_c \\ > 0 & T > T_c \end{cases}, \quad (\text{I-V-21})$$

por lo que σ_c será un buen parámetro de orden que indicará la transición de desconfinamiento.

Para completar digamos que el estudio de teorías de medida a temperatura finita arroja luz sobre los comienzos del universo (10^{-6} segundos luego del big-bang (22)) en que la materia se encontraba a muy altas densidades. Experimentalmente se tratará de reproducir estas condiciones mediante choques de núcleos pesados a muy altas energías. Los primeros experimentos en este ámbito se llevarán a cabo en el verano de 1986 en Brookhaven y en el CERN y ya mismo se están diseñando máquinas para tales fines (23). Los resultados de estos experimentos serán cruciales y de gran interés para los físicos teóricos.

I-VI Puntos críticos

Hasta ahora discutimos las formas de llevar a la red distintas teorías: de pura medida, con campos de materia, a temperatura cero ó finita, en formulación lagrangiana o hamiltoniana. Sin embargo no dijimos casi nada a cerca de los pasos a seguir para recuperar el límite continuo.

Una vez que discretizamos la teoría debemos abocarnos a determinar su diagrama de fases; éste se obtiene estudiando la energía del estado fundamental en función de la constante de acoplamiento y demás parámetros del modelo. ¿Por qué debemos hacer esto? Porque volver al continuo significa hacer tender a cero el espaciado de red a , pero esto sólo podemos hacerlo para aquellos valores de los parámetros tales que la correlación

entre las variables no dependa del espaciamiento de red. Este fenómeno se produce sólo en el caso en que la longitud de correlación sea infinita cosa que ocurre en los puntos críticos de segundo orden. De aquí la importancia de conocer cuáles son estos puntos en cada teoría.

Actualmente los métodos analíticos permiten tan sólo llegar a conocer los diagramas de fases y el orden de las transiciones pero aún no es posible recuperar el continuo; esto último se logra numéricamente mediante simulaciones de Monte Carlo (24).

Los trabajos desarrollados en esta tesis están centrados en el cálculo de diagramas de fases de diferentes teorías utilizando diversos métodos analíticos.

I-VII Métodos analíticos

Entre los métodos analíticos más eficaces para atacar el problema de las teorías de medida en la red se destacan los desarrollos en serie de alta temperatura (25,26) y en la inversa del número de colores (27), el método de grupo de renormalización (28), los métodos variacionales en formulación lagrangiana (29) y hamiltoniana (30) y los métodos de campo medio (26).

En esta sección estudiaremos en qué consisten los métodos de campo medio y sus diferentes variantes.

a. Método de campo medio

En mecánica estadística se utiliza este método para calcular la magnetización de un ferromagneto caracterizado, por ejemplo, por el modelo de Ising. En este caso se considera una red en cada uno de cuyos sitios hay variables $s(x)$ que interactúan con sus próximos vecinos y pueden tomar valores ± 1 (en $Z(2)$). La acción

(hamiltoniano clásico) que caracteriza al modelo es

$$S = \beta \sum_{x, \mu} s(x) s(x + \hat{\mu}) . \quad (\text{I-VII-1})$$

x son sitios de la red y $\mu = 1, \dots, d$ es un versor; d es la dimensión. La función de partición es

$$Z = \sum_{\{s\}} \exp \left\{ \beta \sum_{x, \mu} s(x) s(x + \hat{\mu}) \right\} . \quad (\text{I-VII-2})$$

La magnetización se calcula como

$$m = \frac{1}{Z} \sum_{\{s\}} s(x) \exp \left\{ \beta \sum_{x, \mu} s(x) s(x + \hat{\mu}) \right\} . \quad (\text{I-VII-3})$$

Una forma aproximada de calcular m es utilizando el método de campo medio. Este consiste en considerar exactamente una sola variable y aproximar a las restantes por su valor medio calculado mediante una ecuación de autoconsistencia. Así resulta que si ponemos $\langle s(x) \rangle = m$ en todos los sitios excepto el considerado exactamente tenemos que

$$m = \frac{\sum_{s=-1}^1 s e^{\beta 2msd}}{\sum_{s=-1}^1 e^{\beta 2msd}} = \tanh(2\beta md) , \quad (\text{I-VII-4})$$

la ec. (I-VII-4) es la ecuación de autoconsistencia. Notamos que $m=0$ siempre es solución pero para un cierto β^* , que depende del valor de d , aparecerá una nueva solución. Este valor β^* se interpreta como el punto crítico de la teoría. A partir de dicho β^* el modelo estará magnetizado. Podemos calcular el valor de β^* derivando ambos miembros de la ec. (I-VII-4) en $m=0$; así tenemos que $\beta^* = 1/2d$.

Pasemos del ámbito de teoría del sólido al de teoría de campos y tratemos de aplicar el método a una teoría $Z(2)$ de

medida en la red en cuatro dimensiones. En este caso, las variables $\sigma_\mu(x)$ estarán en las uniones de la red, en vez de en los sitios y, como en el caso anterior, sólo podrán tomar valores ± 1 . La acción que define al modelo es

$$S = \beta \sum_{x, \mu, \nu} \sigma_\mu(x) \sigma_\nu(x + \hat{\mu}) \sigma_\mu(x + \hat{\nu}) \sigma_\nu(x) , \quad (\text{I-VII-5})$$

x indica sitios de la red y μ y ν son versores que toman valores entre 1 y d . La función de partición es la suma sobre todas las configuraciones de la exponencial de la acción. Si, como antes, queremos calcular $m = \langle \sigma_\mu(x) \rangle$, usando el método de campo medio obtenemos la ecuación de autoconsistencia

$$m = \frac{\sum_{\sigma=\pm 1} \sigma e^{\beta \sigma m^2 (d-1)}}{\sum_{\sigma=\pm 1} e^{\beta \sigma m^2 (d-1)}} = \tanh(2\beta(d-1)m^2) . \quad (\text{I-VII-6})$$

En este caso también cero es siempre solución de la ec. (I-VII-6) y para algún valor β^* aparecerá una nueva solución. Si $d=4$ se obtiene $\beta^* = 0.36$. Debido al acoplamiento de las cuatro variables en la ec. (I-VII-5) no podemos obtener β^* derivando ambos miembros de la ec. (I-VII-6) en $m=0$; es decir, en este caso la transición de fase será de primer orden y no de segundo, como en el ejemplo anterior, pues la raíz en β^* saltará de 0 a un valor finito (ver Fig.2). Con este método pueden calcularse otras magnitudes físicas como la energía E_P ,

$$E_P = \frac{1}{N_P} \frac{\partial}{\partial \beta} \log Z = \left[\frac{1}{N_P} \frac{\partial}{\partial \beta} \log Z^N \exp\{\beta m^4 N d(d-1)/2\} \right] = m^4 , \quad (\text{I-VII-7})$$

N es el número de sitios de la red y $N_P = Nd(d-1)/2$ es el número de plaquetas.

Los valores de β^* obtenidos con el método de campo medio

pueden mejorarse sistemáticamente si consideramos más de una variable exactamente. Este procedimiento se conoce con el nombre de aproximación de Bethe-Peierls y será utilizado en los capítulos III, IV y V de esta tesis.

Más arriba dijimos que el valor de β para el cual aparecía una solución no trivial de la ecuación de autoconsistencia se considera el punto crítico; esto se hace en muchos casos pero se obtienen mejores resultados si se comparan las energías libres para cada una de las dos soluciones y el punto en que se cruzan define la transición. Este es el criterio que usaremos nosotros y, en general, da valores de β^* mayores o iguales que los que se obtienen de la otra forma.

El método de campo medio tal como lo hemos descripto presenta un grave problema conceptual cuando se aplica a teorías invariantes de medida. El teorema de Elitzur (31) establece que para una teoría de medida el valor medio de toda magnitud no invariante ante una transformación de medida debe ser estrictamente cero. Ahora bien $\langle \sigma_\mu(x) \rangle$ debiera, entonces, ser cero en abierta contradicción con los resultados obtenidos anteriormente. Entonces esta forma de aplicar el método a las teorías de medida resulta ser intrínsecamente inconsistente. Este problema fue resuelto en las Refs. (32,33 y 34). El paso fundamental consiste en reescribir la función de partición en función de variables sin vínculos, es decir, pasando de un grupo compacto a otro que no lo es. En nuestro caso debemos pasar de variables de $Z(2)$ a variables de R . Este cambio se realiza de la siguiente forma. En la función de partición introducimos un 1 escrito como,

$$1 = \prod_l \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\sigma_l - v_l) dv_l = \prod_l \int_{-\infty}^{\infty} dv_l \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_l}{2\pi i} \exp\{i\alpha_l(\sigma_l - v_l)\}, \quad (\text{I-VII-8})$$

l indica las uniones de la red. La integral sobre α_l se obtiene desarrollando la δ en serie de Fourier.

La función de partición queda,

$$Z = \prod_e \int_{-\infty}^{\infty} dV_e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_e}{2\pi i} \exp \left\{ \beta \sum_{\langle \mu, \nu \rangle} V_\mu(x) V_\nu(x+\hat{\mu}) V_\mu(x+\hat{\nu}) V_\nu(x) - \sum_e \alpha_e V_e \right\} \\ \times \exp \left\{ \sum_e \log(\cosh \alpha_e) \right\} \quad (I-VII-9)$$

De esta forma pasamos de una suma sobre los campos σ_e que toman valores en $Z(2)$ a integrales sobre los campos $V_\mu(x)$ y $\alpha_\mu(x)$ que toman valores en R . Estas son las nuevas variables sin vínculos.

Ahora debemos tratar de calcular Z . En general esta integral no es sencilla de resolver por lo que se utilizan métodos aproximados. El más generalizado es el método de punto de ensilladura o saddle-point que es aplicable para resolver integrales de funciones con picos agudos y espaciados. Esto es así porque el método consiste en reemplazar el integrando por una gaussiana cuya integral es siempre conocida. Veamos esto con más detalle. Sea

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{f(x)\} dx, \quad (I-VII-10)$$

la integral que queremos resolver. Desarrollemos $f(x)$ hasta orden cuadrático alrededor de un máximo x_0 .

$$f(x) \approx f(x_0) + f''(x_0) (x-x_0)^2, \quad (I-VII-11)$$

entonces I queda reducida a una integral gaussiana

$$I \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) (x-x_0)^2\} dx = \\ = \exp\{f(x_0)\} \sqrt{2\pi / |f''(x_0)|}, \quad (I-VII-12)$$

o tomando logaritmos,

$$\log I \approx f(x_0) - \frac{1}{2} \log |f''(x_0)| + \frac{1}{2} \log(2\pi). \quad (\text{I-VII-13})$$

Cuanto más se parezca a una gaussiana la función que queramos integrar mejor será la aproximación. En algunos casos $I \approx e^{f(x_0)}$ podrá ser una buena aproximación.

Si la función que analizamos tiene N picos equiespaciados e iguales cuya integral es I , la integral de la función valdrá NI .

Para aplicar este método a nuestro problema debemos encontrar primero el máximo alrededor del cual desarrollar la función. Para ello debemos encontrar las configuraciones de campos $V_\mu(x)$ y $\alpha_\mu(x)$ que cumplen que

$$\frac{\partial S_{ef}}{\partial V_\mu(x)} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial S_{ef}}{\partial \alpha_\mu(x)} = 0, \quad (\text{I-VII-14})$$

donde

$$S_{ef} = \beta \sum_{x, \mu < \nu} V_\mu(x) V_\nu(x + \hat{\mu}) V_\mu(x + \hat{\nu}) V_\nu(x) - \sum_\ell \alpha_\ell V_\ell + \sum_\ell \log(\cosh \alpha_\ell), \quad (\text{I-VII-15})$$

es el argumento de la exponencial en la ec. (I-VII-9). Las ecs. (I-VII-14) se conocen con el nombre de ecuaciones de saddle-point. En nuestro caso quedan

$$\beta \sum_{x, \mu < \nu} V_\nu(x + \hat{\mu}) V_\mu(x + \hat{\nu}) V_\nu(x) - \sum_{x, \mu} \alpha_\mu(x) = 0, \quad (\text{I-VII-16-a})$$

$$\sum_{x, \mu} \tanh(\alpha_\mu(x)) - \sum_{x, \mu} V_\mu(x) = 0. \quad (\text{I-VII-16-b})$$

No es nada trivial encontrar los valores de V_ℓ y α_ℓ que satisfacen estas ecuaciones. Para facilitar los cálculos haremos una aproximación. Buscaremos soluciones que sean invariantes ante

traslaciones, o sea,

$$V_{\mu}(x)=V \quad , \quad (I-VII-17-a)$$

$$\alpha_{\mu}(x)=\alpha \quad . \quad (I-VII-17-b)$$

Por supuesto que esta elección no es la única posible; se la utiliza porque es sencilla y los resultados que se obtienen con ella, en general, son buenos. Sin embargo, como veremos en el capítulo V, no siempre es así y en algunas situaciones puede ser conveniente buscar soluciones de otro tipo. El problema radica en que no existe un método estándar para llevar a cabo esto último.

Si buscamos soluciones del tipo (I-VII-17) las ecs.(I-VII-16) toman la forma

$$\alpha = 2(d-1)V^3/\beta \quad , \quad (I-VII-18-a)$$

$$V=\tanh \alpha \quad . \quad (I-VII-18-b)$$

O sea,

$$V=\tanh[\beta 2(d-1)V^3] \quad . \quad (I-VII-19)$$

Notemos que recuperamos la ec.(I-VII-6). Obtenemos los mismos resultados que antes pero, conceptualmente, se trata de algo muy diferente. En el caso anterior obteníamos que el valor medio de una magnitud no invariante de medida podía ser distinto de cero, lo que contradecía al teorema de Elitzur; ahora, en cambio, las ecs.(I-VII-16) aún con la condición (I-VII-17) son invariantes de medida; por lo tanto hay 2^N configuraciones de campos que las satisfacen aunque sólo dos son invariantes ante traslaciones. Todas estas configuraciones contribuyen a Z con el mismo valor por lo tanto Z será 2^N veces la contribución de cada uno de estos máximos (34). Por otra parte, al calcular $\langle \phi_i \rangle$, en este caso

debemos promediar sobre todas las configuraciones que minimizan la acción lo que nos dará el resultado correcto.

La energía libre se calcula como

$$F = -\frac{\log Z}{N} - \log 2 - \frac{3}{2} \beta d(d-1) V^4 - d \log (1-V^2)/2. \quad (\text{I-VII-20})$$

Debemos comparar esta energía libre con la de la solución trivial y en el punto en que ambas se crucen está la transición de fase.

Hasta ahora no consideramos las fluctuaciones gaussianas, es decir, aproximamos la integral por el valor de la función en el máximo; esto es lo que se conoce como resultado a orden cero. Para considerar las fluctuaciones hacemos lo siguiente. Sea

$$V_\mu(x) = V + \eta_\mu(x) \quad , \quad (\text{I-VII-21-a})$$

$$\alpha_\mu(x) = \alpha + \xi_\mu(x) \quad . \quad (\text{I-VII-21-b})$$

Entonces reemplazamos en S_ϕ manteniendo no más que las potencias cuadráticas de las fluctuaciones

$$\begin{aligned} S_\phi \cong & \beta \sum_{x, \mu < \nu} \{ V^4 + V^2 [\eta_\mu(x) \eta_\nu(x+\hat{\mu}) + \eta_\mu(x) \eta_\mu(x+\hat{\nu}) + \eta_\mu(x) \eta_\nu(x) + \\ & + \eta_\nu(x+\hat{\mu}) \eta_\mu(x+\hat{\nu}) + \eta_\nu(x+\hat{\mu}) \eta_\nu(x) + \eta_\mu(x+\hat{\nu}) \eta_\nu(x)] \} - \sum_x \alpha V + \\ & + \eta_\mu(x) \xi_\mu(x) + \log \cosh \alpha + \xi_\mu^2(x) / [2(1+\alpha^2/2)]. \quad (\text{I-VII-22}) \end{aligned}$$

Los términos lineales en las fluctuaciones no contribuirán. Ahora Z se calcula realizando las integrales gaussianas sobre las fluctuaciones $\eta_\mu(x)$ y $\xi_\mu(x)$. Para $d=4$ se obtiene $\beta^* = 0.44$ en muy buen acuerdo con el valor aceptado $\beta_c = 0.4407$. Estos resultados se

puedan mejorar sistemáticamente manteniendo las potencias superiores de las fluctuaciones y desarrollando en serie la exponencial de la cual son argumento de manera de resolver siempre integrales tipo gaussiana. Cuantos más términos en el desarrollo de la exponencial consideremos, más cerca estaremos del resultado exacto. Esta técnica se conoce con el nombre de desarrollo en lazos.

El método que acabamos de describir también se aplica a teorías con grupos continuos; pero en este caso debido a la aparición de modos cero se hace imprescindible fijar una medida (35).

b) Método de campo medio en variables de plaqueta (36,37):

Acabamos de ver que el método de campo medio "naive" presenta problemas al aplicarlo a una teoría invariante de medida porque trabajamos con variables ubicadas en las uniones cuyo valor medio no es una magnitud invariante de medida. Si pudiéramos hacer un cambio de variables, a fin de tener que evaluar magnitudes cuyo valor medio fuera invariante, no habría problemas en aplicar el método anterior. Ante una transformación de medida el producto de las cuatro variables de unión que rodean una plaqueta permanece inalterado; si a este producto lo identificamos con una nueva variable de plaqueta, nuestro problema se reduce a efectuar el cambio de las viejas variables de unión a las nuevas de plaqueta. El mayor problema consiste en determinar el jacobiano de la transformación. Para mayor claridad sigamos trabajando con nuestro ejemplo, el modelo $Z(2)$ de medida. La función de partición es

$$Z = \sum_{\{c_{ij} \in \mathbb{Z}_2\}} \exp\{S\}, \quad (\text{I-VII-23})$$

donde S está dada por la ec. (I-VII-5). Si definimos

$$\sigma_p = \sigma_\mu(x) \sigma_\nu(x+\hat{\mu}) \sigma_\mu(x+\hat{\nu}) \sigma_\nu(x) \quad , \quad (\text{I-VII-24})$$

como las nuevas variables de plaqueta y hacemos el cambio de variables, obtenemos

$$Z = \sum_{\{\sigma_p(x)=\pm 1\}} \exp\{\beta \sum_p \sigma_p\} \prod_c \delta_{\sigma_c, 1} \quad , \quad (\text{I-VII-25})$$

donde σ_c es el producto de las seis variables de plaqueta que constituyen un cubo tridimensional en la red y el producto es sobre todos estos cubos. Las funciones δ son el vínculo entre las variables correspondiente al jacobiano de la transformación. Estos vínculos resultan ser identidades de Bianchi (37) en la red. El número de identidades de Bianchi depende de la dimensión de la teoría; es el número de diferentes cubos tridimensionales que pueden construirse en el espacio. Por ejemplo, en teorías en dos dimensiones no aparecerán vínculos; en tres dimensiones hay un solo tipo de cubo y por lo tanto, una sola identidad de Bianchi. En general, para una teoría d-dimensional hay $d(d-1)(d-2)/6$ cubos tridimensionales y, por lo tanto, el mismo número de identidades de Bianchi.

Ahora aplicaremos el método de campo medio en variables de plaqueta (MP). Supongamos que queremos calcular la energía por unidad de plaqueta, o sea, $\langle \sigma_p \rangle$. Esta estará dada por,

$$\langle \sigma_p \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma_p=\pm 1\}} \sigma_p \exp\{\beta \sum_p \sigma_p\} \prod_c \delta_{\sigma_c, 1} \quad . \quad (\text{I-VII-26})$$

Ante todo desarrollaremos las deltas en caracteres del grupo $Z(2)$,

$$\delta_{\sigma_c, 1} = \frac{\sigma_c + 1}{2} \quad . \quad (\text{I-VII-27})$$

Ahora aplicamos la aproximación de campo medio, o sea, consideramos exactamente una sola variable y las demás se reemplazan por su valor medio calculado mediante una ecuación de autoconsistencia, (para $d=4$ queda),

$$\langle \sigma_p \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\sigma_p = \pm 1} \sigma_p \exp \{ \beta \sigma_p \} \left[\frac{\sigma_p \langle \sigma_p \rangle^3 + 1}{2} \right]^4. \quad (I-VII-28)$$

Debemos hallar soluciones tales que $0 < \langle \sigma_p \rangle < 1$. El hecho de que $\langle \sigma_p \rangle \neq 0$ no contradice al teorema de Elitzur pues $\langle \sigma_p \rangle$ es una magnitud invariante de medida. Resolviendo la ec. (I-VII-28) se obtiene $\beta^* = 0.42$ que está muy cerca del valor aceptado. Notemos que este valor de β^* es mucho mejor que el que se obtiene con el método de campo medio en variables de unión a orden cero. Al igual que el método de campo medio estándar, el MP puede mejorarse sistemáticamente mediante técnicas de Bethe-Peierls. Este procedimiento lo aplicaremos en los capítulos III y IV. Con este método pueden estudiarse, también, teorías no abelianas (37). Cuando el grupo de medida es continuo hay que hacer una aproximación adicional. En el desarrollo en caracteres de las deltas (que en este caso serán deltas de Dirac) no pueden tenerse en cuenta las infinitas representaciones del grupo por lo que sólo se consideran las suficientes como para obtener una buena convergencia de las ecuaciones. En estos casos las ecuaciones de MP formarán un sistema cuyas incógnitas serán los valores medios de las variables de plaqueta en las distintas representaciones consideradas. La energía será $E = \langle \sigma_p^\lambda \rangle$ donde λ es la representación del grupo que aparece en la acción. Este método puede aplicarse también a teorías de medida con campos de materia (ver Ref.39). En el capítulo III trataremos de esta forma modelos de spin; en estos casos, como veremos, debemos pasar de variables de sitio a variables de unión.

Referencias

- 1) J.Björken y E.Paschos, Phys.Rev.185,1975(1979).
- 2) M.Gell-Mann, Phys.Lett.8,214(1964); G.Zweig,CERN Report N 8182/TH401(1964), no publicado.
- 3) L.Maiani, Nota interna 673, Instituto de Física "G.Marconi". Universidad de Roma.
- 4) D.Gross y F.Wilzek, Phys.Rev.Lett.30,1343(1973).
- 5) K.Wilson, Phys.Rev.D10,2445(1974).
- 6) C.Itzykson y J.Zuber, "Quantum field theory", Cap XII; McGraw Hill Inc.(1980).
- 7) C.Itzykson y J.Zuber, "Quantum field Theory", Cap. ; McGraw Hill Inc.(1980).
- 8) K.Huang, "Quarks, leptons and gauge fields", Cap.XII; World Scientific (1982).
- 9) F.Close, "An introduction to quarks and partons", Academic Press (1979).
- 10) J.Kogut, Rev.Mod.Phys.55,775(1983).
- 11) S.Drell, M.Weinstein y B.Yankielowicz, Phys.Rev.D14,487 y 1627(1976).
- 12) Chou-Kuang-Chao, JETP 12,492(1961).
- 13) Y.Nambu y G.Jona-Lasinio, Phys.Rev.122,345(1961);124,246

(1961).

14) S.Weinberg, Phys.Rev.D11,3583(1975).

15) G.t'Hooft, Nucl.Phys.B79,276(1974).

16) L.Susskind, Phys.Rev.D16,3031(1977).

17) J.Kogut, Rev.Mod.Phys.51,659(1979).

18) C.Bernard, Phys.Rev.D9,3312(1974).

19) L.Susskind, Phys.Rev.D20,2610(1979); H.Satz, Nucl.Phys.A 418,447c(1984)

20) N.F.Mott, Rev.Mod.Phys.40,677(1968) y sus referencias.

21) T.Çelik, J.Engels y H.Satz, Bielefeld Report BI-TF84/09 (1984).

22) A.Dolgov y Ya.Zeldovich, Rev.Mod.Phys.53,1(1981).

23) RHIC and quark matter; Proposal for a relativistic heavy ion collider at BNL, Report BNL 51801, Brookhaven National Laboratory, Upton,N.Y.,1984.

24) M.Creutz, L.Jacobs y C.Rebbi, Phys.Rep.95,203(1983).

25) J.Kogut, R.Pearson y J.Shigemitsu, Phys.Rev.Lett.43,484 (1979).

26) J.M.Drouffe y J.Zuber, Phys.Rep.102,1(1983).

27) E.Witten, Nucl.Phys.B160,57(1979).

28) K.Bitar, S.Gottlieb y C.Zachos, Phys.Rev.D26,2853(1982).

- 29) N.Hari Dass, A.Patkós y F.Deák, Nucl.Phys.B205[FS5]414 (1982).
- 30) S.Drell, H.Quinn, B.Svetitsky y M.Weinstein, Phys.Rev.D19,619 (1979).
- 31) S.Elitzur, Phys.Rev.D12,3978(1975).
- 32) J.M.Drouffe, Nucl.Phys.B170,211(1980).
- 33) J.M.Drouffe, Phys.Lett.105B,46(1981).
- 34) E.Brézin y J.M.Drouffe, Nucl.Phys.B200,93(1982).
- 35) H.Flyvbjerg, R.Lautrup y J.Zuber, Phys.Lett.110B,279(1982).
- 36) G.Batrouti, Nucl.Phys.B208,12 y 467 (1982).
- 37) E.Dagotto y A.Moreo, Phys.Rev.D30,1271(1984).
- 38) W.Drechsler y M.Mayer, "Fiber bundles techniques in gauge theories" lecture notes in physics n 67, págs.39 y 53.
- 39) E.Dagotto y A.Moreo, en preparación.

Titulos de figuras

1-a) Energía en función de ka (k es el impulso y a el espaciamiento de red) para una solución tipo onda plana de la ecuación de Klein-Gordon en la red.

-b) Energía en función del impulso k para dos soluciones tipo onda plana de la ecuación de Dirac en el continuo con quiralidad definida.

-c) Energía en función de ka para una solución tipo onda plana con quiralidad definida de la ecuación de Dirac en la red.

-d) Energía en función de ka para una solución tipo onda plana con quiralidad definida de la ecuación de Dirac en la red luego de agregar el término de Wilson para evitar el problema de la duplicación de especies.

2) Análisis de las raíces de la ec. (I-VII-6) mediante el cruce de las curvas $y=m$ e $y=\tanh(6\beta m^2)$ en cuatro dimensiones. Si $\beta < \beta^*$ sólo existe la solución $m=0$ pero a partir de $\beta = \beta^*$ aparecen tres raíces, dos de ellas estables.

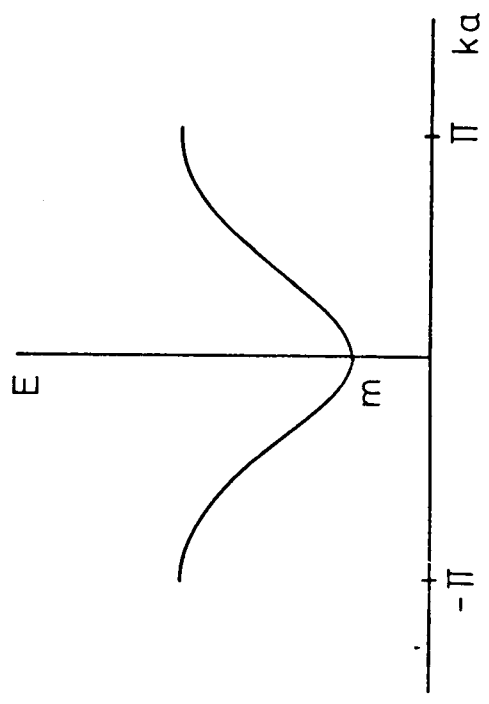


Fig. 1-a

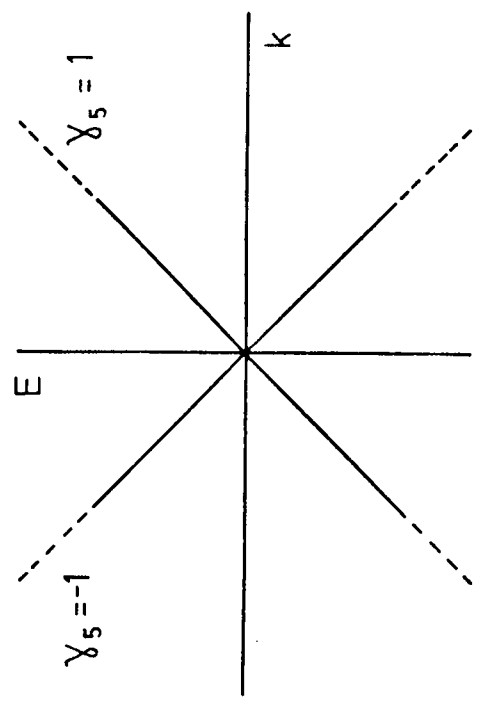


Fig. 1-b

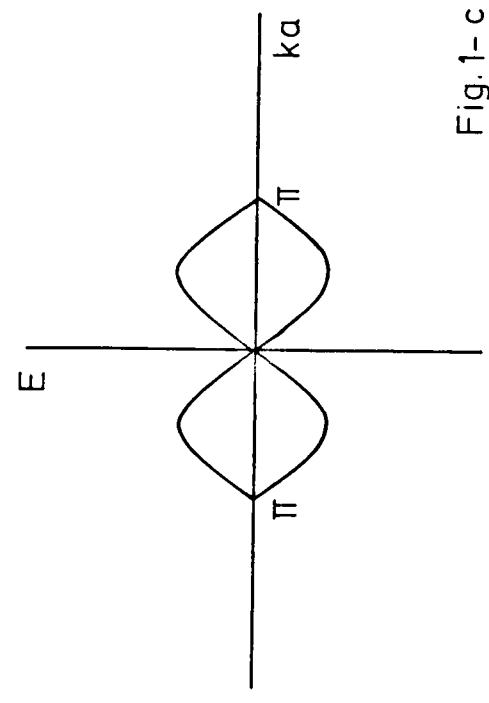


Fig. 1-c

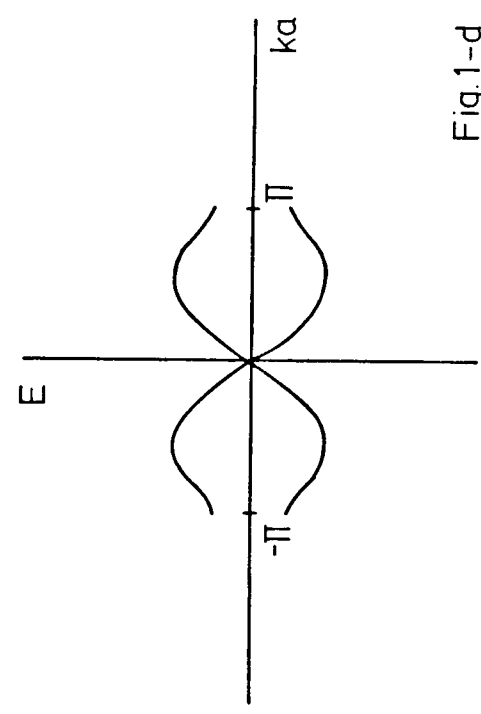


Fig. 1-d

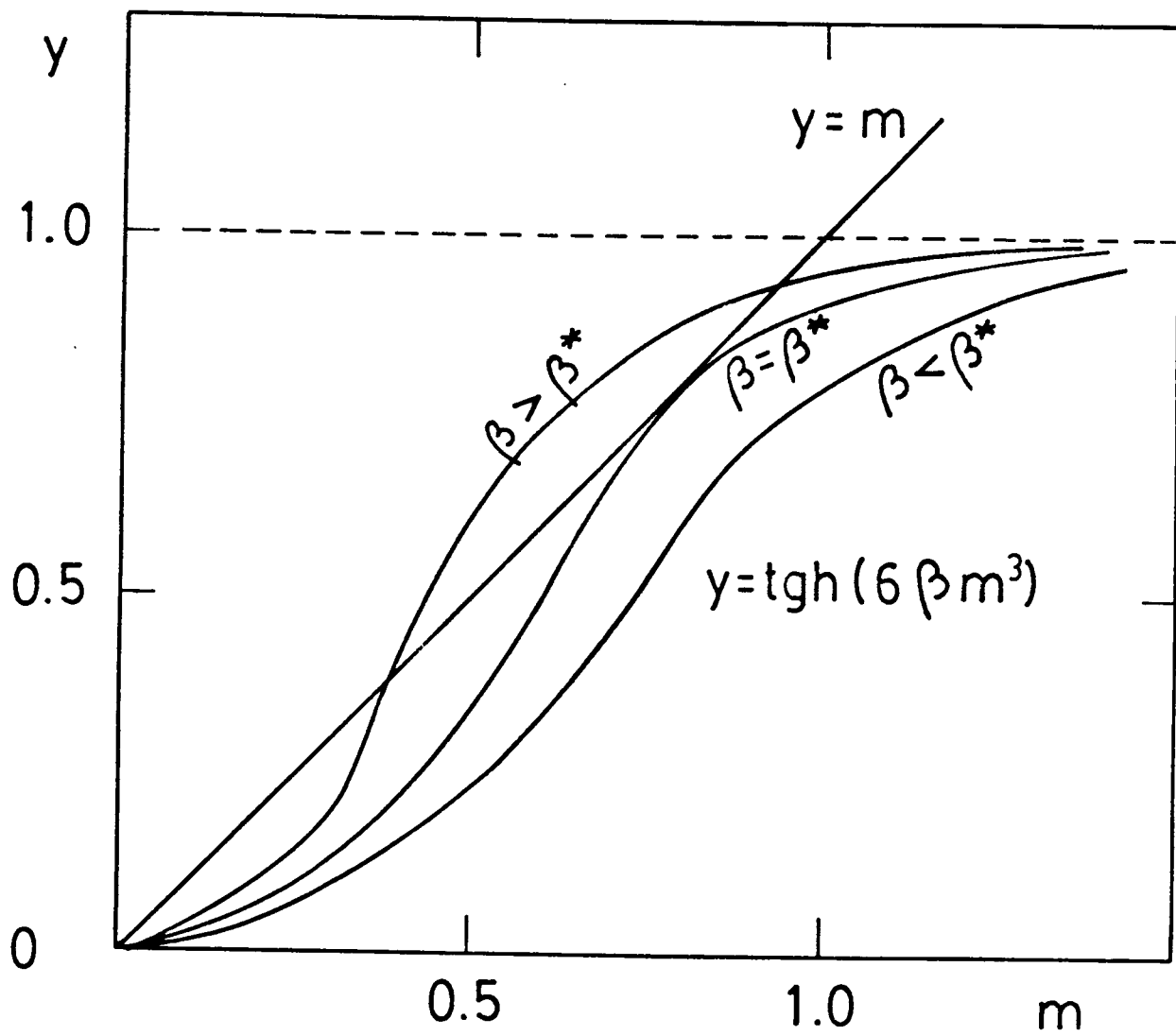


Fig. 2

CAPITULO II

TECNICA VARIACIONAL MEJORADA PARA MODELOS EN LA RED (1)

Resumen

Se propone un método sistemático para mejorar cualquier función de prueba en el contexto de los métodos variacionales hamiltonianos. La aproximación tiene muchas semejanzas con el esquema de Lanczos y puede ser aplicada a problemas de mecánica cuántica así como también en teoría de campos y mecánica estadística. Aplicamos el método a la ecuación de Mathieu y al modelo de Ising unidimensional en una red finita. El acuerdo entre los resultados exactos y los nuestros es excelente en todo el rango de los parámetros. También se discute brevemente la aplicación de este método a las teorías de medida en la red.

II-I Introducción

Las técnicas en la red son la principal herramienta para el tratamiento de los fenómenos no perturbativos en las teorías de medida (2). Algunas magnitudes físicas, como la masa de los hadrones han sido calculadas numéricamente mediante simulaciones de Monte Carlo. Sin embargo sería muy útil desarrollar métodos analíticos para obtener una idea intuitiva de las principales características de los diferentes modelos. Muchas técnicas han sido propuestas. Por ejemplo, el método de campo medio con correcciones (3) en el marco de la formulación lagrangiana da excelentes resultados al predecir los diagramas de fases de las teorías; sin embargo recuperar el límite continuo está fuera de sus posibilidades. Otros métodos analíticos son las técnicas variacionales (4,5), los desarrollos de acoplamiento fuerte (6), el método de campo medio en variables de plaqueta (7), grupo de renormalización (8) y aproximaciones de red finita (9). En este capítulo estudiaremos el método variacional en formulación hamiltoniana. Aunque esta técnica da resultados aceptables en muchos modelos, su principal problema radica en el hecho de que es muy difícil mejorar los valores numéricos obtenidos usando un dado Ansatz. En Ref.(5) tratamos de mejorar la función de prueba de plaqueta independiente en una teoría $Z(2)$ de medida en $2+1$ dimensiones mediante la técnica de Bethe-Peierls pero el resultado mostró una convergencia muy lenta hacia los valores aceptados para el modelo. Es claro que deben implementarse nuevas ideas. En este trabajo proponemos un método sistemático e iterativo que permite, con mucha simplicidad, el mejoramiento de cualquier Ansatz arbitrario. La aplicación de este método a algunos modelos bien conocidos da excelentes resultados mostrando una rápida convergencia hacia el valor exacto de la energía del nivel fundamental. Aunque nuestro principal propósito es la implementación de estas ideas en el ámbito de las teorías en la red, el método puede aplicarse también a modelos de mecánica cuántica, mecánica estadística y teoría de campos.

Remarquemos que nuestro método es similar, en espíritu, a otra técnica recientemente propuesta (10) que también mejora un Ansatz variacional. En este trabajo estudiaremos las diferencias entre ambos métodos.

La organización del trabajo es como sigue. En la Sec. II-II presentamos el método. En la Sec. II-III lo aplicamos a la ecuación de Mathieu y al modelo de Ising unidimensional en una red finita. Los resultados son extrapolados al límite termodinámico y se comparan con las soluciones exactas. En la Sec. II-IV se presenta una corta discusión.

II-II Descripción del método.

La técnica que describiremos en esta sección tiene algunos puntos en común con el conocido método de Lanczos (11) para la tridiagonalización de matrices. En efecto, nuestra idea está inspirada en un trabajo reciente (12) en que el método de Lanczos fue modificado a fin de extender su rango.

Supongamos que queremos aproximar el estado fundamental de un sistema descrito por un hamiltoniano H . En el ámbito variacional debemos seleccionar funciones de prueba ψ_0 que dependan de algunos parámetros libres $\{\beta\}$ como en la aproximación usual de Rayleigh-Ritz. Si H opera sobre ψ_0 el resultado puede escribirse siempre como

$$H\psi_0 = \varepsilon_0 \psi_0 + b \tilde{\psi}_0, \quad (\text{II-II-1})$$

donde $\tilde{\psi}_0$ es un estado ortogonal a ψ_0 . La constante $\varepsilon_0 = (\psi_0, H\psi_0)$ es la energía variacional de ψ_0 , es decir, si minimizamos ε_0 respecto de $\{\beta\}$ obtendremos un límite superior para la energía del verdadero estado fundamental ϕ . La otra constante $b = (\tilde{\psi}_0, H\psi_0)$ mide, en cierta forma, el apartamiento entre ψ_0 y ϕ .

Los estados ψ_0 y $\tilde{\psi}_0$ están normalizados a 1. La ecuación (II-II-1) puede pensarse como la definición de $\tilde{\psi}_0$. Entonces la idea es simple. Podemos mejorar la función de prueba inicial considerando como nuevo Ansatz la combinación lineal normalizada

$$\psi_1 = \frac{\psi_0 + \alpha_1 \tilde{\psi}_0}{(1 + \alpha_1^2)^{1/2}}, \quad (\text{II-II-2})$$

donde α_1 es un nuevo parámetro variacional que puede hallarse fácilmente minimizando la energía del estado de la ec. (II-II-2),

$$\alpha_1 = f - (f^2 + 1)^{1/2}, \quad (\text{II-II-3})$$

donde

$$f = \frac{\langle H^3 \rangle_0 - 3 \langle H \rangle_0 \langle H^2 \rangle_0 + 2 \langle H \rangle_0^3}{2 (\langle H^2 \rangle_0 - \langle H \rangle_0^2)^{1/2}}, \quad (\text{II-II-4-a})$$

y

$$\langle H^n \rangle_0 = (\psi_0, H^n \psi_0). \quad (\text{II-II-4-b})$$

Puede demostrarse que el estado de la ec. (II-II-2) junto con la ec. (II-II-3), es el autoestado de menor energía de la matriz 2×2

$$\begin{pmatrix} \epsilon_0 & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad (\text{II-II-5})$$

donde $c = (\tilde{\psi}_0, H \tilde{\psi}_0)$. En general el hamiltoniano pueda escribirse como un término de energía cinética más otro de energía potencial, es decir, $H = H_0 + xV$, donde x es un parámetro. Si elegimos como ψ_0 inicial el estado fundamental de H_0 , recobramos el método válido para acoplamiento fuerte ($x \ll 1$) de la Ref. (12). Sin embargo, si ψ_0 es suficientemente bueno en $x=0$ y $x=\infty$ entonces, como probaremos en Sec. II-III, obtendremos resultados satisfactorios para todo x .

Mediante un álgebra simple y usando ec.(II-II-3) podemos evaluar la nueva energía mejorada,

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 + \alpha_1 b. \quad (\text{II-II-6})$$

La ecuación (II-II-6) puede minimizarse (por ejemplo numéricamente) respecto de los parámetros $\{\beta\}$ (los cuales, en general, no coincidirán con el conjunto $\{\beta\}$ que minimizaba $\mathcal{E}_0$). El método puede iterarse fácilmente, o sea, al actuar H sobre ψ_1 obtenemos un estado $\tilde{\psi}_1$ ortogonal a ψ_1 . El nuevo estado mejorado es ahora

$$\psi_2 = \frac{\psi_1 + \alpha_2 \tilde{\psi}_1}{(1 + \alpha_2^2)^{1/2}}. \quad (\text{II-II-7})$$

Los valores de α_2 y $\mathcal{E}_2$ (la energía de ψ_2) están dados por las ec.(II-II-3) y ec.(II-II-6), respectivamente, cambiando ψ_0 , $\tilde{\psi}_0$ por ψ_1 , $\tilde{\psi}_1$. Usando la ec.(II-II-2), α_2 y $\mathcal{E}_2$ pueden escribirse como funciones de $\langle H^n \rangle$. Notemos que en el primer paso de nuestro método iterativo necesitamos conocer $n=1,2,3$, en ec.(II-II-4-b), y en el segundo $n=1,\dots,5$. En general en cada iteración deberán evaluarse dos nuevas potencias de H.

Resumiendo, en esta sección hemos propuesto un método sistemático y simple para mejorar cualquier función de prueba en el marco de las técnicas variacionales hamiltonianas. Ahora probaremos nuestra aproximación en algunos ejemplos no triviales.

II-III Resultados

A. Ecuación de Mathieu

Como primer ejemplo del método descrito en la Sec.II-II consideraremos, como en la Ref.(12) la ecuación de Mathieu que tiene una gran cantidad de aplicaciones en física teórica,

$$\left[-\frac{d^2}{d\theta^2} - x \cos \theta \right] \psi(\theta) = E \psi(\theta) \quad . \quad (\text{II-III-1})$$

Es la ecuación de Schrödinger para el péndulo cuántico en un campo gravitatorio, para una partícula en un potencial periódico unidimensional, y para el efecto Stark de un rotador rígido. Esta ecuación también aparece en mecánica estadística para el gas de Coulomb unidimensional (13). En teorías de medida ha sido estudiada debido a su similitud con teorías de Yang-Mills puras (14). En teorías de medida en la red, corresponde a la ecuación de autovalores para el modelo de una plaqueta (15) (en formulación hamiltoniana), donde x es proporcional a g^{-4} y g es la constante de acoplamiento. Por esta razón nos referiremos a la región $x \ll 1$ ($x \gg 1$) en la ec.(II-III-1) como la región de acoplamiento fuerte (débil). La ecuación de Mathieu también fue analizada mediante el método de integrales de fase (16).

Trataremos de reproducir los resultados conocidos para el estado fundamental de la ec.(II-III-1) usando como función de prueba inicial

$$\psi_0(\theta) = \exp\left(\frac{1}{2} \beta \cos \theta\right) , \quad (\text{II-III-2})$$

donde β es un parámetro variacional. Podemos demostrar que este Ansatz reproduce el primer término del desarrollo perturbativo en las zonas de acoplamiento fuerte y débil (ver ec.(II-III-5)). Recientemente este tipo de funciones de prueba ($\psi_0 = \exp(\beta V/2)$) han sido muy usadas (17) en teorías de medida en la red con resultados aceptables por lo que son, en general, un buen punto de partida para aplicar nuestro método. La energía a orden cero es

$$\mathcal{E}_0(x, \beta) = \left[-\frac{\beta}{4} - x \right] \frac{I_1(\beta)}{I_0(\beta)} , \quad (\text{II-III-3})$$

donde $I_n(\beta)$ son las funciones de Bessel modificadas de orden n . En la tabla I damos los resultados para la tres primeras

iteraciones de nuestro método. El acuerdo con los valores exactos (18) es excelente en todo el rango de x . La convergencia es muy rápida como se muestra en la Fig.1, donde graficamos los errores relativos

$$\Delta_i = (\mathcal{E}_{\text{exacta}} - \mathcal{E}_i) / \mathcal{E}_{\text{exacta}} \quad , \quad (\text{II-III-4})$$

siendo $\mathcal{E}_i$ la energía de la i -ésima iteración. Notemos que el error se reduce en un orden en las dos primeras iteraciones. Δ_i tiene un máximo en $x \sim 1$. En la Fig.2 comparamos nuestros resultados con los desarrollos de acoplamiento fuerte (18) y débil (19) del estado fundamental de la ecuación de Mathieu. Por completitud presentamos los primeros términos de dichos desarrollos (para el acoplamiento fuerte en Ref.19 aparecen más términos),

$$\mathcal{E}_s \approx -0.5x^2 + 0.218750x^4 - 0.201389x^6 + 0.232907x^8 \quad , \quad (\text{II-III-5-a})$$

$$\mathcal{E}_w \approx -x + \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^8} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} - \frac{6}{2^{11}x} - \frac{53}{2^{14}} \left(\frac{x}{2}\right)^{3/2} - \frac{594}{2^{17}x^2} - \frac{7922}{2^{20}} \left(\frac{x}{2}\right)^{5/2} \quad . \quad (\text{II-III-5-b})$$

Es de destacar que nuestra energía variacional en la Fig.2 (que es indistinguible del resultado exacto en la escala usada) interpola suavemente entre ambos desarrollos. En la tabla II completamos el análisis mostrando la variación del parámetro que minimiza la energía para algunos puntos representativos. De estos resultados es claro que nuestro método funciona correctamente al menos en este problema de mecánica cuántica.

B. Modelo de Ising unidimensional.

Como segundo ejemplo haremos algunos cálculos exploratorios en teorías en la red. Consideraremos el modelo de Ising en una dimensión definido por

$$H = -\sum_i \sigma_i^z - x \sum_i \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x \quad , \quad (\text{II-III-6})$$

donde σ^x y σ^z son matrices de Pauli y la suma es sobre los sitios i de una cadena finita de N sitios (suponemos condiciones de contorno periódicas). La energía exacta del estado fundamental de la ecuación (II-III-7) es conocida

$$\epsilon_{\text{exacta}} = - \sum_{\substack{k=0 \\ (k \text{ impar})}}^{2N-1} \left[(1-x)^2 + 4x \sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right) \right]^{1/2} . \quad (\text{II-III-7})$$

Es importante destacar que para un sistema cuyo volumen es infinito nuestro método presenta un problema. En el límite $N=\infty$ puede probarse que α en la ec. (II-II-3) es cero. Sin embargo este hecho no invalida la aproximación porque probaremos que es posible obtener muy buenos resultados mediante el siguiente truco: aplicamos el método a cadenas finitas y luego extrapolamos al límite infinito mediante conocidas técnicas de extrapolación (20).

Como función de prueba inicial elegimos la análoga de la ec. (II-III-2),

$$\Psi_0 = \exp \left[\frac{1}{2} \beta \sum_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \right] |0\rangle_0 , \quad (\text{II-III-8})$$

donde $|0\rangle_0$ representa un autovector de σ^z con autovalor (+1) en todos los sitios de la red. Este tipo de estado de prueba fue estudiada en detalle recientemente (21). La energía a orden 0 por unidad de sitio es

$$\epsilon_0(x, \beta) = - \frac{\cosh^{-2} \beta + x (\tanh \beta + \coth \beta \tanh^N \beta)}{1 + \tanh^N \beta} . \quad (\text{II-III-9})$$

En la tabla III-a se muestran los resultados para la energía del estado fundamental como una función del número de iteraciones para cadenas de diferentes longitudes en $x=1$, punto en el que el sistema infinito presenta una transición de fase. Como el método es fácilmente programable todas las iteraciones han sido obtenidas mediante computadora y la iteración 0 representa la

predicción para la función de prueba inicial. Cuando x toma valores cercanos a 1 la diferencia entre las energías variacional y exacta alcanza un máximo. Sin embargo los resultados son excelentes en muy pocas iteraciones (este detalle es importante para aplicaciones futuras de la técnica a modelos más realistas). Cuando N aumenta, la precisión decrece, como era de esperar debido al hecho de que $\alpha=0$ en el límite $N=\infty$. Sin embargo los resultados muestran que la influencia de este efecto es muy pequeña para cadenas cortas y podemos llevar adelante nuestra idea considerando la solución exacta para cadenas finitas y extrapolando, luego, al límite infinito. Los valores en $N=\infty$ se obtienen usando la aproximación de Vanden Broeck-Schwartz con $\alpha_1 = -[1 - (-1)^{1/2}]$ (ver Ref.(20) para la definición de α_1). Usamos esta aproximación porque los autovalores del modelo de Ising convergen logarítmicamente al resultado de la cadena infinita en la vecindad del punto crítico. Este método ha sido usado con éxito (9) en el modelo $Z(N)$ de spin. Además la secuencia de la columna rotulada "exacta" en la tabla III-a converge al valor exacto en el límite infinito con más de cinco cifras significativas lo que indica que podemos emplear el método con confianza. Los valores extrapolados para diferentes números de iteraciones se dan también en la tabla III-a. Es de notar la convergencia al valor exacto -1.27324 (para $x=1$ la convergencia es más rápida). Un detalle no satisfactorio es que el valor exacto es aproximado por debajo mostrando que el método de extrapolación no respeta estrictamente el hecho de que la energía variacional debe ser una cota superior para la energía exacta. Quizás sea necesario considerar cadenas mayores u otras técnicas de extrapolación. Sin embargo los resultados son muy alentadores.

Usando nuestro método también puede estudiarse el primer nivel excitado.

Como función de prueba inicial elegimos

$$\psi_0^e = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\lambda=1}^N \sigma_{\lambda}^1 \psi_{\lambda}^0 \quad (\text{II-III-10})$$

donde ψ_{λ}^0 representa el estado fundamental mejorado variacionalmente obtenido usando nuestra técnica luego de n iteraciones. ψ_0^e es un autovector exacto de H cuando $x=0$ y es ortogonal a ψ_{λ}^0 cuando se trabaja con N finito y se usa como estado de prueba inicial la ec.(II-III-10). Si consideramos cualquier estado de prueba u otro H , en general, debemos substraer la proyección del primer excitado sobre el estado fundamental.

La energía exacta es

$$E_{\text{exacta}} = 2(1-x) - \sum_{\substack{k=0 \\ (k \text{ par})}}^{2N-1} \left[(1-x)^2 + 4x \sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right) \right]^{1/2} \quad (\text{II-III-11})$$

Para $x > 1$ el primer término del miembro de la derecha de la ec.(II-III-11) debe ser eliminado. En la tabla III-b damos los resultados para diferentes números de sitios e iteraciones usando ec.(II-III-10) como función de prueba inicial. En este caso la j -ésima iteración también significa que el n de la ec.(II-III-10) es igual a j . Como en el caso del nivel fundamental vemos que los resultados son muy buenos lo que demuestra que nuestro método puede aplicarse también al tratamiento de niveles excitados.

En la tabla IV mostramos los errores relativos de las energías variacionales para los estados fundamental y primer excitado en $x=0.5$ y 2.0 como ejemplos (un valor representativo del régimen de acoplamiento fuerte y débil respectivamente). Los resultados indican que la técnica da predicciones acertadas en todo el rango del parámetro x . La convergencia es más rápida en la zona de acoplamiento fuerte debido a que el estado ec.(II-III-8) reproduce el primero y segundo término de la serie perturbativa para $x \ll 1$, mientras que en la zona de acoplamiento débil sólo reproduce el primero (se trata de un estado tipo acoplamiento fuerte).

En la Fig.3 estudiamos la sensibilidad de nuestra aproximación con la selección del parámetro variacional . En la primera iteración es claro que debemos estimar con bastante precisión el valor β_m que minimiza la energía pero en los pasos siguientes se obtendrán buenos resultados sin necesidad de variar este parámetro. Este hecho es muy importante porque el esfuerzo computacional se reduce apreciablemente. Por ejemplo, en la Fig.3 podemos ver que para $I=5$ ó 10 hay un amplio espectro de valores de β para los cuales la energía prácticamente coincide con la exacta.

Resumiendo, los resultados son satisfactorios lo que muestra que el método también es adecuado para tratar teorías en la red.

Como se señaló en la Sec.II-I, en la Ref.(9) se desarrolló un método alternativo para mejorar un Ansatz variacional . Este se basa en el hecho de que el estado

$$\psi_t = \frac{\exp(-tH/2) \psi_0}{(\psi_0, \exp(-tH)\psi_0)} , \quad (\text{II-III-12})$$

da una mejor aproximación que ψ_0 de la energía del nivel fundamental para cualquier valor de t . En el límite $t \rightarrow \infty$ la energía

$$\mathcal{E}(t) = (\psi_t, H\psi_t) , \quad (\text{II-III-13})$$

converge al valor exacto. Para evaluar la ec.(II-III-13) los autores de la Ref.(10) desarrollan $\mathcal{E}(t)$ como una serie de potencias en t . El resultado es

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t)^m}{m!} \langle H^{m+1} \rangle_c , \quad (\text{II-III-14})$$

donde $\langle H^{m+1} \rangle_c$ se define como

$$\langle H^{m+1} \rangle_c = \langle H^{m+1} \rangle_0 - \sum_{p=0}^{m-1} \binom{m}{p} \langle H^{p+1} \rangle_c \langle H^{m-p} \rangle_0 . \quad (\text{II-III-15})$$

Se puede probar fácilmente que para un modelo en la red $\langle H^{m+1} \rangle_c$ es proporcional al número de sitios N para cualquier valor de m así que en este caso no hay ningún problema al tomar el límite para $N \rightarrow \infty$. Sin embargo el método involucra el uso de aproximantes de Padé para obtener una estimación del límite $t \rightarrow \infty$, lo que introduce complicaciones adicionales. Nótese la diferencia con nuestra aproximación en la que obtenemos resultados muy buenos para redes finitas y luego tomamos el límite infinito. Es claro que ambas aproximaciones son, en principio esencialmente diferentes.

Comparemos los resultados numéricos para el modelo de Ising. De la Ref. (10) sabemos que la diferencia entre el resultado exacto para la energía del nivel fundamental y el aproximado (ec. (II-III-14)) es del orden de 4×10^{-3} alrededor de $x \sim 0.9$ (y alrededor de 10^{-4} en el resto del dominio del parámetro x). Estos resultados fueron obtenidos con m hasta 6 por lo que se requirió calcular hasta $\langle H^7 \rangle_0$. En nuestro método tres iteraciones demandan el mismo esfuerzo. De la tabla III-a podemos ver que en límite $N \rightarrow \infty$ y en $x=1$ la diferencia entre la energía exacta y la variacional con tres iteraciones es 6×10^{-3} por lo que la precisión numérica de ambas técnicas es similar. Sería interesante elaborar una combinación de ambos métodos manteniendo las ventajas de cada uno de ellos.

II-IV Conclusiones

En este trabajo hemos propuesto un método sistemático para mejorar una función de prueba dada en un marco variacional. Los resultados muestran que la técnica funciona correctamente y converge con rapidez a la energía del estado fundamental de los modelos analizados. En el modelo de Ising estudiamos también el primer estado excitado con buenos resultados. Esperamos en el

futuro poder aplicar el método a una teoría de medida en una red finita. Por supuesto nuestro mayor interés radica en analizar teorías no abelianas en $3+1$ dimensiones. Otra aplicación interesante es la técnica de grupo de renormalización en espacio real (22) en que es necesario evaluar los estados más bajos de un bloque en una red finita.

Referencias

- 1) E.Dagotto y A.Moreo, Phys.Rev.D31,865(1985).
- 2) J.Kogut, Rev.Mod.Phys.55,775(1983).
- 3) J.M.Drouffe y J.B.Zuber, Phys.Rep.102,1(1983); E.Dagotto, Phys.Rev.D30,1276(1984).
- 4) S.Drell, H.Quinn, B.Svetitsky y M.Weinstein, Phys.Rev.D17, 619(1979); D.Boyakovsky, R.Deza y L.Maspero, ibid.22,3034(1980); D.Horn y M.Weinstein, ibid.25,3331(1982); N.Hari Dass, A.Patkós y F.Deák, Nucl.Phys.B205[FS5],414(1982).
- 5) E.Dagotto y A.Moreo, Phys.Rev.D29,300(1984).
- 6) J.Kogut, R.Pearson y J.Shigemitsu, Phys.Rev.Lett.43,481(1979).
- 7) G.Batrouti, Nucl.Phys.B208,12(1982); E.Dagotto y A.Moreo, Phys.Rev.D30,1271(1984).
- 8) K.Bittar, S.Gottlieb y C.Zachos, Phys.Rev.D,26,2853(1982).
- 9) C.Hamer y M.Barber, J.Phys.A14,241(1981); 14,2009(1981).
- 10) D.Horn y M.Weinstein, Phys.Rev.D30,1256(1984).
- 11) C.Lanczos, J.Res.Nat.Bur.Stand.45,255(1950); H.Roomany y H.Wyld, Phys.Rev.D21,3341(1980).
- 12) J.Alberty, J.Greensite y A.Patkós, Phys.Lett.138B,405(1984).
- 13) A.Lennard, J.Math.Phys.2,682(1961).
- 14) H.Neuberger, Phys.Rev.D17,498(1978).

- 15) D. Robson y D. Webber, Z.Phys.C7,53(1980); S.Wadia, Phys.Lett 93B,403(1980).
- 16) E.Floyd, J.Math.Phys.17,880(1976); N.Fröman, J.Phys.A12,2355 (1979).
- 17) E.Dagotto y A.Moreo, Phys.Rev.D29,2350(1984).
- 18) Tables relating to Mathieu functions, 2da ed., National Bureau of Standards (U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.,1967).
- 19) M.Stone y J.Reave, Phys.Rev.D18,,4746(1978).
- 20) J.M.Vanden Broeck y L.Schwartz, SIAM J.Math.Anal.10,658 (1979); M.Barber y C.Hamer, J.Aust.Math.Soc.B23,229(1982).
- 21) E.Dagotto, L.Maspero, A.Moreo, A.Della Selva y R.Fiora, ~~a aparecer en~~ Phys. Rev. D.
- 22) S.Drell, M.Weinstein y S.Yankielowicz, Phys Rev.D15,1759 (1977).

Títulos de tablas

I) La energía ϵ_i de la i -ésima iteración comparada con los resultados exactos para el estado fundamental de la ecuación de Mathieu para algunos valores representativos de x que van de la región de acoplamiento fuerte a la zona de acoplamiento débil (se omite el signo menos para todas las energías).

II) Evolución del parámetro variacional β_m que minimiza la energía en cada iteración. Los valores de β_m correspondientes a la tercera iteración son aproximadamente iguales a los de la segunda.

III) a. La energía por unidad de sitio obtenida mediante nuestro método iterativo para el estado fundamental de una cadena de N sitios en $x=1$, comparada con los valores exactos (ec. (II-III-7)) (se omite el signo menos para todas las energías). Las predicciones para $N=\infty$ fueron obtenidas mediante una aproximación VBS usando los resultados variacionales para $N=2,3,\dots,10$ (para $N=2$ la energía variacional en la primera iteración coincide con la exacta por lo que no figura en la tabla). El resultado exacto para la cadena de Ising infinita es -1.2734 para las energías del nivel fundamental y primer excitado en $x=1$.

b. Lo mismo que en (a) pero para el primer estado excitado. Los resultados de la última columna fueron evaluados con la ec. (II-III-11).

IV) El error relativo definido en la ec. (II-III-4) de la energía por unidad de sitio para el estado fundamental ($\Delta\epsilon_f$) y para el primer excitado ($\Delta\epsilon_e$) de una cadena de Ising en $x=0.5$ y 2.0 . El número de sitios es S .

Titulos de las figuras

- 1) El error relativo $\Delta_i = (\epsilon_{\text{exacta}} - \epsilon_i) / \epsilon_{\text{exacta}}$ para el modelo de Mathieu. x está en el rango de máximo error.
- 2) Gráfico de la energía ϵ_i de la tercera iteración para la ecuación de Mathieu (línea continua) en comparación con el desarrollo de acoplamiento fuerte (SC) dado en la ec.(II-III-5-a) (línea cortada) y el de acoplamiento débil (WC) dado en la ec.(II-III-5-b) (línea de puntos y rayas). El resultado exacto del modelo es indistinguible de ϵ_i .
- 3) Gráfico de la energía ϵ_i de la i -ésima iteración para la cadena de Ising (con $N=8$ y $x=1$ como ejemplos) como una función del parámetro variacional . Las iteraciones están denotadas por I y ϵ_0^{ex} representa la energía exacta del nivel fundamental que es igual a -1.2815 .

Tabla 4

x	ϵ_0	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_{exact}
0.2	0.019616	0.019660	0.019661	0.019662	0.019662
0.6	0.156542	0.158303	0.158355	0.158357	0.158358
1.0	0.372644	0.378172	0.378456	0.378478	0.378489
2.0	1.056478	1.069194	1.069984	1.070079	1.070130
5.0	3.469634	3.483862	3.484201	3.484233	3.484245
10.0	7.819052	7.828273	7.828344	7.828347	7.828347

Tabla 2

x	I T E R A T I O N S		
	0	1	2
0.6	1.05	1.08	1.09
1.0	1.52	1.59	1.61
2.0	2.29	2.36	2.40
5.0	3.53	3.51	3.54

Tabla 3

N	ϵ_0	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_{exact}
2	1.414212	1.414214	1.414214	1.414214	1.414214
4	1.295736	1.306562	1.306563	1.306563	1.306563
6	1.262972	1.286631	1.287754	1.287768	1.287901
8	1.253184	1.276674	1.280274	1.281069	1.281458
10	1.250757	1.270855	1.275597	1.277208	1.278490

Tabla 4

N	X = 0.5		X = 2.0	
	ϵ_3	ϵ_{exact}	ϵ_3	ϵ_{exact}
4	1.067889	1.067889	2.135779	2.135779
6	1.064113	1.064116	2.128215	2.128231
8	1.063631	1.063635	2.127043	2.127270
10	1.063554	1.063560	2.126515	2.127121

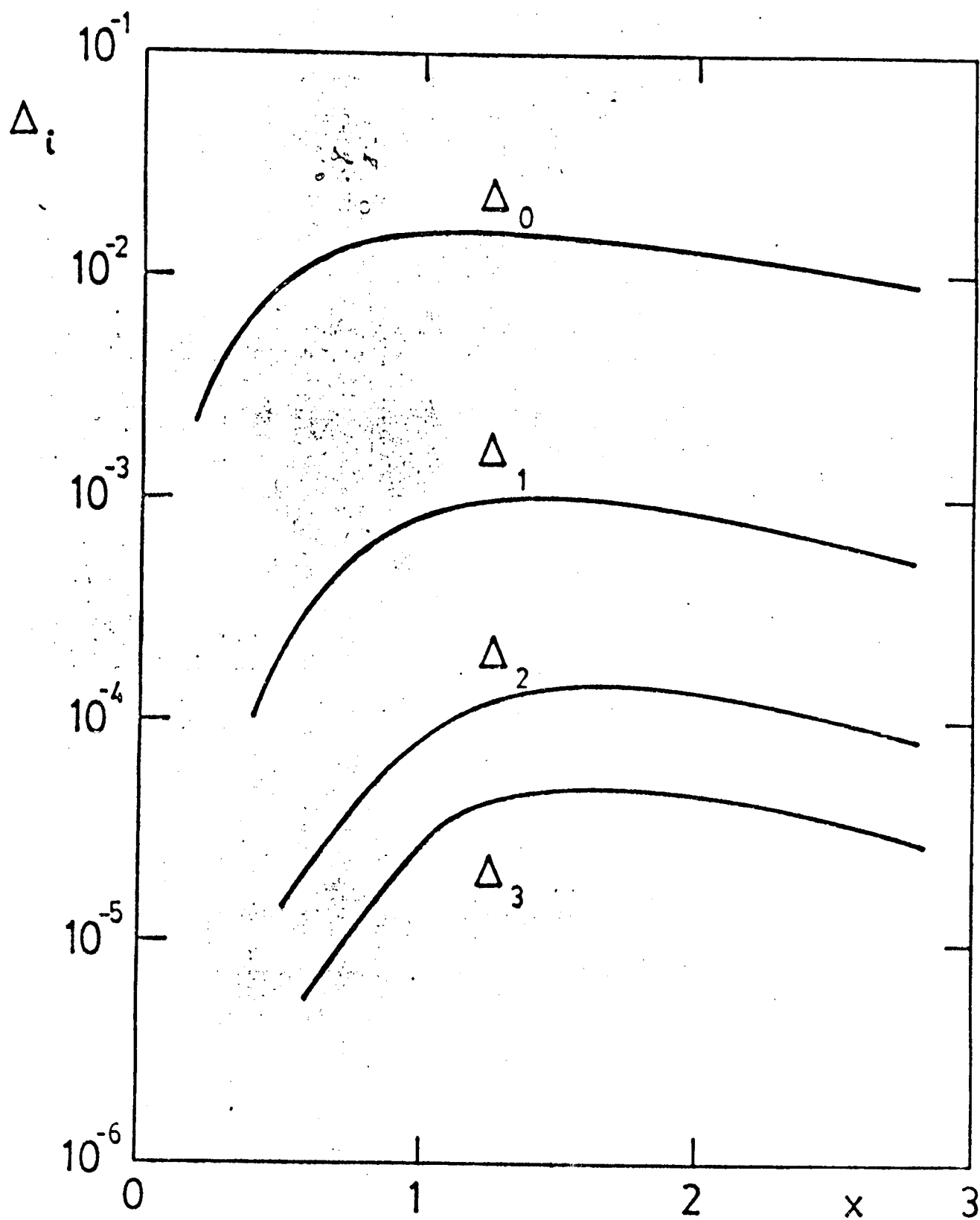


Fig. 1

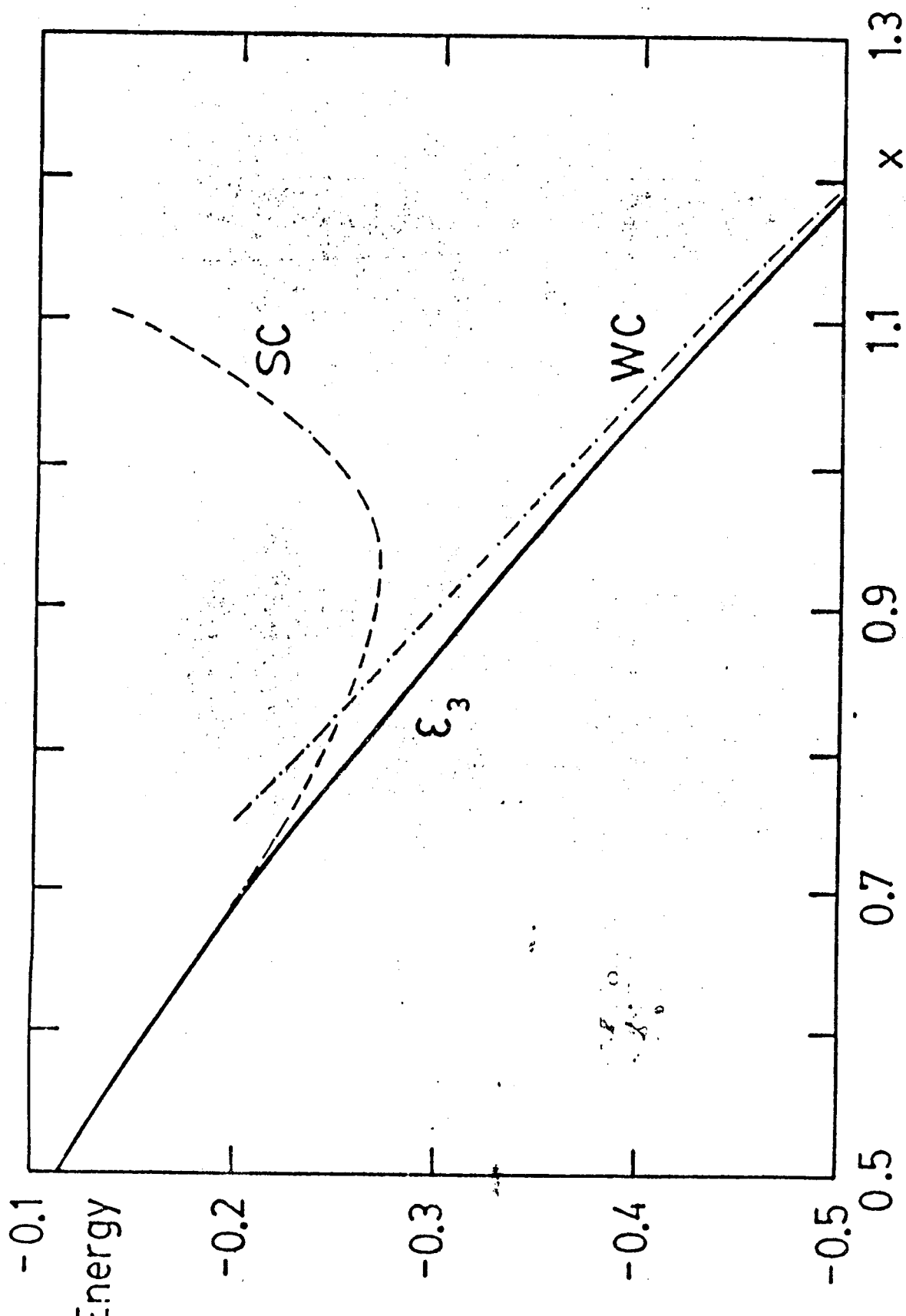


Fig. 2

CAPITULO III

ANALISIS DE MODELOS DE SPIN EN LA RED MEDIANTE EL METODO DE CAMPO
MEDIO EN VARIABLES DE UNION (1)

Resumen

Se desarrolla un método de campo medio en variables de unión a fin de tratar modelos de spin en la red. Aplicamos esta nueva técnica a modelos abelianos ($Z(N)$, $N=2,3$) y no abelianos ($SU(N) \times SU(N)$, $N=2,3$) de spin, obteniendo resultados alentadores para la temperatura crítica. Usando este método con una aproximación de Bethe-Peierls, las predicciones para la temperatura crítica y el orden de la transición mejoran notablemente.

III-I Introducción

Las técnicas de campo medio (2) para teorías en la red son un complemento excelente de las simulaciones numéricas. Por ejemplo, se ha demostrado (3) que la introducción de correcciones radiativas en la aproximación de campo medio usual proporciona diagramas de fases muy exactos para las teorías de medida en la red. Por lo tanto es interesante analizar estas ideas en otras formulaciones. En las Ref.(4) y (5) desarrollamos un nuevo método tipo campo medio para teorías de medida en la red. En primer lugar se lleva a cabo un cambio de variables de unión a plaqueta y luego se realiza la aproximación de considerar exactamente una sola variable y aproximar las restantes por su valor medio obtenido mediante una ecuación de autoconsistencia. Verificamos que esta aproximación da excelentes resultados en tres y cuatro dimensiones especialmente para la QCD (sin fermiones). Una ventaja de la técnica es que su aplicación no demanda grandes esfuerzos numéricos ni analíticos.

En este capítulo proponemos una técnica similar para modelos de spin. La aplicamos al modelo quiral $SU(N) \times SU(N)$ (6) y al modelo $Z(N)$ de spin en dos dimensiones ($N=2,3$). Los resultados en ambos casos son muy alentadores.

III-II Descripción del método

La acción para modelos de spin en la red puede escribirse, en general, como,

$$S = \beta \sum_{x,\mu} s_x [U(x)U^\dagger(x+\hat{\mu})] = \frac{\beta}{\dim(R)} \sum_{x,\mu} \text{Re tr} [U(x)U^\dagger(x+\hat{\mu})], \quad (\text{III-II-1})$$

donde x denota sitios y μ direcciones de una red cúbica d -dimensional con condiciones periódicas de contorno. $U(x)$ toma

valores en un dado grupo G que puede ser abeliano o no abeliano. R caracteriza a una representación del grupo y $\dim(R)$ a su dimensión. En Ref.(7) se demostró cómo pasar exactamente de variables de sitio $U(x)$ a variables de unión $U_\mu(x) = U(x)U^\dagger(x+\hat{\mu})$. El valor medio del caracter de una variable de unión en una cierta representación λ [$\chi_\lambda(U)$] está dada en esta formulación por

$$\langle L_\lambda \rangle = \frac{1}{Z} \prod_{x,\mu} \int dU_\mu(x) \exp(S) L_\lambda(U) \prod_p \delta(U_p - 1) \quad , \quad (\text{III-II-2})$$

donde

$$L_\lambda(U) = \frac{\chi_\lambda(U)}{\dim(\lambda)} \quad , \quad (\text{III-II-3})$$

y Z es la función de partición. Las funciones δ son vínculos que aparecen como el jacobiano de la transformación. U_p es el producto de las cuatro variables de unión alrededor de una plaqueta de la red,

$$U_p = U_\mu(x) U_\nu(x+\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x+\hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x) \quad . \quad (\text{III-II-4})$$

Notemos que en una dimensión no hay plaquetas y la expresión para $\langle L_\lambda \rangle$ se reduce al cociente de dos integrales.

En la ec.(III-II-2) no tenemos en cuenta un vínculo global que proviene de las condiciones periódicas de contorno, debido a que la técnica que desarrollaremos es de carácter local. Por lo tanto si consideráramos una red infinita (en la que no aparecen las condiciones globales de vínculo) obtendríamos el mismo resultado. El lector interesado en este punto puede mirar la Ref.(7).

En teorías de medida en la red la expresión análoga a la ec.(III-II-2) (ver Sec.I-VII) involucra un cambio de variables de unión a plaqueta y el vínculo viene dado por la identidad de Bianchi en la red (Refs. (4) y (5)).

Las funciones δ pueden desarrollarse de la siguiente manera,

$$\delta(U_p-1) = \sum_r \dim(r) \chi_r(U_p) \quad , \quad (\text{III-II-5})$$

donde la suma es sobre todas las representaciones no equivalentes del grupo G. La aproximación de campo medio en variables de unión (ML) es, en esencia, similar al método de campo medio usual en variables de sitio (MS) (ver Sec.I-VII). Reemplazando la ec.(III-II-5) en la ec.(III-II-2) mantenemos "viva" una sola variable (digamos U) e igualamos las restantes variables en la representación r a su valor medio $\langle L_r \rangle$. Notemos que consideramos una cantidad diferente $\langle L_r \rangle$ para cada representación. Para las plaquetas en contacto con la variable viva U aproximamos

$$\chi_r(U_p) \approx \langle L_r \rangle^3 \chi_r(U). \quad (\text{III-II-6})$$

En dos dimensiones cada unión es compartida por dos plaquetas de manera que la ecuación de ML para $\langle L_\lambda \rangle$ es

$$\begin{aligned} \langle L_\lambda \rangle = & \frac{1}{Z} \sum_{r_1, r_2} (\dim(r_1)) (\dim(r_2)) \langle L_{r_1} \rangle^3 \langle L_{r_2} \rangle^3 \times \\ & \times \int dU \exp\{\beta s_r(U)\} L_\lambda(U) \chi_{r_1}(U) \chi_{r_2}(U) . \quad (\text{III-II-7}) \end{aligned}$$

λ , R, r_1 y r_2 denotan representaciones del grupo G. En principio tenemos una ecuación del tipo (III-II-7) para cada representación λ del grupo (un número infinito para grupos continuos). En la práctica, es suficiente con mantener en el término de la derecha de la ec.(III-II-7) el número suficiente de términos para alcanzar la convergencia. El sistema de ecuaciones resultante se resuelve numéricamente. Debemos buscar una solución que satisfaga

$$0 \leq \langle L \rangle \leq 1 \quad , \quad (\text{III-II-8})$$

para todos los λ considerados. Notemos que de la ec.(III-II-1) $\langle L_\lambda \rangle$ es la energía media por unión del modelo. A fin de obtener el diagrama de fases debemos analizar esta energía de unión y sus

derivadas numéricas (como en simulaciones de Monte Carlo).

Notemos que en la región en que $\beta \ll 1$ si buscamos una solución tal que $\langle L_\lambda \rangle \ll 1$, el resultado a orden 0 es,

$$\langle L_\lambda \rangle = \frac{\int dU L_\lambda(U) \exp\{\beta S_R(U)\}}{\int dU \exp\{\beta S_R(U)\}}, \quad (\text{III-II-9})$$

que es el primer término del desarrollo en caracteres de $\langle L_\lambda \rangle$ en torno de $\beta = 0$. Entonces es claro que nuestra aproximación tiene características de acoplamiento fuerte por lo que esperamos que se comporte correctamente en dicho límite. Como destacamos más arriba, la ec. (III-II-9) es el resultado exacto en una dimensión por lo que esperamos que a baja dimensión los resultados sean muy buenos. Esto es lo opuesto de lo que ocurre en la aproximación MS que es exacta para $d = \infty$.

III-III Resultados

Ahora aplicaremos nuestra técnica ML a algunos ejemplos abelianos y no abelianos en dos dimensiones. Consideremos primero el modelo $SU(N) \times SU(N)$ quiral ($N=2,3$) definido por la acción

$$S = \frac{\beta}{N} \sum_{x,y} \text{Re tr}_f [U(x) U^\dagger(x+\hat{\mu})] , \quad (\text{III-III-1})$$

donde $U(x)$ pertenece a la representación fundamental de $SU(N)$. Resolvemos el sistema de ecuaciones (III-II-7) numéricamente mediante un método iterativo. Cuando $N=2$ verificamos que, a fin de obtener una buena convergencia, es suficiente con mantener en ec. (III-II-7) las representaciones 0, 1/2, 1 y 3/2 y potencias de $\langle L_\lambda \rangle$ no mayores que 6 lo que significa resolver un sistema de cuatro ecuaciones. El resultado para la energía de unión $\frac{1}{N} \langle \text{Re tr} [U(x) U^\dagger(x+\hat{\mu})] \rangle$ se muestra en la Fig.1 comparado con los resultados de simulaciones de Monte Carlo. No se observan transiciones de fase. Es destacable el acuerdo de nuestros resultados con los de Monte Carlo de Ref. (8) en el régimen de

acoplamiento fuerte. Nuestro método también proporciona buenos resultados en la región de acoplamiento débil. Destaquemos que en la Ref.(9) se muestra que un desarrollo de acoplamiento fuerte predice una transición de fase de segundo orden totalmente inesperada en este modelo para $\beta \sim 2.0$. Nuestro método no señala ninguna transición aunque debemos reconocer que es muy difícil determinar una transición continua estudiando la energía por unidad de sitio o la energía libre. Algo similar ocurre en las simulaciones de Monte Carlo y en la aproximación MS.

Cuando $N=3$ consideramos en la ec.(III-II-7) las representaciones $3, \bar{3}, 6, \bar{6}$ y 8. El resultado para la energía de unión (Fig.2) indica un comportamiento cualitativamente similar al de $N=2$ como era de esperar por los resultados de las simulaciones de Monte Carlo.

Por lo tanto está claro que el método de ML funciona correctamente para estos dos ejemplos.

Puede pensarse que el método de ML favorece la ausencia de transiciones de fase. Por lo tanto sería conveniente aplicarlo a otro modelo no abeliano que sí tenga una transición. Analizaremos, como ejemplo, el modelo $SU(N) \times SU(N)$ quiral en la representación adjunta. La acción es

$$S = \frac{\beta}{N^2 - 1} \sum_{x, \mu} \text{Re tr}_A [U(x) U^\dagger(x + \hat{\mu})] . \quad (\text{III-III-2})$$

Consideraremos primero el caso $N=2$. De la Ref.(9) sabemos que ocurre una transición de segundo orden en $\beta \sim 2.30$. Resolviendo el sistema de ecuaciones de ML, como en la representación fundamental, obtenemos un pequeño salto (~ 0.1) en la energía de unión en $\beta \sim 1.9$ lo cual indica una transición de primer orden. Creemos que un análisis más detallado (manteniendo más uniones vivas, por ejemplo) podría cambiar el orden de la transición.

Para $N=3$ la técnica de ML muestra una clara transición de

primer orden en $\beta \sim 5.4$. La simulación de Monte Carlo de la Ref.(10) da también una transición discontinua en $\beta \sim 8.9$.

Aunque las temperaturas críticas predichas por la aproximación de ML no son muy exactas en estos ejemplos no abelianos, la conclusión es que el método es capaz de distinguir una transición de primer orden en el modelo estudiado. Luego discutiremos formas de mejorar las predicciones para las temperaturas críticas.

Ahora analicemos ejemplos abelianos. En particular estudiamos el modelo $Z(N)$ de spin en dos dimensiones (11). La acción está dada por,

$$S = \beta \sum_{x, \mu} \text{Re}[U(x) U^*(x + \hat{\mu})] , \quad (\text{III-III-3})$$

donde la variable de sitio $U(x)$ toma valores en $Z(N)$. En este caso los vínculos presentes en la ec.(III-II-2) son δ de Kronecker. Cuando N es pequeño podemos considerar todas las representaciones en la ec.(III-II-7). Por ejemplo cuando $N=2$ (modelo de Ising) hay sólo una representación no trivial y, por supuesto, sólo una ecuación. Para este modelo el resultado exacto para la energía de unión es (Ref.12, pág.190),

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \langle \text{Re}[U(x) U^*(x + \hat{\mu})] \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \frac{[\text{sh}(4\beta) - \text{ch}(2\beta)(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)]}{[\text{ch}^2(2\beta) - \text{sh}(2\beta)(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)]} . \quad (\text{III-III-4}) \end{aligned}$$

Puede mostrarse fácilmente que la energía media por unidad de unión en la aproximación de ML está dada por

$$\langle S \rangle = \frac{\tanh \beta + 2 \langle s \rangle^3 + \langle s \rangle^5 \tanh \beta}{1 + 2 \langle s \rangle^3 \tanh \beta + \langle s \rangle^5} . \quad (\text{III-III-5})$$

La ecuación (III-III-5) tiene una raíz en el intervalo $[0,1]$ para $\beta < 0.30$ y en esa región se aproxima muy bien al resultado exacto. Sin embargo para $\beta > 0.30$ sólo existe la solución $\langle S \rangle = 1$

que siempre está presente. En las Ref.(4) y (5) se conjetura que este comportamiento denota una transición de segundo orden.

Podemos mejorar estos resultados mediante una aproximación de Bethe-Peierls (13,14), o sea, luego del cambio de variables consideramos exactamente más de una variable de unión en la ec.(III-II-2). Por ejemplo, si consideramos exactamente las nueve uniones mostradas en la Fig.3, la ecuación de ML para $\langle S \rangle$ es,

$$\langle S \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{S_i\}} \exp \left(\beta \sum_{i=1}^9 S_i \right) (1+S_1 S_2 S_3 S_4) (1+S_1 S_5 S_6 S_7) (1+S_4 S_7 \langle S \rangle^2) (1+S_2 S_5 \langle S \rangle^2) \\ \times (1+S_3 S_6 \langle S \rangle^2) (1+S_4 S_7 \langle S \rangle^2) (1+S_5 \langle S \rangle^3) (1+S_6 \langle S \rangle^3) \quad (\text{III-III-6})$$

donde la notación se explica en la Fig.3. Resolviendo la ec.(III-III-6) obtenemos una destacable mejora en el resultado de la ec.(III-III-5) (ver Fig.4). Para todos los valores de β la ec.(III-III-6) tiene una raíz en el intervalo $[0,1]$. Por diferenciación numérica evaluamos el calor específico dado por la aproximación ML. En $\beta=0.42$ se observa un pico agudo, esto es muy cerca del valor exacto $\beta_c=0.4407$. La apreciable mejora producida por la aproximación de Bethe-Peierls en el contexto del método ML contrasta con la pobreza de la misma en una aproximación tipo MS. En el caso de MS se demostró en la Ref.(14) que manteniendo vivos hasta doce sitios la temperatura crítica es $\beta=0.30$ lo que es un resultado pobre.

Repetimos el cálculo para el modelo $Z(3)$ de spín. Si consideramos exactamente sólo una variable de unión, la raíz de las ecuaciones de ML que pertenece al intervalo $[0,1]$ desaparece en $\beta=0.48$ (la temperatura crítica exacta (11) es $\beta_c=0.6700$). Pero si mantenemos vivas las nueve uniones de la Fig.3 haciendo una aproximación tipo Bethe-Peierls obtendremos una raíz de las ecuaciones en el intervalo $[0,1]$ para todos los valores de β . Para $\beta=0.62$, muy cerca del valor exacto, se observa un pico muy agudo en el calor específico.

III-IV Conclusiones

De los resultados mencionados, concluimos que el método de ML proporciona resultados aceptables para los modelos de spines. Por ejemplo, nuestra técnica muestra la ausencia de transiciones de fases en los modelos $SU(2)$ y $SU(3)$ quirales (en dos dimensiones). La comparación con las simulaciones de Monte Carlo indica que en la región de acoplamiento fuerte el método es muy bueno y en la zona de acoplamiento débil proporciona resultados aceptables. La aplicación del método a los modelos $Z(2)$ y $Z(3)$ de spin complementado con una aproximación de Bethe-Peierls da excelentes predicciones de las temperaturas críticas así como del orden de las transiciones (se detectan acertadamente las de segundo orden). Esto hace pensar que usando una aproximación de Bethe-Peierls con el método de ML en los modelos quirales los resultados podrían mejorar sensiblemente. Lo mismo debería ocurrir con teorías de medida tratadas con el método de MF.

El próximo paso a seguir en el desarrollo de este método es la introducción de correcciones radiativas como en el caso de MS. Estas correcciones nos dicen que el método de MS es un desarrollo en $1/d$, y serviría para dar una interpretación apropiada al método de ML (exacto para $d=1$).

Referencias

- 1) G.Batrouti, E.Dagotto y A.Moreo, "Mean link analysis of lattice spin models", a aparecer en Phys.Lett.B.
- 2) J.M.Drouffe y J.B.Zuber, Phys.Rep.102,1(1983).
- 3) E.Brézin y J.M.Drouffe, Nucl.Phys.B200,[FS4],93(1982);
V.Alessandrini, V.Hakim y A.Krzywicki, ibid.B215,[FS7],109 (1983);
E.Dagotto, Phys.Rev.D30,1276(1984).
- 4) G.Batrouti, Nucl.Phys.B208,12(1982); ibid.B208,467(1982).
- 5) E.Dagotto y A.Moreo, Phys.Rev.D30,1271(1984); ibid.D31,944 (1985).
- 6) F.Green y S.Samuel, Nucl.Phys.B190,[FS3],113(1981); J. Shigemitsu y J.Kogut, ibid.B190,[FS3],365(1981); J.Kogut, M. Snow y M.Stone, ibid.B200,[FS4],211(1982).
- 7) G.Batrouti y M.Halpern, Phys.Rev.D30,1775(1984).
- 8) A.Guha y S.Lee, SUNY report ITP-SB-83-34. No publicado.
- 9) M.Caselle, F.Gliozzi y R.Megna, Phys.Lett.109B,303(1982).
- 10) J.Kogut, M.Snow y M.Stone, Nucl.Phys.B215,[FS7],45(1983).
- 11) R.Savit, Rev.Mod.Phys.52,453(1980); F.Alcaraz, Ph.D.Thesis, Sao Carlos report (1980). No publicado.
- 12) C.Domb, Adv.in Phys.9,149(1960).

13) H.Bethe, Proc.R.Soc.London 150,552(1935); R.Peierls, ibid. 154,207(1936).

14) E.Dagotto y A.Moreo, Phys.Rev.D29,300(1984).

Título de las figuras

1) Energía de unión $E = \frac{1}{2} \langle \text{Re tr}_F [U(x)U^\dagger(x+\hat{\mu})] \rangle$ para el modelo quiral $SU(2) \times SU(2)$ definido por ec.(III-III-1) en dos dimensiones. La línea continua es la aproximación de ML y los puntos son los resultados de Monte Carlo tomados de la Ref.(8).

2) Energía de unión $E = \frac{1}{3} \langle \text{Re tr}_F [U(x)U^\dagger(x+\hat{\mu})] \rangle$ para el modelo quiral $SU(3) \times SU(3)$ definido por la ec.(III-III-1) en dos dimensiones. La nomenclatura es como en la Fig.1

3) Variables de unión tratadas exactamente en la aproximación de Bethe-Peierls (línea continua). Las variables que corresponden a las uniones punteadas fueron igualadas a sus valores medios.

4) El resultado de ML para la energía $E = \langle \text{Re}[U(x)U^\dagger(x+\hat{\mu})] \rangle$ del modelo de Ising en dos dimensiones en la aproximación de Bethe-Peierls ec.(III-III-6) (línea continua). La línea punteada es el resultado exacto ec.(III-III-4).

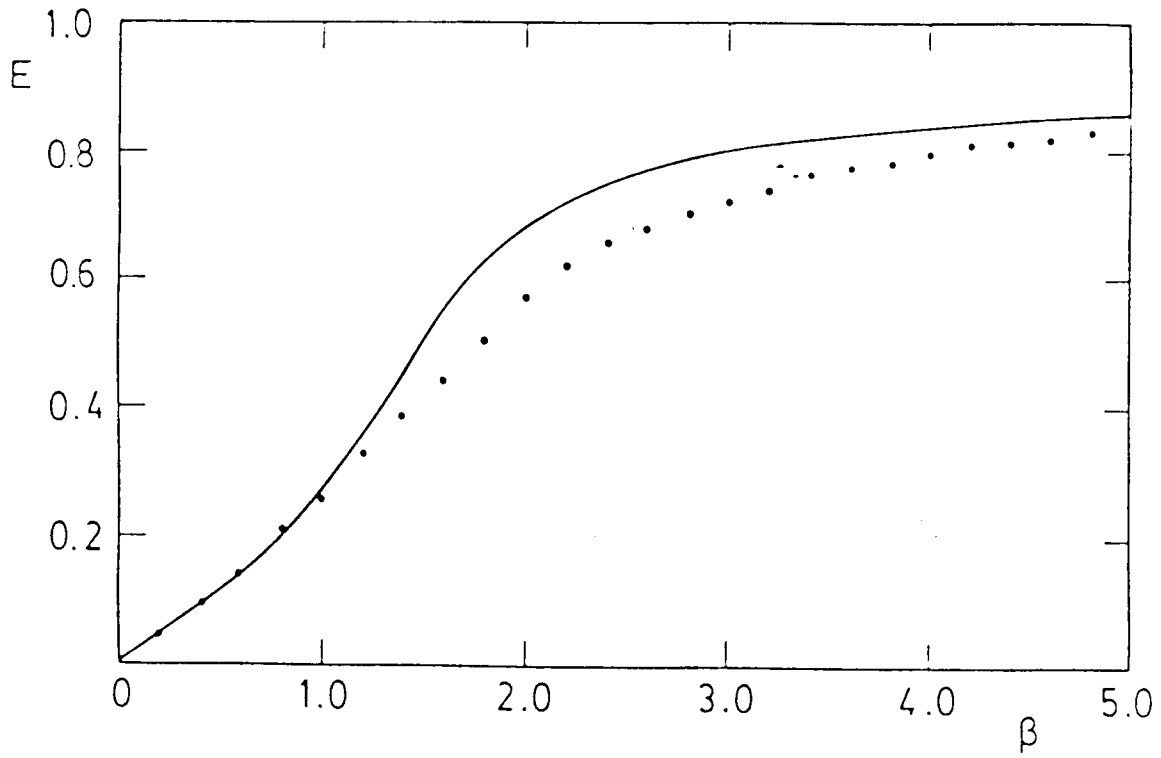


Fig. 1

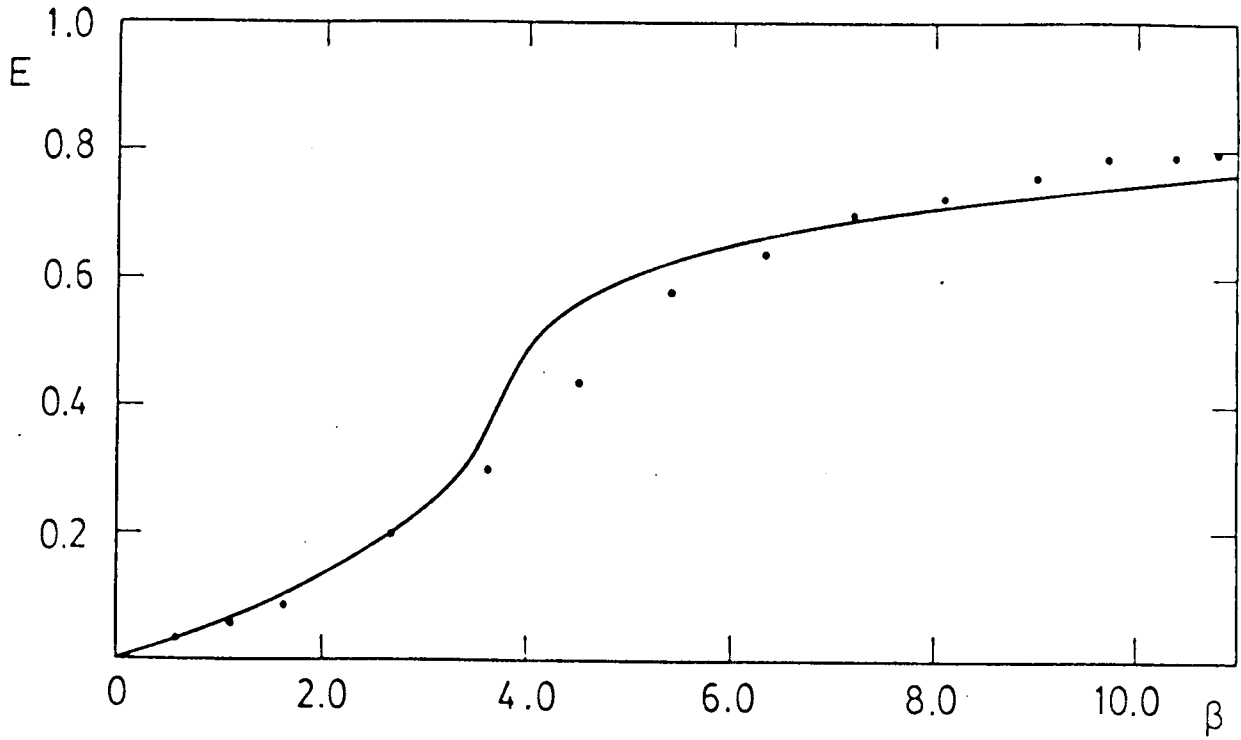


Fig. 2

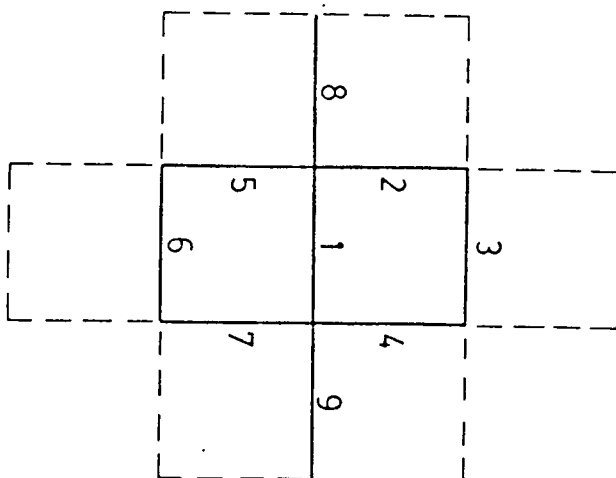


Fig. 3

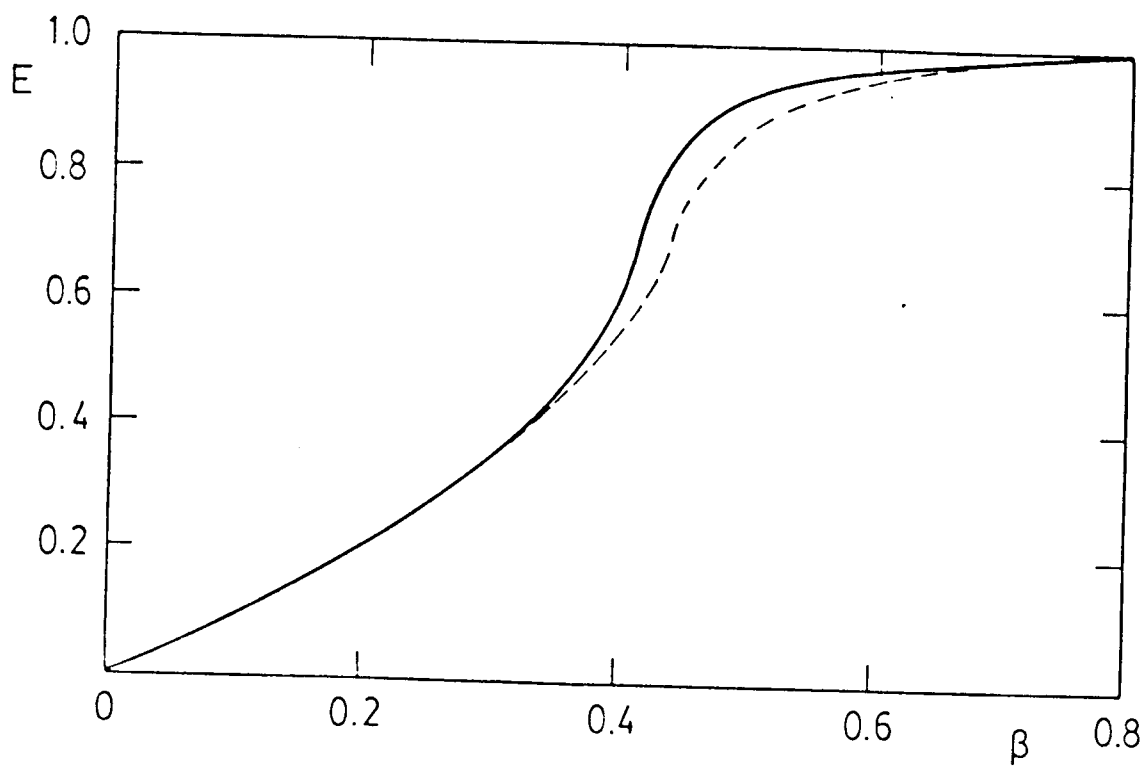


Fig. 4

CAPITULO IV

APROXIMACION DE CAMPO MEDIO EN VARIABLES DE PLAQUETA PARA TEORIAS
EN LA RED A TEMPERATURA FINITA (1)

Resumen

En este trabajo se generaliza la aproximación de campo medio en variables de plaqueta para teorías de medida en la red a temperatura finita. Se demuestra que es necesario considerar exactamente las variables de plaqueta a lo largo de una cadena en la dirección del tiempo euclídeo. Se aplica la técnica a los modelos de medida $Z(2)$ y $Z(3)$ en la red obteniéndose excelentes resultados.

IV-I Introducción

Uno de los efectos más interesantes de la temperatura finita en QCD es la posibilidad de una transición de una fase confinante a otra desconfinante (2). Las simulaciones de Monte Carlo (3) mostraron la existencia de esa transición desconfinante para las teorías de medida en la red $SU(2)$ y $SU(3)$ en la región de acoplamiento fuerte e intermedio. De estos resultados en la red pueden obtenerse estimaciones de la temperatura crítica en el continuo. Como complemento de estos cálculos numéricos es conveniente desarrollar métodos analíticos para la evaluación de las temperaturas críticas sin tener que utilizar una gran computadora. A fin de obtener resultados no triviales es necesario tener en cuenta la extensión finita de la red en la dirección del tiempo euclídeo, lo que generalmente no es sencillo. Recientemente algunos autores (4,5) propusieron una forma analítica de resolver problemas a temperatura finita empleando el conocido método de campo medio en variables de unión (6). Por otra parte en trabajos recientes se demostró que la aproximación de campo medio puede implementarse haciendo un cambio de variables de uniones a plaquetas (7,8). La aproximación de campo medio en variables de plaqueta (MP) resultante da excelentes predicciones para los diagramas de fases de las teorías en la red. Entonces resulta natural tratar de extender el método para estudiar teorías en la red a temperatura finita y ese es el objetivo de este trabajo. Mostramos que esta nueva técnica proporciona buenos resultados con un mínimo de esfuerzo numérico y analítico. Esta propiedad representa la mayor ventaja del método.

IV-II Descripción del método

Extendemos la técnica de MP a temperatura finita usando como ejemplo una teoría de medida $Z(2)$ en una red hipercúbica de d

dimensiones. La longitud de la red en la dirección del tiempo euclídeo (o temperatura) es $\beta = 1/T = N_t$ donde N_t representa el número de sitios en esa dirección y tomamos un espaciado de red igual a 1. Recordemos que en el marco de la formulación lagrangiana a temperatura finita debemos considerar condiciones periódicas de contorno en la dirección de la temperatura (9). Las variables de unión del modelo toman valores en el grupo $Z(2)$ y las denotamos por $\sigma_\mu(x)$ donde x es un vector posición de d dimensiones y $\mu=1, \dots, d$ indica un versor a lo largo de cada eje. La función de partición de la teoría está dada por,

$$Z(\delta, N_t) = \prod_{x, \mu} \left(\frac{1}{2} \sum_{\sigma_\mu(x) = \pm 1} \right) \exp \left\{ \delta \sum_{x, \mu < \nu} \sigma_\mu(x) \sigma_\nu(x + \hat{\mu}) \sigma_\mu(x + \hat{\nu}) \sigma_\nu(x) \right\}, \quad (\text{IV-II-1})$$

donde $\delta = 1/g^2$ (g es la constante de acoplamiento). Notemos que en este formalismo β pueda tomar sólo valores enteros.

El primer paso en el tratamiento de MP de la ec. (IV-II-1) es el cambio de variables de unión a variables de plaqueta. Los detalles de ese cambio de variables han sido cuidadosamente explicados en muchos artículos (7,8,10) y en la Sec. I-VII por lo que daremos sólo el resultado final,

$$Z = \prod_p \left(\frac{1}{2} \sum_{\sigma_p = \pm 1} \right) \exp \left\{ \delta \sum_p \sigma_p \right\} \prod_c \delta_{\sigma_c, 1}, \quad (\text{IV-II-2})$$

donde σ_p es una variable definida en una plaqueta p que toma valores en $Z(2)$. El vínculo es una función δ de Kronecker para cada cubo de la red (es la identidad de Bianchi en la red). σ_c es el producto de seis variables de plaqueta que forman un cubo (tridimensional) c . Cuando $d=2$ el vínculo no aparece debido a que en dos dimensiones no hay cubos tridimensionales.

Señalemos que a lo largo de las direcciones espaciales consideramos una red de extensión infinita por lo que en la ec. (IV-II-2) no hay vínculos globales del tipo de los que aparezcan al considerar una red espacial finita con condiciones periódicas de contorno (10). Notemos también que para derivar la

ec.(IV-II-2) no necesitamos fijar la medida.

Después del cambio de variables podemos hacer la aproximación de MP. Para un modelo a temperatura cero el método consiste en mantener "viva" sólo una variable de plaqueta mientras que las restantes se igualan a su valor medio que es obtenido mediante una ecuación de autoconsistencia (8). Sin embargo si siguiéramos los mismos pasos a temperatura finita perderíamos la información de que la red tiene longitud finita en la dirección de la temperatura. Por lo tanto la aproximación correcta se obtiene considerando exactamente todas las variables de plaqueta temporales correspondientes a coordenadas espaciales fijas (se trata de un caso especial de aproximación de Bethe-Peierls (11)). Por ejemplo si $d=3$ y $N_t=2$ necesitamos mantener "vivas" las seis plaquetas mostradas en la Fig.1. Notamos que es imprescindible tratar exactamente algunas plaquetas espaciales a fin de considerar el acoplamiento con las variables temporales. Destaquemos también que en una aproximación a temperatura finita el valor medio de las variables temporales (P) es, en general, diferente del de las variables espaciales (8).

Es obvio que podemos considerar exactamente tantas variables como querramos. Se mostró recientemente que de esta forma los resultados mejoran apreciablemente (12).

La ecuación de autoconsistencia para P en el ejemplo de la Fig.1 es ($n=1$ ó 2 ; $m=1, \dots, 6$),

$$P = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma_m\}} \sigma_n (1 + \sigma_1 \sigma_3 \sigma_5 P^3) (1 + \sigma_1 \sigma_4 \sigma_6 P^3) (1 + \sigma_2 \sigma_3 \sigma_5 P^3) (1 + \sigma_2 \sigma_4 \sigma_6 P^3) \times \\ \times \exp \left\{ \delta \sum_{m=1}^6 \sigma_m \right\} / 16. \quad (\text{IV-II-3-a})$$

La ecuación para S se obtiene a partir del término de la derecha de la ec.(IV-II-3-a) cambiando σ_n por cualquier variable espacial $\sigma_3, \dots, \sigma_6$. En la ec.(IV-II-3-a) hemos desarrollado la función δ

en caracteres de $Z(2)$ como,

$$\delta_{G,A} = (1 + G_c) / 2 \quad . \quad (IV-II-3-b)$$

Notemos que en este ejemplo tridimensional la ec. (IV-II-3-a) no contiene a S . Sin embargo cuando la dimensión es mayor ($d=4$, por ejemplo) las ecuaciones para P y para S están acopladas.

Para obtener el diagrama de fases predicho por nuestra aproximación debemos resolver las ecuaciones de MP numéricamente (mediante un método iterativo, por ejemplo) para cada N_t y δ , buscando una solución tal que,

$$0 \leq P, S \leq 1 \quad . \quad (IV-II-4)$$

Notemos que una variable de plaqueta es una cantidad invariante de medida, de manera que su valor medio puede ser diferente de cero sin que haya contradicciones con el teorema de Elitzur (13).

Los puntos críticos pueden obtenerse analizando el valor medio de la acción (o energía en el lenguaje de mecánica estadística) por unidad de sitio (E) (como en una simulación de Monte Carlo),

$$E = (d-1)P + \frac{(d-1)(d-2)}{2} S \quad . \quad (IV-II-5)$$

IV-III Resultados

Antes de describir los resultados de la aproximación de MP repasemos las principales características del diagrama de fases de la teoría de medida $Z(2)$ en la red a temperatura finita en cuatro dimensiones. El modelo es autodual (14) por lo tanto el diagrama de fases tiene propiedades de reflexión con respecto a la línea autodual $\phi_{\text{autodual}} = 0.44$ para cualquier temperatura. Cuando $T=0$, hay una transición de primer orden en ϕ_{autodual} (15). En el

extremo opuesto, cuando $N_t=1$ ($T=1$) se demuestra fácilmente que la función de partición del modelo se factoriza exactamente en las funciones de partición de una teoría $Z(2)$ de medida en tres dimensiones y un modelo de Ising tridimensional (4). Estas teorías presentan transiciones de fase de segundo orden en $\delta=0.22$ y 0.76 respectivamente (16), de manera tal que a la mayor temperatura posible en la red se encuentran tres fases. Por lo tanto para alguna temperatura intermedia entre 0 y 1, la línea autodual se debe quebrar en dos ramas. Finalmente destaquemos que también se realizaron estudios de este modelo a temperatura finita en formulación hamiltoniana (17).

En la Fig.2 graficamos los resultados de MP. Para cada N_t consideramos exactamente las N_t variables de plaqueta temporales a lo largo de una cadena en la dirección temporal. También tratamos exactamente las cuatro variables de plaqueta espaciales asociadas con la cadena en cada tiempo (repetimos los cálculos considerando sólo dos variables espaciales para cada tiempo. Los resultados se modificaron muy poco.) En $N_t=1$, P pasa de 0.30 a 1 en $\delta=0.20$ mientras que S salta de 0.68 a 0.98 en $\delta=0.57$. Señalamos que a esta temperatura las ecuaciones para S y para P son independientes. La ecuación para P corresponde a la de campo medio en variables de unión para un modelo de Ising en tres dimensiones (12) mientras que la ecuación para S es la de MP para una teoría $Z(2)$ de medida también en tres dimensiones. Por lo tanto nuestra aproximación reproduce correctamente las características del modelo a $N_t=1$.

Notemos que la posición de la transición desconfiante (entre las fases I y II) es obtenida con precisión. Este es un detalle importante si queremos aplicar el método a modelos no abelianos debido a que su diagrama de fases consta sólo de esa línea desconfiante. La pendiente de la línea entre $T=1/2$ y 0 es correcta pues esperamos que el punto crítico δ_c permanezca constante o tome valores menores a medida que calentamos el sistema. Este comportamiento cualitativamente correcto puede

obtenerse con el método de campo medio estándar sólo cuando se introducen correcciones radiativas a un lazo (4).

En $N_t=2$ no observamos ya dos transiciones, es decir, P y S saltan simultáneamente de un valor similar cercano a 0.50 hasta 0.98. Entonces nuestra aproximación predica que la división de la línea autodual se produce entre $T=1/2$ y 1.

En $N_t=3$ y 4 los resultados muestran una muy pequeña diferencia entre P y S por lo que creemos que a estas temperaturas estamos cerca del límite $T=0$. Además el valor crítico $\delta=0.43$ está en muy buen acuerdo con el resultado para $T=0$.

La posición del punto que separa las fases II y III en $N_t=1$ tiene un error apreciable. Creemos que es necesario tener en cuenta más variables de plaqueta espaciales a fin de mejorar el resultado. Otro problema de la aproximación de MP es que las transiciones detectadas son todas de primer orden. Este defecto es característico también de la aproximación de campo medio estándar en variables de unión (4-6).

Por completitud repetimos los cálculos para el modelo de medida $Z(3)$ en la red en cuatro dimensiones definido por la acción

$$S = \delta \sum_{x, \mu < \nu} \text{Re}[U_\mu(x) U_\nu(x+\hat{\mu}) U_\mu^*(x+\hat{\nu}) U_\nu^*(x)] \quad , \quad (\text{IV-III-1})$$

donde $U_\mu(x)$ es una variable sobre la unión (x, μ) que toma valores en el grupo $Z(3)$. La aproximación de MP puede implementarse siguiendo los mismos pasos que en el caso de $Z(2)$. En la Fig.3 se observa el diagrama de fases predicho por nuestra técnica. Es cualitativamente similar al resultado para la teoría $Z(2)$ de medida. Los acoplamientos críticos exactos conocidos son los siguientes: cuando $N_t=1$ el modelo tiene una transición correspondiente a una teoría $Z(3)$ de spin en tres dimensiones (en

$\delta=0.37$) y a una teoría $Z(3)$ de medida en tres dimensiones (en $\delta=1.09$) (16). En $T=0$ el valor crítico está sobre la línea autodual (18), es decir, en $\delta_{\text{autodual}}=0.67$. Los resultados de MP son $\delta=0.34, 0.87$ y 0.68 ($N_t=4$) respectivamente. Todos los comentarios concernientes a la teoría $Z(2)$ de medida son válidos en este contexto.

IV-IV Conclusiones

De los resultados anteriores concluimos que el formalismo de MP a temperatura finita es una herramienta eficaz para el tratamiento de las teorías de medida en la red. La aproximación presenta algunas ventajas sobre las técnicas habituales de campo medio en variables de unión. Los cálculos son muy simples tanto analítica como numéricamente. Además obtuvimos muy buenos resultados sin necesidad de introducir correcciones radiativas.

El método puede ser aplicado también a teorías de medida en la red no abelianas. La única complicación numérica será que las ecuaciones de MP involucrarán integrales múltiples. Pero se espera que la técnica de resultados tan buenos como los obtenidos para las teorías abelianas descritas en este trabajo. Es claro que esta aproximación puede extenderse a sistemas de spines haciendo un cambio de variables de sitios a uniones tal como se mostró en el Capítulo III de esta tesis (12).

Referencias:

- 1) E.Dagotto y A.Moreo, "Mean plaquette approximation for lattice gauge theories at finite temperature" a aparecer en Phys.Rev.D.
- 2) D.Gross, R.Pisarski y L.Yaffe, Rev.Mod.Phys.53,43(1981).
- 3) L.McLerran y B.Svetitsky, Phys.Lett.98B,195(1981); J.Kuti, J.Polonyi y K.Szlachányi, Phys.Lett.98B,199(1981); J.Engels, F.Karsch, H.Satz y I.Montvay, Phys.Lett.101B,89(1981); F.Karsch y R.Petronzio, Phys.Lett.139B,403(1984).
- 4) V.Alessandrini y Ph.Boucaud, Nucl.Phys.B235[FS11],599(1984).
- 5) R.Trinchero, Z.Phys.C24,75(1984); M.Kato, Kyoto Report (Kuns 734) no publicado.
- 6) J.M.Drouffe y J.B.Zuber, Phys.Rep.102c,1(1983).
- 7) G.Batrouti, Nucl.Phys.B208,12(1982).
- 8) E.Dagotto y A.Moreo Phys.Rev.D30,1271(1984); E.Dagotto y A.Moreo, Phys.Rev.D31,944(1985).
- 9) C.Bernard, Phys.Rev.D9,3312(1974).
- 10) G.Batrouti y M.Halpern, Phys.Rev.D30,1782(1984).
- 11) E.Dagotto y A.Moreo, Phys.Rev.D29,300(1984).
- 12) G.Batrouti, E.Dagotto y A.Moreo, "Mean link analysis of lattice spin models" a aparecer en Phys.Lett.B.
- 13) S.Elitzur, Phys.Rev.D12,3978(1975).

- 14) R.Balian, J.M.Drouffe y C.Itzykson, Phys.Rev.D11,2098(1975).
- 15) M.Creutz, L.Jacobs y C.Rebbi, Phys.Rev.D20,1915(1979).
- 16) G.Bhanot y M.Creutz, Phys.Rev.D21,2892(1980).
- 17) Y.Goldschmidt y J.Shigemitsu, Nucl.Phys.B200,149(1982);
R.Gavai y F.Karsch Phys.Lett.125B,406(1983).
- 18) C.Khortals Altes, Nucl.Phys.B142,315(1978).

Titulos de las figuras

- 1) Un ejemplo tridimensional de las variables de plaqueta que se consideran exactamente en la aproximación de MP a $T=1/2$ ($N_t=2$). La plaquetas marcadas con líneas y puntos son iguales a C_σ y C_τ debido a las condiciones periódicas de contorno.
- 2) Resultados de MP (•) para el diagrama de fases de una teoría de medida $Z(2)$ en la red en cuatro dimensiones. La línea continua es una interpolación arbitraria para guiar la vista. a, b y c denotan los puntos críticos conocidos exactamente para esta teoría, $\beta=0.22$ ($T=1$), $\beta=0.76$ ($T=1$) y $\beta=0.44$ ($T=0$), respectivamente. La línea cortada muestra los resultados del campo medio de Ref.(4) que incluye correcciones radiativas.
- 3) Resultados de MP para el diagrama de fases de una teoría $Z(3)$ de medida en la red en cuatro dimensiones a temperatura finita. La notación es como en la Fig.2. Los puntos a, b y c son $\beta=0.37$ ($T=1$), $\beta=1.09$ ($T=1$) y $\beta=0.67$ ($T=0$), respectivamente.

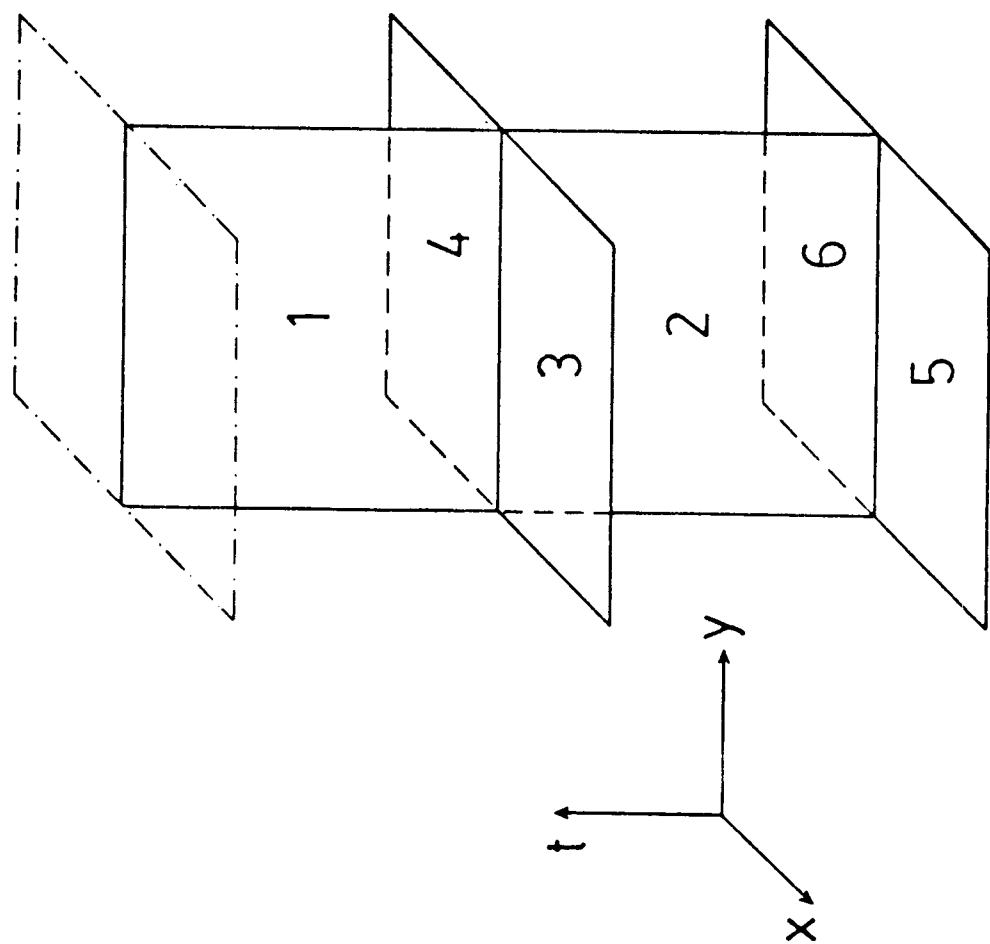


Fig. 1

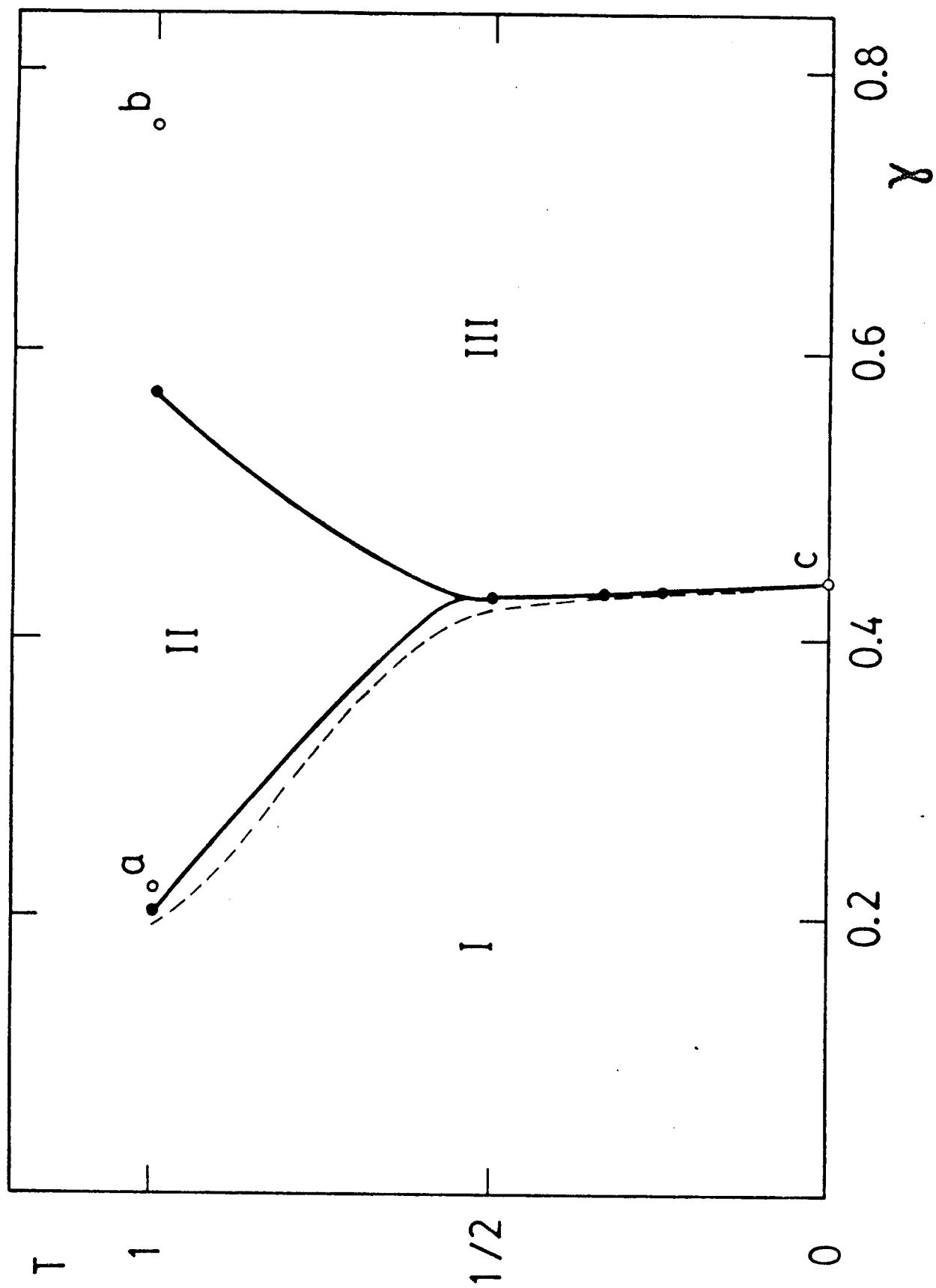


Fig. 2

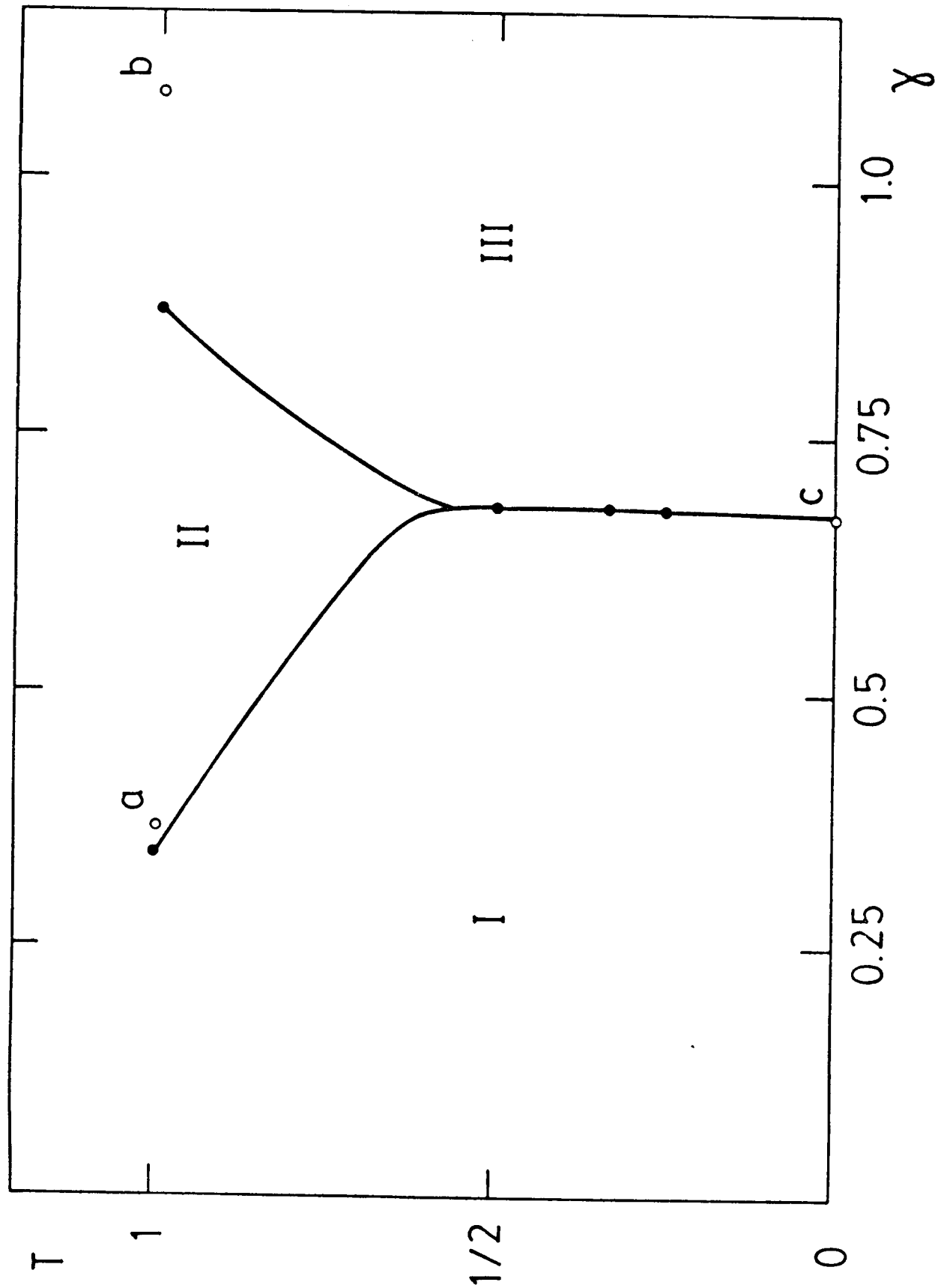


Fig. 3

CAPITULO V

AFROXIMACION DE CAMPO MEDIO PARA TEORIAS DE MEDIDA ABELIANAS
Y NO ABELIANAS EN LA RED A TEMPERATURA FINITA (1)

Resumen

Mediante la técnica de campo medio con correcciones gaussianas se analiza el diagrama de fases de las teorías de medida en la red $Z(2)$ y $SU(2)$ en cuatro dimensiones. El efecto del tamaño finito de la red en la dirección del tiempo euclídeo se considera en su orden más bajo mediante una aproximación de Bethe-Peierls. Discutimos la dependencia de los resultados respecto de la medida. Las predicciones para teorías abelianas son excelentes pero para el $SU(2)$ demostramos que las correcciones gaussianas no son suficientes para reproducir los diagramas de fases obtenidos mediante simulaciones de Monte Carlo.

V-I Introducción

Recientemente aparecieron una gran cantidad de trabajos (2,3) dedicados al estudio de la QCD a temperatura finita (T). Se espera que a altas densidades y/o temperaturas un sistema $SU(N)$ de Yang-Mills consista de un plasma de quarks y gluones (ver Sec.I-V). Algunas estimaciones (3) indican que podrían producirse "burbujas" de dicho plasma a través de colisiones de iones pesados a muy altas energías.

En la red se han estudiado muchas teorías a T finita. La transición de fase de desconfinamiento en los sistemas de pura medida fue estudiada en detalle mediante simulaciones de Monte Carlo. Por ejemplo, la teoría de medida $SU(2)$ [$SU(3)$] sin quarks presenta una transición de fase de segundo (4-6) [primer (7)] orden.

Aunque las simulaciones numéricas de Monte Carlo de la QCD son la principal herramienta para la evaluación de magnitudes físicas, es muy útil desarrollar técnicas analíticas que mejoren nuestra comprensión cualitativa de las teorías de medida en la red. Un intento importante en esa dirección lo constituye el método de campo medio (8) con correcciones radiativas que da muy buenos resultados para los diagramas de fases a $T=0$. Esta aproximación pueda generalizarse a problemas a temperatura finita en cuyo caso la extensión de la red en la dirección del tiempo euclídeo es $\beta = 1/T$ con condiciones de contorno periódicas (9). A pesar de que la evaluación de algunas magnitudes del continuo como la masa del glueball (donde las fluctuaciones de largo alcance son importantes) están fuera del alcance del método de campo medio, éste puede dar buenos resultados en la predicción de la temperatura de desconfinamiento (T_c) que es una cantidad relacionada con el límite termodinámico del sistema. En otras palabras, quizás sea posible observar el comportamiento de

escaleo de T_c usando métodos analíticos. El problema radica en cuántas correcciones será necesario introducir para obtener los resultados esperados. En este trabajo trataremos de hallar una respuesta.

Recientemente aparecieron algunos trabajos (10-13) que generalizan el método de campo medio al caso de T finita y estudian un modelo sencillo, el $Z(2)$ de medida. El ingrediente básico consiste en considerar exactamente las interacciones a lo largo de la dirección temporal. De esa forma las ecuaciones de punto de ensilladura dependen de la temperatura. Es obvio que en el contexto de la técnica de campo medio usual el efecto de la temperatura comenzaría a hacerse presente recién al introducir las correcciones radiativas.

En este trabajo estudiaremos modelos abelianos y no abelianos utilizando el método de campo medio adaptado a temperatura finita T . La importancia de estos cálculos fue recientemente destacada (14). En la Sec.V-II mostramos que la técnica de Bethe-Peierls (15), que consiste en tratar exactamente varias variables en las ecuaciones de autoconsistencia, puede ser pensada como una aproximación de punto de ensilladura a la función de partición escrita de manera apropiada en términos de variables sin vínculos. En la Sec.V-III presentamos el método de temperatura finita como un caso especial de las ideas propuestas en la Sec.V-II. Estudiamos el modelo de medida $Z(2)$ en cuatro dimensiones. Siguiendo la Ref.(16) incluimos correcciones a un lazo en los cálculos. Los resultados están en excelente acuerdo con el diagrama de fases predicho por argumentos de dualidad (17). En la Sec.V-IV analizamos el modelo $SU(2)$ de medida en cuatro dimensiones en la red. Primero discutimos cuidadosamente la elección de la medida pues es un detalle importante si queremos acelerar la convergencia del método (19). Luego presentamos los resultados al orden más bajo comparándolos con simulaciones de Monte Carlo y desarrollos de acoplamiento fuerte. Proporcionamos algunas identidades que facilitan el tratamiento

de las integrales múltiples que aparezcan en las ecuaciones de punto de ensilladura. Para terminar esta sección se estudian las correcciones gaussianas alrededor de una configuración uniforme. Las energías libres de los regímenes de acoplamiento fuerte y débil no se intersecan a $T=0$, lo que indica que es necesaria la inclusión de correcciones de orden superior. En la Sec.V-V discutimos los resultados principales de este trabajo.

V-II Aproximación de Bathe-Peierls

Generalizaremos la aproximación de Bathe-Peierls al contexto de la técnica de campo medio con correcciones radiativas con el fin de desarrollar un método para el estudio analítico de problemas a temperatura finita.

La idea básica es simple. Es sabido que el primer paso para aplicar el método de campo medio (ver Sec.I-VII) es efectuar un cambio de variables pasando de las variables de unión, que toman valores en un cierto grupo compacto G , a variables sin vínculos. Como ejemplo simple elegiremos $G=Z(2)$; la función de partición del modelo puede escribirse como

$$Z = \prod_{x,\mu} \left(\frac{1}{2} \sum_{U_\mu(x)} \right) \exp[S(U)] = \int [dV d\alpha] \exp\{S(V) + \sum_{x,\mu} [-i \alpha_\mu(x) V_\mu(x) + \log \cos \alpha_\mu(x)]\} \quad , \quad (V-II-1-a)$$

donde

$$S(U) = \oint \sum_{x,\mu < \nu} U_\mu(x) U_\nu(x+\hat{\mu}) U_\mu(x+\hat{\nu}) U_\nu(x) \quad , \quad (V-II-1-b)$$

$$[dV d\alpha] = \prod_{x,\mu} \int \frac{dV_\mu(x)}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\alpha_\mu(x)}{\sqrt{2\pi}} \quad , \quad (V-II-1-c)$$

y $\mu=1, \dots, d+1$ (d es la dimensión espacial de la red). $\oint=1/g^2$ y g es la constante de acoplamiento.

Destaquemos que todas las variables U de S las igualamos a las nuevas variables sin vínculos V . Hacer esto no es obligatorio. Podemos dejar algunas variables U sin reemplazar. Si éstas variables se seleccionan de manera que interactúen localmente, la suma sobre ellas es factible. De esta forma serán tratadas exactamente más interacciones lo que mejorará los resultados respecto del análisis de la ec. (V-II-1).

Consideremos un ejemplo tridimensional. Denotemos por P_1 las plaquetas pertenecientes a los cubos mostrados en la Fig.1 y por P_2 al resto de las plaquetas. Entonces se verifica la siguiente identidad (eliminamos los índices x y μ de los campos por simplicidad)

$$Z = \int [dV d\alpha] \exp\{-i \sum_{x,\mu} \alpha V\} \prod_{x,\mu} \left(\frac{1}{2} \sum_U\right) \exp\{i \sum_{x,\mu} \alpha U + \delta \sum_{P_1} (U_1 U_2 U_3 U_4) + \\ + \frac{\delta}{4} \sum_{P_2} (U_1 V_2 V_3 V_4 + V_1 U_2 V_3 V_4 + V_1 V_2 U_3 V_4 + V_1 V_2 V_3 U_4)\} \quad . \quad (V-II-2)$$

Notamos que los cubos en la Fig.1 no tienen uniones en común. El último término en el exponente de la ec. (V-II-2) tiene el siguiente significado: las plaquetas P_2 en la acción están divididas en cuatro partes y en cada una cambiamos U por V sólo para tres uniones. Por ejemplo, la plaqueta (1234) de la Fig.1 se escribe como,

$$\delta U_1 U_2 U_3 U_4 = \frac{\delta}{4} (U_1 V_2 V_3 V_4 + V_1 U_2 V_3 V_4 + V_1 V_2 U_3 V_4 + V_1 V_2 V_3 U_4) \quad . \quad (V-II-3)$$

Ahora es claro que la variable U interactúa localmente (dentro de los cubos de la Fig.1) y la suma de estas variables puede realizarse. La integral funcional resultante se evalúa de la manera usual mediante una aproximación de punto de ensilladura. Se demuestra que la solución invariante translacionalmente, V , de las ecuaciones satisface

$$V = \frac{1}{Z} \sum_{U_1, \dots, U_{12}} U_1 \exp \left\{ \epsilon \sum_{p=1}^6 U_p + 2\delta V^3 \sum_{\ell=1}^{12} U_\ell \right\} \quad , \quad (V-II-4)$$

donde las doce variables de unión U_ℓ pertenecen a un cubo (p varía sobre las plaquetas de ese cubo). Es obvio que esta ecuación corresponde a la aproximación de Bethe-Peierls en la técnica de campo medio "naive" cuando se considera exactamente un cubo. Si queremos mejorar los resultados deberemos introducir correcciones gaussianas de la manera usual.

En la Ref.(15) analizamos cuidadosamente la aproximación de Bethe-Peierls "naive" y mostramos que las mejoras sobre la técnica habitual son pequeñas. Sin embargo en la próxima sección probaremos que estas ideas son muy útiles en el tratamiento del problema a temperatura finita.

V-III Modelos abelianos

Comencemos el análisis de las teorías en la red a temperatura finita considerando, de nuevo como un ejemplo, la teoría $Z(2)$ de medida (17). Con el fin de tener en cuenta la longitud finita de la dirección temporal deberemos considerar cuidadosamente las correlaciones temporales, es decir que, en vez de considerar exactamente las variables en el interior de cubos, como en la Fig.1, tendremos que tratar con exactitud una cinta en la dirección temporal con condiciones periódicas de contorno.

Esta idea puede implementarse de la siguiente manera. Ante todo introduzcamos la notación. Los sitios de la red serán denotados por $x=(\vec{x}, t)$ donde $\vec{x}$ es un vector posición espacial a un tiempo t fijo. Este índice t varía entre 1 y N_t y en cada tiempo hay N_s sitios. La extensión de la red en la dirección temporal es $\beta=N_t$ (elegimos un espaciamiento de red igual a 1). El número

total de sitios es $N=N_t \cdot N_s$. Para las variables de unión espaciales $U_i(x)$ ($i=1, \dots, d$) introducimos dos campos sin vínculos $V_i^s(x)$ y $\alpha_i^s(x)$ en la forma usual y reescribimos la función de partición como sigue,

$$Z(\delta) = \int [dV^s d\alpha^s] \exp \left\{ \delta \sum_{x,i \in \ell} V_i^s(x) V_i^s(x+\hat{i}) V_i^s(x+\hat{j}) V_i^s(x) - i \sum_{x,i} \alpha_i^s(x) V_i^s(x) \right\} \\ \times \prod_{x,i} \left(\frac{1}{2} \sum_{U_i(x)} \prod_x \left(\frac{1}{2} \sum_{\Omega(x)} \exp \left\{ \sum_{x,i} [\delta U_i(x) \Omega(x+\hat{i}) U_i(x+\hat{t}) \Omega(x) + i \alpha_i^s(x) U_i^s(x)] \right\} \right) \right). \quad (V-III-1)$$

$\Omega(x)$ son los campos en las uniones temporales.

Destaquemos que en las plaquetas temporales no reemplazamos las variables $U_i(x)$ por $V_i^s(x)$. La suma sobre $U_i(x)$ puede escribirse como un producto de $N_t d$ factores por lo que puede calcularse exactamente. Como próximo paso, desacoplamos las variables $\Omega(x)$ introduciendo dos campos adicionales $V^t(x)$ y $\alpha^t(x)$. La expresión final para la función de partición es

$$Z(\delta) = \int [dV^s d\alpha^s dV^t d\alpha^t] \exp \left\{ \delta \sum_{x,i \in \ell} V_i^s(x) V_i^s(x+\hat{i}) V_i^s(x+\hat{j}) V_i^s(x) - \right. \\ \left. - i \sum_{x,i} \alpha_i^s(x) V_i^s(x) + \sum_x [-i \alpha^t(x) V^t(x) + \log \cos \alpha^t(x)] + \right. \\ \left. + \sum_{\vec{x},i} \log \left\{ \prod_t \left(\frac{1}{2} \sum_{U_i(\vec{x},t)} \exp \left\{ \sum_t [\delta U_i(\vec{x},t) V^t(\vec{x}+\hat{i},t) U_i(\vec{x},t+\hat{i}) \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. V^t(\vec{x},t) + i \alpha_i^s(\vec{x},t) U_i(\vec{x},t) \right] \right\} \right\} \right\}, \quad (V-III-2)$$

La ec. (V-III-2) fue propuesta previamente en la Ref. (10) para tratar este mismo ejemplo. De aquí en más diferiremos de dicha referencia en dos detalles: i) no organizaremos las correcciones en un desarrollo en $1/d$ sino que seguiremos el método de la Ref. (15); ii) daremos los resultados a) sin fijar la medida y b) en la medida axial espacial que definimos más abajo.

La función de partición ec.(V-III-2) puede evaluarse aproximadamente por medio de la técnica de punto de ensilladura proponiendo un Ansatz uniforme ($V_1^s(x)=V$, $\alpha_1^s(x)=-i\alpha$, $V^c(x)=W$, $\alpha^c(x)=-i\mu$). La energía libre por unidad de sitio a orden cero es,

$$F_0 = -\frac{\log \bar{Z}}{N} = -\delta d(d-1)V^4/2 + \alpha V d + W\mu - \log \cosh \mu - \frac{d}{N_t} \log \bar{W}, \quad (V-III-3)$$

donde

$$\bar{W} = \prod_{n=1}^{N_t} \left(\frac{1}{2} \sum_{U_n} \right) \exp \{ \alpha \sum_n U_n + \delta W^2 \sum_n U_n U_{n+1} \}. \quad (V-III-4)$$

Notamos que la ec.(V-III-4) es la función de partición de un modelo de Ising unidimensional en un campo magnético externo (con condiciones de contorno periódicas, o sea, $U_{N_t+1}=U_1$). Las ecuaciones de punto de ensilladura son,

$$\alpha = 2\delta(d-1)V^3, \quad \mu = \frac{d}{N_t \bar{W}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial W}, \quad (V-III-5-a)$$

$$V = \frac{1}{N_t \bar{W}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \alpha}, \quad W = \tanh \mu. \quad (V-III-5-b)$$

El diagrama de fases se obtiene comparando las energías libres de las diferentes soluciones de la ec.(V-III-5) con δ y β fijos. Los resultados son los siguientes; para $N_t \gg 2$ hay dos fases: en la región de acoplamiento fuerte existe sólo la solución trivial ($V=W=0$) lo que da una fase confinante. Cuando δ aumenta aparece otra solución ($V \neq 0$, $W \neq 0$) lo que produce una transición desconfinante. Recordemos que en esta fase debemos sumar a la energía libre de la ec.(V-III-3) un factor de entropía ($-\log 2$) debido a la invariancia de medida (ver Sec.I-VII). En $N_t=1$ la función de partición se factoriza exactamente en la función de partición de un modelo de Ising tridimensional y en la de una

teoría $Z(2)$ de medida también en tres dimensiones, por lo tanto el sistema presentará tres fases para este valor de β . Las ecuaciones de campo medio reproducen correctamente este hecho debido a que se desacoplan en dos pares de ecuaciones.

La transición tipo spin que separa las fases I y II de la Fig.2 es desconfinante debido a que el lazo de Wilson térmico es distinto de cero

$$\langle \prod_{t=1}^{N_t} \Omega(x) \rangle \simeq W^{N_t} \neq 0 \quad . \quad (V-III-6)$$

La segunda transición a $N_t=1$ corresponde a la teoría de medida $Z(2)$ en tres dimensiones y, en este caso, el método de campo medio no dará muy buenos resultados debido a la baja dimensión; por lo tanto no evaluaremos el acoplamiento crítico. De todas formas, la transición importante es la desconfinante.

A fin de mejorar las predicciones a orden cero evaluamos las correcciones radiativas. Como la teoría $Z(2)$ de medida a temperatura finita es autodual (10,19), cuando para un dado N_t hay sólo dos fases el δ crítico debe estar sobre la línea autodual $\delta_{auto,dual}=0.4407$. Como los resultados al orden más bajo no reproducen este hecho se hace imprescindible la introducción de correcciones a la energía libre. En el límite de acoplamiento fuerte se recupera el desarrollo en caracteres

$$F_{sc} = -\frac{(d+1)}{2} \log \cosh \gamma - \frac{(d+1)(d-1)}{6} (\tanh \delta)^6 \quad . \quad (V-III-7)$$

En el régimen de acoplamiento débil calculamos las correcciones gaussianas y demostramos que son despreciables (para $N_t \gg 2$). Entonces para obtener el diagrama de fases mejorado comparamos la ec.(V-III-7) con la ec.(V-III-3) incluyendo el factor de entropía. Los resultados se muestran en la Fig.2. El parámetro crítico que separa las fases I y II es $\gamma_c=0.44$ en excelente

acuerdo con el valor exacto. Para $\delta \gg \delta_c$ ambos campos V y W toman valores muy cercanos a 1. Notemos que para $N_t=2$ predecimos sólo dos fases lo que concuerda con lo anticipado en el Capítulo IV mediante el método de MP (12).

La introducción de correcciones radiativas en la aproximación a T finita es mucho más complicada que cuando $T=0$ por varias razones: i) ahora debemos corregir cuatro campos interactuantes; ii) en los casos de interés la dimensión d es 3 por lo que no puede llevarse a cabo un desarrollo en $1/d$; iii) al evaluar las fluctuaciones cuadráticas necesitamos las funciones de correlación del modelo unidimensional descrito por $\bar{W}$. Este hecho determina una complicación importante para los modelos no abelianos en que $\bar{W}$ no puede calcularse exactamente (ver Sec.V-IV).

Por completitud también realizamos los cálculos fijando la medida "axial espacial" que consiste en igualar a 1 todas las variables de unión en la dirección espacial d ,

$$U_d(x)=1 \quad . \quad (V-III-8)$$

En la Sec.V-IV veremos que esta medida es muy útil para considerar teorías no abelianas. La energía libre es,

$$F_0 = -\delta(d-1)(d-2)V^4/2 - \delta(d-1)V^2 - \delta W^2 + (d-1)V\alpha + W^4 -$$

$$- \log \cosh \mu - \frac{(d-1)}{N_t} \log \bar{W}. \quad (V-III-9)$$

La nomenclatura es como en la ec.(V-III-3). De la ec.(V-III-9) se derivan las ecuaciones de punto de ensilladura. Demostramos que si agregamos correcciones radiativas el diagrama de fases obtenido está en gran acuerdo con el de la Fig.2. Por ejemplo, el límite entre las fases I y III está nuevamente en $\delta=0.44$. Por lo tanto en este caso la elección de una medida no resulta

ser importante. En cambio para teorías no abelianas la situación será muy diferente.

V-IV Modelos no abelianos

a) Elección de la medida.

Antes de estudiar modelos no abelianos con la técnica presentada en la Sec.V-III, es conveniente analizar en detalle las ventajas y problemas que aparezcan en la práctica cuando se utilizan diferentes medidas.

En trabajos recientes sobre teorías en la red a T finita, la medida más usada (21) (para sistemas no abelianos) es una en la que las variables de unión en la dirección temporal son diagonales e independientes del tiempo. Por ejemplo, consideremos $G=SU(2)$,

$$\Omega(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} e^{i\phi(\vec{x})/N_t} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi(\vec{x})/N_t} \end{pmatrix} \quad (V-IV-1)$$

Esta no es una fijación completa de la medida debido a que la acción presenta, todavía, una invariancia $U(1)$ para cada $\vec{x}$. Esta simetría local trae aparejada una complicación al evaluar las correcciones gaussianas alrededor de la solución de campo medio. Esto se debe a que cuando la acción presenta una simetría local, en las fluctuaciones aparece un modo cero. Podemos evitar el problema si eliminamos la simetría fijando la medida "natural" (22) que selecciona las fluctuaciones ortogonales al modo cero. Sin embargo, se demostró recientemente (18) que si la medida se fija completamente al orden cero, no sólo los cálculos resultan más sencillos sino que los resultados mejoran.

Una medida que cumple con el requisito de eliminar todas las simetrías de la acción al orden cero es la medida axial espacial,

$$U_d(x) = \underline{1} \quad , \quad (V-IV-2)$$

donde $\underline{1}$ es la matriz identidad 2×2 .

Esta medida no fue usada anteriormente en este contexto pero parece apropiada para un tratamiento tipo campo medio tanto de teorías abelianas como no abelianas. La usaremos en los pasos siguientes.

Existen dos opciones adicionales: i) podríamos trabajar a orden cero sin fijar la medida y aplicar la medida natural al calcular las fluctuaciones. Sin embargo esta alternativa tiene los mismos problemas que la independiente de t (ec.(V-IV-1)); ii) podemos también elegir la medida "térmica" donde

$$\Omega(\vec{x}, t) = \underline{1} \quad , \quad (t \geq 2) \quad , \quad (V-IV-3)$$

mientras que $\Omega(\vec{x}, 1)$ permanece libre (debido a las condiciones periódicas de contorno no podríamos fijar a $\underline{1}$ todas las variables temporales). Esta no es una fijación de medida completa debido a que permanece una simetría $\prod_{\vec{x}} SU(2)$. Entonces el problema del modo cero también está presente aquí. Una complicación adicional de esta medida es que no podemos proponer una solución invariante ante traslaciones para las ecuaciones de punto de ensilladura. Este problema puede evitarse siguiendo los pasos de las Ref.(10) y (11) pero los cálculos se tornan más engorrosos.

b) Resultados a orden cero.

Aplicaremos el método de campo medio presentado en la Sec.V-III a una teoría de pura medida $SU(2)$ en la red en cuatro

dimensiones. Puesto que el grupo de medida es continuo será necesario fijar la medida. Por lo explicado en el ítem anterior elegiremos la medida axial espacial.

Las matrices de $SU(2)$ se parametrizan mediante cuatro variables reales,

$$U = z_0 \mathbb{1} + i \sum_{i=1}^3 z_i \hat{\sigma}_i, \quad \sum_{i=1}^3 z_i^2 = 1, \quad (V-IV-4)$$

donde $\hat{\sigma}_i$ son las matrices de Pauli. Introduciremos las variables sin vínculos embebiendo las variables de unión de $SU(2)$ en $\mathbb{R}^4$. Este paso está cuidadosamente discutido en las Ref. (23) y (24). Entonces aproximamos la integral funcional utilizando la técnica de punto de ensilladura. Como los detalles del cálculo son muy similares a los del caso abeliano discutido en la Sec.V-III, daremos solamente los resultados finales para las ecuaciones de punto de ensilladura y el orden más bajo de la energía libre por unidad de sitio F_0 ,

$$\alpha = 2\delta V[V^2(d-2)+1], \quad \mu = 2\delta W + \frac{(d-1)}{N_t \bar{w}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial W}, \quad (V-IV-5-a)$$

$$V = \frac{1}{N_t \bar{w}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \alpha}, \quad W = \frac{\int dU (\text{tr} U/2) \exp(\mu \text{tr} U/2)}{\int dU \exp(\mu \text{tr} U/2)}, \quad (V-IV-5-b)$$

$$F_0 = -\delta V^2(d-1)[V^2(d-2)+1] + \alpha V(d-1) + W\mu - \log \left[\int dU \exp(\mu \text{tr} U/2) \right] - \frac{-\delta W^2 - \frac{(d-1)}{N_t} \log \bar{w}}{N_t}, \quad (V-IV-6)$$

donde

$$\bar{w} = \prod_{n=1}^{N_t} \int dU_n \exp \left\{ \frac{\alpha}{2} \sum_n \text{tr} U_n + \frac{\delta W^2}{2} \sum_n \text{tr} (U_n U_{n+1}^*) \right\}. \quad (V-IV-7)$$

Las variables V, α, W y μ tienen el mismo significado que los campos análogos de la Sec.V-III, es decir, introducimos dos campos $V_i^s(x), \alpha_i^s(x) [V^t(x), \alpha^t(x)]$ para las uniones espaciales

[temporales] y en las ecuaciones de punto de ensilladura buscamos soluciones del tipo $V_1^s(x)=V_1$, $\alpha_1^s(x)=-i\alpha_1$ [$V^t(x)=W_1$, $\alpha^t(x)=-i\alpha_1$].

Notemos que $\bar{W}$ es igual a la función de partición de un modelo quirral unidimensional en un campo magnético externo. Su evaluación es, por supuesto, más dificultosa que en el caso abeliano en el que se conoce la solución exacta. Para $G=SU(2)$, $\bar{W}$ es una integral sobre $3N_t$ variables acopladas. Cuando $N_t \gg 2$, es imprescindible evaluarla mediante técnicas de Monte Carlo. Sin embargo podemos reducir el número de variables acopladas utilizando dos conocidas propiedades (25): i) si U y V pertenecen a un grupo de Lie compacto G entonces,

$$\int_G dU f(UV) = \int_G dU f(U) \quad , \quad (V-IV-8)$$

donde f es una función arbitraria sobre G ; ii) la suma de cualquier número de elementos de $SU(2)$ es proporcional a otro elemento del grupo.

Usando estas propiedades podemos derivar, por ejemplo, la siguiente identidad,

$$\begin{aligned} \int dU_1 dU_2 \exp\{x \operatorname{tr}(U_1+U_2) + y \operatorname{tr}(U_1 U_2^t)\} = \\ = \int dV dU \exp\{y \operatorname{tr} V + x \operatorname{tr} U \sqrt{2+\operatorname{tr} V}\} \quad , \quad (V-IV-9) \end{aligned}$$

donde U_1, U_2, V y $U \in SU(2)$ y x e y son números arbitrarios. El miembro de la izquierda de la ec. (V-IV-9) es una integral sobre seis variables pero el término de la derecha sólo depende de las trazas de las matrices por lo que puede escribirse como una integral sobre dos variables. La prueba de la ec. (V-IV-9) es la siguiente: primero hacemos un cambio de variables de U_1 a $V=U_1 U_2^t$, luego notemos que en la identidad

$$1+V = \left[\frac{1+V}{\sqrt{\det(1+V)}} \right] \sqrt{\det(1+V)}, \quad (V-IV-10)$$

la matriz entre corchetes pertenece a $SU(2)$; finalmente usamos la ec. (V-IV-8). La ec.(V-IV-9) es útil cuando $N_t=2$. Para otros valores de N_t dedujimos expresiones similares que simplifican los cálculos.

Los resultados se muestran en la Fig.3. En $N_t=1$, las ecs.(V-IV-5) se factorizan, como en el caso de las teorías abelianas, en las ecuaciones de punto de ensilladura de un modelo $SU(2)$ quiral en tres dimensiones y de una teoría de medida $SU(2)$ también en tres dimensiones. Esto ocurre porque el Ansatz uniforme para las soluciones de punto de ensilladura elimina las características no abelianas de los campos. La función de partición exacta a $N_t=1$ no se factoriza. La transición tipo quiral es desconfinante y de segundo orden y la predicción de campo medio para δ_c está en buen acuerdo con el resultado de Monte Carlo de la Ref.(5).

Cuando $N_t=2$, aparecen soluciones no triviales de las ecs.(V-IV-5) simultáneamente para V y W , dando una transición de primer orden para $\delta_c=1.62$, nuevamente muy cerca de las predicciones de Monte Carlo. Para $N_t \geq 3$, los resultados de orden cero permanecen casi constantes y se desvían de los de Monte Carlo; convergen a un valor δ_c muy cercano al resultado del campo medio a orden más bajo de la Ref.(24) a $T=0$. Por lo tanto es claro que para $N_t \geq 3$ es necesario considerar las correcciones gaussianas.

En la bibliografía sobre la teoría de medida $SU(2)$ a temperatura finita hay otras predicciones analíticas para el diagrama de fases de la Fig.3. En la Ref.(26) se deduce una acción efectiva en el régimen de acoplamiento fuerte y se evalúa el acoplamiento crítico para cada N_t usando un método de campo medio al orden más bajo. Los resultados son aceptables sólo para

$N_t=1$ y 2. En las Refs. (21) y (27) se aplican ideas similares. Otra aproximación (28) consiste en evaluar la tensión de la cuerda usando un desarrollo de acoplamiento fuerte. De esta forma se reproducen los resultados de Monte Carlo hasta $N_t=3$ donde comienza el escapeo. Una técnica diferente se presenta en la Ref. (29) donde las variables correspondientes a uniones temporales sólo pueden tomar valores en $Z(2)$ y a las variables espaciales se les aplica un tratamiento tipo campo medio. Las predicciones son buenas para $N_t=6$ y 7.

Creemos que nuestra aproximación presenta dos ventajas sobre estos cálculos analíticos: es válida para todos los valores de la constante de acoplamiento y, en principio, puede ser mejorada sistemáticamente por medio de un desarrollo en "lazos".

c) Correcciones gaussianas.

Como fue destacado en la Sec.V-III, la evaluación de las correcciones gaussianas alrededor de la solución uniforme de las ecuaciones de punto de ensilladura es más engorrosa que para $T=0$.

Corrijamos primero los campos $V_1^a(x)$ y $\alpha_1^i(x)$ que supuestamente darán la contribución más importante a las correcciones radiativas (tomemos $N_t=2$ como ejemplo). El desarrollo de $\bar{W}$ hasta orden cuadrático en las fluctuaciones de $\alpha_1^i(x)$ (que denotamos por $Y_1^i(x)$) da,

$$\begin{aligned} \log \bar{W} &= \log \left\{ \int dU_1 dU_2 \exp \left[\frac{1}{2} \text{tr} (U_1 \alpha_1^* + U_2 \alpha_2^*) + \delta W^2 \text{tr} (U_1 U_2^*) \right] \right\} \approx \\ &\approx \log \bar{W} - \frac{1}{2} \sum_{x,s,i} Y^a(t) Y^b(t') f_{t,t'}^{ab} \quad , \end{aligned} \quad (V-IV-11)$$

donde suprimimos el término lineal en Y y los índices x, s e i, a y b que varían entre 1 y 4, denotan los cuatro parámetros de la variable Y . El factor f es,

$$f_{tt'}^{ab} = \langle U_t^a U_{t'}^b \rangle - \langle U_t^a \rangle \langle U_{t'}^b \rangle \quad , \quad (t, t' = 1, 2) \quad (V-IV-12)$$

y los valores medios $\langle \dots \rangle$ se toman respecto de la medida,

$$d\bar{U} = \frac{1}{\Omega} dU_1 dU_2 \exp \left\{ \frac{\delta}{2} \text{tr} (U_1 + U_2) + \delta W^2 \text{tr} (U_1 U_2^*) \right\} \quad . \quad (V-IV-13)$$

f es equivalente a la función de correlación del modelo quiral unidimensional descrito por $\bar{W}$. La evaluación de f se realizó con la ayuda del programa VEGAS (30). Algunos resultados típicos (en $\delta=1.6$ por ejemplo),

$$\begin{aligned} f_{tt}^{\delta\delta} &\approx 0.18 \quad , \quad f_{tt}^{44} \approx 0.09 \quad , \\ f_{tt'}^{\delta\delta} &\approx 0.05 \quad , \quad f_{tt'}^{44} \approx 0.02 \quad . \end{aligned} \quad (V-IV-14)$$

Puede demostrarse que $f_{tt}^{ab} \propto \delta_{ab}$. De ec. (V-IV-14) observamos que las fluctuaciones antihermíticas ($j=1,2,3$) son más importantes que las hermiticas. También notamos que las fluctuaciones a tiempos diferentes son más pequeñas que a tiempos iguales pero no despreciables.

La contribución final a la energía libre por unidad de sitio es,

$$\Delta F_1 = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^4 \int_0^{2\pi} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \log [\det (1 + \mathcal{M}^a)] \quad , \quad (V-IV-15)$$

donde $\mathcal{M}^a = A^a B^a$ (matrices 4×4) y,

$$A_{\lambda\lambda'}^a = \delta_{\lambda\lambda'} f_{tt}^{a2} \quad , \quad (V-IV-16-a)$$

$$B_{\lambda\lambda'}^a = 2 \delta_{\lambda\lambda'} [\mathcal{M}_{\lambda\lambda'}^a(p) - \delta_{\lambda\lambda'} \delta \cos p_\parallel] \quad . \quad (V-IV-16-b)$$

i, j corren sobre las direcciones espaciales $1, \dots, d-1$. La matriz $\Lambda^{\sim}$ se obtiene de las fluctuaciones en $V_i^{\sim}(x)$ en las plaquetas espaciales. No la escribiremos explícitamente debido a que es fácilmente deducible de los resultados de la Ref.(31) donde se estudia la teoría $SU(2)$ de medida en la red a $T=0$ mediante el método de campo medio con correcciones en la medida axial. El último término del miembro de la derecha de la ec.(V-IV-16-b) proviene de las plaquetas temporales con dirección espacial d .

El valor numérico de ΔF_1 es ≈ -0.75 para δ entre 1.6 y 2.0 aproximadamente. Las fluctuaciones antihermíticas representan alrededor del 95-99% de la corrección.

Cuando es válido un desarrollo en $1/d$, las correcciones debidas a los campos temporales son despreciables. Sin embargo, demostramos explícitamente que su contribución (ΔF_2) es similar en magnitud a ΔF_1 . El cálculo de ΔF_2 se simplifica debido a que las fluctuaciones cuadráticas que acoplan variables temporales y espaciales son muy pequeñas por lo que las contribuciones a F debidas a estos campos son independientes.

La evaluación de ΔF_2 es directa pero engorrosa. Damos el resultado final en la región $\delta=1.6-2.0$, ΔF_2 es aproximadamente -0.48 (nuevamente las fluctuaciones antihermíticas son las más importantes). El resultado final es,

$$\Delta F = \Delta F_1 + \Delta F_2 \approx -1.23 \quad (N_t=2, \delta=1.6-2.0). \quad (V-IV-17)$$

En la región de acoplamiento fuerte sólo necesitamos el primer y segundo término del desarrollo en caracteres,

$$F_{\text{ex}} = -6 \log(2 I_1(\delta)/\delta) - 16 [I_2(\delta)/I_1(\delta)] , \quad (V-IV-18)$$

donde $I_\nu(x)$ son las funciones modificadas de Bessel de orden ν .

La comparación de las energías libres de las dos fases de la teoría se muestra en la Fig.4. Las dos curvas no se intersecan como ocurre para $T=0$. Creemos que las correcciones a la ec.(V-IV-13) no justifican este hecho porque son muy pequeñas. Por lo tanto la única explicación para la ausencia de transición de fase es que es necesario calcular correcciones de orden superior en la región de acoplamiento débil.

V-V Conclusiones

El objetivo de este trabajo ha sido analizar modelos abelianos y no abelianos a T finita con técnicas de campo medio. El efecto de la temperatura se tuvo en cuenta en su orden más bajo mediante una aproximación de Bethe-Feierls. Los resultados para el modelo abeliano $Z(2)$ de medida en cuatro dimensiones son excelentes. La transición sobre la línea autodual se reproduce con mucha precisión tanto fijando la medida axial espacial como sin fijar ninguna medida. Las predicciones a orden cero para el $SU(2)$ coinciden con las simulaciones de Monte Carlo a $N_t=1$ y 2 donde también coinciden con los resultados de cálculos analíticos anteriores. Para $N_t \gg 3$ es necesario incluir correcciones gaussianas pero mostramos explícitamente que éstas no bastan, a pesar de ser apreciables, para reproducir la transición de fase del modelo. Los cálculos se hicieron fijando la medida espacial axial que resulta muy apropiada en este caso porque determina completamente la medida.

Señalemos un detalle. Nuestra Fig.4 es muy similar a la Fig.(1-c) de la Ref.(16) en que se realiza un cálculo de campo medio para el modelo $SU(2)$ a $T=0$. En ese caso el resultado fue considerado como satisfactorio porque se espera que a $T=0$ la teoría no presente transiciones. Pero es claro que también en este caso resulta necesario considerar correcciones de orden

superior debido a que las energías libres de acoplamiento fuerte y débil no se unen con la misma pendiente (ni siquiera aproximadamente) como se espera que ocurra cuando no hay transiciones. Resumiendo, pensamos que también a $T=0$ es necesario introducir correcciones de orden superior para obtener resultados confiables. También destaquemos que en el desarrollo de acoplamiento fuerte los efectos de la temperatura se manifiestan a orden δ^{4N} lo que muestra que éstos son muy sutiles. Similares problemas ocurrirán en la zona de acoplamiento débil.

Creemos que antes de evaluar las correcciones de orden superior en el formalismo para $T=0$ de la Sec.V-IV es necesario demostrar que a $T=0$ el comportamiento correcto de la energía libre se obtiene con un número pequeño de correcciones. Si esto no ocurre, es claro que habrá que mejorar los cálculos a orden cero. Quizás una solución de las ecuaciones de punto de ensilladura fuera de la órbita de las soluciones invariantes ante traslaciones daría mejores resultados.

Otra alternativa sería la evaluación de las correcciones alrededor de las soluciones a orden cero habituales. Los efectos de la temperatura recién se harían presentes al incluir las correcciones gaussianas pero al trabajar con expresiones más sencillas sería más fácil introducir correcciones de orden superior.

Para finalizar digamos que la técnica de campo medio en variables de plaqueta (12), recientemente utilizada para atacar este tipo de problemas (ver Capítulo IV), puede dar buenos resultados para la teoría $SU(2)$.

A pesar de los problemas discutidos más arriba pensamos que nuestros resultados son alentadores y podría ser posible observar el escape de T mediante técnicas analíticas.

Referencias

- 1) E.Dagotto, A.Lugo y A.Moreo, "Mean field approximation for abelian and non abelian lattice gauge theories at finite temperature", enviado a Phys.Rev.D.
- 2) D.Gross, R.Pisarski y L.Yaffe, Rev.Mod.Phys.53,43(1981); H.Satz, Bielefeld report BI-TP 85/01 (no publicado).
- 3) Proceedings of the Third International Conference on Ultra-Relativistic Nucleus-Nucleus Collisions, Brookhaven National Laboratory, Septiembre 1983, Nucl.Phys.A418(1984).
- 4) L.McLerran y B.Svetitsky, Phys.Lett.98B,195(1981); Phys.Rev.D24,450(1981).
- 5) J.Kuti, J.Polónyi y K.Szlachányi, Phys.Lett.98B,177(1981).
- 6) J.Engels, F.Karsch, H.Satz e I.Montvay, Phys.Lett.101B,39, (1981).
- 7) T.Çelik, J.Engels y H.Satz, Phys.Lett.125B,411(1983).
- 8) J.M.Drouffe y J.B.Zuber, Phys.Rep.102,1(1983).
- 9) C.Bernard, Phys.Rev.D29,3312(1974).
- 10) V.Alessandrini y Ph.Boucaud, Nucl.Phys.B235[FS11],599(1984).
- 11) P.Trincherò, Z.Phys.C24,75(1984).
- 12) E.Dagotto y A.Moreo, "Mean Plaquette approximation for lattice gauge theories at finite temperature", a aparecer en

Phys.Rev.D.

- 13) M.Kato, Kyoto report (KUNS 734), no publicado.
- 14) B.Svetitsky, Proceedings of the Argonne National Laboratory Workshop (1984), pág.218.
- 15) E.Dagotto y A.Moreo, Phys.Rev.D29,300(1984).
- 16) H.Flyvbjerg, B.Lautrup y J.B.Zuber, Phys.Lett.110B,279(1982).
- 17) Y.Goldschmidt y J.Shigemitsu, Nucl.Phys.B200[FS41],149(1982); J.Engels, F.Karsch, H.Satz e I.Montvay, Nucl.Phys.B205[FS51],545 (1982); R.Gavai y F.Karsch, Phys.Lett. 125B,406(1983).
- 18) H.Flyvbjerg, P.Mansfield y B.Söderberg, Nucl.Phys.B240[FS121] 171(1984).
- 19) M.Creutz, L.Jacobs y C.Rabbi, Phys.Rev.D20,1915(1979).
- 20) C.Korthals Altes, Nucl.Phys.B142,315(1978).
- 21) J.Polónyi y K.Szlachányi, Phys.Lett.110B,395(1982).
- 22) V.Alessandrini, V.Hakim y A.Krzywicki, Nucl.Phys.B215[FS71], 109(1983); E.Dagotto, Phys.Rev.D30,1276(1984).
- 23) J.M.Drouffe, Nucl.Phys.B205[FS51],27(1982).
- 24) H.Ceccatto, E.Dagotto y A.Moreo, Phys.Rev.D31,1465(1985).
- 25) M.Creutz, "Quarks,Gluons and Lattices", Cambridge University Press (1983), pág.39 y 133.
- 26) F.Essen y F.Karsch, Nucl.Phys.B238, 297(1984).

- 27) M.Gross, J.Bartholomew y D.Hochberg, "SU(N) deconfinement transition and the N-state clock-model", EFI 83-35.
- 28) F.Green, Nucl.Phys.B215,83(1983).
- 29) H.Matsuoka, Phys.Lett.140B,233(1984).
- 30) G.Peter Lepage, Journal of Computational Phys.27,192(1978).
- 31) V.Müller y W.Rühl, Nucl.Phys.B210,289(1982).
- 32) G.Bhanot y M.Creutz, Phys.Rev.D21,2892(1980).

Titulos de figuras

- 1) Red tridimensional dividida en cubos para aplicar una aproximación de Bethe-Feierls.
- 2) Resultados de campo medio (•) para la transición de fase desconfiante de la teoría de medida $Z(2)$ en la red en cuatro dimensiones a temperatura finita. La línea continua es para guiar la vista. a , b y c son puntos críticos conocidos exactamente; $\delta=0.22$ ($T=1$), $\delta=0.76$ ($T=1$) (Ref.(32)) y $\delta=0.44$ ($T=0$), respectivamente. Las líneas punteadas completan el diagrama de fases entre las fases II y III. Los resultados de campo medio para esa transición no son buenos.
- 3) Resultados de campo medio (•) al orden más bajo para la teoría $SU(2)$ de medida en la red a T finita en cuatro dimensiones. La notación es como en la Fig.2. Las barras denotan los resultados de Monte Carlo con su error tomado de Ref.(5).
- 4) Energía libre por unidad de sitio para la teoría $SU(2)$ en medida axial espacial. F_{sc} es el desarrollo de acoplamiento fuerte de la ec.(V-IV-18), F_0 es el orden más bajo ec.(V-III-6) y F_w es la energía libre en el régimen de acoplamiento débil con las correcciones gaussianas incluidas.

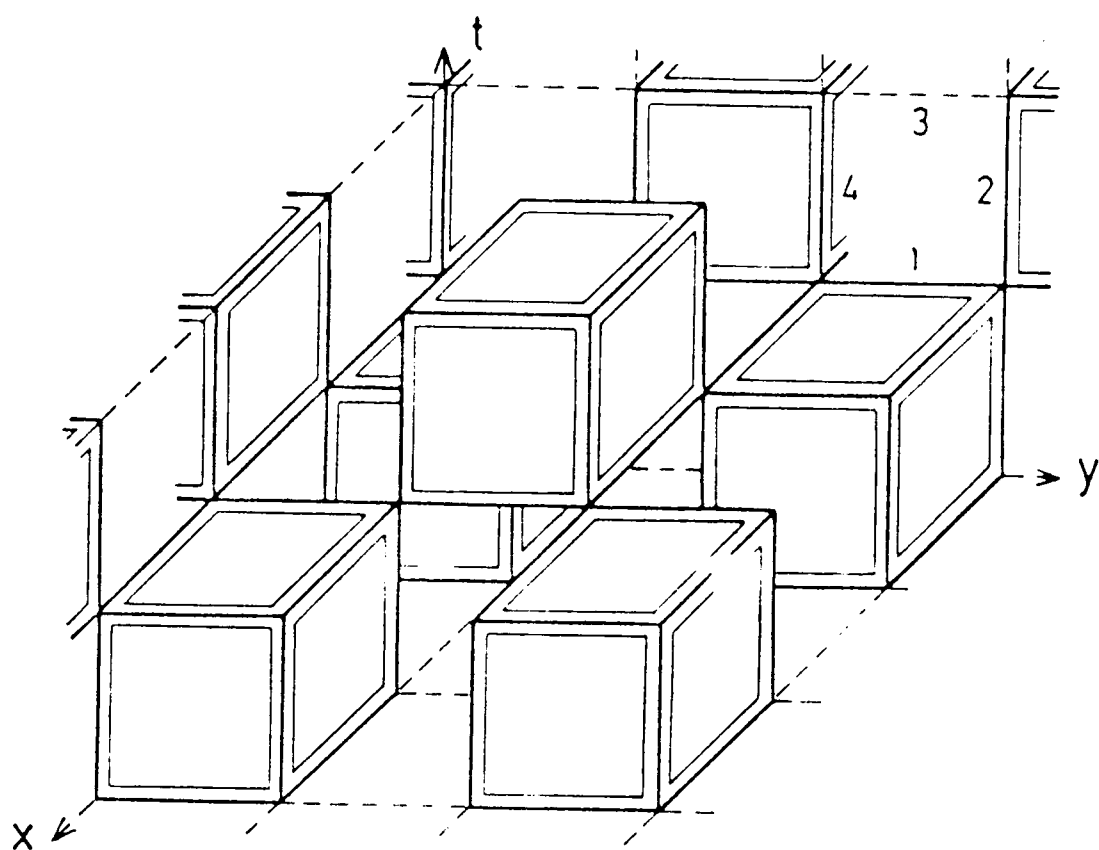
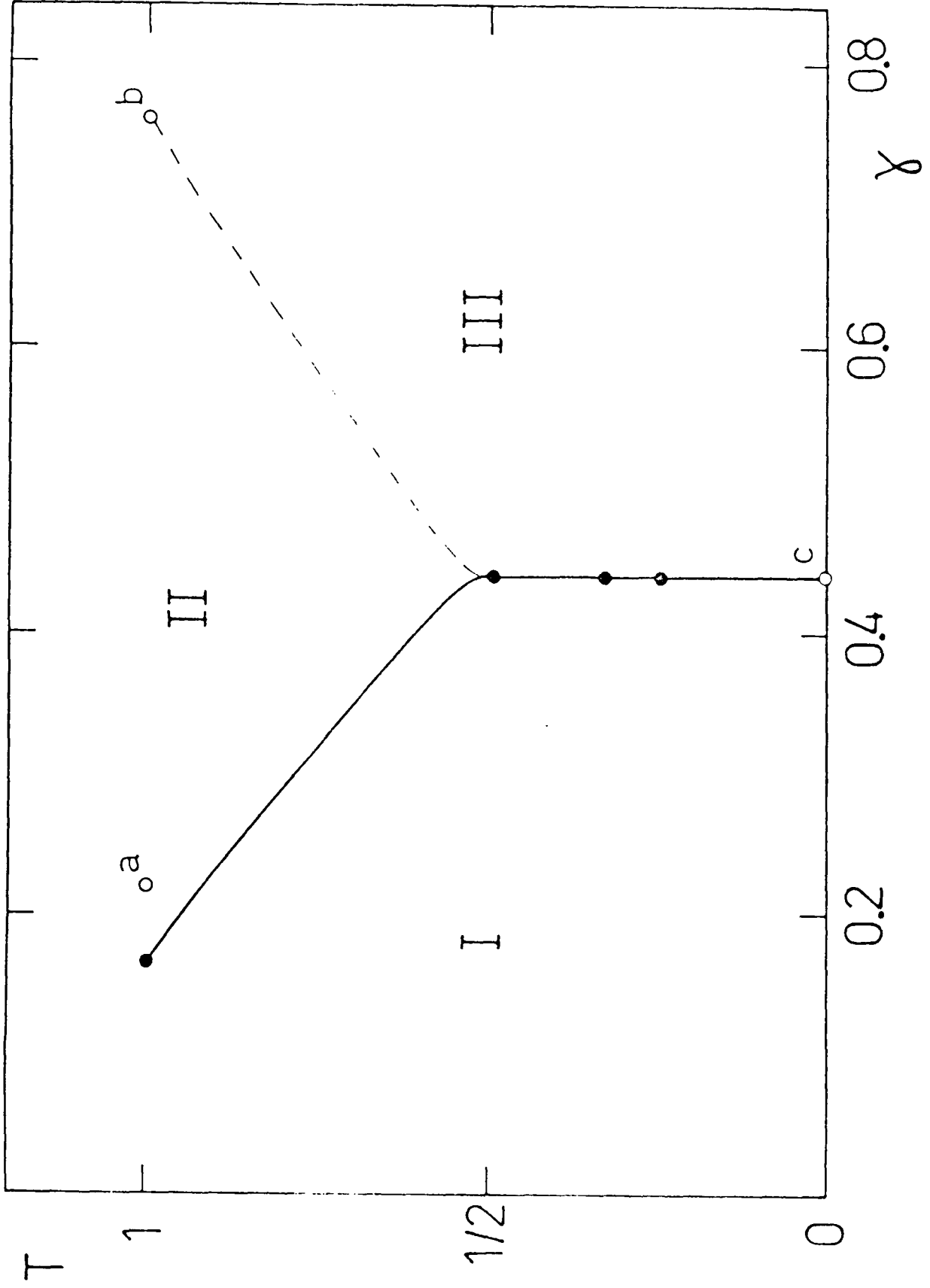


Fig.1

Fig.2



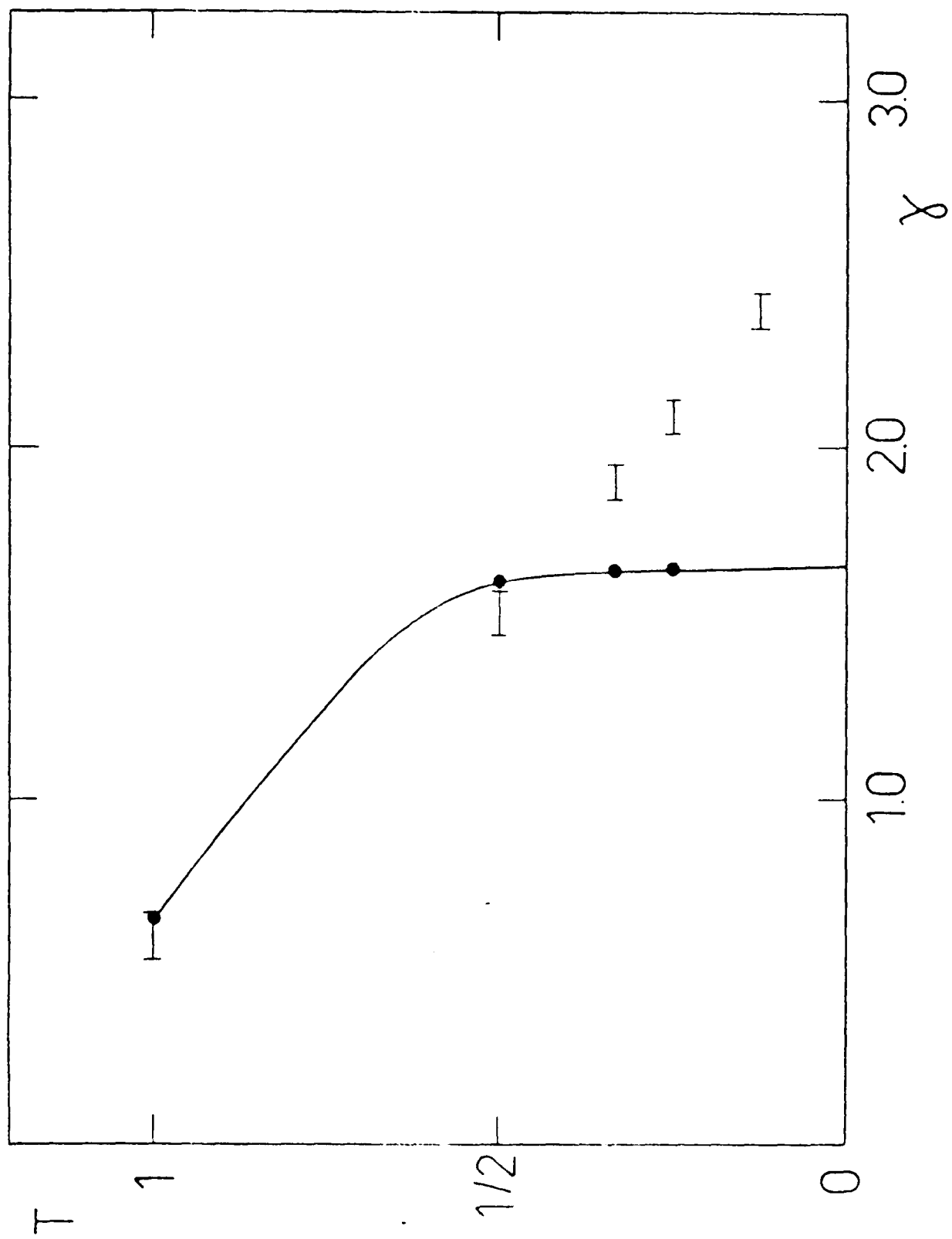


Fig.3

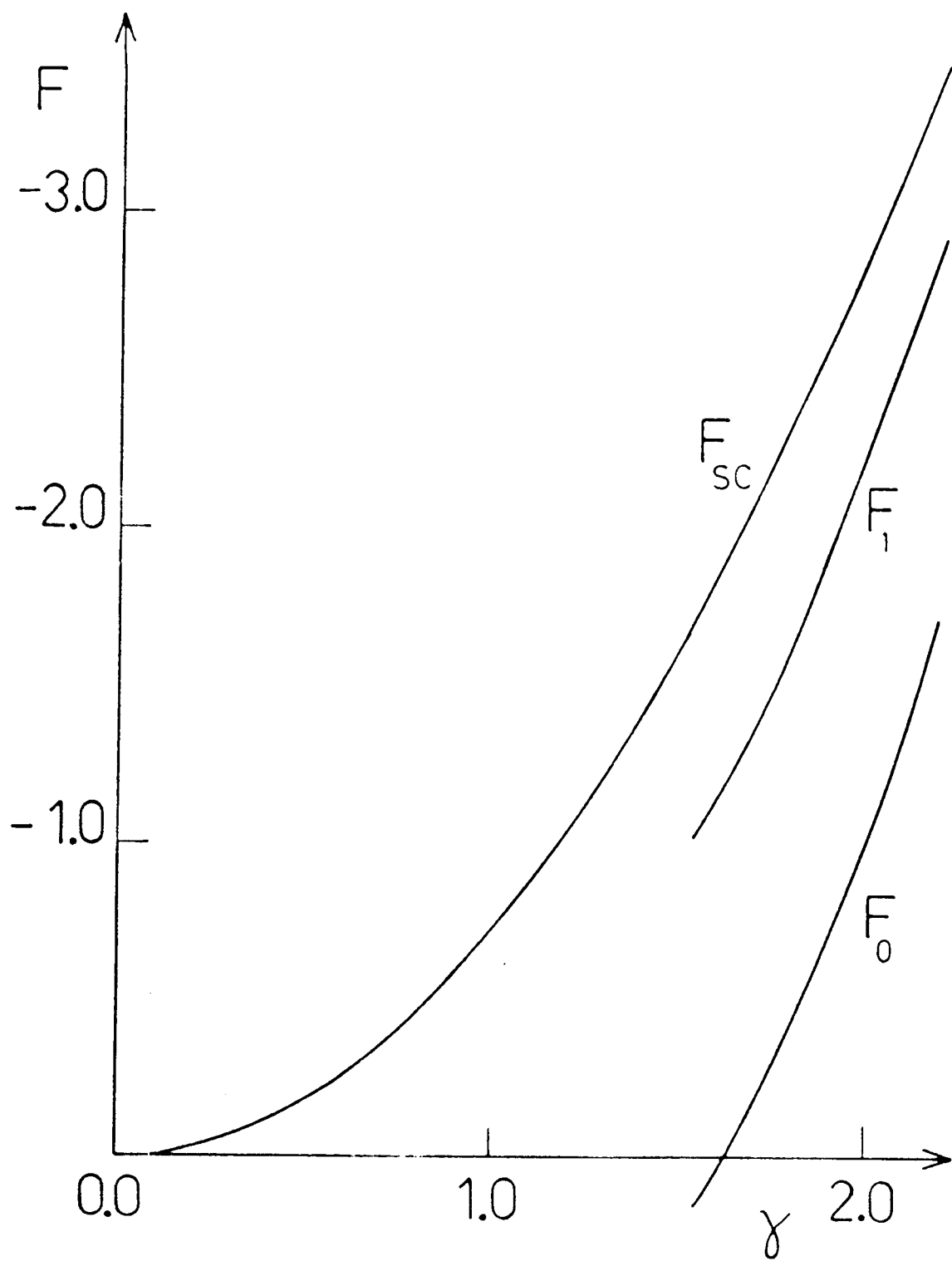


Fig.4

CAPITULO VI

TEORIA $Z(2)$ DE MEDIDA EN LA RED CON FERMIONES DE KOGUT-SUSSKIND
EN EL LIMITE DE ACOPLAMIENTO FUERTE (1)

Resumen

Se analiza la teoría $Z(2)$ de medida en la red con fermiones de Kogut-Susskind en el límite de acoplamiento fuerte. Sumamos sobre las variables de medida y escribimos el resultado como una integral sobre los campos bosónicos. Esta integral se estudia por medio de un desarrollo en lazos. Se calcula el parámetro de orden $\langle \bar{\chi} \chi \rangle$ y se demuestra que la simetría quiral está espontáneamente rota. También incluimos resultados en la medida axial y señalamos la existencia de una ambigüedad en este tipo de cálculos.

VI-I Introducción

El estudio de las teorías de medida en la red con campos fermiónicos en el límite de acoplamiento fuerte recibió recientemente mucha atención (2-8). Usando fermiones de Kogut-Susskind (9), se pueda estudiar un fenómeno no perturbativo como lo es la ruptura espontánea de la simetría quiral (10). Pueden utilizarse para ello técnicas numéricas (11) y analíticas. Se obtuvieron interesantes resultados sobre el espectro a bajas energías de las teorías $SU(N)$ de medida (6,7) tales como la existencia de un bosón de Goldstone identificado con el pión (ver Sec.I-IV). Parecería ser que la dependencia de la masa de los hadrones con la constante de acoplamiento es sumamente débil en la región de acoplamiento fuerte. Todos estos cálculos convalidan las hipótesis del álgebra de corrientes, por ejemplo, que la QCD rompe la simetría quiral de los quarks.

En este capítulo analizaremos el modelo $Z(2)$ de medida acoplado con fermiones de Kogut-Susskind en el límite de acoplamiento fuerte a temperatura (T) cero. A pesar de que las teorías de pura medida son muy simples cuando la constante de acoplamiento es infinita y $T=0$, cuando se incluyen fermiones este análisis no resulta para nada trivial. Los principales pasos de nuestro estudio son similares en espíritu a los de la Ref.(6) pero difieren en algunos detalles técnicos, fundamentalmente en la bosonización. Sumamos sobre los campos de medida y escribimos la función de partición como una integral sobre las variables de Grassmann de la exponencial de una acción fermiónica efectiva. Luego pasamos a variables bosónicas usando un método de integración gaussiana. La expresión final para la función de partición es evaluada en forma aproximada mediante un desarrollo en lazos en torno de una solución estacionaria. Este último paso es muy similar a los que se realizan en la técnica de campo medio con correcciones (8,12) (ver Sec.I-VII).

Los resultados de este trabajo tienen utilidad por las siguientes razones: i) el estudio de las teorías de medida $Z(N)$ es interesante por sí mismo (13). Los cálculos son más simples que en las teorías más realistas y además ambas están vinculadas pues $Z(N)$ es el centro de $SU(N)$. Estos modelos aparecen también en el estudio de teorías $SU(N)$ a T finita (14); ii) los resultados presentados en este trabajo pueden ser usados para cotejar con nuevos métodos numéricos. Nuestra aproximación en formulación lagrangiana puede pensarse como un complemento de las simulaciones de Monte Carlo (hasta el momento los métodos analíticos (15) están restringidos a la región de acoplamiento fuerte y no son adecuados para estudiar la física de acoplamiento débil (continuo)); iii) presentamos resultados en la medida axial (no empleada previamente en este contexto); iv) se discute la existencia de una ambigüedad en esta clase de cálculos.

La organización del trabajo es la siguiente. En la Sec.VI-II se define el modelo. Un ejemplo simple en una dimensión se analiza en la Sec.VI-III. En la Sec.VI-IV se extiende el formalismo desarrollado en la Sec.VI-III a cualquier número de dimensiones y se estudia el parámetro de orden $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Los comentarios finales se incluyen en la Sec.VI-V donde también se discute la cuestión de la ambigüedad ya mencionada y se calculan las funciones de correlación mesónicas.

VI-II Teoría $Z(2)$ de medida con fermiones de Kogut-Susskind

Comenzamos la sección con la definición de la teoría de medida $Z(2)$ con fermiones en el límite de acoplamiento fuerte (sin plaquetas). La acción es,

$$S = \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\bar{\psi}(x+\hat{\mu}) \gamma_{\mu} \psi(x) - \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \psi(x+\hat{\mu})] \sigma_{\mu}(x) -$$

$$-m \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x) . \quad (\text{VI-II-1})$$

$\sigma_\mu(x)$ es una variable que toma valores en $Z(2)$ ubicada en la unión $(x, x+\hat{\mu})$ (x denota sitios y μ direcciones). $\bar{\psi}(x)$, $\psi(x)$ son variables de Grassmann con índices de spin que van de 1 a $2^{[d/2]}$ (d es la dimensión de la red euclídea hipercúbica). Las matrices δ_μ son hermiticas y satisfacen la relación $\{\delta_\mu, \delta_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$. $\hat{\mu}$ es un versor a lo largo de la dirección μ . Consideramos un espaciado de red igual a 1.

A fin de evitar la duplicación de especies presente en la ec. (VI-II-1) aplicaremos el método de Kogut-Susskind explicado en (I-IV). Haciendo esto obtenamos la nueva acción

$$S = \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} \eta_\mu(x) [\bar{\chi}(x+\hat{\mu}) \chi(x) - \bar{\chi}(x) \chi(x+\hat{\mu})] \sigma_\mu(x) - m \sum_x \bar{\chi}(x) \chi(x) . \quad (\text{VI-II-2-a})$$

donde

$$\eta_\mu(x) = (-1)^{x_1 + \dots + x_{\mu-1}} . \quad (\text{VI-II-2-b})$$

El factor $\eta_\mu(x)$ proviene de la conmutación de las matrices δ y es el único remanente del álgebra de dichas matrices. Las variables de Grassmann $\bar{\chi}(x)$ y $\chi(x)$ no llevan índices de spin.

Como se explicó en el Cap. I la ec. (VI-II-2-a) presenta una simetría global continua $U(1) \times U(1)$ cuando $m=0$. Es invariante bajo la transformación

$$\chi(x) \begin{cases} V \chi(x) \\ W \chi(x) \end{cases} \quad \bar{\chi}(x) \begin{cases} \bar{\chi}(x) W^* & (x \text{ par}) \\ \bar{\chi}(x) V^* & (x \text{ impar}) \end{cases} \quad (\text{VI-II-3})$$

donde V y W pertenecen a $U(1)$. Esta simetría se denomina simetría

quiral como en el caso del continuo porque se rompe explícitamente por un término de masa. Es un "remanente" de la simetría quiral del continuo. Si $m=0$, la acción de la ec.(VI-II-2) es invariante ante el subgrupo $U(1)$ diagonal ($V=W$). Por supuesto que dicha acción presenta también la invariancia de medida local usual y otras simetrías discretas muy interesantes (ver Ref.16, pág.824, para una discusión de esto último).

VI-III Ejemplo unidimensional

Comenzamos el estudio de la teoría de medida $Z(2)$ en el límite de acoplamiento fuerte con la ayuda de un ejemplo simple unidimensional. Analizaremos en detalle el modelo definido por la acción (VI-II-2) restringido a una cadena con condiciones de contorno periódicas. Este modelo servirá para probar nuestras aproximaciones, fundamentalmente, la bosonización y el desarrollo en lazos. Por supuesto el interés principal del trabajo radica en el estudio de la teoría $Z(2)$ con fermiones en cuatro dimensiones. En el límite de acoplamiento fuerte la suma sobre las variables de medida puede hacerse en cualquier número de dimensiones. La expresión resultante para la función de partición puede escribirse como una integral sobre las variables de Grassmann con una acción efectiva (que posee la simetría $U(1) \times U(1)$ mencionada en la Sec.VI-II si $m=0$). El resultado es,

$$Z(m) = \prod_x \int d\chi(x) d\bar{\chi}(x) \exp \left\{ \sum_x \left[\frac{1}{4} \bar{\chi}(x) \chi(x) \bar{\chi}(x+\hat{i}) \chi(x+\hat{i}) - m \bar{\chi}(x) \chi(x) \right] \right\} . \quad (VI-III-1)$$

Notemos que la acción de la ec.(VI-III-1) sólo involucra campos mesónicos compuestos $[\bar{\chi}(x)\chi(x)]$ acoplados vía una interacción de próximos vecinos. Sólo en las teorías $SU(N)$ aparecen campos compuestos tipo bariónicos (ver Ref.(6)). Notemos que la ec.(VI-III-1) es similar a un sistema de spines si m se

identifica con un campo magnético y $\langle \bar{\chi} \chi \rangle$ con una magnetización. Destaquemos que un cálculo similar para teorías no abelianas conduce a expresiones engorrosas; por ejemplo, las integrales sobre cada unión no tienen una forma cerrada simple.

El segundo paso consiste en un cambio a variables bosónicas usando la identidad,

$$\exp\left\{\frac{1}{4} \bar{\chi}(x) \chi(x) \bar{\chi}(x+\hat{1}) \chi(x+\hat{1})\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(x)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\varphi^2(x)}{2} + \frac{\varphi(x)}{2} [\bar{\chi}(x) \chi(x) + \bar{\chi}(x+\hat{1}) \chi(x+\hat{1})]\right\}, \quad (\text{VI-III-2})$$

que puede probarse fácilmente desarrollando las exponenciales y usando la conocida propiedad $[\bar{\chi}(x) \chi(x)]^2 = 0$. Destaquemos que este procedimiento no corresponde al método de bosonización empleado en las Refs. (6,7 y 8). Por lo tanto de aquí en más nuestros cálculos difieren de los habituales en este contexto. En la Sec. VI-V mostraremos la relación entre ambas aproximaciones. Reemplazando la ec. (VI-III-2) en la ec. (VI-III-1) y haciendo la integral sobre las variables de Grassmann obtenemos una expresión exacta para la función de partición,

$$Z(m) = \left[\prod_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(x)}{\sqrt{2\pi}} \right] \exp\left\{-\sum_x \frac{\varphi^2(x)}{2}\right\} \prod_x \left[\frac{\varphi(x) + \varphi(x-\hat{1})}{2} - m \right]. \quad (\text{VI-III-3})$$

Para derivar la ec. (VI-III-3) usamos explícitamente las condiciones periódicas de contorno (condiciones antiperiódicas para los campos fermiónicos dan los mismos resultados). Notamos que cuando $m=0$ el integrando en la ec. (VI-III-3) permanece invariante si cambiamos el signo de todas las variables $\varphi(x)$ (simetría global) (recordemos que consideramos un número par de sitios).

Destaquemos que el método de la ec. (VI-III-2) también fue

aplicado en otras teorías como por ejemplo el modelo de Hubbard (17), Gross Neveu (18) y Ashkin-Teller (19).

La ecuación (VI-III-3) pueda calcularse de manera aproximada mediante un desarrollo en lazos en torno de un punto estacionario del integrando. Si buscamos una solución φ invariante ante traslaciones, dicho punto estacionario estará dado por la ecuación,

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} [-\varphi^2/2 + \log |\varphi - m|] = 0 \quad . \quad (VI-III-4-a)$$

Esta ecuación tiene dos raíces,

$$\varphi = \frac{1}{2}(m \pm \sqrt{m^2 + 4}) \quad . \quad (VI-III-4-b)$$

Para $m > 0$ la solución negativa conduce a una acción mayor. Cuando $m = 0$ hay dos soluciones ($\varphi = \pm 1$) con la misma acción. Notemos que si usáramos condiciones de contorno libres, una solución invariante ante traslaciones no satisfaría las ecuaciones para el punto estacionario y el análisis se tornaría más engorroso.

Ahora evaluaremos las correcciones gaussianas en torno de φ . Escribimos las variables como $\varphi(x) = \varphi + \mu(x)$ y mantenemos los términos cuadráticos en μ en la acción; así obtenemos (N denota el número de sitios),

$$Z(m) \approx \exp(S_0) \prod_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(x)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{x,x'} \mu(x) V_{x,x'} \mu(x')\right] \quad , \quad (VI-III-5-a)$$

donde

$$\frac{S_0}{N} = -\frac{\varphi^2}{2} + \log |\varphi - m| \quad , \quad (VI-III-5-b)$$

y

$$V_{x,x'} = \left[1 + \frac{1}{2(\varphi - m)^2}\right] \delta_{x,x'} + \frac{1}{2(\varphi - m)^2} \delta_{x,x'+1} \quad (VI-III-5-c)$$

términos del desarrollo en $1/m$.

Resumiendo en esta sección probamos nuestra aproximación en un modelo unidimensional con muy buenos resultados.

VI-IV Extensión a d dimensiones

Los resultados de la Sec. VI-III pueden extenderse fácilmente a d dimensiones. Siguiendo los mismos pasos que nos condujeron de la ec. (VI-III-1) a la (VI-III-3) escribimos la función de partición como una integral funcional sobre variables de unión bosónicas,

$$Z(m) = \prod_{x,\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(x)}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ - \sum_{x,\mu} \varphi_{\mu}^2(x) / 2 \right\} \prod_x \left[\frac{1}{2} \sum_{\mu} (\varphi_{\mu}(x) + \varphi_{\mu}(x-\hat{\mu})) - m \right]. \quad (\text{VI-IV-1})$$

Esta integral será evaluada por medio de un desarrollo en lazos alrededor de un punto estacionario φ invariante ante traslaciones. Esta configuración uniforme puede obtenerse maximizando la acción efectiva de la ec. (VI-IV-1). El resultado es,

$$\varphi = \frac{1}{2d} (m \pm \sqrt{m^2 + 4d}) . \quad (\text{VI-IV-2})$$

Como en el caso unidimensional el signo menos da un mínimo para la energía libre (para $m \neq 0$). Las correcciones gaussianas son más complicadas que en el ejemplo unidimensional. Luego de agregar una fluctuación a las variables alrededor de φ , desarrollar la acción hasta orden cuadrático en las fluctuaciones y resolver la integral gaussiana resultante obtenemos,

$$F = \frac{\varphi^2 d}{2} - \log | \varphi d - m | + \frac{1}{2N} \log \det M , \quad (\text{VI-IV-3})$$

donde la matriz M ($Nd \times Nd$) es,

$$M_{x,y,x',y'} = \delta_{y,y'} \delta_{x,x'} + \frac{1}{4(\varphi_d - m)^2} (\delta_{x,x'} + \delta_{x,x+1} + \delta_{x,x'-1} + \delta_{x,x'+1}) \quad (VI-IV-4)$$

Como siempre N denota el número (par) de sitios. La matriz M escrita en espacio de momentos es,

$$M_{x,y,x',y'} = \frac{1}{N} \sum_k e^{ik(x-x')} \left[\delta_{y,y'} + \frac{1}{4(\varphi_d - m)^2} (1 + e^{ik_x}) (1 + e^{-ik_x}) \right] \quad (VI-IV-5)$$

Con el fin de obtener los autovalores de la matriz M necesitamos diagonalizar la matriz $d \times d$ entre corchetes en el miembro de la derecha de la ec. (VI-IV-5). Pero esto es muy sencillo porque puede escribirse como la identidad más una matriz de rango 1. Entonces sus autovalores son,

$$\lambda_1 = 1, \quad (VI-IV-5-a)$$

$$\lambda_2 = 1 + \frac{1}{2(\varphi_d - m)^2} \sum_{\mu=1}^d (1 + \cos k_\mu). \quad (VI-IV-5-b)$$

λ_1 es $(d-1)$ veces degenerado y λ_2 es no degenerado.

La expresión final para la energía libre por unidad de sitio es,

$$F = \frac{\varphi_d^d}{2} - \log |\varphi_d - m| + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \log \left(1 + \frac{d}{2(\varphi_d - m)^2} + \frac{\sum_{\mu=1}^d \cos k_\mu}{2(\varphi_d - m)^2} \right) \quad (VI-IV-7)$$

En la Fig.1 mostramos la energía libre dada por la ec. (VI-IV-7) en función de m para $d=4$ (la integral fue calculada numéricamente). Cuando $m=0$, $F \sim 0.605 \times 10^{-2}$ y para $m \gg 1$, la ec. (VI-IV-7) reproduce los dos primeros términos del desarrollo en $1/m$,

$$F(1/m) = -\log m - \frac{d}{4m^2} + \frac{(4d-1)d}{32 m^4} \quad (VI-IV-8)$$

También evaluamos la energía libre en la medida axial. Los detalles del cálculo se dan en el apéndice. Los resultados en esta medida son diferentes de los que se obtienen sin fijar la medida. Este hecho es muy común en estos cálculos aproximados y ha sido discutido en la literatura (20). La diferencia en los resultados para medidas diferentes decrece a medida que se consideran más términos del desarrollo en lazos. El hecho destacable es que ambas aproximaciones dan resultados similares aún a orden cero (sin correcciones gaussianas). Creemos que esta es una indicación de que la siguiente corrección en el desarrollo en lazos será pequeña.

Ahora podemos evaluar el parámetro de orden $\langle \bar{\chi}(x)\chi(x) \rangle$ que, recordando la ec. (VI-II-2-a), está dado por,

$$\langle \bar{\chi}(x)\chi(x) \rangle = dF/dm. \quad (VI-IV-9)$$

Encontramos que la simetría global $U(1) \times U(1)$ está espontáneamente rota (aún cuando $m=0$) en el subgrupo diagonal $U(1)$. Si $m=0$, $\langle \bar{\chi}\chi \rangle$ tiene una expresión simple,

$$\langle \bar{\chi}\chi(m=0) \rangle = -\frac{1}{\sqrt{d}} - \frac{1}{6\sqrt{d}} \int_0^{2\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(1 + \frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos k_{\mu} \right) / \left(1 + \frac{1}{3d} \sum_{\mu} \cos k_{\mu} \right). \quad (VI-IV-10)$$

Recordemos que el criterio correcto para obtener la ruptura espontánea de la simetría es definir $\langle \bar{\chi}\chi \rangle$ como sigue,

$$\lim_{m \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \bar{\chi}\chi(m) \rangle_N = \langle \bar{\chi}\chi \rangle, \quad (VI-IV-11)$$

porque para un sistema finito $\langle \bar{\chi}\chi(m=0) \rangle_N$ es siempre cero (algo similar ocurre con la magnetización para un sistema de espines).

En la Fig.2 mostramos el parámetro de orden de la ec.(VI-IV-9) como función de m para $d=4$ (como caso especial $\langle \tilde{\chi} \chi \rangle = -0.5809$ en $m=0$). Así que es claro que en el límite de acoplamiento fuerte la simetría quiral de la teoría $Z(2)$ de medida con fermiones de Kogut-Susskind está espontáneamente rota. Este resultado puede extenderse a otros grupos abelianos. En la Ref.(6) se probó, mediante un desarrollo en $1/d$, que este fenómeno también ocurre en las teorías no abelianas, por lo que se comporta como el confinamiento que, en el límite de acoplamiento fuerte, está presente tanto en teorías abelianas como no abelianas.

VI-V Conclusiones

En este trabajo analizamos el límite de acoplamiento fuerte de la teoría $Z(2)$ de medida en la red con fermiones de Kogut-Susskind. Mostramos que estos modelos abelianos presentan las mismas características que los no abelianos en este límite, por ejemplo, el remanente de la simetría quiral en el continuo está espontáneamente roto en ambos casos. Por supuesto si dejamos que $\beta = 1/g^2$ sea diferente de cero esperamos encontrar, en una teoría abeliana, una transición de fase para algún valor β_c que de lugar a una fase no confinante en que $\langle \tilde{\chi} \chi \rangle = 0$. Esta hipótesis es sustentada por los cálculos de campo medio en la aproximación "quenched" (8) aunque no está claro si el punto de desconfinamiento y el punto en que se recupera la simetría quiral coinciden. Por otra parte para la teoría de medida $SU(3)$ se cree que no hay transiciones de fase en el eje por lo que las propiedades verificadas en la zona de acoplamiento fuerte pueden extrapolarse al límite continuo.

Es muy interesante enfatizar la conexión entre nuestros resultados y la aproximación de la Ref.(6) aplicada a una teoría abeliana. En efecto podemos mostrar que ambas aproximaciones son

casos especiales de una situación más general. La acción fermiónica efectiva que aparece en nuestros cálculos luego de sumar sobre las variables de medida puede escribirse de la siguiente forma (en el caso en que $m=0$, por ejemplo),

$$\frac{1}{4} \sum_{x,\mu} \bar{\chi}(x) \chi(x) \bar{\chi}(x+\hat{\mu}) \chi(x+\hat{\mu}) = \frac{1}{2} \sum_{x,x'} \bar{\chi}(x) \chi(x) V_{x,x'} \bar{\chi}(x') \chi(x'), \quad (\text{VI-V-1})$$

donde

$$V_{x,x'} = w \delta_{x,x'} + \frac{1}{4} \sum_{\mu} (\delta_{x,x'+\mu} + \delta_{x,x'-\mu}). \quad (\text{VI-V-2})$$

w es un parámetro no físico que se introduce en los cálculos usando la propiedad de que $(\bar{\chi}\chi)^2 = 0$. Este artificio es, en esencia, similar a la conocida aproximación de Berlin y Kac (21) en el modelo esférico de un ferromagneto. La función de partición de nuestro modelo puede escribirse exactamente de la siguiente manera,

$$Z(m=0) = \sqrt{\det(V^{-1})} \prod_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda(x)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{x,x'} \lambda(x) V_{x,x'}^{-1} \lambda(x')\right\} \prod_x \lambda(x). \quad (\text{VI-V-3})$$

Notemos que las variables bosónicas $\lambda(x)$ están ahora en los sitios de la red. La ecuación (VI-V-3) es independiente de w pero si hacemos un cálculo aproximado obtendremos un resultado que sí depende de w . La evaluación de la energía libre por unidad de sitio, con las correcciones gaussianas incluidas, a partir de la ec. (VI-V-3) es directa pero tediosa por lo que damos el resultado final,

$$F = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log(w + \frac{d}{2}) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \log\left(1 + \frac{\omega + \frac{1}{2} \frac{d}{v_F} \cos \pi_v}{\omega + \frac{d}{2}}\right), \quad (\text{VI-V-4})$$

que depende de w , como era de esperar. Si elegimos $w=0$ en la ec. (VI-V-2) recuperamos la generalización a un modelo abeliano de los resultados de la Ref. (6). Por otra parte si tomamos $w=d/2$

obtenemos la ec.(VI-IV-6) con $m=0$. Por lo tanto está claro que existe una ambigüedad en los cálculos (que está presente tanto en modelos abelianos como no abelianos). La situación se asemeja al problema de dependencia que existe en el esquema de renormalización en teoría de perturbaciones: los resultados a un orden finito dependen de parámetros arbitrarios que caracterizan al proceso de renormalización. Una situación similar aparece también en el tratamiento del modelo de Hubbard usando técnicas de campo medio (17). A fin de evitar la ambigüedad podemos emplear el "principio de mínima sensibilidad" (22) que consiste en elegir al parámetro arbitrario de manera de minimizar la sensibilidad del resultado respecto de pequeñas variaciones del mismo. En otras palabras el principio establece que debemos elegir el valor de w dado por la raíz de la ecuación,

$$dF(w)/dw=0. \quad (VI-V-5)$$

Sin embargo este principio no es muy eficaz en el ejemplo unidimensional de la Sec.VI-III ($m=0$) donde tenemos resultados exactos con los cuales comparar. La ec.(VI-V-5) predice $F=0.762$ ($w=0.166$) mientras que el valor exacto es $F=\log 2$. En $d=4$ la predicción es $F=0.1243$ ($w=0.2$). Los resultados del caso unidimensional nos llevan a pensar que la aproximación presentada en las secciones anteriores da resultados más aceptables que los que se obtienen mediante el principio de mínima sensibilidad o poniendo $w=0$. El buen acuerdo entre los resultados en la medida axial y sin fijar la medida es otro argumento en favor de esta suposición. Además destacamos en la Sec.VI-IV que la ec.(VI-IV-7) reproduce los dos primeros términos de un desarrollo en $1/m$. A pesar de todo creemos que la elección del w adecuado requiere una mayor investigación.

Finalmente analizaremos una magnitud física muy interesante: la función de correlación para dos masones definida por,

$$G(k) = \sum_y e^{iky} \langle \bar{\chi}(y) \chi(y) \bar{\chi}(0) \chi(0) \rangle_c, \quad (VI-V-6)$$

donde el subíndice c indica la parte conectada de la amplitud. La evaluación de la ec. (VI-V-6) se efectúa introduciendo un término fuente en la acción $[\sum_x J(x)\bar{\chi}(x)\chi(x)]$ y usando la identidad,

$$\langle \bar{\chi}(y)\chi(y)\bar{\chi}(0)\chi(0) \rangle_c = \frac{d^2 \log Z}{dJ(y)dJ(0)} \Big|_{J=0}. \quad (\text{VI-V-7})$$

En la aproximación gaussiana el resultado en el caso $m=0$ es,

$$G(k) = -1/(2w + \frac{d}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\mu} \cos k_{\mu}). \quad (\text{VI-V-8})$$

Si tomamos $w=0$ recuperamos el resultado dado en la Ref. (6) para el modelo $SU(3)$ mostrando nuevamente que las teorías abelianas y no abelianas se comportan de manera idéntica en el límite de acoplamiento fuerte. El análisis se continua como en la Ref. (6) por lo que no daremos más detalles. Solo queremos señalar que: i) se obtienen los mismos valores que para teorías no abelianas; ii) los resultados dependen de w . Sería interesante evaluar cómo se modifican las predicciones de la Ref. (6) para el espectro hadrónico con la introducción de w (23).

El próximo paso en el análisis de las teorías de medida con fermiones de Kogut-Susskind es la introducción de temperatura finita y una constante de acoplamiento, también finita, en los cálculos.

APENDICE

En este apéndice derivaremos una expresión aproximada para la energía libre de la teoría de medida $Z(2)$ en la red con fermiones de Kogut-Susskind. Trabajaremos en la medida axial fijando $\sigma_d(x)=1$ en todas las uniones de la red en la dirección $\mu=d$ (que puede identificarse con el tiempo). Luego de realizar las sumas sobre las variables de medida, reemplazar la interacción resultante entre cuatro fermiones por una integral bosónica empleando la ec.(VI-III-2) e integrar sobre las variables de Grassmann obtenemos,

$$Z(m) = \prod_x \prod_{i=1}^{d-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi_i(x)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\sum_x \frac{\psi_i^2(x)}{2}\right\} \det V, \quad (\text{VI-A-1})$$

donde

$$V_{x,x'} = \left\{ \frac{1}{2} \sum_i [\psi_i(x) + \psi_i(x-\hat{i})] - m \right\} \delta_{x,x'} + \frac{1}{2} (\delta_{x,x+\hat{d}} - \delta_{x,x-\hat{d}}). \quad (\text{VI-A-2})$$

Notemos que las variables bosónicas se ubican sobre las uniones espaciales. Ahora, como en la Sec.VI-IV, buscamos configuraciones invariantes ante traslaciones que maximizan la acción efectiva de la ec.(VI-A-1). La ecuación satisfecha por φ es,

$$\varphi = \varphi_m \int_0^{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{(\varphi_m^2 + \sin^2 k)} = \frac{1}{(\varphi_m^2 + 1)^{1/2}}, \quad (\text{VI-A-3})$$

donde

$$\varphi_m = \varphi(d-1) - m, \quad (\text{VI-A-4})$$

y la energía libre por unidad de sitio a orden cero es,

$$F = \frac{\varphi^2(d-1)^2}{2} - \frac{1}{2} \log[(\varphi_m^2 + \sqrt{\varphi_m^2 + 1} + 0.5)/2]. \quad (\text{VI-A-5})$$

Puede verificarse fácilmente que cuando $m \rightarrow \infty$, $F \rightarrow -\log m$, como

era de esperar. La evaluación de las correcciones gaussianas es directa pero lenta por lo que no daremos los detalles. El resultado es,

$$F = F_0 + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \log \left[1 + \frac{f(k_0)}{2} \sum_{\lambda=1}^{d-1} (1 + \cos k_\lambda) \right], \quad (\text{VI-A-6})$$

donde

$$f(k_d) = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \frac{[\varphi_u^2 - \sin x \operatorname{seu}(x+x_0)]}{(\varphi_u^2 + \operatorname{seu}^2 x) [\varphi_u^2 + \operatorname{seu}^2(x+x_0)]} \quad (\text{VI-A-7})$$

Para la derivación de la ec. (VI-A-6) necesitamos diagonalizar la siguiente matriz $(d-1) \times (d-1)$

$$H_{jj'}(k) = \delta_{jj'} + \frac{1}{4} (1 + e^{-ik_0}) (1 + e^{ik_0}) f(k_j), \quad (\text{VI-A-8})$$

donde $j, j' = 1, \dots, d-1$. Pero los autovalores de H se calculan fácilmente pues puede escribirse como la identidad más una matriz de rango 1 (ver Sec. VI-IV). Los autovalores son,

$$\lambda_1 = 1, \quad (\text{VI-A-9-a})$$

$$\lambda_2 = 1 + \frac{f(k_0)}{2} \sum_{\lambda=1}^{d-1} (1 + \cos k_\lambda), \quad (\text{VI-A-9-b})$$

donde λ_1 es $(d-2)$ veces degenerado y λ_2 no es degenerado.

Los resultados numéricos para la energía libre de la ec. (VI-A-6) en $d=4$ se muestran en la Fig. 1 en comparación con los valores correspondientes sin fijar la medida.

Referencias

- 1) E.Dagotto y A.Moreo, "Z(2) lattice gauge theory with staggered fermions in the strong coupling limit", enviado a Phys.Rev.D.
- 2) J.M.Blairon, R.Brout, F.Englert y J.Greensite, Nucl.Phys.B180 [FS2],439(1981).
- 3) H.Kluberg-Stern, A.Morel, O.Napoly y B.Petersson, Nucl.Phys. B190[FS3],504(1981).
- 4) N.Kawamoto y J.Smit, Nucl.Phys.B192,100(1981).
- 5) J.Hoek, N.Kawamoto y J.Smit, Nucl.Phys.B199,495(1982); V.Alessandrini, V.Hakim y A.Krzywicki, Nucl.Phys.B205[FS5] 253(1982); O.Napoly, Phys.Lett.132B,145(1983); H.Kluberg-Stern, A.Morel, O.Napoly y B.Petersson, Nucl.Phys.B220[FS8] 447(1983); N.Kawamoto y K.Shigemoto, Nucl.Phys.B237,128 (1984); I.Ichinose, UT-Komaba 84-4 (no publicado).
- 6) H.Kluberg-Stern, A.Morel y B.Petersson, Nucl.Phys.B215, 527(1983).
- 7) T. Jolicoeur, H.Kluberg-Stern, M.Lev, A.Morel y B.Petersson, SPh.T/83/167 (Saclay).
- 8) V.Alessandrini, V.Hakim y A.Krzywicki, Nucl.Phys.B215[FS7], 109(1983).
- 9) L.Susskind, Phys.Rev.D15,3031(1977); T.Banks, S.Raby, L.Susskind, J.Kogut, D.Jones, P.Scharbach y D.Sinclair, Phys.Rev.D15,1111(1977); H.S.Sharatchandra, H.Thun y P.Waisz, Nucl.Phys.B192,205(1981).

- 10) Y.Nambu y G.Jona-Lasinio, Phys.Rev.122,345(1961);ibid.124, 246(1961); K.Huang, "Quarks, Leptons & Gauge Fields", World Scientific, 1982, pág.258.
- 11) A.Duncan, R.Roskies y H.Waldia, Phys.Lett.114B,439(1982); I.Barbour, J.P.Gilchrist, H.Schneider, G.Schierholz y M.Teper, Phys.Lett.127B,433(1983); ibid.136B,90(1984); J.Gilchrist, H.Schneider,G.Schierholz y M.Teper, Phys.Lett.136B,87(1984); A.Billoire, E.Marinari y R.Petronzio, CERN-TH-3838.
- 12) J.M.Drouffe, Nucl.Phys.B205[FS5],27(1982); E.Dagotto, Phys.Rev.D30,1276(1984).
- 13) N.Kawamoto, Nucl.Phys.B190[FS3],617(1981).
- 14) J.Bartholomew, D.Hochberg, P.Damgaard y M.Gross, Phys.Lett. 133B,218(1983).
- 15) E.Dagotto y A.Moreo, Phys.Rev.D29,2350(1984) y sus referencias.
- 16) J.Kogut, Rev.Mod.Phys.55,775(1983).
- 17) U.Wolff, Nucl.Phys.B225,391(1983).
- 18) T.Eguchi y R.Nakayama, Phys.Lett.126B,89(1983).
- 19) E.Fradkin, Phys.Rev.Lett.53,1967(1984).
- 20) H.Flyvbjerg, P.Mansfield y B.Söderberg, Nucl.Phys.B240, 171(1984); H.Ceccatto, E.Dagotto y A.Moreo, Phys.Rev.D31,1465 (1985).
- 21) T.Berlin y M.Kac, Phys.Rev.86,321(1952).
- 22) P.Stevenson, Phys.Rev.D23,2916(1981);Phys.Lett.100B,61(1981);

Nucl.Phys.B203,572(1982).

23) E.Dagotto y A.Moreo, en preparación.

Títulos de figuras

1) La energía libre por unidad de sitio F en función de m . La línea continua representa la ec.(VI-IV-7) (sin fijar la medida) y la línea punteada la ec. (VI-A-6) (medida axial). La línea cortada es el desarrollo en $1/m$ de la ec (VI-IV-8), $d=4$.

2) El parámetro de orden $\langle \tilde{X} \rangle$ de la ec.(VI-IV-9) en función de la masa m (línea continua). La línea cortada corresponde al desarrollo en $1/m$, es decir, $dF(1/m)/dm$, $d=4$.

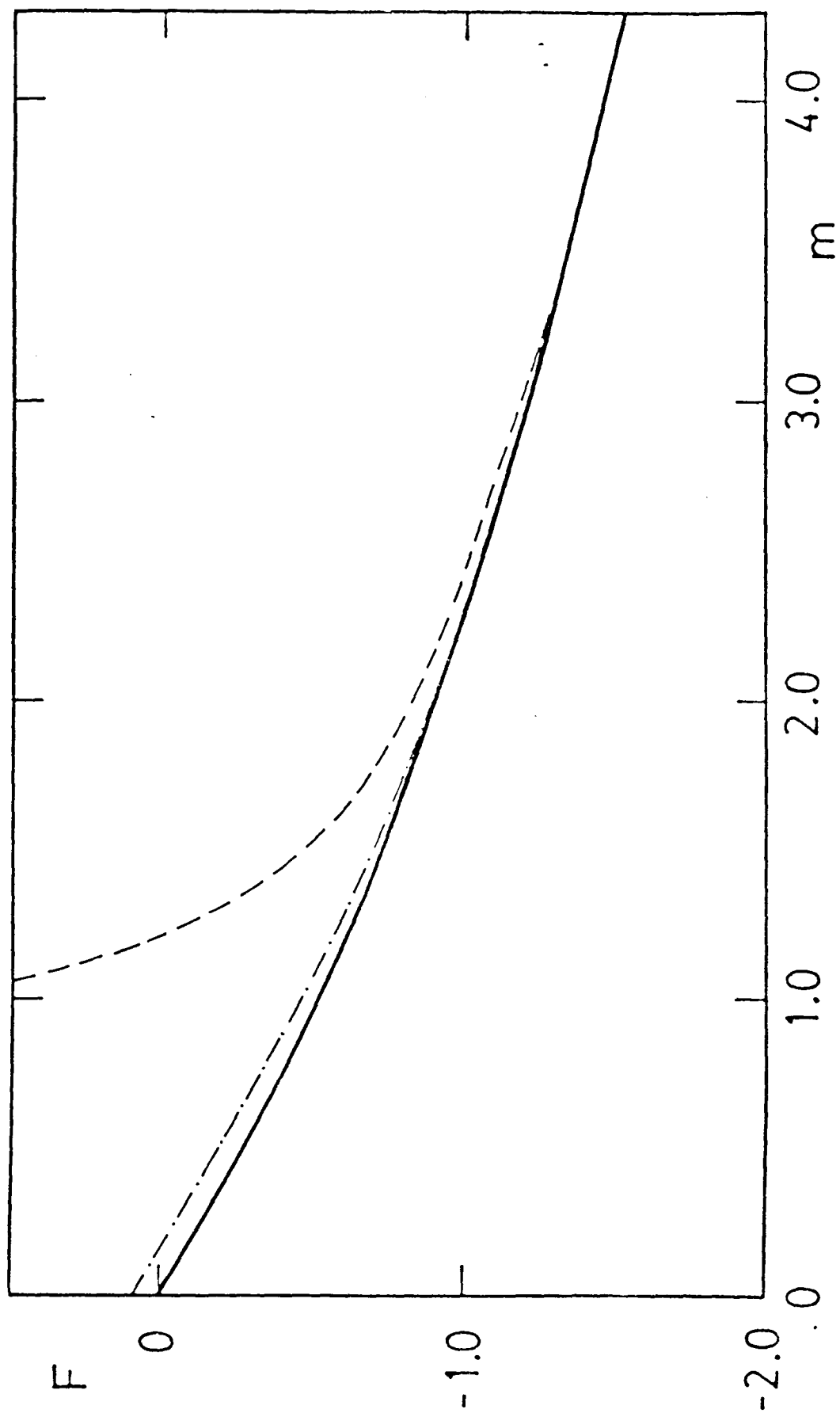


Fig.1

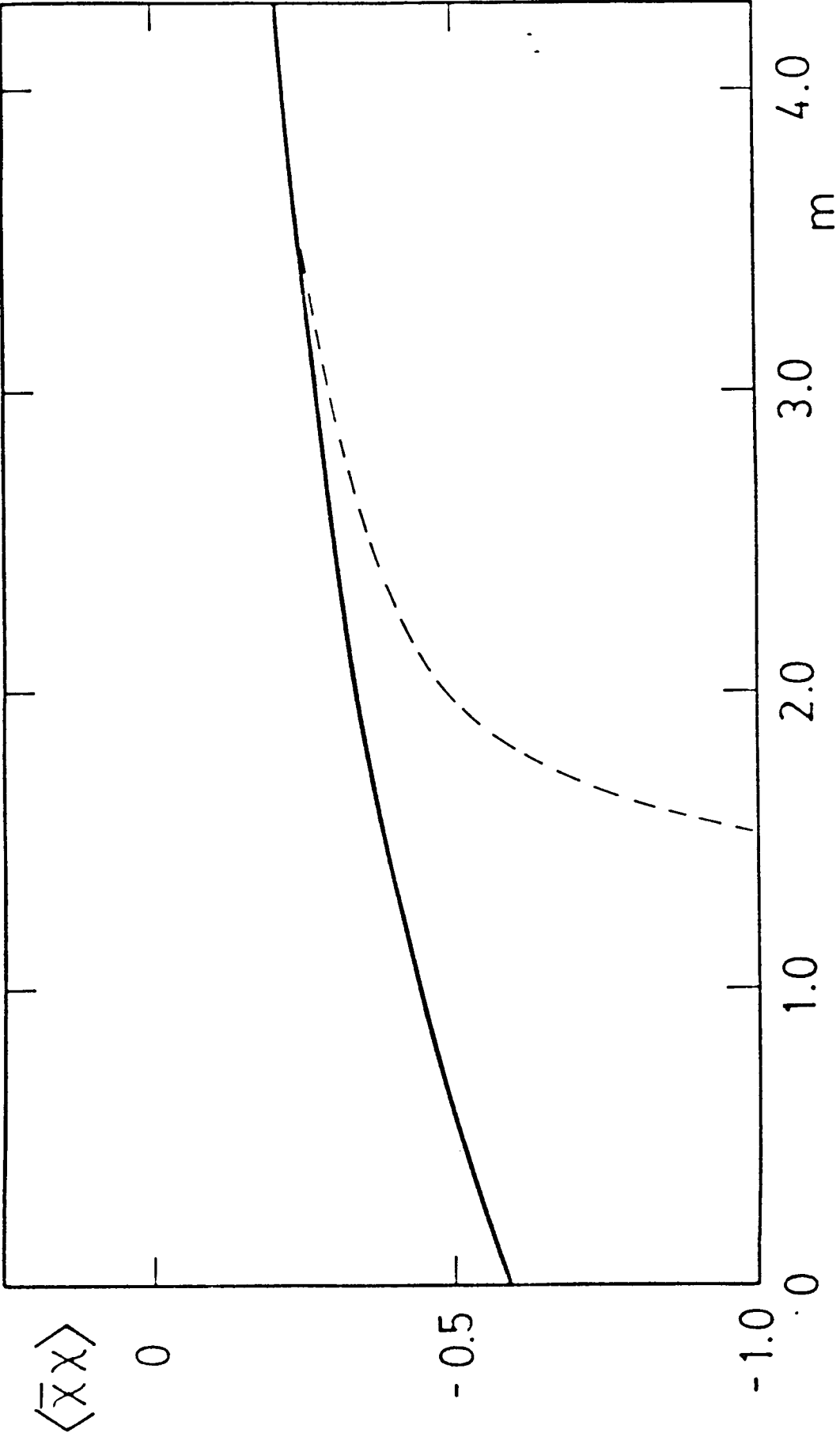


Fig. 2

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero expresar mi profundo agradecimiento al Dr. Elbio Dagotto, no sólo mi asesor científico sino también mi mejor amigo y esposo, por la gran colaboración y ayuda, tanto científicas como morales, brindadas en la realización de los trabajos que integran esta tesis.

También agradezco al Dr. Luis Masperi por sus observaciones y sugerencias y su cuidadosa lectura del manuscrito; a los doctores A. García y L. Bruschi por las discusiones mantenidas.

Mi reconocimiento para mi familia por el apoyo moral brindado en todos estos años.

Finalmente deseo destacar mi gratitud hacia la Comisión Nacional de Energía Atómica por la ayuda económica otorgada a través de la beca para el doctorado que me permitió llevar a cabo mis tareas.