

C.N.E.A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº 1	AÑO 1956

02.56.18

NO SE PRECISA

REPUBLICA ARGENTINA

PUBLICACIONES

DE LA

COMISION NACIONAL DE LA ENERGIA ATOMICA

Serie de Publicaciones Internas

Nº 4

FLUJO NEUTRONICO EN CANALES DE AIRE

Por S.P. Levy y C.G. Bollini

BUENOS AIRES

1956

Abstract

A method is applied here, which allows the calculation of the neutron flux distribution at the interior of air gaps of any geometry.

From the values of the vectorial flux at the surface: $F_s(P, \vec{\Omega})$, and from the form of this surface, the neutron flux at any point interior to the gap can be derived.

The values for $F(P, \vec{\Omega})$ are explicitly obtained by two ways: from the diffusion theory and from the harmonical polynomials method of the transport theory. The first theory gives the values of Φ and $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ at any point of the surface. These values are all we need to determine the vectorial flux $F(P, \vec{\Omega})$. We have used this theory to obtain the flux within gaps of spherical and cylindrical geometry. In the case of two concentric indefinite cylinders (the interior one being a black rod), we obtained a remarkable result: The flux shows a maximum at the interior of the gap, near the external wall.

The second theory gives a different expression for $F(P, \vec{\Omega})$: a development in harmonical polynomials. From this development the corresponding series of harmonical polynomials at the interior of the gap can be obtained.

1°) Introducción

En el presente trabajo, encaramos el cálculo de la distribución del flujo neutrónico en el interior de un espacio, al cual suponemos exclusivamente lleno con substancias no absorbentes ni dispersantes ("aire").

Aunque el método que describimos es, en principio, completamente general, nos hemos detenido en el desarrollo del caso correspondiente al flujo entre dos cilindros concéntricos, tanto como muestra de aplicación como para hacer resaltar algunas particularidades interesantes. Tal por ejemplo el hecho de que el flujo en el interior del gap presente un máximo dentro del mismo.

Los desarrollos del caso señalado, han sido tomados en la aproximación de la teoría de difusión. Sin embargo los métodos de ataque correspondientes a la teoría de transporte o a los desarrollos en polinomios armónicos, se mencionan explícitamente; agregándose algu-

nos ejemplos sencillos para el último de ellos.

2°) Generalidades

En lo que sigue denominaremos interfase a la superficie de separación entre un material cualquiera y el "aire", que suponemos carente de absorción y dispersión.

Nuestro punto de partida es la función $F_0(P, \vec{\Omega})$, que suponemos conocida; y que da el flujo neutrónico en todos los puntos de la interfase y según todas las direcciones $\vec{\Omega}$, dirigidas de P hacia el aire. La función F_0 , es proporcionada por el análisis del comportamiento del flujo neutrónico en el interior de la substancia dispersante, y de su determinación no nos ocuparemos.

Es remarcable, que el sólo conocimiento de $F_0(P, \vec{\Omega})$ proporciona el flujo vectorial en cualquier punto del aire. En efecto, si se quiere conocer el flujo $F(Q, \vec{\Omega})$ en un punto Q cualquiera, basta trazar por el mismo una semirecta paralela y de sentido contrario a $\vec{\Omega}$ (ver fig. 1). Esa semirecta encontrará al contorno, en un punto $P_0(Q, \vec{\Omega})$ y entonces:

$$F(Q, \vec{\Omega}) = F_0(P_0, \vec{\Omega}) \quad (1)$$

Ello sucede porque, en las condiciones supuestas, el flujo directional se conserva.

Si se quiere determinar el flujo integrado $\Phi(Q)$

$$\Phi(Q) = \int F(Q, \vec{\Omega}) d\Omega$$

será suficiente variar $\vec{\Omega}$ y encontrar los puntos $P_0(\vec{\Omega})$ correspondientes; siendo entonces:

$$\Phi(Q) = \int F_0(P_0(\vec{\Omega}), \vec{\Omega}) d\Omega \quad (2)$$

Como se vé, el conocimiento de $F_0(P, \vec{\Omega})$ permite el cálculo del flujo, vectorial o integrado, en el interior del gap.

3°) Aproximación de la teoría de difusión.

La teoría de difusión, no brinda el valor del flujo vectorial, sino el del flujo integrado $\Phi_0(P)$ y su derivada normal $\frac{\partial \Phi_0}{\partial n}(P)$, en todos los puntos de la interfase. Sin embargo, ello es suficiente para la determinación de $F_0(P, \vec{\Omega})$, en la aproximación de la teoría de difusión. El procedimiento es similar al utilizado, por ejemplo, por Glasstone S. and Edlund M.C. (1952) (pág.92 y siguientes), para el cálculo de la densidad de corriente. La única variante consiste en no integrar sobre las variables angulares, hallándose así la corriente que sale en una dirección $\vec{\Omega}$ determinada y dentro de un

cierto ángulo sólido $d\Omega$. Nos limitaremos a dar el resultado, pues la deducción no ofrece inconvenientes:

$$F_0(P, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \left[\Phi_0(P) + \frac{1}{\Sigma_s} \frac{\partial}{\partial \mu} \Phi_0(P) \right] \quad (3)$$

siendo $\frac{\partial}{\partial \mu}$ la derivada en la dirección contraria a $\vec{\Omega}$. Por supuesto, la derivada direccional puede ser descompuesta en dos derivadas tangenciales y una derivada normal:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \Phi = -\vec{\Omega} \cdot \vec{t} \frac{\partial}{\partial t_1} \Phi - \vec{\Omega} \cdot \vec{t} \frac{\partial}{\partial t_2} \Phi - \vec{\Omega} \cdot \vec{n} \frac{\partial}{\partial n} \Phi \quad (4)$$

(Recuérdase que $\frac{\partial}{\partial \mu}$ es en la dirección de $-\vec{\Omega}$).

Tal como lo habíamos afirmado, resulta que $F_0(P, \vec{\Omega})$ puede ser calculado, a partir de los valores de Φ_0 y $\frac{\partial}{\partial n} \Phi_0$ en la interfase, mediante (3) y (4).

4°) Aplicación a un hueco esférico y a un conducto cilíndrico.

Suponiendo simetría esférica, Φ_0 resulta constante en todos los puntos de la interfase, lo mismo que $\frac{\partial}{\partial n} \Phi_0$.

La fórmula (4) se reduce a $\frac{\partial}{\partial \mu} \Phi = \cos \theta' \cdot \frac{\partial}{\partial n} \Phi$. Siendo θ' el ángulo que forma $-\vec{\Omega}$ con \vec{n} , es decir, con una dirección radial que pasa por I.

Para encontrar el flujo en el punto Q, (distante r del centro de la esfera) utilizamos en el mismo un sistema de coordenadas polares esféricas: θ y φ ; siendo θ el ángulo que forma $\vec{\Omega}$ con la semirecta que va desde Q hacia el centro O, y φ el ángulo de $\vec{\Omega}$ con relación a una normal cualquiera, por Q, a la recta radial (ver fig. 2).

De la figura se obtiene la relación $\cos \theta' = + \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \theta}$ y la fórmula (3) queda:

$$F_0(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\Phi_0 + \frac{1}{\Sigma_s} \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \Phi_0 \right]$$

La corriente que atraviesa una superficie normal al radio en Q, es:

$$J(r) = \iint_{\theta \leq \frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot F_0(\Omega) \cdot d\Omega$$

Que para $r = R$, toma la forma:

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{4\pi} \cdot \left[\Phi_0 + \frac{\cos \theta}{\Sigma_s} \cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right] \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

$$J_o = \frac{\Phi_o}{4} + \frac{1}{6 \cdot \Sigma_s} \cdot \frac{\partial \Phi_o}{\partial n}$$

Pero el valor de la corriente que entra al hueco, atravesando la interfase es:

$$J = \frac{\Phi_o}{4} - \frac{1}{6 \cdot \Sigma_s} \cdot \frac{\partial \Phi_o}{\partial n}$$

Según la teoría de difusión.

Por lo tanto, para la continuidad de la corriente en la interfase:

$$J_o = J$$

es necesario que

$$\frac{\partial \Phi_o}{\partial n} = 0$$

Por consiguiente, el flujo direccional tampoco depende de $\vec{\Omega}$

$$F_o = \frac{1}{4\pi} \cdot \Phi_o$$

Y el flujo integrado es simplemente Φ_o .

$$\Phi(Q) = \text{cte} = \Phi_o$$

El mismo resultado se obtiene para un conducto cilíndrico indefinido en el que Φ_o y $\frac{\partial \Phi_o}{\partial n}$ son independientes del punto de la interfase que se considere.

Si se tratase, por ejemplo, de un conducto cilíndrico axial, en un reactor también cilíndrico pero de altura finita h , habría que considerar la variación axial de Φ_o , agregando un factor global de la forma $\cos\left(\frac{\pi}{h} z\right)$, cuya derivada intervendría también en la fórmula (4).

5°) Flujo entre dos cilindros concéntricos indefinidos.

En el punto Q del canal de aire, establecemos un sistema de coordenadas (ver fig. 3) en el que θ es el ángulo que forma $\vec{\Omega}$ con una dirección paralela al eje del cilindro, mientras que ψ es el ángulo que, la proyección de $\vec{\Omega}$ sobre un plano perpendicular al eje, forma con una dirección perpendicular al citado eje y a la dirección radial que pasa por Q .

En esas condiciones, y por consideraciones geométricas, se obtiene (ver fig. 4):

$$\cos \theta' = + \operatorname{sen} \theta \sqrt{1 - \frac{r_o^2}{R^2} \cos^2 \psi} \quad (5)$$

θ' es el ángulo que $-\vec{\Omega}$ forma con la normal \vec{n} en la interfase.

Si la interfase corresponde al cilindro interior, debe colocarse R_1 en lugar de R . Para la interfase "exterior" debe utilizarse R_2 en lugar de R .

Supondremos, a continuación, que el cilindro interior es una barra "negra"; de manera que el flujo en el gap proviene, exclusivamente, de la superficie cilíndrica exterior. Este es el caso práctico más usual, y se presenta por ejemplo cuando el cilindro citado es una barra de control, o bien una barra de Uranio que, se supone, absorbe todos los neutrones térmicos que a ella llegan.

Las derivadas tangenciales del flujo son de nuevo nulas, la fórmula (4), en unión de la (5) da:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = \text{sen } \theta \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2} \cos^2 \psi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

y de la (3) y la (1):

$$F_0(\vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \left[\Phi_0 + \frac{\cos \theta'}{\Sigma_s} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] \quad (6)$$

$$F_0(\vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \left[\Phi_0 + \frac{\text{sen } \theta}{\Sigma_s} \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2} \cos^2 \psi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] = F(r, \vec{\Omega})$$

Para encontrar el flujo $\Phi(r)$, debemos efectuar la integración de $F(r, \vec{\Omega})$, extendiendo dicha integración a todas las direcciones que, saliendo del punto r , encuentren a la interfase exterior. Dichas direcciones son aquellas para las que el ángulo ψ (ver fig.5), está comprendido entre $-(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ y $+(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ con $\text{sen } \alpha = \frac{R_1}{r}$. Por la simetría del integrando, es suficiente tomar $-(\frac{\pi}{2} - \alpha) \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$, duplicando luego el valor de la integral.

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^\pi \int_{-(\frac{\pi}{2}-\alpha)}^{\frac{\pi}{2}} \left[\Phi_0 + \frac{\text{sen } \theta}{\Sigma_s} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2} \cos^2 \psi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] \text{sen } \theta \, d\theta \, d\psi$$

$$\Phi(r) = \Phi_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) + \frac{1}{4\Sigma_s} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cdot \int_{-(\frac{\pi}{2}-\alpha)}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2} \cos^2 \psi} \cdot d\psi \quad (7)$$

La integral que aparece en (7), puede transformarse en:

$$\begin{aligned}
 \int_{-(\frac{\pi}{2}-\alpha)}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R_2^2} \cos^2 \psi} d\psi &= \int_0^{\pi-\alpha} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R_2^2} \cdot \text{sen}^2 \psi} \cdot d\psi = \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R_2^2} \text{sen}^2 \psi} \cdot d\psi - \int_0^{\alpha} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R_2^2} \text{sen}^2 \psi} \cdot d\psi \\
 &= 2 \cdot E(x) - E(x, y) = E(x, \pi - y) \\
 x &= \text{arc sen } \frac{r}{R} \quad ; \quad y = \text{arc sen } \frac{R_1}{r} = \alpha
 \end{aligned}$$

$E(x)$ y $E(x, y)$ son, respectivamente, las funciones elípticas de segunda especie completa e incompleta (Flugge W. (1954)).

Por lo tanto la (7) queda:

$$\Phi(r) = \Phi_0 \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) + \frac{1}{4 \Sigma_s} \cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \cdot E(x, \pi - y) \quad (8)$$

6°) Ajuste de los valores en el contorno.

a) Por continuidad de corriente.

La corriente sobre la superficie de la interfase exterior es:

$$J(R_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \left[\Phi_0 + \frac{\text{sen } \theta \cdot \text{sen } \psi}{\Sigma_s} \cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right] \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot \text{sen } \psi \cdot d\theta \cdot d\psi$$

que integrada nos da:

$$J(R_2) = \frac{\Phi_0}{4} \cdot \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{1}{6 \Sigma_s} \cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \left(1 - \frac{2 \cdot \alpha_0}{\pi} - \frac{\text{sen } 2 \alpha_0}{\pi}\right) \quad (9)$$

$$\text{con } \text{sen } \alpha_0 = \frac{R_1}{R_2}$$

Pero la corriente que, atravesando la interfase exterior, sale del canal, se computa por la fórmula:

$$J'(R_2) = \frac{\Phi_0}{4} - \frac{1}{6 \Sigma_s} \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \quad (10)$$

Si queremos que haya continuidad de corriente, debemos igualar (9) y (10). De esta igualdad puede ser despejada $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$; obteniéndose:

$$\frac{1}{6 \Sigma_s} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\Phi_o}{4} \frac{R_1}{R_2} \frac{1}{\left(2 - \frac{2\alpha_o}{\pi} - \frac{\text{sen } 2\alpha_o}{\pi}\right)} \quad (11)$$

Introduciendo esto en la fórmula (8), resulta:

$$\Phi(r) = \Phi_o \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{3}{8} \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{E(x, \pi - \alpha)}{2 - \frac{2\alpha_o}{\pi} - \frac{\text{sen } 2\alpha_o}{\pi}} \right\} \quad (12)$$

Por otra parte, la corriente saliente de la interfase interior, debe ser nula, por las suposiciones efectuadas:

$$\frac{\Phi_i}{4} - \frac{1}{6 \Sigma_{si}} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n_i} = 0 \quad (13)$$

(Φ_i = Flujo en la superficie de la barra central)

y por consiguiente, la corriente entrante debe valer:

$$J(R_1) = \frac{\Phi_i}{4} + \frac{1}{6 \Sigma_{si}} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n_i} = \frac{\Phi_i}{2} \quad (14)$$

Si calculamos ahora la corriente entrante por integración de $F(R_1, \Omega)$, tenemos:

$$J(R_1) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \left[\Phi_o + \frac{1}{\Sigma_s} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cdot \text{sen } \theta \cdot \sqrt{1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \cos^2 \psi} \right] \text{sen}^2 \theta \text{ sen } \psi \, d\theta \, d\psi$$

$$J(R_1) = \frac{\Phi_o}{4} + \frac{1}{6 \Sigma_s} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cdot \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{2\alpha_o}{\pi} + \frac{\text{sen } 2\alpha_o}{\pi} \right)$$

Teniendo en cuenta la (11):

$$J(R_1) = \frac{\Phi_o}{2} \cdot \frac{1}{2 - \frac{2\alpha_o}{\pi} - \frac{\text{sen } 2\alpha_o}{\pi}}$$

e igualando a la (14) se consigue la relación

$$\frac{\Phi_o}{\Phi_i} = 2 - \frac{2\alpha_o}{\pi} - \frac{\text{sen } 2\alpha_o}{\pi} \quad (15)$$

Esta fórmula coincide con la encontrada por Newmarch D. (1955), teniendo presente la (13). También, si hacemos:

$$\frac{\Phi_o}{\Phi_i} - 1 = \frac{\Phi_o - \Phi_i}{\Phi_i} = 1 - \frac{2\alpha_o}{\pi} - \frac{\text{sen } 2\alpha_o}{\pi}$$

y consideramos la (14)

$$\Phi_o - \Phi_i = 2 J'_i \left(1 - \frac{2\alpha_o}{\pi} - \frac{\text{sen } 2\alpha_o}{\pi} \right)$$

que concuerda con una fórmula de Mercier. (Según figura en una report de M. Bugaardt-Saclay).

b) Por continuidad de flujo.

La fórmula (12) obtenida por continuidad de corriente, no cumple el requerimiento de la continuidad del flujo. Resulta, en efecto, que

$$\Phi(R_2) \neq \Phi_o \text{ y también } \Phi(R_1) \neq \Phi_i \text{ (Calculable por la (15)).}$$

La razón es simple, la fórmula (10) no puede pretender ser válida para la interfase, ni siquiera en la aproximación de la teoría de difusión. Ella solo sería aplicable en el interior del material que forma la interfase exterior con el aire, o bien en la superficie de separación de dos materiales cuyas $\lambda = \frac{1}{2}$ no difieran considerablemente. Ello no ocurre en nuestro caso, donde suponemos que uno de los medios es el aire. El error de (10) queda reflejado en (12), destruyendo la continuidad del flujo.

Lo anteriormente señalado, permite afirmar que es más lógico pedir la continuidad de flujo que la igualdad de las expresiones (9) y (10).

La continuidad del flujo en $r = R_2$, implica

$$\Phi_o = \Phi(R_2)$$

y $\Phi(R_2)$ se obtiene de la (8), con $\alpha = \alpha_o$ y $x = \frac{\pi}{2}$

$$\Phi_o = \Phi(R_2) = \Phi_o \cdot \left(1 - \frac{\alpha_o}{\pi} \right) + \frac{1}{4 \Sigma_s} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cdot \left[2 E\left(\frac{\pi}{2}\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, \alpha_o\right) \right]$$

Pero $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $E\left(\frac{\pi}{2}, \alpha_o\right) = \text{sen } \alpha_o$. Por lo tanto

$$\frac{1}{4\Sigma_s} \cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} = \Phi_0 \cdot \frac{\alpha_0}{\pi} \cdot \frac{1}{2 - \text{sen } \alpha_0} \quad (16)$$

y reemplazando en la (8).

$$\Phi(r) = \Phi_0 \cdot \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_0}{\pi} \cdot \left[\frac{2 \cdot E(x) - E(x, \alpha)}{2 - \text{sen } \alpha_0} \right] \right\} \quad (17)$$

o sea

$$\Phi(r) = \Phi_0 \cdot \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_0}{\pi} \cdot \frac{E(x, \pi - \alpha)}{2 - \text{sen } \alpha_0} \right\} \quad (17')$$

Por continuidad del flujo en R_1

$$\Phi_i = \Phi(R_1) = \Phi_0 \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2} + \frac{\alpha_0}{\pi} \cdot \frac{2 E(\alpha_0) - E(\alpha_0, \pi/2)}{2 - \text{sen } \alpha_0} \right\}$$

es decir

$$\frac{\Phi_i}{\Phi_0} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha_0}{\pi} \cdot \frac{E(\alpha_0)}{2 - \text{sen } \alpha_0} \quad (18)$$

que solo concuerda con la (15) para los casos extremos

$$\alpha_0 = 0 \quad \text{y} \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2}$$

Es de destacar que las fórmulas (17) y (18) siguen siendo válidas cualquiera sea el coeficiente que se elija para la parte angular (6). En efecto, si hacemos la suposición, más general que (6), de que:

$$F_0(\bar{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \left[\Phi_0 + k \cdot \cos \theta' \right]$$

La (16) valdría nuevamente reemplazando $\frac{1}{4\Sigma_s} \frac{\partial \Phi_0}{\partial n}$ por k ; y las fórmulas (17) y (18) permanecerían intactas.

Si se deseara, $\frac{\partial \Phi_0}{\partial n}$ podría ser elegida de manera que, además del flujo, también la corriente fuese continua (*).

7°) Representación gráfica de la variación radial del flujo neutrónico.

El gráfico N° 1 muestra la variación de $\Phi(r)$ de la fórmula (17) en

(*) Los resultados del N° 4 no serían modificados, si se hubiese partido de la continuidad del flujo, en lugar de la de la corriente.

función de r y para diferentes relaciones de R_2/R_1 .

En todos los casos se ha tomado a Φ_0 como unidad de flujo, y han sido reducidas las distancias $R_2 - R_1$ a un mismo valor. Las líneas punteadas corresponden a los valores dados por la fórmula (12).

Se observa que las curvas presentan las siguientes características globales. Al apartarse de la pared exterior, el flujo aumenta primero (lentamente), hasta pasar por un máximo cercano a dicha pared, luego disminuye cada vez más rápidamente al acercarse a la interfase interior. Cuando $\frac{R_2}{R_1}$ tiende a ∞ , el flujo tiende a ser constante, salvo en las inmediaciones de la pared R_1 donde disminuye rápidamente, acercándose a un valor mitad del que corresponde a la pared R_2 .

Las curvas punteadas tienden a coincidir con las llenas para R_2/R_1 tendiendo a infinito, mientras que para R_2/R_1 tendiendo a 1 la diferencia se hace máxima. En el caso límite, $R_2/R_1 = 1$, (Curva 0) la (17) da correctamente $\Phi(r) = \Phi_0 = 1$ mientras que la (12) da $\Phi(r) = 7/8$ (curva 0').

Lo que quizás es más sorprendente en la marcha de esas curvas, es la existencia de un máximo en el interior del canal. Aparentemente, se ría de esperar una disminución gradual y monótona del flujo.

8°) Explicación de la forma de las curvas.

La fórmula (17) que da el flujo $\Phi(r)$ puede considerarse dividida en dos partes

$$\Phi_1(r) = \Phi_0 \left\{ 1 + 2 \frac{\alpha_0}{\pi} \cdot \frac{E(x)}{2 - \text{sen} \alpha_0} \right\} \quad (20)$$

$$\Phi_2(r) = \Phi_0 \left\{ \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_0}{\pi} \cdot \frac{E(x, \alpha)}{2 - \text{sen} \alpha_0} \right\} \quad (21)$$

$$\Phi(r) = \Phi_1(r) - \Phi_2(r)$$

Las tres funciones se encuentran representadas en el Gráfico II (Para $\frac{R_2}{R_1} = 1,5$). La parte $\Phi_1(r)$ corresponde al flujo neutrónico que se observaría en r si la barra central fuese transparente a los neutrones(*). La parte $\Phi_2(r)$ toma en cuenta el efecto de panta-

(*) Es decir suponiendo que se mantienen fijas las condiciones de contorno, pero que se quita la barra central.

lla de la citada barra.

El efecto de pantalla de $\Phi_2(r)$ es menor en las cercanías de R_2 , pero al aproximarse a R_1 , crece rápidamente. Esto es lo que produce la disminución acentuada del flujo Φ en las inmediaciones de R_1 . Por otra parte, cuando la relación $\frac{R_2}{R_1}$ es grande, el efecto pantalla se hace menos sensible y solo es apreciable cuando r es poco mayor que R_1 . En ese caso α_0 es muy pequeño y las funciones se reducen a

$$\Phi_1(r) = \Phi_0 \quad \Phi_2(r) = \Phi_0 \cdot \frac{\alpha}{\pi}$$

Se ve entonces que el flujo total debe ser prácticamente constante, salvo cerca de R_1 . Por otra parte, para $r=R_1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $\Phi_2 = \frac{\Phi_0}{2}$. Lo que significa que, sobre la interfase interior, la barra central tapa la mitad del flujo Φ_0 que proviene de la pared exterior. Esto explica porque la curva límite para $\frac{R_2}{R_1} = \infty$ es constante e igual a Φ_0 , salvo para $r=R_1$ donde vale $\frac{1}{2} \Phi_0$.

En la (20) se nota la influencia de dos sumandos. Unos de ellos es constante e igual a Φ_0 y proviene de la parte independiente del ángulo en la fórmula (6) o en la (19). El segundo sumando proviene de la parte angular de (6) ó (19). Esta parte angular indica que el flujo es mayor en la dirección normal a la interfase ($\theta' = 0$), disminuyendo para ángulos mayores, hasta anularse (la parte angular) para ($\theta' = \frac{\pi}{2}$). Ello implica que los neutrones entran al canal, preferentemente hacia adelante. Por lo tanto, esta parte debe ser máxima en el eje del cilindro ($r = 0$), pues es allí donde se recibe el máximo de contribuciones según direcciones perpendiculares a la interfase. Si nos alejamos del eje, vamos perdiendo contribuciones centrales y las superficies laterales se ven "más de costado", bajo ángulos mayores, disminuyendo así el valor de $\Phi_1(r)$. La representación gráfica de $\Phi_1(r)$ confirma todas estas especulaciones. Las formas de $\Phi_1(r)$ y $\Phi_2(r)$ hacen evidente la existencia del máximo en $\Phi(r)$.

9°) Método de los polinomios de Legendre.

Nos contentaremos con sólo aplicar este método a los casos sencillos de una esfera hueca y de un conducto cilíndrico hueco, que ya han sido tratados en el número 4 con la aproximación de la teoría de difusión.

La función $F_0(\vec{\Omega})$, que da el flujo direccional en el contorno, se supone ahora que ha sido encontrada, resolviendo las ecuaciones que

resultan en el material al aplicar dicho método. En realidad, siendo $\mu' = \cos \theta'$ el coseno del ángulo que forman $-\vec{\Omega}$ y \vec{n} (normal exterior el hueco), se obtendrían así los coeficientes del desarrollo.

$$F_0(\mu') = f_0 + f_1 \cdot \mu' + f_2 \cdot P_2(\mu') + \dots = \sum_{n=0} f_n \cdot P_n(\mu')$$

La función $F_0(\mu')$ debe cumplir la condición de contorno de ser $F_0(-\mu') = F_0(\mu')$, pues el flujo que en un cierto punto P entra en la dirección $-\mu'$, es idéntico al que sale en la dirección μ' , en el punto Q que queda unido con P por la recta que forma el ángulo θ' con la normal a la interfase en Q.

La condición $F_0(-\mu') = F_0(\mu')$ implica $f_1 = f_3 = \dots = f_{2n+1} = \dots = 0$

pues los polinomios de orden impar $P_{2n+1}(\mu')$ no cumplen con esa condición:

$$P_{2n+1}(-\mu') = -P_{2n+1}(\mu')$$

El desarrollo de $F_0(\mu')$ es entonces el siguiente

$$F_0(\mu') = \sum_{n=0} f_{2n} \cdot P_{2n}(\mu') \quad (22)$$

a) Hueco esférico.

El sistema de coordenadas que utilizaremos es el mismo que el correspondiente a la figura 2. Teníamos:

$$\mu' = \cos \theta' = \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \theta}$$

y además

$$\Phi(r) = \int F_0(\vec{\Omega}) d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_0(\mu') \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\psi$$

La integración según ψ puede hacerse de inmediato:

$$\Phi(r) = 2\pi \int_0^\pi F_0(\mu') \sin \theta \cdot d\theta = 2\pi \cdot \sum_{n=0} f_{2n} \cdot \int_0^\pi P_{2n}(\mu') \sin \theta \cdot d\theta$$

La integración restante no ofrece dificultades. El desarrollo de

$\Phi(r)$ que resulta es:

$$\Phi(r) = 4\pi \left\{ f_0 + f_2 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + f_4 \cdot \left(1 - \frac{10}{3} \frac{r^2}{R^2} + \frac{7}{3} \frac{r^4}{R^4}\right) + \right. \\ \left. + f_6 \cdot \left(1 - 7 \frac{r^2}{R^2} + \frac{63}{5} \frac{r^4}{R^4} - \frac{33}{5} \frac{r^6}{R^6}\right) + \dots \right. \quad (23)$$

El significado de f_0 es sencillo y se obtiene integrando la (22) con relación a μ' ; es decir hallando el flujo total Φ_0 en el contorno:

$$\Phi_0 = \iint F_0(\mu') d\mu' d\Omega = 4\pi f_0$$

Los demás términos no contribuyen porque $\int_0^{\pi} P_{2n}(\mu') d\mu' = 0$ para $n \neq 0$

Se ve además que $\Phi(r)$ es continua para $r = R$ pues en ese punto se anulan todos los términos de la suma, salvo el primero:

$$\Phi(R) = 4\pi f_0 = \Phi_0$$

El coeficiente f_1 es, como se sabe, proporcional a la corriente neta en la interfase. La condición de contorno impone pues, la anulación de dicha corriente.

Se aprecia que el análisis del número 4, da resultados correctos hasta el orden en que es válida la teoría de difusión (que sólo incluye P_0 y P_1). La fórmula (23) agrega correcciones que dependen de los detalles de la distribución angular en cada punto del contorno.

b) Canal cilíndrico.

En este caso, utilizando el sistema de coordenadas indicado en la figura 3, es

$$\mu' = \cos \theta' = \sin \theta \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2} \cos^2 \psi}$$

y las integrales según θ , producen ahora el siguiente resultado:

$$\Phi(r) = 4\pi \left\{ f_0 + \frac{1}{2} f_2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{1}{4} f_4 \left(\frac{5}{6} - \frac{13}{3} \frac{r^2}{R^2} + \frac{7}{2} \frac{r^4}{R^4}\right) + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{16} \cdot f_6 \left(\frac{13}{5} - \frac{127}{5} \frac{r^2}{R^2} + \frac{279}{5} \frac{r^4}{R^4} - 33 \frac{r^6}{R^6}\right) + \dots \right\} \quad (24)$$

De nuevo, se cumple la continuidad en $r = R$

$$\Phi(R) = 4\pi f_0$$

Las fórmulas (23) y (24) indican que el flujo neutrónico en el interior de un hueco, esférico o cilíndrico, no tiene por qué ser constante. Ello ocurre solo hasta la aproximación de la teoría de difusión; pero en aproximaciones mayores existen términos correctivos que tienen en cuenta los detalles finos de la distribución angular del flujo neutrónico.

10°) Conclusiones.

La distribución del flujo neutrónico en el interior de un hueco, depende esencialmente de los valores de contorno y de la geometría del problema.

En un hueco esférico o cilíndrico, el flujo es prácticamente constante, pero puede variar, en detalle, si la distribución angular contiene potencias de $\cos \Theta'$ superiores a la primera. (Tal como lo demuestra el análisis del punto 9).

Hemos calculado la distribución del flujo entre dos cilindros concéntricos, en la aproximación de la teoría de difusión, y suponiendo perfectamente absorbente al cilindro interior. El flujo resultante no es lineal y presenta un máximo en el interior del conducto.

Es de destacar, por último, que casi todos los desarrollos son válidos aunque el flujo de neutrones no sea térmico o, ni siquiera, monoenergéticos. Siempre, claro está; que los valores de contorno tengan la forma supuesta.

11°) Apéndice.

El máximo que presenta el flujo $\Phi(r)$, dado por (17'), puede ser encontrado de la manera usual, derivando e igualando a cero aquella expresión. Resulta así la expresión trascendente:

$$F(x, \pi - y) - E(x, \pi - y) = [2 - \operatorname{sen} \alpha_0 + \cos \alpha_0 \cdot \alpha_0] \operatorname{tg} y \cdot \alpha_0^{-1} \quad (25)$$

Donde $F(x, y)$ es la función elíptica incompleta de primera especie (Flugge W)

$$x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} r/R_2 \quad ; \quad y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} R_1/r$$

$$\alpha_0 = \operatorname{arc} \operatorname{sen} R_1/R_2$$

Si variamos r , desde $r=R_1$ hasta $r=R_2$, la $tg.$ y varía desde ∞ hasta $1/\sqrt{R_2^2/R_1^2 - 1}$. Por su parte, el miembro de la izquierda varía desde $F(x_0) - E(x_0)$, hasta $F(\pi/2, \pi - x_0) - E(\pi/2, \pi - x_0) = \infty$

Por consiguiente, la (25) tiene siempre solución, salvo que sea nulo factor de $tg y$, cosa que en nuestro caso es físicamente imposible.

BIBLIOGRAFIA

- GLASSTONE S. and EDLUNG M.C. The Elements of Nuclear Reactor Theory.(1952).
- NEWMARCH D.A. A Modification to the Diffusion Theory of the Thermal Fine Structure in a Reactor. J. Nuclear Energy. Vol.a N° 1 (August)1955.
- FLUGGE W. 4 Place Tables of Transcendental Functions. (1954)

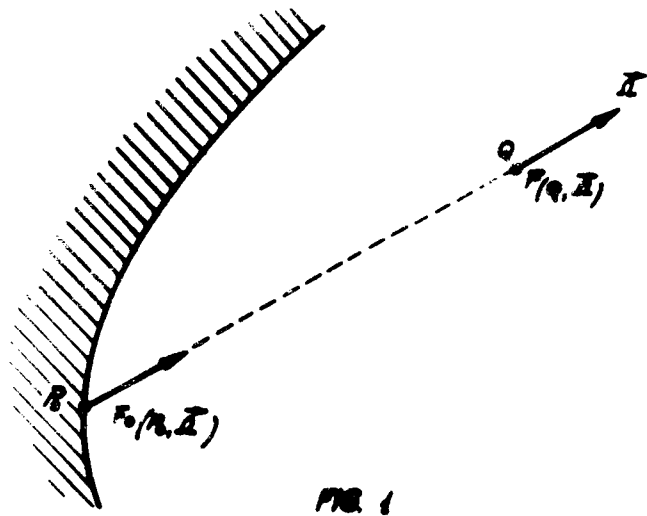


FIG. 1

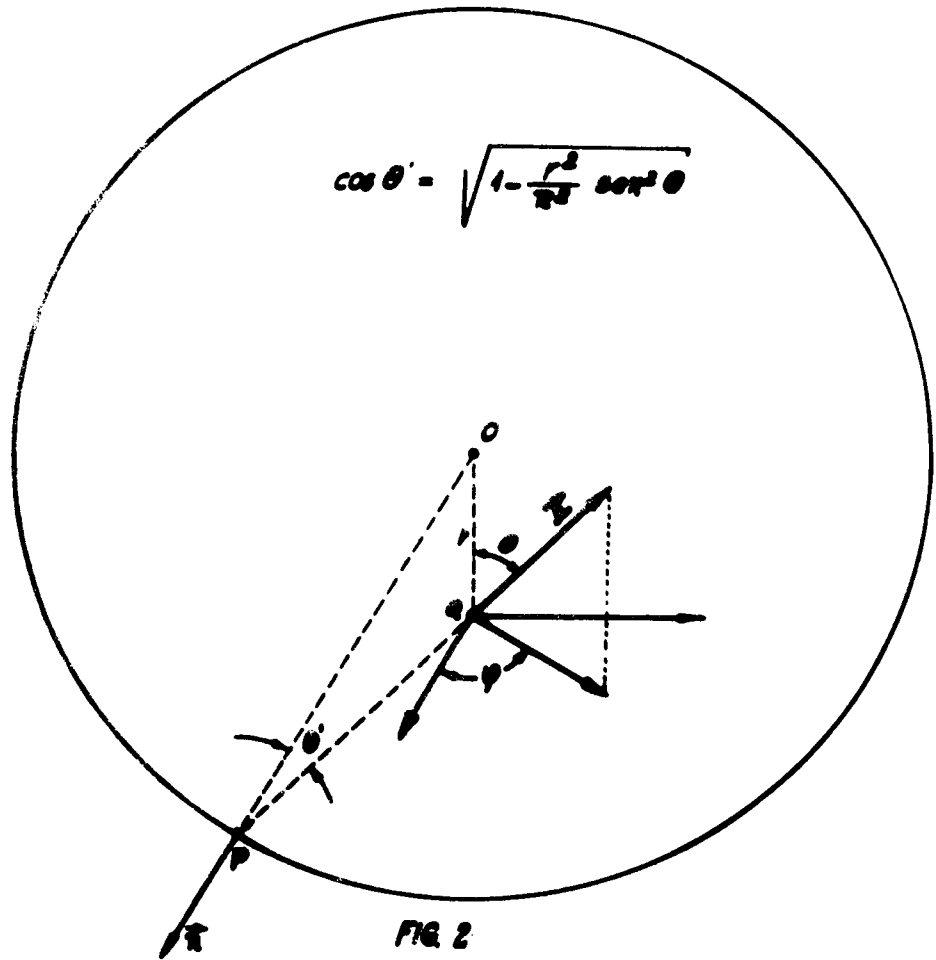


FIG. 2

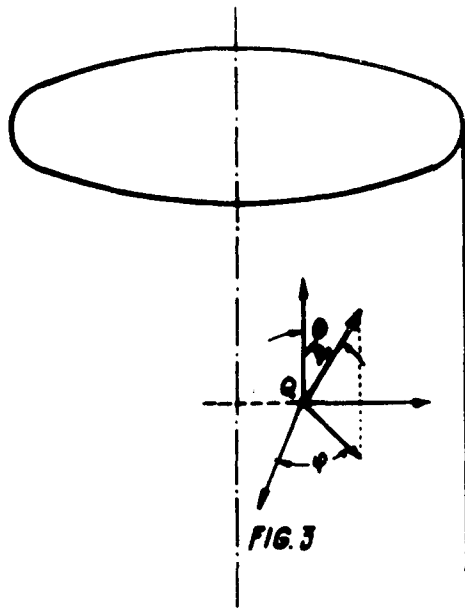


FIG. 3

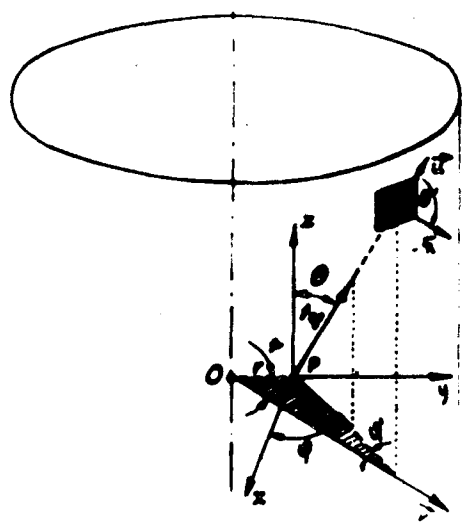


FIG. 4

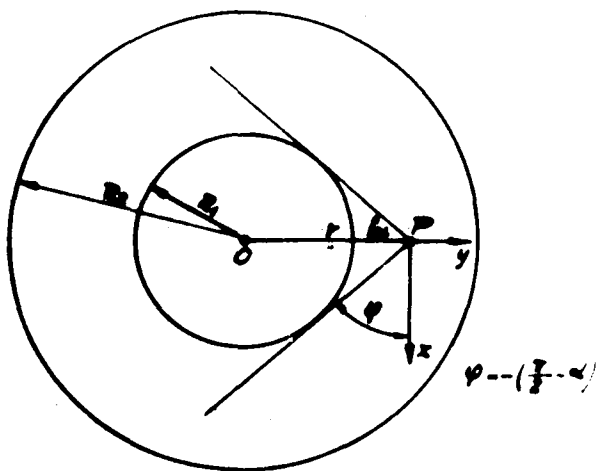
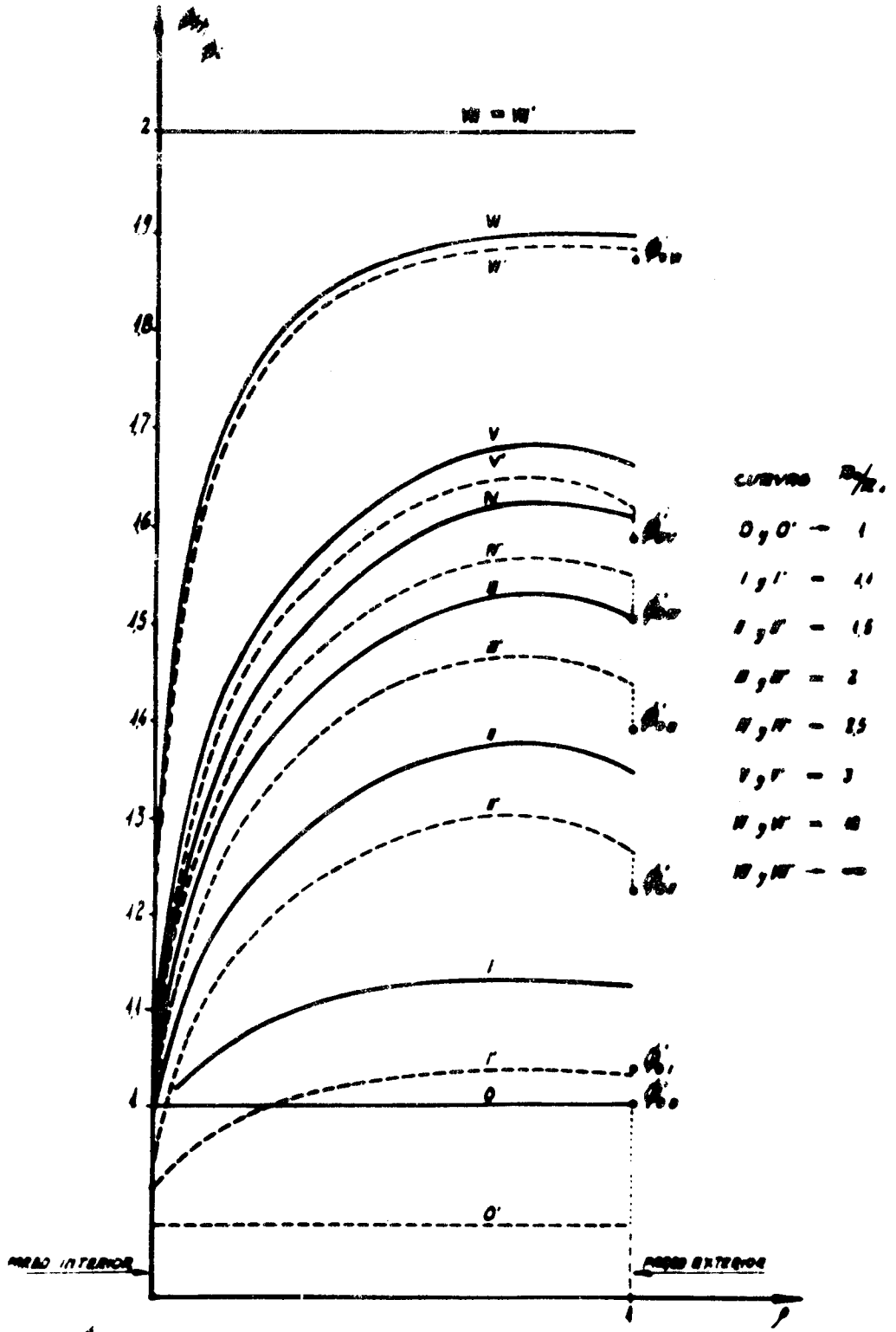


FIG. 5



SON FLUJOS EN LA INTERFASE EXTERIOR, CALCULADOS CON LA FORMULA (45)

GRAFICO: I

