

messenen Intensitäten, um die Intensitäten der Ionen  $D^+$ ,  $H_3^+$ , und  $H_2D^+$  zu erhalten.

2. Umrechnung des gemessenen Gemisches von 51,25%  $H_2$ : 48,75%  $D_2$  auf 50%  $H_2$ : 50%  $D_2$ .

3. Berechnung der Ionenkonzentrationen  $\gamma_M$  in der Entladung mit  $\bar{\alpha}_k^i$  als oberer und  $\underline{\alpha}_k^i$  als unterer Grenzwert.

Tab. 2 bringt die schrittweise gewonnenen Grenzwerte für die prozentuale Häufigkeit der einzelnen Ionenkomponenten im Plasma einer Entladung mit  $I_E = 110$  mA,  $p = 0,74$  Torr und einer Mischung von 50%  $H_2$ : 50%  $D_2$ . Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} 1,31 < [D^+]/[H^+] < 1,41; \\ 1,61 < [D_3^+]/[H_3^+] < 1,76; \\ 1,15 < [HD_2^+]/[H_2D^+] < 1,18. \end{aligned}$$

Wenn man annimmt, daß sich die 3-atomigen Ionen durch Anlagerung eines Atomions an ein Molekül im Dreierstoß bilden:  $H^+ + H_2 + M = H_3^+ + M$  weil dieser Prozeß energetisch stark begünstigt ist

gegenüber:  $H_2^+ + H_2 = H_3^+ + H$  und weil der Prozeß  $H_2^+ + H + M = H_3^+ + M$  sehr viel seltener ist wegen der geringen Molekülionenkonzentration, so kann man das starke Überwiegen der  $D_3^+$ - über die  $H_3^+$ -Ionen nur so erklären, daß die Reaktion  $D^+ + D_2 \rightarrow D_3^+$  gegenüber der Reaktion  $H^+ + H_2 \rightarrow H_3^+$  bevorzugt ist. Der Grund liegt vielleicht in den Unterschieden der Nullpunktenergien und Schwingungsenergieterme des  $H_3^+$ - und  $D_3^+$ -Ions. Das Überwiegen der  $D_3^+$ - über die  $H_3^+$ -Ionen wird durch neue Untersuchungen über die Isotopenanreicherung in stromstarken Entladungen ( $j \approx 8$  [A cm<sup>-2</sup>]) bestätigt, bei denen die stationäre Atomkonzentration größer als 97% ist. Die Atomkonzentrationen des Wasserstoffs und des Deuteriums können sich hier nur noch wenig unterscheiden, so daß der gefundene Trenneffekt nicht durch die unterschiedliche Rekombinationsgeschwindigkeit erklärt werden kann. In diesem Falle ist anzunehmen, daß der Trenneffekt auf der bevorzugten Bildung schwerer 3-atomiger Ionen beruht.

## Zur Theorie des Breiteneffektes der Nukleonenkomponente der kosmischen Strahlung

Von JUAN G. ROEDERER\*

Aus der Comisión Nacional de la Energía Atómica, Buenos Aires

(Z. Naturforschg. 9a, 740—747 [1954]; eingegangen am 28. Juni 1954)

In der folgenden Arbeit wird die Theorie der Nukleonenkaskade im Hinblick auf den Breiteneffekt entwickelt. Ausgehend von den Diffusionsgleichungen gelangt man für den Fall eines abgeschnittenen Primärspektrums zu geschlossenen Ausdrücken für die Intensität der Protonen und Neutronen; an Hand des von Budini und Molière verwendeten Erzeugungsspektrums werden numerische Rechnungen durchgeführt. U. a. werden dargestellt: die Absorption der Nukleonen verschiedener Energien, die Abhängigkeit der Absorptionslänge von der atmosphärischen Tiefe für verschiedene Energien, ferner der integrale Breiteneffekt für Protonen und Neutronen als Funktion der Energie, die integrale Intensität der Protonen und Neutronen als Funktion der geomagnetischen Breite usw. Schließlich wird ein Vergleich der Theorie mit den vorliegenden Experimenten gezogen.

Über die Theorie der Nukleonenkaskade liegt eine Reihe grundlegender Arbeiten vor, die entweder von den Diffusionsgleichungen<sup>1-4</sup> oder von Generationsbilanzen<sup>5</sup> ausgehen, um unter Verwen-

dung verschiedener Annahmen über Erzeugungsspektrum<sup>6</sup> und Primärspektrum zu den Intensitäten der Nukleonenkomponente zu gelangen. In sämtlichen Arbeiten wurde das Erzeugungsspektrum als

\* Z. Zt. am Max-Planck-Institut für Physik in Göttingen.

<sup>1</sup> W. Heitler u. L. Jánossy, Proc. Phys. Soc. Lond. (A) 62, 374, 669 [1949].

<sup>2</sup> H. Messel, zusammengefaßt in J. G. Wilson, Progress in Cosmic Ray Physics, Volume II (1954); North Holland Publishing Company.

<sup>3</sup> P. Caldirola, R. Fieschi u. P. Gulmanelli, Nuovo Cim. 9, 5 [1952].

<sup>4</sup> B. Rossi, High Energy Particles; Prentice Hall Inc., New York 1952.

<sup>5</sup> P. Budini u. G. Molière, in W. Heisenberg, Kosmische Strahlung, 2. Auflage (1953); Springer-Verlag.

<sup>6</sup> Mit „Erzeugungsspektrum“ ist ganz allgemein das Spektrum der in einem Kernprozeß erzeugten oder angestoßenen Teilchen gemeint. Wir bezeichnen es hier mit  $f(E, E')dE$ , wobei  $E'$  die Energie des sternerzeugenden Teilchens ist.

homogen<sup>7</sup> angenommen; für seine spezielle Form wurden jeweils verschiedene Ausdrücke verwendet. Das Primärspektrum wurde meistens als potenzförmig vorausgesetzt, unter Berücksichtigung der magnetischen Abschneideenergie. Budini und Molière<sup>5</sup> gingen von einem der Wirklichkeit besser entsprechenden, nicht-potenzförmigen Spektrum aus, allerdings ohne ein Abschneiden zu berücksichtigen, was nur für hohe Breiten gültig ist.

Im folgenden befassen wir uns näher mit der Auswirkung eines Abschneidens des Primärspektrums auf die Nukleonenkaskade und werden versuchen, zu geschlossenen Ausdrücken für die Nukleonenintensität zu gelangen, die in ganz allgemeiner Form alle beobachteten Eigenschaften des Breiteneffektes wiedergeben.

Wir gehen aus von dem bekannten System:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h} P(E, h) &= -P(E, h) \\ &+ \int_E^\infty [P(E', h) + N(E', h)] f(E, E') dE', \\ \frac{\partial}{\partial h} N(E, h) &= -N(E, h) \\ &+ \int_E^\infty [P(E', h) + N(E', h)] f(E, E') dE' \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$P(E, 0) dE$  = Primärspektrum der Protonen,  $N(E, 0) dE$  = Primärspektrum der Neutronen. Ferner sind  $P(E, h) dE$  und  $N(E, h) dE$  die Spektren der Protonen und Neutronen in der atmosphärischen Tiefe  $h$  (gemessen in Stoßlängen  $l$ ),  $f(E, E')$  ist das Erzeugungsspektrum der Protonen oder Neutronen. Die Gleichheit der Erzeugungsspektren sowie der Stoßlängen  $l$  für Protonen und Neutronen wird vorausgesetzt. Den Energieverlust der Protonen durch Ionisation haben wir vernachlässigt, beschränken uns also auf Energien  $> 1$  GeV.

Zur Lösung dieses Systems betrachten wir zunächst die Lösung der resultierenden Gleichung für  $I(E, h) = P(E, h) + N(E, h)$  ( $I$ : Intensität der Nukleonen):

$$\frac{\partial}{\partial h} I(E, h) = -I(E, h) + \int_E^\infty I(E', h) f(E, E') dE'$$

$[f(E, E')$  ist jetzt das Erzeugungsspektrum für Nukleonen].

<sup>7</sup> Also der Form  $f(E/E') dE/E'$ ; physikalisch bedeutet dies, daß die Form des Spektrums als von der

Versucht man eine Lösung durch Separation:  $I(E, h) = g(E) \cdot p(h)$ , so erhält man für  $g(E)$  und  $p(h)$ :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{g(E)} \int_E^\infty g(E') f(E, E') dE' &= -a, \\ \frac{dp}{dh} + ap &= 0; \end{aligned}$$

( $a$ : Separationskonstante)

$g(E)$  muß also eine Eigenfunktion des Kernes  $f(E, E')$  sein, mit dem Eigenwert  $1-a$ . Die Funktion  $p(h)$  verhält sich dann exponentiell:

$$p(h) = p_0 \cdot \exp(-ah).$$

Ein Primärspektrum, welches eine Eigenfunktion des Erzeugungsspektrums ist, absorbiert sich also exponentiell mit der Absorptionslänge  $L = 1/a$ , wobei  $1-a$  der zugehörige Eigenwert ist.

Entwickelt man nun das Primärspektrum nach den Eigenfunktionen des Kernes  $f(E, E')$  (die zwar vollständig, aber nicht orthogonal zu sein brauchen):

$$I(E, 0) = \sum_s c_s g_s(E) \quad (\text{Summe oder Integral})$$

erhält man als allgemeine Lösung:

$$I(E, h) = \sum_s c_s g_s(E) e^{-a_s h}.$$

Unter der einzigen Voraussetzung, daß  $f(E, E') dE'$  homogen, d. h. der Form  $f(\eta) d\eta$  ( $\eta = E/E'$ ) sein soll, erhält man als Eigenfunktionen die Potenzausdrücke  $E^{-s}$  ( $s$  im allgemeinen komplex) mit den Eigenwerten

$$1 - a_s = \int_0^1 \eta^{s-1} f(\eta) d\eta = m_f(s-1)$$

[Mellin-Transformierte von  $f(\eta)$ ].

Entwickelt man also das Primärspektrum nach den Eigenfunktionen  $E^{-s}$ :

$$I(E, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} c(s) E^{-s} ds,$$

wobei

$$c(s) = \int_0^\infty E^{s-1} I(E, 0) dE = m_0(s-1), \quad (1)$$

gelangt man sofort zur bekannten Lösung:

$$I(E, h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} m_0(s) E^{-(s+1)} e^{-[1-m_f(s)]h} ds,$$

primären Energie  $E'$  unabhängig angenommen wird (Bremsstrahlungsprozeß).

bzw. für Protonen und Neutronen getrennt:

$$\begin{aligned}
 P(E, h) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{m_{op}(s) + m_{on}(s)}{2} e^{-[1-m_f(s)]h} E^{-(s+1)} ds \\
 &\quad + \frac{P(E, 0) - N(E, 0)}{2} e^{-h}, \\
 N(E, h) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{m_{op}(s) + m_{on}(s)}{2} e^{-[1-m_f(s)]h} E^{-(s+1)} ds \\
 &\quad - \frac{P(E, 0) - N(E, 0)}{2} e^{-h};
 \end{aligned} \tag{2}$$

$m_{op}(s)$  und  $m_{on}(s)$  sind die Mellin-Transformierten der Primärspektren von Protonen und Neutronen. Gelegentlich genügt es, statt der komplexen Entwicklung (1) die Entwicklung nach reellen Potenzen  $E^{-n}$  ( $n$ : natürliche Zahl) durchzuführen.

Für ein einziges einfallendes Nukleon der Energie  $E_0$  (Einzelkaskade), z. B. ein Proton, d. h. für die Anfangsbedingungen:

$$P(E, 0) = \delta(E - E_0) \text{ und } N(E, 0) = 0,$$

lauten die Lösungen (2):

$$\begin{aligned}
 P^*(E, E_0, h) &= \frac{e^{-h}}{2E} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{m_f(s)h} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s ds \\
 &\quad + \frac{e^{-h}}{2} \delta(E - E_0), \\
 N^*(E, E_0, h) &= \frac{e^{-h}}{2E} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{m_f(s)h} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s ds \\
 &\quad - \frac{e^{-h}}{2} \delta(E - E_0).
 \end{aligned}$$

Wir schreiben  $P(E, E_0, h)$ , um damit die Abhängigkeit von  $E_0$  hervorzuheben. Das Integral

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}$$

kann in den folgenden Ausdruck umgeformt werden:

$$I = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \frac{e^{m_f(s)h}}{s} ds$$

(wobei  $t = \ln(E_0/E)$  ist). Dabei kann leicht gezeigt werden, daß

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \frac{e^{m_f(s)h}}{s} ds = \begin{cases} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{e^{m_f(s)h}}{s} \right) & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

( $\mathcal{L}^{-1}$ : Laplace-Rücktransformation). Außerdem gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \frac{e^{m_f(s)h}}{s} ds = 1 \quad \text{für } t \rightarrow +0,$$

allerdings unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen über das analytische Verhalten der Funktion  $m_f(s)$ , die aber bei den in Frage kommenden Funktionen  $f(\eta)$  erfüllt werden.

Bezeichnet man  $\mathcal{L}^{-1}(e^{m_f(s)h}/s)$  durch  $G(t, h)$  (oder gelegentlich  $G(E/E_0, h)$ ), so erhält man für  $I$ :

$$I = \frac{\partial}{\partial t} [H(t) \cdot G(t, h)] \quad [H(t): \text{Heaviside-Funktion}].$$

Führt man nun die Ableitung durch und berücksichtigt man die Eigenschaften der Heaviside- und  $\delta$ -Funktionen, so gelangt man schließlich zu den Ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 P^*(E, E_0, h) &= -\frac{e^{-h}}{2E_0} H\left(1 - \frac{E}{E_0}\right) \frac{\partial}{\partial \eta} G(\eta, h) \\
 &\quad + e^{-h} \delta(E - E_0), \\
 N^*(E, E_0, h) &= -\frac{e^{-h}}{2E_0} H\left(1 - \frac{E}{E_0}\right) \frac{\partial}{\partial \eta} G(\eta, h)
 \end{aligned} \tag{3}$$

( $\eta = E/E_0$ ) für die Intensitäten einer Einzelkaskade. Daraus folgt, daß für Energien  $E > E_0$  keine Teilchen vorhanden sind; die  $\delta$ -Funktion zeigt, daß bei  $E = E_0$  das primäre Proton noch mit einer Wahrscheinlichkeit  $\exp(-h)$  vorhanden ist. Für Energien  $E < E_0$  treten die im Medium erzeugten Protonen und Neutronen mit einer Intensität

$$-\frac{e^{-h}}{2E_0} \frac{\partial}{\partial \eta} G(\eta, h)$$

auf. Das integrale Spektrum der Nukleonen ist folglich:

$$I_{\text{int.}}(E, h) = \begin{cases} e^{-h} G\left(\frac{E}{E_0}, h\right) & \text{für } E < E_0 \\ 0 & \text{für } E > E_0. \end{cases}$$

$G(E/E_0, h)$  hat demnach eine unmittelbare physikalische Bedeutung.

Für die von Budini und Molière<sup>5</sup> angegebene Form des Erzeugungsspektrums gilt  $m_f(s) = \gamma/S^\alpha$  ( $\alpha$  und  $\gamma$  sind Konstanten. Nach Budini und Molière ist:  $\gamma = 0,8$  und  $\alpha \approx 1,3$ , für Nukleonen).  $G(E/E_0, h)$  ist dann identisch mit der Funktion  $G_\alpha(z)$  (s. l. c.<sup>5</sup>, S. 377). Dort tritt sie als eine (sehr langsam) konvergente Reihe auf, hier als Laplace-Rücktransformierte. Im Falle  $\alpha = 1$  ist sowohl Reihe als auch Laplace-Rücktransformierte gleich

$$I_0 \left( 2 \sqrt{h \gamma \lg \frac{E_0}{E}} \right)$$

( $I_0$ : Bessel-Funktion 0. Ordnung mit imaginärem Argument). Wir werden künftig den mathematisch viel bequemerem Wert  $\alpha = 1$  benutzen. Einerseits ist der von Budini und Molière bestimmte Wert 1,3 noch ziemlich unsicher, andererseits kann man zeigen, daß in dem uns interessierenden Bereich von  $E/E_0$  (also 0,1—1) solch eine Änderung von  $\alpha$  sich in den Endergebnissen kaum bemerkbar macht.

Kennt man die Lösungen  $P^*$  und  $N^*$  für ein einziges einfallendes Proton, so gewinnt man sofort die Lösungen für irgendein einfallendes Protonenspektrum  $P(E, 0) dE$ :

$$P(E, h) = \int_0^\infty P(E_0, 0) P^*(E, E_0, h) dE_0,$$

$$N(E, h) = \int_0^\infty P(E_0, 0) N^*(E, E_0, h) dE_0.$$

Für ein bei  $E_m$  abgeschnittenes Primärspektrum:

$$P(E, 0) = \begin{cases} k \cdot E^{-s} & \text{für } E > E_m \\ 0 & \text{für } E < E_m \end{cases}, \quad N(E, 0) = 0$$

gelangt man mit Hilfe von (3) zu folgenden Ausdrücken:

$$P(E, h) = -\frac{e^{-h} k E^{-s}}{2} \int_0^{E/E_m} \eta^{s-1} H(1-\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} G(\eta, h) d\eta + e^{-h} k E^{-s} \int_0^{E/E_m} \eta^{s-1} \delta(\eta-1) d\eta,$$

$$N(E, h) = -\frac{e^{-h} k E^{-s}}{2} \int_0^{E/E_m} \eta^{s-1} H(1-\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} G(\eta, h) d\eta$$

( $\eta = E/E_0$ ). Hierbei sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1)  $E \geq E_m$  (kein Breiteneffekt).

Für  $P(E, h)$  gilt dann:

$$P(E, h) = -\frac{e^{-h} k E^{-s}}{2} \cdot \int_0^1 \eta^{s-1} \frac{\partial}{\partial \eta} G(\eta, h) d\eta + e^{-h} k E^{-s} \quad (4)$$

Eine partielle Integration liefert für das Integral:

$$-\int_0^1 \eta^{s-1} \frac{\partial}{\partial \eta} G(\eta, h) d\eta = -1 + (s-1) \int_0^1 \eta^{s-2} G(\eta, h) d\eta$$

[es gilt:  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{s-1} \cdot G(\eta, h) = 0$  für  $s > 1$ ]. Für das zweite Integral gilt:

$$(s-1) \int_0^1 \eta^{s-2} G(\eta, h) d\eta = (s-1) \int_0^\infty e^{-(s-1)t} G(t, h) dt = (s-1) \mathcal{L}[G(t, h)] = e^{m_f(s-1)h} \quad (5)$$

( $t = \ln E_0/E$ ). Hiermit gelangt man sofort zu den bekannten Ausdrücken:

$$P(E, h) = \frac{kE^{-s}}{2} [e^{-h/L} + e^{-h}],$$

$$N(E, h) = \frac{kE^{-s}}{2} [e^{-h/L} - e^{-h}]$$

$$\left( L = \frac{1}{1 - m_f(s-1)} = \text{Absorptionslänge} \right),$$

die allerdings unmittelbar aus (2) zu gewinnen wären.

2)  $E < E_m$  (Breiteneffekt):

Man erhält statt (4):

$$P(E, h) = N(E, h) = -\frac{e^{-h} k E^{-s}}{2} \int_0^{E/E_m} \eta^{s-1} \frac{\partial}{\partial \eta} G(\eta, h) d\eta.$$

Die Integration kann wieder partiell ausgeführt werden; spaltet man schließlich das dadurch erhal-

tene neue Integral in der Form  $\int_0^{E/E_m} = \int_0^1 - \int_{E/E_m}^1$  auf,

und verwendet man den Ausdruck (5) für  $\int_0^1$ , gelangt man zu dem Ausdruck:

$$P(E, h) = N(E, h) = \frac{kE^{-s}}{2} \left[ e^{-h/L} - e^{-h} f\left(\frac{E}{E_m}, h\right) \right], \quad (6)$$

wobei

$$f\left(\frac{E}{E_m}, h\right) = \left(\frac{E}{E_m}\right)^{s-1} G\left(\frac{E}{E_m}, h\right) + (s-1) \int_{E/E_m}^1 \eta^{s-2} G(\eta, h) d\eta. \quad (6a)$$

Ganz allgemeine Betrachtungen gestatten schon hier qualitative Aussagen über den Breiteneffekt der Nukleonenkomponente aufzustellen. Aus (6a) geht hervor, daß  $f(E/E_m, h)$  bei festem  $h$  mit abnehmendem  $E/E_m$  wächst und bei festem  $E/E_m$  mit zunehmendem  $h$  fällt. Außerdem gilt  $f(1, h) = f(E/E_m, 0) = 1$ . Dieses Verhalten gibt den Nukleonen im Energiebereich unterhalb der geomagnetischen Abschneideenergie folgende Eigenschaften:

Die Nukleonen gehören ausschließlich zu einer im Material erzeugten Komponente. Ihre Intensität wächst mit zunehmender Schicht  $h$  zunächst an, erreicht ein Maximum an einer Stelle  $h_{\max}$  — von der man vorläufig nur sagen kann, daß sie sich mit abnehmender Energie gegen immer größere Tiefen verschieben wird — und klingt dann allmählich ab. Bei größeren Tiefen nähert sich die Absorption dem Gesetz  $\exp(-h/L)$ , wie es im Falle eines nicht abgeschnittenen Primärspektrums lauten würde. All das bedeutet, daß sowohl das Anwachsen als auch das Abklingen der Intensität um so langsamer vor sich geht, je energieärmer die in Betracht gezogenen

Um diese Eigenschaften quantitativ zu bestätigen, haben wir die Rechnungen mit der Budini-Molièreschen Form für das Erzeugungsspektrum durchgeführt. Hier verwendeten wir die Werte  $\alpha = 1$  und  $\mathcal{S} = 0,7$  (letzterer, um eine Absorptionslänge

$$L = \frac{60 \text{ g/cm}^2}{1 - \gamma/s} = 120 \text{ g/cm}^2$$

zu erhalten). Die Funktion  $f(E/E_m, h)$  erhält somit die Form:

$$f\left(\frac{E}{E_m}, h\right) = \left(\frac{E}{E_m}\right)^{s-1} I_0 \left(2\sqrt{h\gamma} \lg E_m/E\right) + (s-1) \int_{E/E_m}^1 \eta^{s-2} I_0(2\sqrt{h\gamma} \lg 1/\eta) d\eta.$$

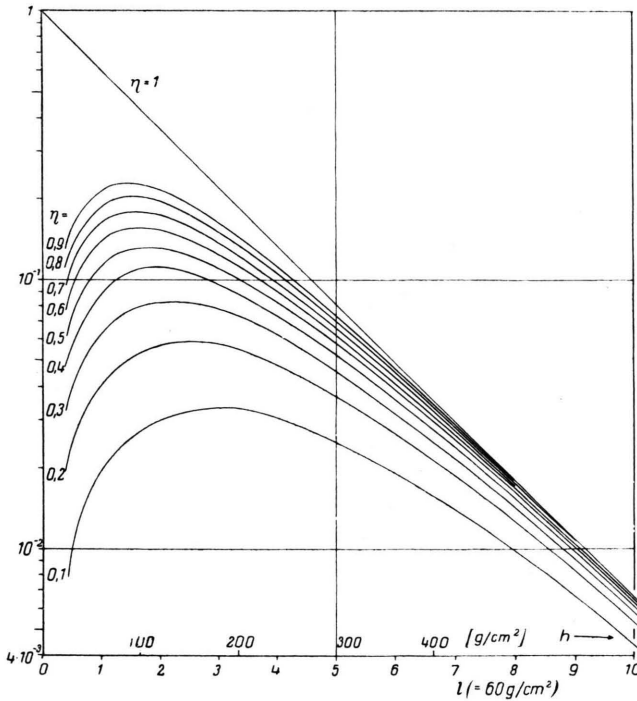


Abb. 1.

Nukleonen sind. Demnach nimmt also die „Absorptionslänge“  $L = [-\partial/\partial h \lg I(E, h)]^{-1}$  an einer Stelle  $h$  mit abnehmender Energie zu. Gleichzeitig folgt daraus, daß der Einfluß eines Abschneidens im Primärspektrum um so geringer wird, je mehr man in die atmosphärische Schicht eindringt: der absolute (differentielle) Breiteneffekt

$$B = \frac{\exp(-h/L)}{\exp(-h/L) - [\exp(-h)] f(E/E_m, h)}$$

wächst mit abnehmender atmosphärischer Tiefe (und mit abnehmender Energie) an.

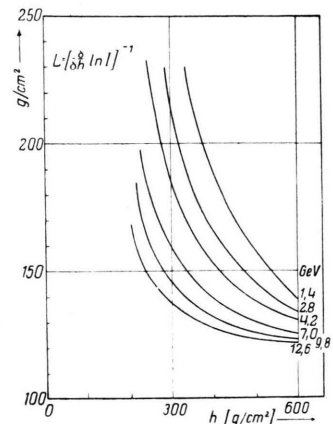


Abb. 2. Absorptionslänge  $[-\partial/\partial h \lg I(E, h)]^{-1}$  der Nukleonen als Funktion der atmosphärischen Tiefe, für den Fall wie bei Abb. 1.

Abb. 1. Absorptionskurven der Nukleonen für ein bei  $E_m$  abgeschnittenes Primärspektrum der Form  $k \cdot E^{-2,4} dE$ . Die Werte  $\eta$  stellen das Verhältnis  $E/E_m$  der Energie der Nukleonen zu der Abschneideenergie dar. Die Kurven sind auf  $h = \infty$  normiert.

Für ein potenzförmiges Primärspektrum mit dem Exponenten  $s = 2,4$  erhalten wir die in Abb. 1 aufgetragenen Intensitätskurven;  $\eta$  ist das Verhältnis  $E/E_m$ . In Abb. 2 ist die Abhängigkeit der Absorptionslänge  $L = [-\partial/\partial h \lg I(E, h)]^{-1}$  von der atmosphärischen Tiefe für verschiedene Energien ( $E/E_m$ ) gezeigt.

Um einen Vergleich mit dem Experiment zu ermöglichen, müssen wir erstens ein der Wirklichkeit besser entsprechendes Primärspektrum verwenden; zweitens müssen integrale Intensitäten ausgerechnet werden. Bekanntlich ist das Primärspektrum

in dem Bereich der für den Breiteneffekt in Frage kommenden Energien nicht potenzförmig, sondern besser durch das Gesetz

$$P(E, 0) = k \cdot (E + B)^{-s}, \quad B \cong 6 \text{ GeV}, \quad s = 2,75 \quad (7)$$

zu beschreiben<sup>8</sup>. Man kann nun zwei Wege beschreiben: der strengere verlangt ein Entwickeln des Spektrums (7) nach den Eigenfunktionen des Erzeugungsspektrums — in diesem Fall genügen die Potenzspektren  $E^{-n}$  ( $n$ : natürliche Zahl), also eine Taylor-Entwicklung. Dadurch erhält man für die Intensität der Nukleonen im nicht abgeschnittenen Fall die Reihe

$$I(E, h) = kE^{-s} \left[ e^{-[1-m_f(s-1)]h} - \frac{B}{E} s e^{-[1-m_f(s)]h} + \left( \frac{B}{E} \right)^2 \frac{s(s+1)}{2!} e^{-[1-m_f(s+1)]h} - \dots \right].$$

Diese Reihe konvergiert jedoch sehr langsam (Budini und Molière rechnen die Intensität aus einer numerischen Integration aus); außerdem ist sie für den Fall eines abgeschnittenen Primärspektrums wenig brauchbar. Ein weniger strenger, aber hinreichend genauer Weg geht von einer Annäherung des Spektrums (7) durch potenzförmige Gebiete aus. Aus dem Ausdruck (6) folgt nämlich sofort, daß  $kE^{-s} [\exp(-h)] \cdot f(E/E_0, h)$  die Intensität der Nukleonen einer Energie  $E$  ist, die von einem potenzförmigen Gebiet  $kE^{-s}$  erzeugt werden, das sich von  $E$  bis  $E_0$  ( $> E$ ) erstreckt. Dies kann nun für die oben vorgeschlagene Zerlegung des Primärspektrums (7) in potenzförmige Gebiete benutzt werden.

Wir haben zu diesem Zweck vorläufig nur zwei potenzförmige Gebiete verwendet; die numerischen Ergebnisse entsprechen demnach wohl nicht ganz genau den Tatsachen, doch ist es, in Anbetracht des spärlichen experimentellen Materials vorläufig unnötig, feinere Näherungen auszuwerten. Das von uns annäherungsweise verwendete Primärspektrum lautet:

$$P(E, 0) dE = \begin{cases} kE^{-2,4} dE & \text{für } E \geq 14 \text{ GeV}^9, \\ 0,45 kE^{-2,1} dE & \text{für } E < 14 \text{ GeV}, \end{cases} \quad (8)$$

$$N(E, 0) dE = 0.$$

Man erhält hiermit den Ausdruck

$$I(E, h) = kE^{-2,4} \cdot \left[ e^{-h/L} - \left\{ f_{2,4} \left( \frac{E}{14}, h \right) - \left( \frac{E}{14} \right)^{0,3} f_{2,1} \left( \frac{E}{14}, h \right) \right\} e^{-h} \right]$$

<sup>8</sup> Vergl. I. c.<sup>5</sup>, Kap. V, § 3a.

<sup>9</sup> Dies gilt nur bis etwa 50 GeV. Der darüber lie-

gende, stärker abfallende Teil des Primärspektrums beeinflusst aber unser Energiegebiet nur ganz gering.

für die Intensität der Nukleonen. Der Index in  $f$  kennzeichnet den Wert von  $s$  (6a). In Abb. 3 ist das Ergebnis für verschiedene Energien [in der Zeichnung als  $E/14$  (GeV) angegeben] aufgetragen. Man beachte die Abhängigkeit der Absorption der Nukleonen von ihren Energien. Bei einer festen atmosphärischen Tiefe nimmt die Absorptionslänge  $L$  mit abnehmender Energie zu. Das stimmt — in diesem Fall auch quantitativ — gut mit den Rechnungen von Budini und Molière überein (s. I. c.<sup>5</sup>, S. 382).

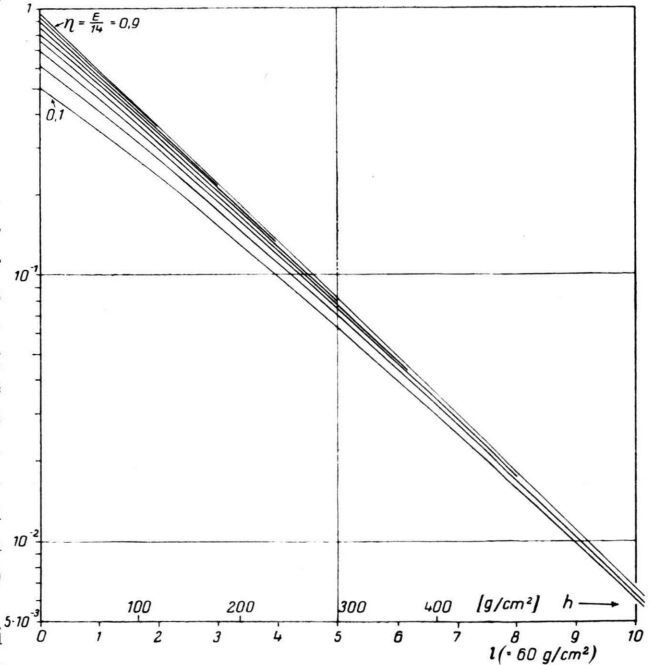


Abb. 3. Absorptionskurven der Nukleonen für ein Primärspektrum der Form (7), normiert auf  $h = \infty \cdot \eta = 0,9; 0,8; \dots; 0,1$ .

Ist das Spektrum (8) nun bei  $E_m$  abgeschnitten, so erhält man für die Intensitäten:

$$P(E, h) = N(E, h) = \frac{kE^{-2,4}}{2} \cdot \left\{ e^{-h/L} - \left[ f_{2,4} \left( \frac{E}{14}, h \right) - \left( \frac{E}{14} \right)^{0,3} \left\{ f_{2,1} \left( \frac{E}{14}, h \right) - f_{2,1} \left( \frac{E}{E_m}, h \right) \right\} \right] e^{-h} \right\}.$$

Dieser Ausdruck hat wiederum die Form:

$$\frac{kE^{-2,4}}{2} [e^{-h/L} - e^{-h} \Phi(E, E_m, h)].$$

In der Funktion  $\Phi$  ist jetzt jedoch die Homogenität in  $E$  und  $E_m$  verlorengegangen. Für  $E_m = 14$  GeV stimmt das Ergebnis mit dem Ausdruck (6) (also Abb. 1) überein.

In Abb. 4 ist das Verhältnis  $B = I_p/I_0$  der integralen Intensitäten am Pol (bzw. in hohen Breiten) zu der Intensität am geomagnetischen Äquator ein-

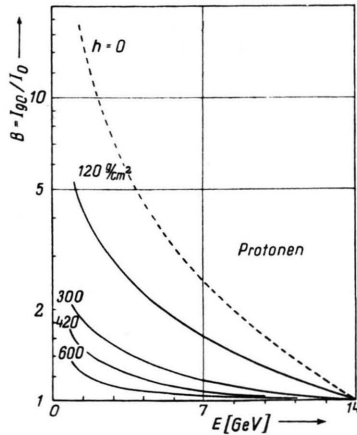


Abb. 4 a. Integraler Breiteneffekt  $B = I_{90}/I_0$  zwischen Pol und Äquator für Protonen, als Funktion der Energie und für verschiedene atmosphärische Tiefen.

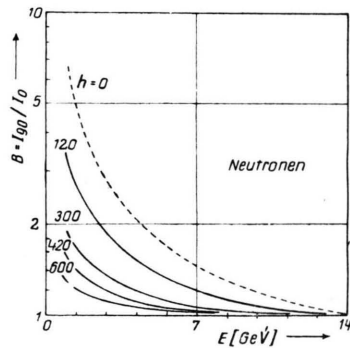


Abb. 4 b. Item Abb. 4 a, für Neutronen. Für den Breiteneffekt der Neutronen am Rande der Atmosphäre ( $h=0$ ) gilt:  $B_n = B_p / (1 + \lg(E/14))$ , wobei  $B_p$  der Breiteneffekt der Protonen bei  $h=0$  ist.

getragen, als Funktion der Energie und für verschiedene atmosphärische Tiefen, getrennt für Protonen und Neutronen. Man beachte, daß der Breiteneffekt  $B$  für die Neutronen kleiner ausfällt, als für Protonen. Das folgt daraus, daß in unserem Fall die Neutronen immer (also auch in hohen Breiten) eine in der Atmosphäre entstandene Komponente bilden, während sich der Charakter (bzw. die Intensität) der Protonenkomponente an der Abschneidebreite sprunghaft ändert, d. h. von einem

Gemisch aus übrig gebliebenen Primären und im Absorber entstandenen Teilchen zu einer ausschließlich im Absorber entstandenen Komponente übergeht.

In Abb. 5 ist die integrale Intensität der Protonen und Neutronen als Funktion der geomagnetischen Breite aufgetragen. Abb. 5 a zeigt die Kurven für Protonen und Neutronen von Energien größer als 1,4 GeV, Abb. 5 b für Teilchen mit mehr als 4,2 GeV. Alle Kurven wurden auf den geomagnetischen Pol normiert und für drei verschiedene Tiefen aufgetragen.

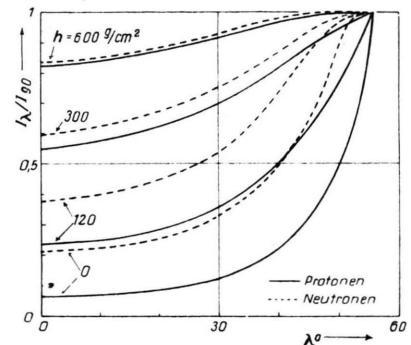


Abb. 5 a. Intensität der Nukleonen mit Energien  $\geq 1,4$  GeV, als Funktion der geomagnetischen Breite, für verschiedene atmosphärische Tiefen (normiert am geomagnetischen Pol).

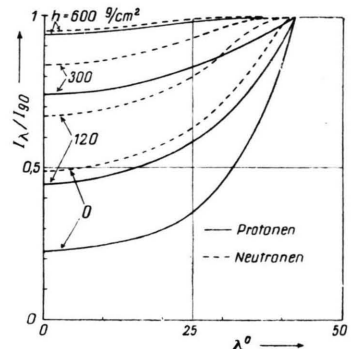


Abb. 5 b. Item Abb. 5 a, für Nukleonen mit Energien  $\geq 4,2$  GeV.

Hier entspricht der Sprung der Neigung der integralen Intensität der Protonen bei der Abschneidebreite dem eben besprochenen Sprung der differentiellen Intensität. Bei tieferen Schichten ist dieser Sprung nicht mehr erkennbar: Protonen und Neutronen sind nahezu im Gleichgewicht.

All diese numerischen Ergebnisse erfahren natürlich Änderungen — die aber nicht wesentlich sein dürften —, wenn man noch das Vorkommen schwerer Kerne in der Primärstrahlung mit in Rechnung

zieht; außerdem wurde ja nur eine grobe Näherung des Primärpektrums (7) benutzt. Schließlich handelt es sich hier nur um eine eindimensionale Theorie, in der die Winkelverteilungen der Nukleonen im Primärpektrum und in den Kernprozessen nicht berücksichtigt wurden.

Zur Zeit liegen noch recht wenig Experimente über den Breiteneffekt der Nukleonenkomponente vor<sup>10-16</sup>. Ein Vergleich mit unseren theoretischen Ergebnissen wird außerdem dadurch erschwert, daß die Energieintervalle bei den Experimenten nur sehr grob abgeschätzt werden können; auch liegen sie meistens unterhalb der Gültigkeitsgrenze unserer Theorie (~1 GeV). Schließlich ist bei fast allen Experimenten eine Gross-Transformation durchzuführen, um die gemessenen Intensitäten in vertikale Intensitäten umzurechnen; diese Transformation trägt zu einer weiteren Unsicherheit bei.

Die dem Vergleich mit der Theorie zur Verfügung stehenden experimentellen Größen sind vorläufig nur die Absorptionslänge und der integrale Breiten-effekt.

Der Verfasser<sup>14</sup> findet mit Photoplatten, die in -15° geomagnetischer Breite<sup>17</sup> exponiert wurden, die Werte (in 600 g/cm<sup>2</sup> atmosphärischer Tiefe und für die Vertikalrichtung):

Energie (GeV):	≤ 1	1 - 3	≥ 3
<i>L</i> gemessen (g/cm <sup>2</sup> ):	141 ± 7	126 ± 10	114 ± 15
<i>L</i> berechnet (g/cm <sup>2</sup> ):	148	136	124

Simpson et al.<sup>15</sup> finden mittels Neutronenzählrohren bei 0° geomagnetischer Breite die Werte *L* = 150 ± 3 g/cm<sup>2</sup> in 350 g/cm<sup>2</sup> atmosphärischer

Tiefe und *L* = 123 ± 7 bei 600 g/cm<sup>2</sup> Tiefe. Die berechneten Werte für Nukleonen mit *E* ≥ 1 GeV sind *L* = 160 und *L* = 130 g/cm<sup>2</sup>.

Für den absoluten Breiteneffekt in 600 g/cm<sup>2</sup> Tiefe und für Protonen mit Energien ≥ 1,4 GeV erhält der Verfasser aus einem Vergleich von<sup>14</sup> mit einer unveröffentlichten Arbeit über die Absorption der Nukleonenkomponente in -28° geomagnetischer Breite<sup>16</sup>: *I*<sub>28°</sub>/*I*<sub>15°</sub> = 1,04 ± 0,04. Der theoretische Wert ist 1,06. An Hand einer Arbeit von Teucher<sup>18</sup> gewinnt man für denselben Energiebereich: *I*<sub>48°</sub>/*I*<sub>15°</sub> = 1,15 ± 0,10; die Theorie liefert 1,18. Lattimore<sup>11</sup> erhält in derselben atmosphärischen Tiefe für Sterne mit mindestens 8 „schweren“ Spuren einen Wert *I*<sub>48°</sub>/*I*<sub>12°</sub> = 1,10 ± 0,27.

Conversi<sup>12</sup> findet für Protonen bei etwa 0,5 GeV einen Breiteneffekt zwischen Pol und Äquator von 3,1, gemessen in 306 g/cm<sup>2</sup> atmosphärischer Tiefe. Der theoretische Wert für Protonen von ≤ 1 GeV beträgt hier etwa 3,5.

Whyte<sup>13</sup> zeigt die Abhängigkeit der Nukleonenintensität von der geomagnetischen Breite für 20 und 200 g/cm<sup>2</sup> Tiefe. Berücksichtigt man den bei diesen Messungen umfaßten Energiebereich, so sind seine Ergebnisse im Einklang mit unseren Kurven in Abb. 5a.

Eine ausführliche Behandlung des Breiteneffekts, insbesondere mit numerischen Tabellen für die Funktion (6a), wird an anderer Stelle wiedergegeben.

Der Comisión Nacional de la Energía Atómica verdanke ich ein Stipendium; den Herren Professoren W. Heisenberg und K. Wirtz danke ich für ihre freundliche Aufnahme im Max-Planck-Institut für Physik.

<sup>10</sup> H. Yagoda, Proc. of the Echo Lake Symposium, S. 169 (1949).

<sup>11</sup> S. Lattimore, Phil. Mag. 41, 961 [1950].

<sup>12</sup> M. Conversi, Phys. Rev. 79, 749 [1950].

<sup>13</sup> G. N. Whyte, Phys. Rev. 82, 204 [1951].

<sup>14</sup> J. G. Roederer, Z. Naturforschg. 7a, 765 [1952].

<sup>15</sup> J. A. Simpson u. W. C. Fagot, Phys. Rev. 90, 1068 [1953].

<sup>16</sup> J. G. Roederer, Tagung der Nordwestd. Physikal. Gesellsch. 1954.

<sup>17</sup> Die in<sup>14</sup> angegebene Breite von -21° hat sich als falsch erwiesen.

<sup>18</sup> M. Teucher, Z. Naturforschg. 7a, 62 [1952].