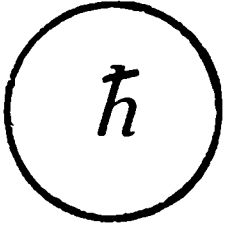


C. N. E. A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
NO 1	AÑO 1964

01.64.01



UNIVERSIDAD DE CUYO
INSTITUTO DE FISICA «Dr. J. A. BALSEIRO»

SISTEMAS DE DOS FOTONES

TESIS

LEONEL N. MENEGOZZI

A MIS PADRES.

01.64.

SISTEMAS DE DOS FOTONES

Tesis
para el Doctorado en Física
presentada por Leonel N. Menegozzi
dirigida por el Profesor
Dr. Guido Beck

Universidad Nacional de Cuyo
Instituto de Física "Dr. J. A. Balseiro"
Octubre de 1964.

INTRODUCCION:

Es sabido que la teoría cuántica no permite - atribuir a una transición un campo observable, así como la evolución de cargas y corrientes; sólo son observables expresiones cuadráticas del campo emitido, tales como la energía e impulso.

Sin embargo es un hecho innegable que todo proceso no estacionario en electrodinámica cuántica implica una propagación espacio-temporal, y en esencia lo que en general uno hace es utilizar modelos clásicos o esquemas mentales que involucran una propagación de un campo clásico para luego proceder a un cálculo cuántico por medio de la teoría de perturbaciones.

Es útil entonces clarificar y poner sobre bases más rigurosas estos conceptos empleados en forma implícita aunque sin discusión en todas las consideraciones elementales respecto al comportamiento del campo cuántico.

Veremos entonces como es posible, -aunque con limitaciones que luego expondremos- describir en términos clásicos transiciones cuánticas que involucren un fotón 1),2),3). Con este fin se asocia al campo emitido, un campo clásico tal que actuando sobre un cuerpo de prueba -por ejemplo otro átomo en su estado fundamental -produzca los mismos elementos de matriz y efectos del campo cuántico. Este campo asociado tiene además la misma densidad de energía, impulso y longitud de coherencia que el campo cuántico con la ventaja de proporcionarnos una imagen directa aunque no completamente rigurosa de su propagación espacio-temporal.

Será objeto de este trabajo tratar de definir conceptos similares para transiciones que involucren dos o más fotones, estudiar sus limitaciones y luego su aplicación a fenómenos físicos bien conocidos que envuelvan la

/// aparición de paquetes de dos fotones, tal como la desintegración del positronio en su estado ¹ S.-

En todos estos casos los campos asociados muestran las mismas correlaciones y producen los mismos efectos del campo cuántico, con la ventaja de darnos una imagen de su evolución en el espacio tiempo de configuraciones.-

Para el caso de transiciones cuánticas que involucran un fotón parte de los resultados obtenidos fueron discutidos por:

- 1) G.BECK N.Cimento 1/1/55
- 2) C.M.KOTTIN Anais da Acad.Bras.de Ciências
- 3) L.M.FALICOV N.Cimento Vol.16 - 1960

CAMPO ASOCIADO A PAQUETES DE UN FOTON

Este concepto, como hemos mencionado ya ha sido usado y discutido en otras ocasiones (x), sin embargo no es comunmente conocido ni han sido estudiadas con detalle sus limitaciones. Lo desarrollaremos aqui a manera introductoria.

a) Definición de paquetes de fotones:

Para fijar ideas expondremos brevemente primero las notaciones usadas y conceptos que emplearemos. (xx)

Una vez cuantificado el campo electromagnético de radiación libre, $\vec{A}, \vec{E},$ y \vec{H} son operadores que actúan sobre una función de onda que satisface la ecuación de evolución de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = H\Gamma$$

donde Γ son las funciones de onda definidas en un espacio de Hilbert abstracto.

En la representación en la cual son diagonales los operadores N (número de fotones) y H (hamiltoniano de radiación),

$$H = \sum_{\vec{k}_\lambda} H_{\vec{k}_\lambda} = \sum_{\vec{k}_\lambda} \hbar \omega_{\vec{k}_\lambda} \alpha_{\vec{k}_\lambda}^+ \alpha_{\vec{k}_\lambda}$$

$$N = \sum_{\vec{k}_\lambda} N_{\vec{k}_\lambda} = \sum_{\vec{k}_\lambda} \alpha_{\vec{k}_\lambda}^+ \alpha_{\vec{k}_\lambda}$$

(x) 1),2),3) loc.cit.
(xx) En general usaremos la notación empleada en 3) loc. cit.

///

tenemos las bien conocidas funciones ortogonales de Hermite.

$$\Gamma_{\mathbf{k}_\lambda}^{n_{\mathbf{k}_\lambda}} e^{in_{\mathbf{k}_\lambda} \omega_{\mathbf{k}_\lambda} t} ; \Gamma_{\mathbf{k}}^n = H_n(q_{\mathbf{k}}) e^{-\omega_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}}^2 / 2\hbar}$$

donde n indica el número de fotones y \vec{k} es un índice múltiple que indica el impulso ($\hbar\vec{k}$) energía ($\hbar\omega_{\mathbf{k}} = \hbar c|\vec{k}|$) y polarización ($\vec{e}_{\mathbf{k}_\lambda}$ $\lambda=1,2$).

Las $\Gamma_{\mathbf{k}_\lambda}^{n_{\mathbf{k}_\lambda}}$ forman un conjunto ortonormal y tienen las siguientes propiedades,

$$\langle \Gamma_{\mathbf{k}_\lambda}^{n_{\mathbf{k}_\lambda}} | \Gamma_{\mathbf{k}'_\mu}^{n'_{\mathbf{k}'_\mu}} \rangle = \delta_{nn'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\mu}$$

$$a_{\mathbf{k}_\lambda}^+ \Gamma_{\mathbf{k}_\lambda}^n = (n_{\mathbf{k}_\lambda} + 1)^{1/2} \Gamma_{\mathbf{k}_\lambda}^{n+1}$$

$$a_{\mathbf{k}_\lambda} \Gamma_{\mathbf{k}_\lambda}^n = n^{1/2} \Gamma_{\mathbf{k}_\lambda}^{n-1}$$

donde $a_{\mathbf{k}_\lambda}$ y $a_{\mathbf{k}_\lambda}^+$ son los operadores de absorción y emisión de fotones en el estado \mathbf{k}_λ respectivamente.

Todos los procesos físicos que consideraremos involucran la aparición de líneas espectrales con ancho, es decir, él o los fotones involucrados en el proceso poseen una distribución espectral (existe una dada probabilidad de encontrar uno o más fotones en un determinado estado de energía, impulso y polarización).

Entonces consideraremos aquellas combinaciones de las funciones $\Gamma_{\mathbf{k}}^{n_{\mathbf{k}}}$ en las cuales el número de fotones sea diagonal; una tal combinación la llamaremos paquete de fotones.

Un paquete con un número arbitrario N de fotones estará entonces descrito por la funcional

$$\Gamma^N = \sum_{\{n_i\}} L_N(n_1, n_2, \dots, n_j, \dots) \Gamma_{\mathbf{k}_1}^{n_1} \Gamma_{\mathbf{k}_2}^{n_2} \dots \Gamma_{\mathbf{k}_j}^{n_j} \dots$$

donde la suma se extiende a todo conjunto de valores n_i

que satisfagan $\sum_i n_i = N$

de modo que $L_N(n_i) = 0$ si $\sum_i n_i \neq N$

/// La condición de normalización es:

$$\sum_{\{n_i\}} |L_N(n_i)|^2 = 1$$

La significación física de los coeficientes es tal que: $|L_N(n_i)|^2$ indica la probabilidad de que entre los N fotones, haya n_1 en el estado de impulso $\hbar \vec{\kappa}_1$, energía $\hbar \omega_{\kappa_1}$, y polarización λ ; n_2 con impulso $\hbar \vec{\kappa}_2$, energía $\hbar \omega_2$ Ejemplos:

Paquetes de un fotón

$$\Gamma^1 = \sum_{\kappa_\lambda} \lambda_{\kappa_\lambda} \Gamma_{\kappa_\lambda}^1 e^{-i\omega_{\kappa_\lambda} t}$$

Paquetes de dos fotones

$$\Gamma^2 = \sum_{\substack{\kappa_\lambda \kappa'_\mu \\ \kappa_\lambda \neq \kappa'_\mu}} L_2(\kappa_\lambda \kappa'_\mu) \Gamma_{\kappa_\lambda}^1 \Gamma_{\kappa'_\mu}^1 e^{-i(\omega_{\kappa_\lambda} + \omega_{\kappa'_\mu})t} + \sum_{\kappa_\lambda} L_2(\kappa_\lambda) \Gamma_{\kappa_\lambda}^2 e^{-i2\omega_{\kappa_\lambda} t}$$

Debemos hacer notar el hecho de que en esta representación (salvo el caso particular de paquetes monocromáticos $\Gamma_{\kappa_\lambda}^n$) han dejado de ser diagonales la energía y el impulso; definiéndose sus valores medios cuánticos en la forma habitual, por ejemplo: para paquetes de un fotón,

$$\hbar \bar{\omega} = \sum_{\kappa_\lambda} |\lambda_{\kappa_\lambda}|^2 \hbar \omega_{\kappa_\lambda} \quad \hbar \bar{\vec{\kappa}} = \sum_{\kappa_\lambda} \hbar \vec{\kappa}_\lambda |\lambda_{\kappa_\lambda}|^2$$

Los paquetes de fotones no representan más que estados particulares de excitación del campo electromagnético de radiación libre, precisamente aquellos estados en los que el número de fotones es conocido

La diagonalidad del número de fotones, implica como es bien sabido un total desconocimiento de las fases. Dadas las relaciones de conmutación: $\Theta_\kappa \eta_\kappa - \eta_\kappa \Theta_\kappa = i$

o bien

$$d_{\vec{\kappa}_\lambda} d_{\vec{\kappa}'_\mu}^+ - d_{\vec{\kappa}'_\mu}^+ d_{\vec{\kappa}_\lambda} = \delta_{\vec{\kappa}_\lambda \vec{\kappa}'_\mu} \delta_{\lambda \mu}$$

///

///

éstas muestran inmediatamente que:

$$\begin{aligned}
 [\vec{E}, N] &\neq 0 \\
 [\vec{H}, N] &\neq 0
 \end{aligned}
 \quad \text{donde} \quad \left\{ \begin{aligned}
 \vec{E} &= -\dot{\vec{A}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \sum_{\vec{k}} \vec{E}_{\vec{k}} \sqrt{\frac{2\omega_{\vec{k}}}{2}} \{d_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} - d_{\vec{k}}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\vec{r}}\} \\
 \vec{H} &= \text{rot } \vec{A} = i \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \sum_{\vec{k}} (\vec{k} \times \vec{E}) \sqrt{\frac{2}{2\omega_{\vec{k}}}} \{d_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} - d_{\vec{k}}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\vec{r}}\} \\
 N &= \sum n_{\vec{k}} = \sum d_{\vec{k}}^{\dagger} d_{\vec{k}}
 \end{aligned} \right.$$

en consecuencia dada la relación de incertidumbre

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \frac{1}{2} [\overline{[A, B]}]^2$$

vemos que el conocimiento del número exacto de fotones, perturba nuestro sistema de tal forma impidiéndonos dar una magnitud definida a los campos. Estos mostrarán fluctuaciones alrededor de su valor medio (en este caso nulo $\vec{E} = \vec{H} = \vec{A} = 0$), aun en el caso de que no tengamos fotones presentes, $n = 0$. Sin embargo podemos obtener una imagen de la evolución espacio temporal de estos particulares estados de excitación del campo cuántico por medio del estudio de la evolución de expresiones asociadas escritas en espacio tiempo de configuraciones de 4.N dimensiones que permite, en cierto sentido, localizar cada fotón en un lugar R_i en el momento T_i ($N = n^2$ fotones)

Consideraremos primero paquetes de un fotón, dejando para otro capítulo el estudio de sistemas de dos o más fotones.

Dado el campo cuántico

$$\vec{r}' = \sum_{\vec{k}} \lambda_{\vec{k}} \vec{r}'_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t} \tag{1}$$

para asociar a este paquete un campo clásico, entendiendo por tal una solución de las ecuaciones

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} = 0 \quad \text{div. } \vec{A} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{E} = -\dot{\vec{A}} \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}$$

///

/// deberemos fijar un cierto criterio. Tal vez el criterio más intuitivo, sea fijar este campo de tal forma que puesto en interacción con un cuerpo de prueba real (un átomo T en su estado fundamental) produzca los mismos elementos de matriz y efectos que produciría el campo cuántico.-^{1),2)}

Consideremos entonces el efecto del campo cuántico Γ sobre el detector T ubicado en el lugar de coordenadas \vec{R}_T , que se encuentra inicialmente en su estado fundamental T y es capaz de absorber el fotón (condiciones de resonancia, orientación, etc.) pasando al estado excitado T*.-

Con este fin utilizaremos los desarrollos habituales del cálculo de perturbaciones

$$i\hbar \dot{b}_m = \sum_n H_{mn} b_n(t) e^{i(E_m - E_n)t/\hbar}$$

$$b_n(t) = b_n(0) + b_n^{(1)}(t) + b_n^{(2)}(t) + \dots$$

$$H^0 = c\alpha_k p_k + \beta mc^2 + V + \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k \quad (3)$$

$$H' = -e\vec{\alpha} \cdot \vec{A}$$

Tenemos entonces:-

$$\text{estados iniciales } \phi_T \Gamma_k' \quad b_{T^*k}(0) = \lambda_k$$

$$\text{estado final } \phi_{T^*} \Gamma^0 \quad b_{T^*k}(0) = 0$$

En primera aproximación podemos consi-

derar

$$i\hbar \dot{b}_{T^*k}^{(1)} = \sum_K H_{T^*k/Tk} \lambda_K e^{i(\omega_T - \omega_K)t}$$

$$\hbar\omega_T = E_{T^*} - E_T \quad (4)$$

donde $H_{T^*k/Tk} = e^{i\vec{k}\vec{R}_T} \int e^{\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_K}} \int \phi_{T^*}^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}_K e^{i\vec{k}\vec{r}} \phi_T d\tau$

indicando \int integración sobre coordenadas espaciales y suma los índices espinoriales discretos.-

///

Consideremos ahora los efectos de un campo clásico real, sobre el mismo cuerpo de prueba.-

Antes que todo desarrollo debemos notar que la solución más general de las ecuaciones (2) incluye tanto frecuencias positivas como negativas

$$\frac{\omega_k}{c} = \pm \sqrt{|\vec{k}|^2}$$

por lo tanto su expresión será la siguiente:

$$\vec{A}_{ce} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \sum_{\substack{k=-\infty \\ \omega_k = \pm kc}}^{+\infty} \vec{E}_{k\lambda} q_{k\lambda} \omega_k e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)} \quad (x)$$

donde la suma se extiende a todas las direcciones y a todas las frecuencias positivas y negativas

Como $\vec{A}_{ce} = \vec{A}_{ce}^*$ entonces $q_{-\vec{k}\lambda} \omega_k = q_{\vec{k}\lambda}^* \omega_k$

Si llamamos

$$\omega_k = +|k|c = \omega_k^+ \quad \omega_k = -|k|c = \bar{\omega}_k$$

entonces

$$\vec{A}_{ce} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \left\{ \sum_{\substack{\vec{k}_\lambda = -\infty \\ +|k|c}}^{+\infty} \vec{E}_{k\lambda} q_{k\lambda} \omega_k^+ e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k^+ t)} + \sum_{\substack{\vec{k}_\lambda = -\infty \\ -|k|c}}^{+\infty} \vec{E}_{k\lambda} q_{k\lambda} \bar{\omega}_k e^{i(\vec{k}\vec{r} - \bar{\omega}_k t)} \right\} \quad (xx)$$

(5)

(x) $\vec{A}_{k\lambda} = \vec{E}_{k\lambda} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$ están normalizados en la forma siguiente

$$\int \vec{A}_{\vec{k}\lambda} \vec{A}_{\vec{k}'\lambda'} d\vec{v} = \int A_{k\lambda} A_{k'\lambda'} d\vec{v} = 4\pi c^2 \vec{E}_{k\lambda} \vec{E}_{k'\lambda'} \delta_{\lambda\lambda'}$$

si usamos el hecho de que con $k_i = \frac{2\pi n_i}{L}$ $\frac{1}{L^3} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{k}') \vec{r}} d\vec{v} = \delta_{k_x k'_x} \delta_{k_y k'_y} \delta_{k_z k'_z} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$

(xx) La (5) puede ser puesta en la forma habitual, para ese fin usaremos $\bar{\omega}_k = -\omega_k^+$ y $q_{-\vec{k}\lambda} \bar{\omega}_k = q_{\vec{k}\lambda}^* \omega_k^+$

poniendo la (5) en la forma

$$\vec{A}_{ce} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \left\{ \sum_{\substack{k=-\infty \\ +|k|c}}^{+\infty} \vec{E}_{k\lambda} q_{k\lambda} \omega_k^+ e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k^+ t)} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ -|k|c}}^{+\infty} \vec{E}_{k\lambda} q_{-\vec{k}\lambda} \bar{\omega}_k e^{-i(\vec{k}\vec{r} + \bar{\omega}_k t)} \right\}$$

usando las anteriores

$$\vec{A}_{ce} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \sum_{\substack{k=-\infty \\ +|k|c}}^{+\infty} \vec{E}_{k\lambda} \left\{ q_{-\vec{k}\lambda}^* \omega_k^+ e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k^+ t)} + q_{\vec{k}\lambda} \omega_k^+ e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k^+ t)} \right\}$$

///

///

Usaremos esta expresión para el campo clásico, y los mismos desarrollos perturbativos anteriores con la diferencia de que ahora deberemos poner:

$$\begin{cases} H^0 = c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 + V \\ H^1 = -e \vec{\alpha} \cdot \vec{A} e \end{cases} \quad (6)$$

Las ecuaciones (3) y (6) implican una diferencia conceptual, a saber .-

En el primer caso consideramos al campo de radiación como integrantes del sistema, es decir, tenemos en cuenta su posible desaparición por conversión en energía electrónica. En cambio en el segundo caso consideramos al campo electromagnético como un agente cuya magnitud es mantenida desde el exterior.-

Tendremos entonces:

$$\begin{array}{ll} \text{estado inicial} & \phi_T \quad b_T(0) = 1 \\ \text{estado final} & \phi_{T^*} \quad b_{T^*}(0) = 0 \end{array}$$

Considerando nuevamente la primera aproximación tendremos:

$$i \hbar \dot{b}_{T^*} = H_{T^*T} b_T(0) e^{i\omega_T t} = H_{T^*T} e^{i\omega_T t} \quad (7)$$

donde

$$\begin{aligned} H_{T^*T} = & -e \int \phi_{T^*}^* \left\{ \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \sum_{\substack{k_\lambda = -\infty \\ +1/k/c}}^{+\infty} \vec{\alpha} \cdot \vec{E}_k \rho_{\vec{k}; \omega_k}^+ e^{i[\vec{k}(\vec{R}_T + \vec{r}) - \omega_k t]} \right\} \phi_T d\vec{z} + \\ & -e \int \phi_{T^*}^* \left\{ \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \sum_{\substack{k_\lambda = -\infty \\ -1/k/c}}^{+\infty} \vec{\alpha} \cdot \vec{E}_k \rho_{\vec{k}; \omega_k}^- e^{i[\vec{k}(\vec{R}_T + \vec{r}) - \omega_k t]} \right\} \phi_T d\vec{z} \end{aligned}$$

Para comparar (7) con (4) agruparemos esta expresión en la forma siguiente

$$\begin{aligned} i \hbar \dot{b}_{T^*} = & \sum_{\substack{k_\lambda \\ +1/k/c}} \left\{ e^{i\vec{k}\vec{R}_T} (-e\sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}) \int \phi_{T^*}^* \vec{\alpha} \cdot \vec{E}_k e^{i\vec{k}\vec{r}} \phi_T d\vec{z} \right\} \rho_{\vec{k}; \omega_k}^+ e^{i(\omega_T - \omega_k)t} + \\ & + \sum_{\substack{k_\lambda \\ -1/k/c}} \left\{ e^{i\vec{k}\vec{R}_T} (-e\sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}) \int \phi_{T^*}^* \vec{\alpha} \cdot \vec{E}_k e^{i\vec{k}\vec{r}} \phi_T d\vec{z} \right\} \rho_{\vec{k}; \omega_k}^- e^{i(\omega_T - \omega_k)t} \end{aligned} \quad (8)$$

Sabemos que solamente los términos con $\omega_k \approx \omega_T \approx \frac{E_{T^*} - E_T}{\hbar}$ (9)

(x) Ver L.Schiff

///
 contribuyen sensiblemente a la amplitud de probabilidad b_T^* ;
 sin embargo, un dominio finito de frecuencia $\omega_T - \Delta\omega < \omega_k < \omega_T + \Delta\omega$
 no permite considerar a un paquete de forma predeterminada
 arbitraria; entonces para estudiar el comportamiento espacio
 temporal tenemos que trabajar con la suma completa.-

Observando (4) y (8) vemos que:

$$\left\{ e^{i\vec{k}\vec{R}_T} \left(-e^{\sqrt{4\pi c^2/L^3}} \right) \int \phi_T^* \alpha \cdot \vec{E}_k e^{i\vec{k}\vec{r}} \phi_T d\mathcal{G} \right\} = \sqrt{\frac{2\omega_k}{\hbar}} H_{T^*1TK}$$

es decir podemos poner (7) en la forma siguiente:

$$i\hbar \dot{b}_T^* = \sum_{\substack{\kappa_\lambda \\ \omega_k = +|\kappa|c}} H_{T^*1TK} \sqrt{\frac{2\omega_k}{\hbar}} \frac{1}{\kappa_\lambda \omega_k} e^{i(\omega_T - \omega_k)t} + \sum_{\substack{\kappa_\lambda \\ \omega_k = -|\kappa|c}} H_{T^*1TK} \sqrt{\frac{2\omega_k}{\hbar}} \frac{1}{\kappa_\lambda \omega_k} e^{i(\omega_T - \omega_k)t} \quad (9)$$

Comparando la expresión (9) con la (4) a saber:

$$i\hbar \dot{b}_T^* = \sum_{\substack{\kappa_\lambda \\ \omega_k = +|\kappa|c}} H_{T^*1TK} \lambda_{\kappa_\lambda} e^{i(\omega_T - \omega_k)t}$$

Vemos que podemos considerar a la expresión compleja siguiente

$$\vec{A}_{ass} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \sum_{\substack{\kappa_\lambda = -\infty \\ \omega_k = +|\kappa|c}}^{+\infty} \vec{E}_{\vec{\kappa}_\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} \lambda_{\vec{\kappa}_\lambda} e^{i(\vec{k}\vec{R} - \omega_k t)} \quad (10)$$

(x)

(x) Podría darse el nombre de campo clásico asociado a la expresión real $A = \vec{A}_{ass} + \vec{A}_{ass}^*$

Esto es algo puramente formal, pues el desarrollo muestra que sólo la parte A_{ass} (o bien A_{ass}^*) de A son las que puesta en interacción producen los mismos elementos de matriz y efectos del campo cuántico.- Además esa asociación podría inducir al error de considerar que el campo cuántico posee frecuencias negativas, que sabemos inexistentes.-

///
 Como aquella solución compleja de las ecuaciones clásicas (2) tal que puesta en interacción, produce los mismos efectos del campo cuántico, (1), a esta expresión la llamaremos campo clásico asociado al paquete de un fotón

$$\Gamma' = \sum_{\substack{\kappa_\lambda \\ \omega_\kappa = +|\kappa|c}} \lambda_{\kappa_\lambda} \Gamma'_{\kappa_\lambda} e^{-i\omega_\kappa t}$$

Los campos asociados nos dan una imagen de la evolución espacio temporal del campo cuántico, clarificando así un concepto empleado implícitamente aunque sin discusión en todas las consideraciones elementales respecto al comportamiento del campo cuántico.-

Discusión:

a) Vimos que la expresión más general de un campo clásico que satisface las ecuaciones (2) a saber:

$$\square \vec{A} = 0 \quad \text{div } \vec{A} = 0$$

incluye tanto frecuencias positivas como negativas $\omega_\kappa/c = \pm|\kappa|$.

mientras que los campos asociados

$$\vec{A}_{class} = \sqrt{\frac{\mu_0 c^3}{L^3}} \sum_{\substack{\kappa_\lambda \\ \omega_\kappa = +|\kappa|c}} \vec{E}_{\kappa_\lambda} \lambda_{\kappa_\lambda} \sqrt{\frac{L}{2\omega_\kappa}} e^{i(\vec{u}\vec{r} - \omega_\kappa t)}$$

a paquetes de un fotón $\sum \lambda_\kappa \Gamma'_\kappa e^{-i\omega_\kappa t}$ solamente

incluyen frecuencias positivas, dada la no existencia de fotones negativos (como surge del bien conocido tratamiento cuántico del oscilador armónico).-

Una consecuencia de esto, es que mientras clásicamente es posible considerar soluciones de las ecuaciones de Maxwell que constituyan trenes limitados, por ejemplos paquetes deltiformes ampliamente usados en definiciones concérnientes a condiciones de causalidad, no podemos hacer lo propio en este caso que estamos considerando. En efecto, dado un paquete de un fotón, no podemos rigurosamente asociarle un campo "cortado", es decir un campo

///

con un frente perfectamente definido (x) .- (xx) (Ver Ap. I).-

Vemos que existe una estrecha correspondencia entre el fotón y otras partículas relativistas, por ejemplo electrones, para los cuales la perfecta localización para un $t \neq 0$ implica tanto soluciones de energía positiva como soluciones de energía negativa. Parece luego que la no localizabilidad de un paquete de ondas describiendo una partícula es un rasgo general de todas las teorías relativistas.-

b) Si consideramos el operador densidad de energía $\mathcal{U}^{op} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2)$

y construimos su forma explícita a partir de las expresiones de \vec{E} y \vec{H} dadas en pag. (4) obtenemos:

$$\mathcal{U}^{op} = -\frac{1}{2L^3} \sum_{\kappa\kappa'} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{2\omega_\kappa} \frac{\sqrt{\hbar}}{2\omega_{\kappa'}} \right) \left[(\vec{\epsilon}_\kappa \cdot \vec{\epsilon}_{\kappa'}) \omega_\kappa \omega_{\kappa'} + c^2 (\vec{\kappa} \times \vec{\epsilon}_\kappa) \cdot (\vec{\kappa}' \times \vec{\epsilon}_{\kappa'}) \right]$$

$$\left[a_\kappa a_{\kappa'} e^{i(\vec{\kappa} + \vec{\kappa}') \cdot \vec{r}} + a_\kappa^\dagger a_{\kappa'}^\dagger e^{-i(\vec{\kappa} + \vec{\kappa}') \cdot \vec{r}} - a_\kappa a_{\kappa'} e^{i(\vec{\kappa} - \vec{\kappa}') \cdot \vec{r}} - a_\kappa^\dagger a_{\kappa'}^\dagger e^{-i(\vec{\kappa} - \vec{\kappa}') \cdot \vec{r}} \right]$$

eliminando ahora la divergencia de campo nulo y términos que no dan contribución al valor medio, cuando como en este caso el número de fotones es diagonal, tendremos

$$\mathcal{U}^{op} = \frac{1}{L^3} \sum_{\kappa\kappa'} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{2\omega_\kappa} \frac{\sqrt{\hbar}}{2\omega_{\kappa'}} \right) \left[(\vec{\epsilon}_\kappa \cdot \vec{\epsilon}_{\kappa'}) \omega_\kappa \omega_{\kappa'} + c^2 (\vec{\kappa} \times \vec{\epsilon}_\kappa) \cdot (\vec{\kappa}' \times \vec{\epsilon}_{\kappa'}) \right] \left[a_\kappa^\dagger a_{\kappa'} e^{i(\vec{\kappa} - \vec{\kappa}') \cdot \vec{r}} \right]$$

(x) Para aclarar esta aserción y sus relaciones con la causalidad podemos imaginar un ejemplo sencillo- Ver apéndice I -.

(xx) Ver H.M. NUSSENZVEIG- "Analytic Properties of non-Relativistic Scattering Amplitudes" pag. 48-49 - Escuela Latinoamericana de Física 1962

////

tomando el valor medio cuántico con el paquete(1) en estudio resulta:

$$\langle U^{op} \rangle_{\Gamma} = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left[(\vec{\epsilon}_{\mathbf{k}} \cdot \vec{\epsilon}_{\mathbf{k}'}) \omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'} + c^2 (\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\epsilon}_{\mathbf{k}}) \cdot (\vec{\mathbf{k}}' \times \vec{\epsilon}_{\mathbf{k}'}) \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{\epsilon_0}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \frac{\sqrt{\hbar}}{2\omega_{\mathbf{k}'}} \lambda_{\mathbf{k}}^* \lambda_{\mathbf{k}'} e^{-i[(\vec{\mathbf{k}} - \vec{\mathbf{k}}') \cdot \vec{r} - (\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t]} \right] \quad (11)$$

Si consideramos ahora la densidad de energía de un campo clásico, solución compleja de las ecuaciones de Maxwell

$$\vec{A}_{cl} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \sum_{\mathbf{k}} \vec{\epsilon}_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} e^{i(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}$$

tendremos:

$$U_{cl} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E}_{cl} \cdot \vec{E}_{cl}^* + \vec{H}_{cl} \cdot \vec{H}_{cl}^*) = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left[(\vec{\epsilon}_{\mathbf{k}} \cdot \vec{\epsilon}_{\mathbf{k}'}) \omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'} + c^2 (\vec{\epsilon}_{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{k}}) \cdot (\vec{\epsilon}_{\mathbf{k}'} \times \vec{\mathbf{k}}') \right] \left[\frac{q_{\mathbf{k}}^* q_{\mathbf{k}'}}{L^3} e^{i[(\vec{\mathbf{k}} - \vec{\mathbf{k}}') \cdot \vec{r} - (\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t]} \right] \quad (12)$$

Comparando (11) y (12) vemos que nuestro campo asociado (10) es tal que:

$$U_{ass} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E}_{ass} \cdot \vec{E}_{ass}^* + \vec{H}_{ass} \cdot \vec{H}_{ass}^*) = \langle U^{op} \rangle_{\Gamma} \quad (13)$$

Inversamente las expresiones (11) y (12) nos proporcionan otro criterio (por medio de expresiones cuadráticas) para asociar campos clásicos a campos cuánticos dados, que es esencialmente el método empleado por Falicov en su trabajo

$$q_{\mathbf{k}} = \lambda_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{i\varphi} \quad \varphi = \text{fase arbitraria}$$

c) Esta forma de asociación nos permite además interpretar la cantidad

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathbf{k}} \vec{\epsilon}_{\mathbf{k}} \lambda_{\mathbf{k}} e^{i(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \quad (14)$$

como la función de onda del fotón en el espacio-tiempo de configuración. En el caso en que esta interpretación se sigue de inmediato del significado físico de las formas cuadráticas $\lambda_{\mathbf{k}} \lambda_{\mathbf{k}}^*$

y su normalización, daremos aquí una demostración más general, que nos servirá para aclarar las ideas. (x)

(x) Ver A.I. Akhiezer y V.B. Berestetsky - "Quantum Electrodynamics" Chap. I. Late Technico-Theoretical Literature Press - Moscow 1953
Ing. English translation 1957 - Consultant Bureau Inc. - New York.

Si elegimos las ecuaciones de Maxwell como las ecuaciones cuánticas de evolución para el fotón, entonces las características ondulatorias del fotón y del campo electromagnético serán idénticas.-

Las ecuaciones de Maxwell que satisfacen \vec{E} y \vec{H} en el vacío, escritas en función del potencial vectorial son:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} &= 0 & \vec{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \\ \text{div } \vec{A} &= 0 & \vec{H} &= \text{rot } \vec{A} \end{aligned} \quad (15)$$

Podemos dar a estas ecuaciones una interpretación "corpuscular" comparándolas con la ecuación de evolución de Schrödinger de la mecánica cuántica ordinaria, para esto haremos una transición al espacio de los vectores de onda por medio de una transformación de Fourier; pondremos entonces:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \vec{A}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}} \\ \vec{E} &= \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \vec{E}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \vec{H}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}} \end{aligned} \quad (16)$$

Entonces las ecuaciones (15) expresadas en el espacio K quedan

$$\begin{aligned} k^2 \vec{A}(\vec{k}, t) + \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}}(\vec{k}, t) &= 0 \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} - ikc\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + ikc\right) \vec{A}(\vec{k}, t) = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{A}(\vec{k}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{k}, t) &= -\frac{1}{c} \dot{\vec{A}}(\vec{k}, t) \\ \vec{H}(\vec{k}, t) &= i(\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k}, t)) \end{aligned}$$

a quienes debemos agregar la condición de realidad de los campos

$$\begin{aligned} \vec{E}(-\vec{k}, t) &= \vec{E}^*(\vec{k}, t) \\ \vec{H}(-\vec{k}, t) &= \vec{H}^*(\vec{k}, t) \end{aligned} \quad (18)$$

que pueden satisfacerse automáticamente con la substitución siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{k}, t) &= \frac{c(k)}{k} (\alpha(\vec{k}, t) + \alpha^*(-\vec{k}, t)) \\ \dot{\vec{A}}(\vec{k}, t) &= i c(k) (\alpha(\vec{k}, t) - \alpha^*(-\vec{k}, t)) \end{aligned} \quad (19)$$

Donde $C(k)$ es un factor real de normalización que elegiremos luego.-

Si eliminamos $\vec{\alpha}(\vec{k}, t)$ de las anteriores tendremos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + ikc\right) \vec{A}(\vec{k}, t) = 2ic C(k) \vec{\alpha}(\vec{k}, t)$$

Reemplazando estas en la primera de las (16) tendremos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - ikc\right) \vec{\alpha}(\vec{k}, t) = 0$$

a quien podemos escribir en la forma siguiente

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \vec{\alpha}(\vec{k}, t) = \hbar kc \vec{\alpha}(\vec{k}, t) \quad (20)$$

(1)

Esta ecuación junto con la condición de transversalidad

$$\vec{k} \cdot \vec{\alpha}(\vec{k}, t) = 0 \quad (21)$$

(11)

son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell.

La ecuación de evolución (20) tiene la forma de la ecuación de Schrödinger, siempre que el modo operacional (en el espacio K) del operador energía del fotón sea definido multiplicando por el número $\hbar c k = \hbar \omega_k$

En efecto podemos mostrar de inmediato que con la asociación hecha en páginas anteriores:

$$\mathcal{E}_{ass} = \langle \mathcal{E}^{op} \rangle_r$$

el operador así definido puede realmente ser considerado como el operador energía del fotón.

Construiremos entonces la expresión que designaremos con $\langle \mathcal{E} \rangle$ para la energía del campo electromagnético

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{8\pi} \int_{V_3} (E^2 + H^2) d\tau$$

(1) En la misma forma es posible demostrar que satisface la ec.conjugada.-

(11) Debemos hacer notar que no todas las soluciones de la ecuación de Schorödinger corresponden a estados cuánticos del fotón, pues además deben satisfacer la condición de transversalidad (21).

Desarrollando según (16)

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{8\pi} \int_{L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} [\vec{E}(\mathbf{k}, t) \vec{E}(\mathbf{k}', t) + \vec{H}(\mathbf{k}, t) \vec{H}(\mathbf{k}', t)] e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \vec{r}} d\mathcal{V}$$

Considerando que

$$\frac{1}{L^3} \int_{L^3} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \vec{r}} d\mathcal{V} = \delta_{\mathbf{k}', -\mathbf{k}}$$

entonces

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{8\pi} \sum_{\mathbf{k}} (\vec{E}(\mathbf{k}, t) \vec{E}(-\mathbf{k}, t) + \vec{H}(\mathbf{k}, t) \vec{H}(-\mathbf{k}, t))$$

usando las expresiones (17), (19) y (20)

$$\vec{E}(\mathbf{k}, t) = -i \mathcal{C}(\mathbf{k}) (\vec{\alpha}(\mathbf{k}, t) - \vec{\alpha}^*(-\mathbf{k}, t))$$

$$\vec{H}(\mathbf{k}, t) = -i \frac{\mathcal{C}(\mathbf{k})}{k} [(\vec{\alpha}(\mathbf{k}, t) \times \mathbf{k}) + (\vec{\alpha}^*(-\mathbf{k}, t) \times \mathbf{k})]$$

$$\vec{E}(\mathbf{k}, t) \cdot \vec{E}(-\mathbf{k}, t) = -\mathcal{C}^2 (\vec{\alpha}(\mathbf{k}, t) \cdot \vec{\alpha}(-\mathbf{k}, t) + \vec{\alpha}^*(\mathbf{k}, t) \cdot \vec{\alpha}^*(-\mathbf{k}, t) - \vec{\alpha}(\mathbf{k}, t) \cdot \vec{\alpha}^*(\mathbf{k}, t) - \vec{\alpha}(-\mathbf{k}, t) \cdot \vec{\alpha}^*(-\mathbf{k}, t))$$

$$\vec{H}(\mathbf{k}, t) \cdot \vec{H}(-\mathbf{k}, t) = \mathcal{C}^2 (\vec{\alpha}(\mathbf{k}, t) \cdot \vec{\alpha}^*(\mathbf{k}, t) + \vec{\alpha}(-\mathbf{k}, t) \cdot \vec{\alpha}^*(-\mathbf{k}, t) + \vec{\alpha}(\mathbf{k}, t) \cdot \vec{\alpha}(-\mathbf{k}, t) + \vec{\alpha}(-\mathbf{k}, t) \cdot \vec{\alpha}^*(\mathbf{k}, t))$$

luego

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{C}^2(\mathbf{k}) (\vec{\alpha}(\mathbf{k}, t) \cdot \vec{\alpha}(\mathbf{k}, t) + \vec{\alpha}^*(\mathbf{k}, t) \cdot \vec{\alpha}^*(\mathbf{k}, t)) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{C}(\mathbf{k}) \vec{\alpha}(\mathbf{k}, t) \cdot \vec{\alpha}(\mathbf{k}, t)$$

y eligiendo $\mathcal{C}(\mathbf{k}) = (2\pi \hbar c k)^{1/2}$ tenemos

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \hbar c k \vec{\alpha}^*(\mathbf{k}) \cdot \vec{\alpha}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}} \vec{\alpha}^*(\mathbf{k}) \mathcal{E}^{op} \vec{\alpha}(\mathbf{k})$$

Análogamente si construimos la expresión para el impulso del campo electromagnético, que llamaremos

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{L^3} (\vec{E} \times \vec{H}) d\mathcal{V}$$

procediendo en idéntica forma, obtenemos haciendo uso de $\mathcal{C}(\mathbf{k}) = (2\pi \hbar c k)^{1/2}$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \vec{\alpha}^*(\mathbf{k}) \cdot \vec{\alpha}(\mathbf{k})$$

Es por lo tanto válido llamar operador impulso del fotón al operador de multiplicación por el vector de onda \mathbf{k} y dar el nombre de espacio de los impulsos al espacio \mathbf{k} .

///

La cantidad $\vec{\alpha}^* \vec{\alpha}$ puede interpretarse en el sentido cuántico habitual como la densidad de probabilidad de que el fotón posea un impulso K . Entonces la condición de normalización

$$\sum_K \vec{\alpha}^* \vec{\alpha} = 1$$

tiene un sentido físico natural.-

La función de onda del fotón en el espacio de configuraciones será entonces la transformada de Fourier de la función de onda en el espacio de los impulsos

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \frac{1}{V L^3} \sum_K \vec{\alpha}(K, t) e^{iK\vec{r}}$$

Nota: En vista de la condición de normalización $\sum_K \vec{\alpha}^* \vec{\alpha} = 1$

tendremos automáticamente $\int \vec{F}(\vec{r}, t) \vec{F}^*(\vec{r}, t) d\vec{r} = 1$

A pesar de lo expuesto ($\vec{F} = \mathcal{F}(\alpha(\vec{r}, t))$ y $\int \vec{F} \cdot \vec{F}^* d\vec{r} = 1$) se hace muy duro llamar a \vec{F} una función de onda en el sentido de Schrödinger, ya que debemos hacer notar que no es posible la interpretación de $\vec{F} \vec{F}^*$ como la densidad de probabilidad de encontrar el fotón en un determinado punto del espacio (x). En efecto, físicamente la presencia de un fotón sólo puede ponerse de manifiesto por su interacción con cargas, estando determinada esta interacción por los vectores \vec{E} y \vec{H} en el lugar considerado; ahora bien, veremos luego que la relación entre $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y $\vec{H}(\vec{r}, t)$ ^{con $\vec{F}(\vec{r}, t)$} no es una relación local, sinó integral; es decir, \vec{E} y \vec{H} en un dado punto P del espacio no están determinados por los valores de $\vec{F}(\vec{r}, t)$ en un entorno infinitesimal de dicho punto P , sinó por sus valores en todo el espacio donde \vec{F} no es nula.

(x) Ver A.I. Akiezer y V.B. Berestetsky - loc. cit. pag 17.

///

Teníamos las siguientes expresiones:

$$\vec{E}(r, t) = E^{(1)} + E^{(2)} = -i \sum_{\vec{k}} C(\vec{k}) (\vec{\alpha}(\vec{k}, t) - \vec{\alpha}^*(-\vec{k}, t)) e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$= -i \left(\frac{2\pi\hbar c}{L^3} \right)^{1/2} \sum_{\vec{k}} \sqrt{V_{\vec{k}}} \vec{\alpha}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}} + c.c.$$

$$\vec{F}(r, t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \vec{\alpha}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

La presencia del coeficiente $\sqrt{V_{\vec{k}}}$ es justamente la determinante de que la relación entre \vec{E}^* y \vec{F} sea de tipo integral. Calcularemos ahora a simple título informativo esta relación; para ello, dada la sugerencia de las expresiones anteriores, haremos uso de la teoría de derivaciones e integraciones de orden complejo λ cualquiera (xx), (xxx) que encierran como caso particular las derivaciones e integraciones ordinarias de orden entero).

Daremos aquí las ideas fundamentales por ser de uso poco común. Así la derivada (D_{λ}) de orden complejo λ cualquiera de una función $g(x)$ (con soporte en la semirecta $x \geq 0$ o esta definida por el producto de convolución siguiente:

$$D_{\lambda}(g(x)) = g(x) * \phi_{-\lambda}(x) = \phi_{-\lambda}(x) * g(x) = \int g(x-\xi) \phi_{-\lambda}(\xi) d\xi$$

donde $\phi_{\lambda}(x)$ es la distribución (con soporte en $x \geq 0$) definida en la forma siguiente:

$$\phi_{\lambda}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\lambda)} p.f. (x^{\lambda-1})_{x \geq 0} & (\text{si } \lambda \neq \text{entero negativo}) \\ \delta^{(p)}(x) = \frac{d^p}{dx^p} \delta(x) & (\delta = \text{delta Dirac}) \text{ (si } \lambda = -p; p = \text{entero } \geq 0) \end{cases}$$

El símbolo p.f. (parte finita de la integral) no es necesario si $\text{Real}(\lambda) > 0$, en cuyo caso es:

$$\phi_{\lambda}(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} H(x) \quad \left(H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \right)$$

- (xx) Ver I.M. Guelfan y G.E. Chilov "Les Distribution" - Dunod (1962) pag. 112.
 (xxx) M. Balanzat "Lecciones sobre teoría de Distribution" - Instituto de Física de San Carlos de Bariloche - pag. 127.-

///

Debemos hacer notar de que el hecho de poder definir todas las derivadas (incluso las ordinarias de orden entero) por medio de relaciones integrales, no implica que las derivadas de orden entero guarden una relación no local con sus primitivas; puesto que en este caso tendremos bajo el signo integral la distribución $\delta(x)$ o una cualquiera de sus derivadas, lo que implica una relación local si usamos la bien conocida fórmula de derivación de distribuciones

$$\int \delta^{(p)}(x) f(x) dx = (-1)^p \int \delta(x) f^{(p)}(x) dx$$

En forma análoga se define:

$$(\Delta)^\lambda g(\vec{r}) =$$

= Laplaciano de orden complejo λ

cualquiera por medio del siguiente producto de convolución

$$(\Delta)^\lambda g(\vec{r}) = g(\vec{r}) * \Phi_{-2\lambda}(r)$$

donde Φ_{μ} es la distribución definida por

$$\Phi_{\mu} = \frac{\text{p.f. } |r|^{\mu-n}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{\mu-1} \Gamma(\mu/2) \Gamma(\frac{\mu+2-n}{2})} \quad (n = \text{n}^{\circ} \text{ dimensiones})$$

$$\Phi_{-2\kappa} = (\Delta)^{\kappa} \delta \quad (\text{para } \kappa = \text{entero} \geq 0) \quad \text{Ej. } \Phi_0 = \delta$$

Se tiene además las fórmulas fundamentales:

$$D_{\lambda} [D_{\nu} g] = D_{\lambda+\nu} g \quad (\Delta)^{\lambda} [(\Delta)^{\nu} g] = (\Delta)^{\lambda+\nu} g$$

-----ooo-----

Usando entonces las anteriores, mediante un cálculo simple se obtiene

$$\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} e^{i\kappa ct} = \sqrt{i\kappa c} e^{i\kappa ct}$$

$$(\Delta)^{1/4} e^{i\kappa r} = \sqrt{i\kappa} e^{i\kappa \vec{r}}$$

///

Aplicando este último resultado a nuestro caso en consideración, vemos que es posible poner:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(+) }(\vec{r}, t) &= -i \left(\frac{2\pi\hbar c}{L^3} \right)^{1/2} \sum_{\vec{k}} \sqrt{k} \vec{\alpha}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}} \\ &= -i \left(\frac{2\pi\hbar c}{L^3} \right)^{1/2} \sum_{\vec{k}} \vec{\alpha}(\vec{k}, t) \left(-\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \Delta^{1/4} e^{i\vec{k}\vec{r}} \\ &= (2\pi\hbar c)^{1/2} (\Delta)^{1/4} \vec{F}(\vec{r}, t) = (2\pi\hbar c)^{1/2} \int \vec{F}(\vec{r}, \vec{k}, t) \Phi(\vec{k}) d^3\vec{k} \end{aligned}$$

que como vemos es una relación de tipo integral esencialmente, ya que no figuran funciones tipo deltiformes en el integrando (esto como vimos sólo sucede en las derivaciones ordinarias). Este resultado (que en cierta medida implica la no existencia del concepto de densidad de probabilidad para la localización de un fotón en una región más pequeña que su longitud de onda) está estrechamente ligado con la imposibilidad de construir combinaciones bilineales de los vectores del campo electromagnético, tal que siendo cuadvectores satisfagan la ecuación de continuidad (aunque por supuesto existe el tensor energía - impulso). - No es nuestra intención ahondar en las propiedades de la función \vec{F} , sólo mencionaremos aquí algunas de las relaciones más evidentes a simple título informativo.

siendo
$$\vec{A}^{(+)} = \left(\frac{2\pi\hbar c}{L^3} \right)^{1/2} \sum_{\vec{k}} \frac{\vec{\alpha}(\vec{k}, t)}{\sqrt{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

poniendo
$$\vec{\alpha}(\vec{k}, t) = \vec{E}_{\vec{k}} \alpha(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{r} - \kappa ct}$$

resulta
$$A^{(+)} = \left(\frac{2\pi\hbar c}{L^3} \right)^{1/2} \sum_{\vec{k}} \vec{E}_{\vec{k}} \frac{\alpha(\vec{k})}{\sqrt{k}} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \kappa ct)}$$

///

//

Con esta y con las definiciones dadas más arriba podemos obtener de inmediato

$$\vec{F} = \frac{1}{(-2\pi i \hbar c)^{1/2}} \frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} \vec{A}^{(+)}(r, t)$$

o bien

$$\vec{F} = -\frac{1}{(2\pi i \hbar c)^{1/2}} (\nabla)^{1/4} \vec{A}^{(+)}(r, t)$$

y análogas relaciones entre \vec{F}^* y $\vec{A}^{(-)}$. Es decir, vemos aquí que \vec{F} es una función relacionada con $\vec{A}^{(+)}$ por una derivación de orden semientero.

Debemos mencionar además que en nuestros desarrollos anteriores, nos hemos basado en:

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} e^{ikx} = \sqrt{i k} e^{ikx}$$

para igualar sin mayor discusión, la expresión siguiente:

$$F(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(k) e^{ik(x-ct)} dk = c t e \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{k} A^{(+)}(k) e^{ik(x-ct)} dk = c t e \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} (A^{(+)}(k) e^{ik(x-ct)}) dk$$

con esta otra expresión:

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} (A^{(+)}(x, t)) = \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(+)}(k) e^{ik(x-ct)} dk$$

Sin embargo, dada la no univocidad matemática como consecuencia de la doble valoración de \sqrt{k} ; para que sea correcta la igualdad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{k} A^{(+)}(k, t) e^{ik(x-ct)} dk = c t e \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} A^{(+)}(k) e^{ik(x-ct)} dk \right]$$

y se satisfagan entonces razonables exigencias físicas (como ser : $F(x, t)$ sea nula donde $A(x, t)$ es nula); deberemos elegir

//

///

en cada caso el camino de integración adecuado para $F(x,t)$.

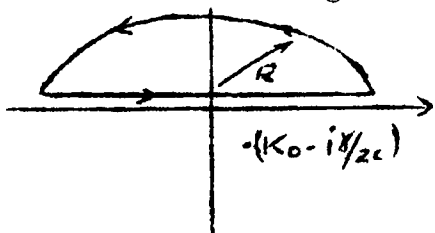
Para fijar ideas consideraremos con cierto detalle un modelo sencillo; los resultados que obtendremos en este caso son fácilmente generalizables.

Sea:

$$A^{(+)}(x,t) = \mathcal{A} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik(x-ct)}}{(k-k_0+i\delta/2c)} dk$$

Calculando por residuos esta integral tendremos:

I) Si $x-ct > 0$, la parte exponencial nos impone el siguiente contorno de integración



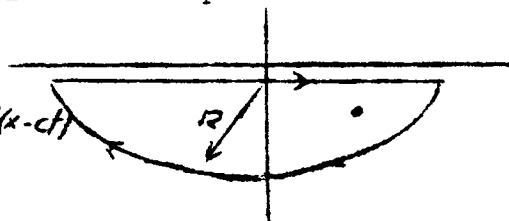
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_k + \oint_{R \rightarrow \infty} = 2\pi i R_{(+)k_0} = 0$$

Como $\oint_{R \rightarrow \infty} f_k = 0$

$$A^{(+)}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} = 0 \quad \text{para } x > ct$$

II) Si $x-ct < 0$, la parte exponencial nos impone ahora el siguiente contorno:

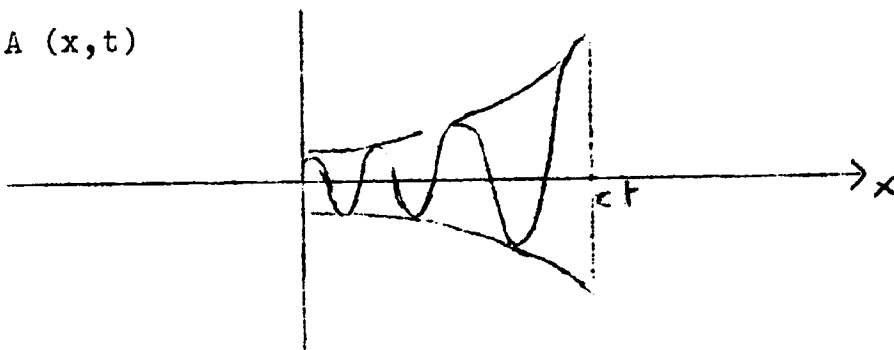
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_k + \oint_{R \rightarrow \infty} = -2\pi i R_{(-)k_0} = -2\pi i \mathcal{A} e^{i(k_0 - i\delta/2c)(x-ct)}$$



Como $\oint_{R \rightarrow \infty} f_k = 0$

$$\therefore A^{(+)}(x,t) = -2\pi i \mathcal{A} e^{i(k_0 - i\delta/2c)(x-ct)} \quad \text{para } x < ct$$

Es decir, nuestro modelo muestra el siguiente comportamiento para $A(x,t)$



///

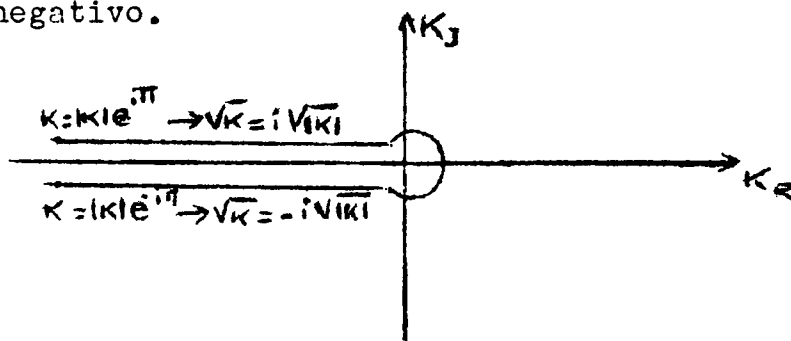
Recordemos ahora que (ver pag. 11):

$$A^{(H)}(k, t) = \frac{Q(k)}{k} \alpha(k, t) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} Q(k) = cte \sqrt{k} \\ i\hbar \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \hbar k c \alpha(k, t) \end{cases}$$

es decir, con este modelo la función F(x, t) estará dada por:

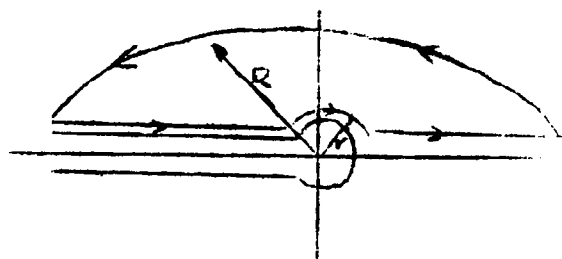
$$F(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(k) e^{ik(x-ct)} dk = cte \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{(k-k_0 + i\delta/2c)} e^{ik(x-ct)} dk$$

Es también posible el cálculo por residuos de esta integral, pero deberemos ahora tener en cuenta el corte en el plano de Riemann (dada la doble valoración de \sqrt{k}) que pondremos en el semieje negativo.



I) Si $x-ct > 0$ Eligiendo el camino de integración siguiente (orilla superior del corte), es fácil comprobar que F(x, t) es nula donde A(x, t) es nula; en efecto:

$$\int_{r \rightarrow 0} + \int_{R \rightarrow \infty} + \int_{\text{cut}} = 2\pi i R_{d(t)} = 0$$



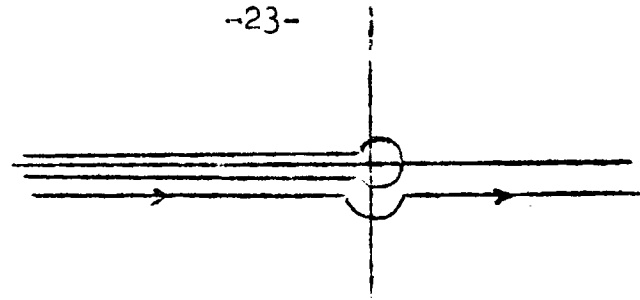
como $\int_{R \rightarrow \infty} = 0$
 $\int_{r \rightarrow 0} = 0$

entonces $F(x, t) = 0$ para $x - ct > 0$

En cambio si eligiéramos el camino de integración siguiente:

///

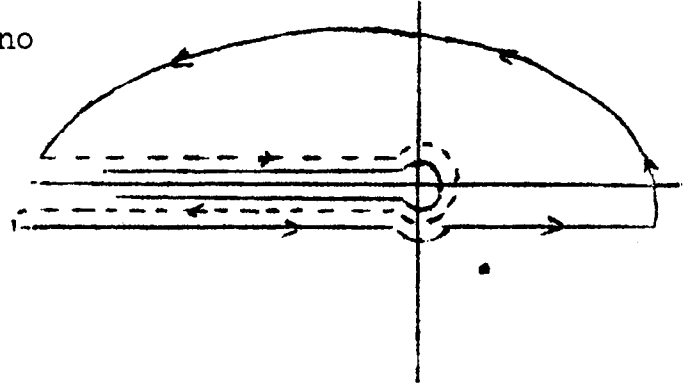
///



dadas las exigencias de la parte exponencial (para $x > ct$)
 tendríamos el siguiente contorno

$$\oint_{\text{contorno}} f(z) dz = 2\pi i R_{d(t)} = 0$$

$|x-ct| > 0$



Entonces $F(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} = -\oint$

para $x > ct$

Este resultado, facilmente generalizable, nos muestra que en el problema que nos ocupa, el contorno físicamente razonable para $x-ct > 0$ es la orilla superior del corte de Riemann, es decir; la siguiente valoración de \sqrt{K} en el semieje negativo: $K = i \sqrt{|K|}$. Mediante cálculos sencillos podemos ver que la integral para valores positivos del parámetro $x-ct > 0$ está dada por la siguiente expresión:

$$\oint_{x > ct} = -2i \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{|K|} e^{i|K|(x-ct)}}{[|K| + (K_0 - i\delta/2c)]} d|K|$$

CAMPO ASOCIADO A UNA TRANSICION (UN FOTON)

La teoría cuántica no permite atribuir a una transición un campo observable, así como la evolución de cargas y corrientes; solamente son observables expresiones cuadráticas del campo emitido, tales como la energía e impulso. Sin embargo utilizando los métodos empleados en el capítulo anterior, es posible asociar al campo emitido expresiones que nos describan por medio de una función espacio-temporal una transición cuántica.-

Con este fin estudiaremos la emisión por parte de un átomo A inicialmente en estado excitado. Sean ϕ_{A^*} y ϕ_A las autofunciones independientes del tiempo de nuestro átomo emisor en su estado excitado y estado fundamental respectivamente.

Es este un proceso de primer orden donde:

Estado inicial $\phi_{A^*} \Gamma^0$

Estados finales $\phi_A \Gamma_K$

siendo las condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{A^*}(+0) = 1 \\ b_{AK}(0) = 0 \end{array} \right.$$

Haciendo el habitual desarrollo perturbativo y llamando b_{A^*} ,

b_{AK} las amplitudes de probabilidad, tendremos

$$i\hbar \dot{b}_{A^*} = \sum_K H_{A^*K} b_{AK} e^{i(E_{A^*} - E_K)t/\hbar}$$

$$i\hbar \dot{b}_{AK} = H_{AK} b_{A^*} e^{i(E_K - E_{A^*})t/\hbar} \quad (22)$$

Si consideramos (usando el método empleado por Weisskopf y Wigner) (x)

$$b_{A^*}(t) = e^{-\frac{\gamma_A}{2}t} \quad (23)$$

obtenemos:

$$b_{AK}(t) = H_{AK} \frac{1 - e^{i(E_K - E_{A^*} + i\hbar\gamma_A/2)t/\hbar}}{(E_K - E_{A^*} + i\hbar\gamma_A/2)} \quad (24)$$

(x) Ver W.Heitler "The Quantum Theory of Radiation " 3ra. edición pag. 182.-

///

donde H_{AK}^{Ax} es el elemento de matriz para la emisión de un fotón k por parte del átomo A ; es decir,

$$H_{AK}^{Ax} = \langle \phi_A^x \Gamma_K' | -e \vec{\alpha} \cdot \vec{A}_{op} | \phi_A^x \Gamma^0 \rangle$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{i\hbar}{2} \chi_A = \sum_K |H_{AK}^{Ax}|^2 \zeta(E_A^x - E_K) \\ \zeta(E_A - E_K) = \frac{\rho}{E_A^x - E_K} - i\pi \delta(E_A^x - E_K) \end{array} \right. \quad (25)$$

Entonces la función de onda que describe el desarrollo no estacionario del sistema acoplado está dada por:

$$\bar{\Phi}(t) = \phi_{A^x} e^{-iE_A^x t/\hbar} b_{A^x}(t) \Gamma^0 + \phi_{IA} \sum_K b_{AK}(t) \Gamma_K' e^{-iE_K t/\hbar} \quad (x) \quad (26)$$

siendo $\left\{ \begin{array}{l} |b_{A^x}|^2 = e^{-\chi_A t} \\ \sum_K |b_{AK}|^2 = 1 - e^{-\chi_A t} \end{array} \right. \quad (27)$

las probabilidades de tener cero o bien un fotón presente al tiempo t respectivamente.

La cantidad $\sum_K b_{AK}(t) \Gamma_K' e^{-iE_K t/\hbar}$ nos da cuenta del campo emitido y es a ella a quien podremos asociar una expresión espacio-temporal que nos dé una imagen de la propagación del campo cuántico.

En efecto, una medición físicamente realizable del campo del fotón emitido, implica necesariamente su interacción con cargas, es decir, un cuerpo de prueba, que puede ser un segundo átomo colocado a cierta distancia de la fuente, convenientemente orientado y con frecuencia propia semejante a la fuente. ///

(x) Esta función de onda está ya convenientemente normalizada por ser autoconsistente el esquema (22) de cálculo usado.-

//

Para un tratamiento consistente del problema deberíamos entonces acoplar el campo de radiación libre con dos átomos uno en estado excitado (fuente) y otro en su estado fundamental (cuerpo de prueba T). Esto implica esencialmente el siguiente esquema de cálculo:

Estado inicial $\phi_A^* \phi_T \Gamma^0 \longrightarrow b_{A^*T}$

Estados intermedios $\left\{ \begin{array}{l} \phi_{AT} \Gamma'_K \longrightarrow b_{ATK} \\ \phi_A^* \phi_{T^*} \Gamma'_K \longrightarrow b_{A^*T^*K} \end{array} \right.$

Estado final $\phi_A \phi_{T^*} \longrightarrow b_{AT^*}$

Los desarrollos habituales en autofunciones del sistema no perturbado nos proporcionan al segundo orden el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \dot{b}_{AT^*} &= \sum_K H_{A^*T}^{ATK} b_{ATK} e^{i(E_A - E_K)t/\hbar} + \sum_K H_{A^*T}^{A^*TK} b_{A^*TK} e^{i(E_{T^*} + E_K)t/\hbar} \\ i\hbar \dot{b}_{ATK} &= H_{ATK}^{AT} b_{A^*T} e^{i(E_K - E_A)t/\hbar} + H_{ATK}^{AT^*} b_{A^*T^*} e^{i(E_K - E_A)t/\hbar} \\ i\hbar \dot{b}_{A^*TK} &= H_{A^*T^*K}^{AT} b_{AT} e^{i(E_T + E_K)t/\hbar} + H_{A^*T^*K}^{AT^*} b_{A^*T^*} e^{i(E_A + E_K)t/\hbar} \\ i\hbar \dot{b}_{AT^*} &= \sum_K H_{AT^*}^{ATK} b_{ATK} e^{i(E_T - E_K)t/\hbar} + \sum_K H_{AT^*}^{A^*TK} b_{A^*TK} e^{i(E_A + E_K)t/\hbar} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Ahora bien, debemos notar que en este esquema de cálculo, los estados intermedios b_{ATK} y b_{A^*TK} son de naturaleza bien diferente; cada uno de los estados b_{ATK} pueden ser observados en el problema de propagación considerado; es decir, pueden ser considerados como estados finales y el hecho de que tengan que ser acoplados a estados finales (b_{AT^*}) de distinta naturaleza es circunstancial. Veremos luego de la solución detallada que ellos dan la mayor contribución a la ecuación de normalización.

En cambio los estados "virtuales"

b_{A^*TK} ("virtuales" en el sentido que no conservan la energía y no por el hecho de que no vayan a conducir a efectos observables), provienen de considerar el estado fundamental de un átomo

//

/// con su campo propio; es decir, por ejemplo el átomo T en su estado fundamental emite fotones "virtuales". Estos términos (que introducen dificultades matemáticas que deben ser salvadas) son de pequeña contribución cuantitativa frente a los b_{ATK} y despreciables para gran distancia entre fuente y zonda, ellos sin embargo tienen importancia conceptual pues dan cuenta del viejo problema de la medición de un campo por medio de un cuerpo de prueba finito. En efecto la determinación de b_{AT}^* (que como dijimos corresponde a una medición físicamente realizable del campo emitido) tendrá involucrada la reacción del cuerpo de prueba sobre el átomo fuente (presente en el sistema (28), fundamentalmente a través del segundo término en la primera ecuación, manifestándose luego en forma cíclica en el resto de las ecuaciones).

Como vemos la electrodinámica cuántica da cuenta de este problema de la influencia del cuerpo de prueba en la medición de un campo, y conduce por lo tanto sólo en primera aproximación a las expresiones clásicas, ya que es justamente esta reacción la que es ignorada en la electrodinámica clásica.

En nuestros desarrollos siguientes ignoraremos esta clase de detalles finos, lo que tendremos entonces como veremos posteriormente es la situación clásica salvo contribución de las frecuencias negativas, presente en el siguiente sistema de ecuaciones, donde se han excluido las transiciones "virtuales" mencionadas.

$$\begin{cases}
 i\hbar \dot{b}_{AT} = \sum_K H_{ATK} b_{ATK} e^{i(E_A - E_K)t/\hbar} \\
 i\hbar \dot{b}_{AT}^* = H_{ATK}^* b_{AT} e^{i(E_K - E_A)t/\hbar} + H_{ATK} b_{AT}^* e^{i(E_K - E_A)t/\hbar} \\
 i\hbar \dot{b}_{AT}^* = \sum_K H_{ATK}^* b_{ATK} e^{i(E_A - E_K)t/\hbar}
 \end{cases} \quad (29)$$

///

Antes de proseguir en la solución de este sistema, debemos mencionar que tanto el sistema (28) como el sistema (29) son matemáticamente autoconsistentes, pues en ambos casos tenemos conservación de la norma, como es fácil comprobar mediante un cálculo sencillo:

$$i\hbar \frac{d}{dt} (|b_{AT}^x|^2 + \sum_K |b_{ATK}|^2 + \sum_K |b_{ATK}^{xx}|^2 + |b_{AT}^x|^2) = 0 \quad (30)$$

$$i\hbar (|b_{AT}^x|^2 + \sum_K |b_{ATK}|^2 + |b_{AT}^x|^2) = 0 \quad (31)$$

Esto no implica un contrasentido, pues a pesar de que en (31) hemos eliminado una serie de términos definidos positivos, los otros términos resultan modificados en forma tal de darnos conservación de la norma (esta modificación es cuantitativamente pequeña, dada la pequeña contribución de las transiciones b_{ATK}^{xx}).

Consideremos entonces el sistema (29), trataremos de resolverlo primero en el caso de gran distancia entre fuente y zonda, en este caso podemos omitir el segundo término en la primera ecuación, que da cuenta del hecho (obtenible también clásicamente) de que el cuerpo de prueba una vez excitado por la radiación proveniente de la fuente, vuelve a emitir cayendo de nuevo a su estado fundamental, en tanto que la onda difundida por el cuerpo de prueba vuelve al tiempo $t = 2R_{AT}/c$ a la fuente y la hace difundir otra vez, etc.etc. Resulta claro entonces que para distancias $R_{AT} \gg c/\gamma$ (\approx longitud del tren emitido por la fuente) este fenómeno no tendrá influencia sobre la onda emitida por la fuente. Volveremos luego sobre este punto para tratar de evaluar estos efectos.

Con las omisiones señaladas tendremos entonces:

$$i\hbar \dot{b}_{AT}^x = \sum_K H_{AT}^{ATK} b_{ATK} e^{i(\epsilon_T - \epsilon_K)t/\hbar} \quad (32)$$

//

////

donde b_{ATK} esta dado por su expresión (24) a saber:

$$b_{ATK} = H_{AK}^A \frac{1}{(\epsilon_K - \epsilon_A + i\hbar\gamma_A/2)} e^{i(\epsilon_K - \epsilon_A + i\hbar/2)t/\hbar}$$

Podemos ver ahora de inmediato que la expresión que en este caso desempeña las funciones de "Campo asociado", esta dada por:

$$\vec{A}_{ass} = (4\pi c^2/L^3)^{\frac{1}{2}} \sum_{\vec{k}} \vec{E}_{\vec{k}\lambda} (\hbar/2\omega_k)^{\frac{1}{2}} b_{AK\lambda}(t) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)} \quad (33)$$

$\omega_k = +|\mathbf{k}|c$

En efecto considerando ahora el cálculo de b_T^* con la expresión (33) considerada como un campo clásico producido por cierta distribución de cargas y corrientes (Coulomb gauge div. $\vec{A} = 0$), tendremos según los esquemas planteados en el capítulo anterior (despreciando interacción estática y término en A^2).

$$i\hbar \dot{b}_T^* = H_{T^*}^T e^{i\epsilon_T t/\hbar} \quad (34)$$

con

$$H_{T^*}^T = \langle \phi_{T^*}^* | -e/mc \vec{p} \cdot \vec{A}_{ass} | \phi_T \rangle$$

Agrupando convenientemente los términos en esta última expresión podemos ver que:

$$H_{T^*}^T = \sum_{\vec{k}} H_{AT^*}^{ATK} b_{AK}(t) e^{-i\epsilon_K t/\hbar}$$

Este elemento de matriz una vez introducido en (34) nos reproduce la (32), es decir, la expresión (33) además de proporcionarnos una imagen de la propagación del campo cuántico emitido, nos produce en primera aproximación sus mismos efectos.

//

///

Podemos ver además (apéndice II) que despreciando la contribución de las frecuencias negativas y extendiendo la suma a todo el espectro, satisface las ecuaciones de Maxwell fuera de las cargas y corrientes del átomo emisor. Es decir, sólo en este caso \vec{A}_{ass} representa un tren de ondas con un frente bien definido en $ct = r$ que se propaga desde el átomo emisor.

Pondremos énfasis en el hecho de que la extensión de la suma (33) a todo el rango de frecuencias si bien cuantitativamente nos produce un error muy pequeño, pues la mayor contribución de la integral proviene de un rango muy estrecho de frecuencias centradas alrededor de ω_A (como puede verse de la expresión analítica de los b_{AK}); conceptualmente en cambio nos induce en error. En efecto, la existencia del rango incompleto de frecuencias está relacionado como vimos con la no localizabilidad de un paquete describiendo una partícula relativista. Es obvio también el hecho de que para $t = \infty$ (prácticamente para t mayores que la vida media $1/\gamma_A$ del átomo emisor) cuando es diagonal el número de fotones y

$$b_{AK}(\infty) = H \frac{1}{(E_K - E_A + i\hbar\gamma_A/2)} = \lambda_K$$

la expresión

$$\vec{A}_{ass} = (4\pi c^2/L^3)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{K}} \vec{E}_{\mathbf{K}} (\hbar/2\omega_{\mathbf{K}})^{\frac{1}{2}} b_{AK}(\infty) e^{i(\vec{K}\vec{R} - Kt)}$$

representa el campo clásico asociado al paquete de un fotón

$$\Gamma' = \sum_{\mathbf{K}} b_{AK}(\infty) \Gamma'_{\mathbf{K}} e^{-iE_{\mathbf{K}}t/\hbar}$$

particular estado de excitación de campo de radiación producido por la fuente A considerada ahora externa al sistema.-

INFLUENCIAS DEL CUERPO DE PRUEBA A TRAVES DEL TERMINO DE REEMISION

a) Habíamos visto al resolver el sistema de ecuaciones (29), a saber:

$$i\hbar \dot{b}_{AT}^* = \sum_K H_{AT}^{ATK} b_{ATK} e^{i(E_A - E_K)t/\hbar}$$

$$i\hbar \dot{b}_{ATK} = H_{ATK}^* e^{i(E_K - E_A)t/\hbar} + \underline{H_{ATK}^* b_{AT}^* e^{i(E_K - E_T)t/\hbar}} \quad (29)$$

$$i\hbar \dot{b}_{AT}^* = \sum_K H_{AT}^{ATK} b_{ATK} e^{i(E_T - E_K)t/\hbar}$$

que la omisión del término que daba cuenta de la reemisión de radiación por el cuerpo de prueba (término subrayado), nos conducía (salvo frec. negativas) a las expresiones clásicas para el "campo asociado". Trataremos ahora de resolver en buena aproximación completamente el sistema anterior por medio del tipo de cálculo desarrollado por W. Heitler (x), al tratar la teoría general de los procesos de "damping"; esto además de proporcionarnos resultados que utilizaremos más adelante, nos permitirá en forma aproximada dar debida cuenta de los términos de reemisión omitidos en nuestro cálculo anterior (válido para distancias $R_{AT} \gg c/\gamma$).

De paso comprobaremos que las ecuaciones (29) salvo frecuencias negativas son causales en el sentido clásico. (xx). En forma muy somera los resultados de este método son los siguientes:

Si llamamos $b_n(t)$ a la amplitud de probabilidad del estado n , $b_0(t)$ a la amplitud del estado inicial 0, y H al hamiltoniano de interacción, se obtiene para la solución del siguiente sistema:

$$i\hbar \dot{b}_n(t) = \sum_m H_{n/m} b_m(t) e^{i(E_n - E_m)t/\hbar} \quad (t > 0) \quad (35)$$

(x) W. Heitler "The Quantum Theory" of Radiation" - Oxford - 3ª ed., pags. 163 y siguientes.

(xx) Este problema de la causalidad en la transmisión de señales de un átomo a otro ha sido tratado por varios autores, entre ellos podemos citar a J. Hamilton Proc. Phys. Soc. - Vol. 62, Part. 1 - 1/1/49

///

con las siguientes condiciones iniciales: $b_0(+\infty) = 1$; $b_n(0) = 0$ $n \neq 0$
 el siguiente conjunto de ecuaciones (Ver cita (x): Explicación más detallada de método, también puede verse en ap.IV)

$$b_n(t) = -1/2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(E) e^{i(E_n - E)t/\hbar} dE \quad \text{donde}$$

$$G_n(E) = U_n(E) G_0(E) \int(E - E_n) \quad (n \neq 0) \quad (\int(x) = P/x - i\pi\delta(x))$$

$$G_0(E) = \frac{1}{E - E_0 - 1/2 i \hbar \Gamma_0(E)}$$

La función $\int(x)$ es necesaria para el cumplimiento de las condiciones iniciales propuestas y surge a consecuencia de éstas (ver cita (x) pag. ant.).

Las $U_n(E)$ son obtenibles de:

$$U_n(E) = H_{n/0} + \sum_{m \neq 0} H_{n/m} U_m(E) \int(E - E_m)$$

y $\Gamma_0(E)$ a partir de:

$$-i \hbar \Gamma_0(E)/2 = H_{0/0} + \sum_{m \neq 0} H_{0/m} U_{m/0} \int(E - E_m)$$

Con la 1ª, 2ª y 3ª de estas ecuaciones podemos poner $b_n(t)$ y $b_0(t)$ en la siguiente forma más explícita:

$$b_n(t) = -1/2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_n(E) e^{i(E_n - E)t/\hbar} \int(E - E_n) dE}{(E - E_0 + 1/2 i \hbar \Gamma_0(E))} \quad (36)$$

$$b_0(t) = -1/2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(E_0 - E)t/\hbar} dE}{E - E_0 - 1/2 i \hbar \Gamma_0(E)} \quad (37)$$

$\Gamma_0(E)$ (en general independiente de E para muchos problemas en buena aproximación) tiene en general una parte real (siempre positiva):

$$\text{Re. } \Gamma(E) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{m \neq 0} |U_{m/0}(E)|^2 \delta(E - E_m) \quad (38)$$

y que tomada en un punto particular describe el ancho de línea, y una parte imaginaria, responsable del desplazamiento de la línea:

$$\hbar/2\text{Im}(\Gamma(E)) = H_{0/0} + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \left\{ H_{0/n} \int(E - E_n) U_{n/0} + H_{n/0} \int(E - E_n)^* U_{n/0}^* \right\} \quad (39)$$

///
 Así, la teoría general, permite calcular mediante las aproximaciones usuales el concepto aproximado de probabilidad de transición por unidad de tiempo y da para esto:

$$\sum_n \omega_{n/0} = \text{Re. } \Gamma(E_0 + \Delta E) \quad \text{donde} \quad (40)$$

$$\omega_{n/0} = \frac{d}{dt} |b_n|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} |U_{n/0}(E_n)|^2 \delta(E_n - E_0 - E)$$

Podemos obtener una idea de estas aseveraciones, considerando el caso en que $\Gamma(E)$ es independiente de E (este es realmente el caso para muchos problemas en muy buena aproximación); entonces de la expresión (37) para $b_0(t)$ (escribiendo $\Gamma = R(\Gamma) + i I(\Gamma)$) obtenemos mediante un simple cálculo de residuos:

$$b_0(t) = e^{-\frac{1}{2} i I(\Gamma) t} e^{-\frac{1}{2} \text{Re.}(\Gamma) t}$$

donde la interpretación es obvia.

La teoría permite también calcular la distribución de probabilidad de los distintos estados n (a los cuales son permitidas las transiciones desde el estado inicial 0) después de un tiempo t grande ($t > 1/\Gamma$). En efecto de la expresión (36) para $b_n(t)$, considerando que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int (x) e^{\pm ixt} = \begin{cases} 0 & (+) \\ -2\pi i \delta(x) & (-) \end{cases}$$

obtenemos:

$$b_n(\infty) = \frac{U_n(E_n)}{E_n - E_0 + 1/2i \hbar \Gamma(E_n)} \quad (41)$$

luego:

$$b_n(\infty) = \frac{U_{n/0}(E_n)}{(E_n - E_0 - \Delta E)^2 + 1/4 \hbar^2 (\text{Re. } \Gamma(E_n))^2} \quad (42)$$

donde

$$\Delta E = \frac{1}{2} \hbar I(\Gamma(E_n))$$

Debe tenerse presente que si bien las expresiones (38), ///

/// (39), (41) y (42) son exactas, en cambio la (40) es una aproximación, dado lo aproximado del concepto de probabilidad de transición por unidad de tiempo.

Queremos mencionar también en conexión con nuestro problema y este método: i) Sólo difiere del método de "autovalores o modos normales" (x), en el hecho de estar convenientemente incluídas las condiciones iniciales.

ii) Si bien este método resuelve exactamente (en teoría) un dado problema de condiciones iniciales, en la práctica sin embargo, para la aplicación de la fórmula (36) deberemos obtener los $U_n(E)$ y estos están dados por expresiones donde se suma sobre energías K (al igual que en nuestro sistema (29) de partida); en nuestro caso particular la extensión de esta suma a todo el espectro, si bien nos introducirá un error cuantitativamente pequeño (como veremos), conceptualmente es justamente esta aproximación la que nos conducirá a la causalidad en la transmisión de señales de un átomo a otro.

En otras palabras, si bien el método empleado nos conducirá en nuestro caso particular a mejores aproximaciones que el cálculo común de perturbaciones, no puede obviar el problema ya mencionado del rango incompleto de frecuencias (con las implicancias estudiadas), aunque un exámen demasiado ligero de la (36) pareciera indicarnos lo contrario.

iii) Tal vez sea útil aclarar en conexión con el método de "damping" usado, que nosotros al considerar que H es el hamiltoniano de interacción, estamos tomando como punto de partida los estados no-perturbados; es decir, calcularemos transiciones entre estados no perturbados. Sin embargo desde un punto de vista más exacto (para calcular aproximaciones superiores al ancho de línea), considerando que un electrón ligado (o libre) está acompañado por su campo y entonces su función de onda contiene mezclas con fotones "virtuales", deberíamos "redefinir" los estados atómicos de forma de incluir los estados "virtuales". //

(x) J. Hamilton Proc. of The Phys. Soc. 1 Nov. 1947 - Vol. 59

$$U_{AT}^*(E) = \frac{(E - E_{AT}^*) I(E, R_{AT}^+)}{(E - E_{AT}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_T)}$$

donde (44)

$$I(E, R_{AT}^+) = \sum_K H_{T^*}^{TK} H_{AK}^{A^*} e^{+i\vec{K}\vec{R}_{AT}^+} \zeta(E - E_{ATK})$$

Análogamente reemplazando $U_{AT}(E)$ en la primera de las (43) obtendremos

$$U_{ATK} = H_{AK}^{A^*} + \frac{I(E, R_{AT}^+) H_{TK}^{T^*} e^{-i\vec{K}\vec{R}_{AT}^+}}{(E - E_{AT}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_T)} \quad (45)$$

Usando esta última expresión, reemplazada en la expresión para (E) dada por la teoría, tendremos:

$$-\frac{1}{2}i\hbar\Gamma(E) = \sum_K H_{A^*}^{AK} U_{ATK} \zeta(E - E_{ATK}) = -\frac{1}{2}i\gamma_A + \frac{I(E, R_{AT}^+) I(E, R_{AT}^-)}{(E - E_{AT}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_T)} \quad (46)$$

donde

$$-\frac{1}{2}i\hbar\gamma_A = \sum_K |H_A^{AK}|^2 \zeta(E - E_{ATK}) \quad (47)$$

$$I(E, R_{AT}^-) = \sum_K H_{TK}^T H_A^{AK} e^{-i\vec{K}\vec{R}_{AT}^-} \zeta(E - E_{ATK})$$

A esta altura es conveniente detenernos para examinar los resultados obtenidos, para esto es útil compararlos con los que se obtendrían al ignorar el término de reemisión en nuestro sistema de ecuaciones (29) de partida: En este caso es:

$$U_{ATK} = H_{AK}^{A^*} \quad (48)$$

$$U_{AT}^* = \sum_K H_{T^*}^{TK} H_{AK}^{A^*} e^{+i\vec{K}\vec{R}_{AT}^+} \zeta(E - E_{ATK}) = I(E, R_{AT}^+)$$

$$-\frac{1}{2}i\hbar\Gamma(E) = \sum_K |H_{AK}^A|^2 \zeta(E - E_{ATK}) = -\frac{1}{2}i\hbar\gamma_A(E)$$

Como vemos la omisión del término de reemisión; nos conduce a los mismos resultados (si introducimos las (48) en (36)) que nos proporciona el cálculo corriente usando el método de Weisskopf y Wigner ($b_0 = e^{-\gamma t/2}$); donde se ignora el hecho de que la sonda una vez excitada vuelve a emitir (con esta aproxi

///mación $b_{AT}(\infty)$ no es necesariamente nulo, como sucede yendo a la aproximación superior; ver ecuaciones (44) y (41) para $U_{AT}(E)$ y $b_n(\infty)$ contribuyendo a los estados con un fotón presente (ver segundo término de la ecuación (45)). Además esta aproximación no tiene en cuenta la variación del ancho de línea del estado inicial (ver (46) que para pequeñas distancias fuente-zonda debe disminuir debido a que la onda emitida por el cuerpo de prueba puede influir sobre la fuente perturbando su decaimiento normal. En efecto:

Vamos de inmediato de las segundas en (44) y (47) que para el caso de átomos idénticos e igualmente orientados

$$\lim_{R_{AT} \rightarrow 0} I(E, R_{AT}^+) = \lim_{R_{AT} \rightarrow 0} I(E, R_{AT}^-) = -\frac{1}{2} i \hbar \gamma \quad (R_{AT} < \lambda)$$

entonces

$$-\frac{1}{2} i \hbar \Gamma(E_{AT}^+) = -\frac{1}{2} i \hbar \gamma + \frac{(-\frac{1}{2} i \hbar \gamma)^2}{(E_{AT}^+ - E_{AT}^+ + \frac{1}{2} i \hbar \gamma)} \quad \text{---} \quad 0 \quad (R_{AT} < \lambda)$$

Es decir; vemos entonces que para el caso de átomos idénticos e igualmente orientados situados a pequeña distancia relativa ($R_{AT} \ll \lambda$) disminuye grandemente la probabilidad de transición del átomo A, y esto es debido justamente al término de reemisión como intuitivamente cabía esperar. Claro está que este es un resultado ideal y da una idea grosera de los hechos, puesto que un cálculo más exacto para el orden de distancias considerado, debería incluir la interacción electrostática y la correcta simetría en la función de onda.

Estudio del término I: Para el caso más general de átomos A y T no necesariamente semejantes y con orientaciones genéricas, el cálculo del término I (en la aproximación dipolar para los elementos de matriz) conduce a la siguiente expresión: (Ver ap. III)

$$I(E, R^+) = I(E, R^-) = \frac{e^2 K_A K_T / r_A / r_T}{2 \pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{A+B}{K R_{AT}} - \frac{2B}{K^3 R_{AT}^3} \right] \text{sen} K R_{AT} + \frac{2B}{K^2 R_{AT}^2} \text{cos} K R_{AT} \cdot K \int (K_B - K) dK \quad (49) //$$

$$A = \cos \alpha + \cos \theta_A \cos \theta_T = (\hat{r}_A \cdot \hat{r}_T) + (\hat{r}_A \cdot \hat{R}_{AT})(\hat{r}_T \cdot \hat{R}_{AT})$$

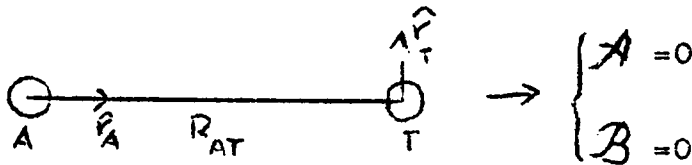
donde

(50)

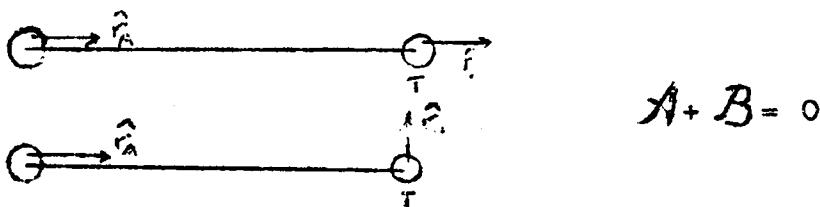
$$B = \cos \alpha - 3 \cos \theta_A \cos \theta_T$$

$$A + B = 2(\cos \alpha - \cos \theta_A \cos \theta_T) = 2 \left[(\hat{r}_A \times \hat{R}_{AT}) \cdot (\hat{r}_T \times \hat{R}_{AT}) \right] ; \wedge = \text{versores}$$

Como vemos I es nulo independientemente de la distancia R, si las orientaciones relativas de los átomos A y T son:



y para distancias intermedias (despreciando términos de orden superior a $1/KR$)



Lo que está en concordancia con los hechos clásicos de interacción entre dipolos cuando se desprecia la parte estática ($1/R^2, 1/R^3$) (x).

En cuanto al orden de magnitud de I; dado que este término es el representante directo de la interacción entre los átomos A y T a través del campo y dada su forma analítica, intuitivamente debemos esperar que para el rango físico de energías (centradas en $K_A \sim K_T$ como muestran las expresiones (36), (44) y (45) y en un rango del orden \dots) este término sea del orden o menor que $-\frac{1}{2} \frac{\hbar}{\lambda}$ según sea el orden de distancias considerado ($R_{AT} < \lambda, R_{AT} \sim \lambda$). En efecto ante todo no es difícil ver de la expresión (49) que para los dos casos límites siguientes tenemos:

(x) Ver Born y Wolf. "Principles of Optics" pag. 81

///

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I = 0 \quad (51)$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} I = \sum_K H_{TK}^T H_{LK}^{AK} \zeta(E - E_K) = -\frac{1}{2} i \hbar \gamma_{AT}(E, \cos \alpha) \quad (52)$$

Pues para el caso de átomos idénticos e igualmente orientados ($\cos \alpha = 1$) esta última expresión se reduce para $K_E \sim K_A$ a la conocida expresión para el ancho de línea del átomo A aislado calculada en la aproximación dipolar (Ver cálculo de la última expresión en ap. III)

$$\text{Re.}(\gamma_{AT}(K_A)) = R_e(\gamma_A) = \frac{4}{3} \frac{e^2 K_A^3 / r_A^2}{\hbar}$$

Para un orden intermedio de distancias, por ejemplo:

$$c/\gamma \gg R_{AT} > \lambda_A = \frac{2\pi}{K_A}$$

calcularemos la expresión (49) para I en forma aproximada;

Para fijar ideas los órdenes de magnitud en el espectro visible son:

$$c/\gamma \sim \frac{3 \times 10^{10}}{10^8} = 3 \cdot 10^2 \text{ cm.} \quad ; \quad \lambda \sim 10^{-5} \text{ cm.}$$

en la expresión mencionada vemos que debido a la función $\zeta(K_E - K)$ sólo tienen contribución importante los valores de $K \sim K_E$ y como para la solución final interesan los valores de K_E centrados en K_A en un rango del orden Γ fundamentalmente; entonces para el rango de distancias considerado podemos despreciar los términos de orden superior a $1/KR$. Entonces:

$$I = \frac{e^2 K_A K_T / r_A / r_T}{2} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\frac{A+B}{KR_{AT}} \right] \text{sen} KR_{AT} \right\} K \zeta(K_E - K) dK$$

$$= \text{cte.} \frac{A+B}{R_{AT}} \int_0^{\infty} \text{sen} KR_{AT} \left(\frac{P}{K_E - K} - i\pi \delta(K_E - K) \right) dK \quad //$$

///

integrando esta expresión tendremos:

$$I = \text{cte.} \frac{A+B}{R_{AT}} \left\{ -i\pi \text{sen}K_B R + \left[\text{sen}K_B R \text{Ci}(K_B R) - \text{cos}K_B R (\pi/2 + \text{Si}(K_B R)) \right] \right\}$$

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{y} \quad \text{Ci}(x) \sim \frac{\sin x}{x}$$

donde

$$\text{Ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad \text{para } x \gg 1 \quad \text{Si}(x) \sim \pi/2 - \frac{\cos x}{x}$$

Considerando de acuerdo a lo dicho, grandes valores del argumento; tendremos:

$$I = - \text{cte.} \left\{ \frac{A+B}{R_{AT}} e^{iK_B R_{AT}} + \frac{A+B}{K_B^2 R_{AT}^2} \right\}$$

pero el segundo sumando es justamente del orden de los términos despreciados para el rango de distancias considerado, entonces:

$$I = - \frac{e^2 K_A K_T / r_A / r_T}{2} \frac{A+B}{R_{AT}} e^{iK_B R_{AT}} \quad (53)$$

Idéntico resultado se obtendría al extender la integración a todo el rango de frecuencias con las argumentaciones anteriores. Posteriormente veremos que es justamente esta aproximación la que nos conduce a la causalidad en la transmisión de señales del átomo A al T.

a) Cálculo de la amplitud $b_{AT}(t)$

Usando

$$b_{AT}^*(t) = - \frac{i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_{AT}^*(E) \{ (E - E_{AT}^*) e^{i(E_{AT}^* - E)t/\hbar} dE}{(E - E_{AT}^* + \frac{1}{2}i\hbar \Gamma(E))}$$

donde

$$U_{AT}^*(E) = \frac{(E - E_{AT}^*) I(E, R_{AT})}{(E - E_{AT}^* + \frac{1}{2}i\hbar \gamma_T(E))}$$

$$-\frac{1}{2}i\hbar \Gamma(E) = -\frac{1}{2}i\hbar \gamma_A(E) + \frac{I^2(E, R_{AT})}{(E - E_{AT}^* + \frac{1}{2}i\hbar \gamma_T(E))}$$

//

///

tendremos: considerando $x \zeta(x) = 1$

$$b_{AT}^{\star}(\tau) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I(B, R_{AT}) e^{i(E_{AT}^{\star} - E)\tau/\hbar} dB}{(B - E_{AT}^{\star} + \frac{1}{2}i\gamma_A(B))(B - E_{AT}^{\star} + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_T(B)) - I^2(B, R_{AT})} \quad (54)$$

Por simplicidad consideraremos el caso más importante de resonancia (átomos A y T idénticos, no necesariamente con la misma orientación), entonces:

$K_A = K_T = K_0$; además no estamos interesados aquí en desplazamientos de nivel (que por otra parte para transiciones permitidas es generalmente mucho más pequeño que el ancho de línea), entonces pondremos:

$$\gamma_A(B) = \gamma_T(B) = \gamma_{AT}(B) = 4/3 \frac{e^2 K_0^2 / r^2}{\hbar} \cdot K_B = \gamma \cdot \frac{K_B}{K_0}$$

donde es el ancho de línea de un átomo aislado.

En este caso de resonancia entonces tendremos:

$$b_{AT}^{\star}(\tau) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I(B, R_{AT}) e^{i(E_0 - B)\tau/\hbar} dB}{(B - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma \cdot \frac{B - E_0}{E_0})^2 - I^2(B, R_{AT})} \quad (55)$$

Esta expresión puede usarse para el cálculo de b_{AT}^{\star} hasta cualquier orden de λ/R ; aquí sólo consideraremos el primer orden.

En este caso I está dada por su forma aproximada (53) puesta ahora en la forma más conveniente:

$$I = - \frac{1}{2} \hbar \gamma \cdot 3/4 \frac{A + B}{E_0(R_{AT}/\hbar c)} e^{iBR_{AT}/\hbar c} \quad (56)$$

En esta aproximación los polos del integrando están dados por:

$$(B - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma \cdot \frac{B - E_0}{E_0}) = \pm I = \pm \frac{1}{2} \hbar \gamma \cdot 3/4 \frac{A + B}{E_0(R_{AT}/\hbar c)} e^{iBR_{AT}/\hbar c}$$

es decir:

$$B = (1 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma \cdot \frac{1}{E_0})^{-1} (E_0 + \frac{1}{2} \hbar \gamma \cdot 3/4 \frac{A + B}{E_0(R_{AT}/\hbar c)} e^{iBR_{AT}/\hbar c}) \quad ///$$

Considerando que es $\frac{\hbar\gamma}{E_0} \ll 1$, despreciando términos de orden sup. tendremos:

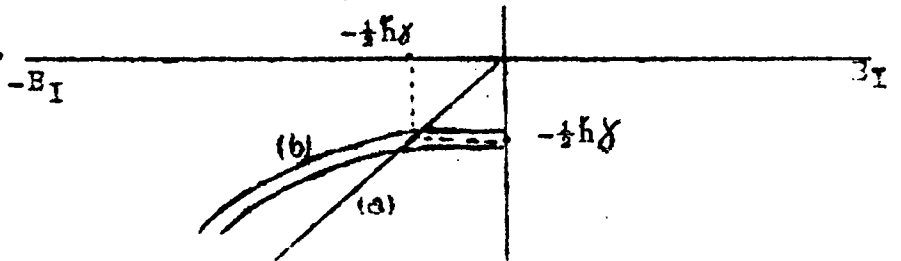
$$E = E_{Re} + iE_I = E_0 - \frac{1}{2}\hbar\gamma + \frac{1}{2}\hbar\gamma \cdot \frac{3}{4} \frac{A+B}{E_0 R_{AT}/\hbar c} e^{iE R_{AT}/\hbar c}$$

Es decir:

$$E_{Re} = E_0 + \frac{1}{2}\hbar\gamma \cdot \frac{3}{4} \frac{A+B}{E_0 R_{AT}/\hbar c} e^{-E_I R_{AT}/\hbar c} \cos E_{Re} R_{AT}/\hbar c$$

$$(a) E_I = -\frac{1}{2}\hbar\gamma + \frac{1}{2}\hbar\gamma \cdot \frac{3}{4} \frac{A+B}{E_0 R_{AT}/\hbar c} e^{-E_I R_{AT}/\hbar c} \sin E_{Re} R_{AT}/\hbar c \quad (b)$$

Observando la 2ª de éstas, si suponemos que $E_I = 0$ vemos que esto no es posible, dado que $\frac{A+B}{E_0 R_{AT}/\hbar c} < 1$; entonces los polos del integrando yacen todos en el semiplano inferior. Vemos del gráfico adjunto (donde han sido dibujadas la forma aproximada de (a) y (b)) que existen polos muy cercanos y muy lejanos a $(E_0 - \frac{1}{2}\hbar\gamma)$, debemos mencionar que estos últimos no tienen sentido físico y han sido introducidos por las aproximaciones hechas al calcular el término I.



Podemos después de esto, despreciar dado su orden de magnitud el 2º término del denominador, así obtendremos:

$$b_{AT}^x(t) e^{-iE_0 t/\hbar} \approx \frac{1}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{2}\hbar\gamma \cdot \frac{3}{4} \frac{A+B}{E_0 R_{AT}/\hbar c} \frac{e^{-iE(t - R_{AT}/c)/\hbar}}{(E - E_0 + \frac{1}{2}\hbar\gamma)^2} \right.$$

Un simple cálculo de residuos nos proporciona en este caso:

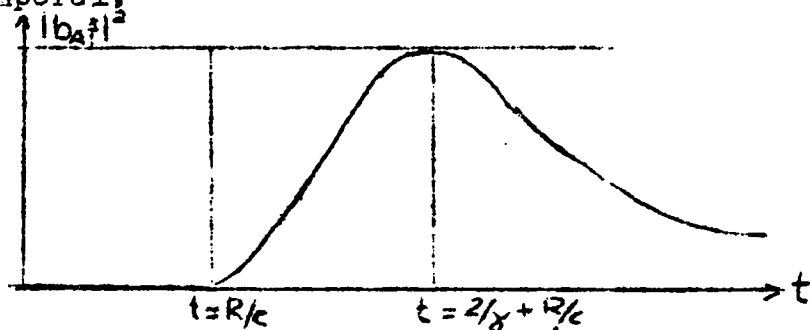
$$b_{AT}^x(t) \approx \begin{cases} -\frac{1}{2}\hbar\gamma \cdot \frac{3}{4} \frac{A+B}{E_0 R_{AT}/\hbar c} (t - R_{AT}/c)/\hbar e^{-\frac{1}{2}\hbar\gamma t/\hbar} (ct - R_{AT}) e^{iE_0 R_{AT}/\hbar c} & \text{para } t > R_{AT}/c \\ 0 & \text{para } t < R_{AT}/c \end{cases} \quad (57)$$

Entonces el átomo T permanece en su estado fundamental hasta el tiempo $t = R/c$, después de lo cual está excitado por un tiempo de orden $1/\gamma$.

En este caso de ser observado el sistema la probabilidad de encontrarlo en el estado excitado muestra la siguiente evolución

////

/// temporal;



La máxima probabilidad de excitación es de la forma λ^2/R^2 de acuerdo con las ideas usuales de la propagación electromagnética.

Debemos mencionar aquí que el resultado obtenido "causalidad en la transmisión de señales de un átomo a otro" ha sido obtenido gracias a las aproximaciones hechas, en especial la integración a todo el rango de frecuencias que si bien introducen un error cuantitativamente pequeño, nos condujeron a la dada expresión para $I \sim e^{iK_E R} R_{AT}$ que nos permitió dar cuenta de este resultado. En otras palabras si bien las expresiones son correctas en muy buena aproximación, no constituyen una prueba de que las ecuaciones de partida son causales en el sentido clásico.

-----000000-----

b) Cálculo de amplitud inicial b_{AT}^x - influencias del término reemisión

De las expresiones genéricas (37) y (46) dadas anteriormente surge que para el caso de átomos idénticos,

$$b_{AT}^x e^{-iE_0 t/\hbar} = - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iEt/\hbar} dE}{(E-E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma) - \frac{I^2}{(E-E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)}} \quad (58)$$

Es claro que el fenómeno de reemisión contribuye en términos del orden λ^2/R^2 en la amplitud b_{AT}^x , así para el caso de grandes distancias entre fuente y zonda donde $I^2 \sim 0$ (esto también ocurre en el caso de orientaciones poco favorables) el átomo A emite como si estuviera solo. Un efecto más exacto para este caso de (58) nos conduce a la conocida expresión:

$$b_{AT}^x(t) = e^{-\frac{1}{2}\gamma_A t} \quad t > 0$$

Para considerar la influencia del fenómeno de reemisión en el //

//// átomo fuente, deberíamos integrar la expresión (58), pero para nuestros fines, podemos dejando de lado toda rigurosidad mostrar esto en forma aproximada.

Considerando que $I < \hbar\gamma$ desarrollaremos la amplitud de Fourier en serie de potencias, así tendremos:

$$\frac{(E-E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)}{(E-E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma) - I^2} = \frac{1}{(E-E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)} + \frac{I^2}{(E-E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)^3} + \frac{I^4}{(E-E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)^5} + \dots$$

Usaremos ahora la expresión aproximada de I, (53) dada en la pag. 40, o bien (56) pag. 41 .-

Como vemos, después de un sencillo cálculo; el primer término nos conducirá al decaimiento exponencial inicial; el segundo término da un crecimiento del tipo $(ct - R)^2$ y un decaimiento subsiguiente del tipo $e^{-\gamma/2c (ct - 2R)}$ a partir del tiempo $t = 2R/c$ (cuando retorna la primera onda difundida por el cuerpo de prueba), etc, etc.-

-----0000000-----

c) Estados con un fòtòn presente

Habíamos visto que al omitir los efectos del cuerpo de prueba y la influencia del término de reemisión, el campo emitido estaba dado por la siguiente expresión: (ver pag. 29).

$$b_{ATK}(t) = \frac{H_{AK}^{\Lambda*} (1 - e^{i(E_K - E_A + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_{\Lambda})t/\hbar})}{(E_K - E_A + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_{\Lambda})} ; b_{ATK}(\infty) = \frac{H_{AK}^{\Lambda*}}{(E_K - E_A + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_{\Lambda})}$$

Es decir esencialmente teníamos una distribución espectral centrada en $E_A = E_0$ de ancho $\hbar\gamma_{\Lambda}$.

Debemos ahora esperar apartamientos de esta situación debido a la consideración del término de reemisión y su influencia en la fuente. En efecto tenemos ahora

///

////las siguientes expresiones:

$$U_{ATK} = H_{AK}^{\times} + \frac{H_{TK}^{\times} e^{-i\vec{k}\vec{R}_{AT}} I(E, R_{AT})}{(E - E_{AT}^{\times} + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_T)}$$

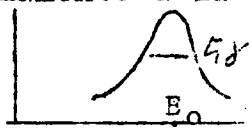
Reemplazando esta en la expresión genérica (36) para $b_n(t)$ tendremos:

$$b_{ATK}^{(I)}(t) + b_{ATK}^{(II)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{AK}^{\times} (E - E_K) e^{i(E_K - E)t/\hbar} dE}{(E - E_{AT}^{\times} + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_T)} + \dots$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{TK}^{\times} e^{-i\vec{k}\vec{R}_{AT}} I(E, R_{AT}) e^{i(E_K - E)t/\hbar} \zeta(E - E_K) dE}{(E - E_{AT}^{\times} + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_T)(E - E_{AT}^{\times} + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_T)} \quad (59)$$

Veremos, (recordar la ec. $i\hbar\dot{b}_{ATK}^{\times} = H_{AT}^{\times} b_{AT}^{\times} e^{i\dots} + H_{AT}^{\times} b_{AT}^{\times} e^{i\dots}$)

que i) $b_{ATK}^{(I)}(t)$ ($t > 0$) coincide a menos de términos de orden y superiores, (que dan cuenta de la influencia de la reemisión en la fuente) con el campo que emitiría el átomo A aislado; y que $b_{ATK}^{(II)} \neq 0$ ($t > R_{AT}/c$) (cuando usemos la expresión aproximada de I), corresponde en primera aproximación al campo emitido por el átomo T una vez en el estado \bar{T} , .ii) Claro está que debemos esperar que este campo tenga un ancho espectral menor que el ancho $\hbar\gamma$ que emitiría espontáneamente el átomo T una vez en el estado excitado, esto es debido precisamente a la forma del espectro de la radiación excitante



En efecto los estados cuánticos K con energías cercanas a resonancia $E_K \sim E_{AT}$ tienen mayor probabilidad de ser absorbidos (x); por otra parte intuitivamente también debemos esperar que la amplitud $b_{ATK}^{(II)}$ sea del orden λ_k/R_{AT} (ver término I y su significación) veces la amplitud $b_{ATK}^{(I)}$.

////

(x) En este orden de cosas ver por ejemplo Fluorescencia de Resonancia de acuerdo a la forma del espectro primario. W.Heitler loc. cit. pgs. 196 y siguientes. L.Falicov. Tesis . N.Cimento V.16 - 1960.

/// Ya que para tiempos grandes ($t > 1/\gamma$) estos términos son los únicos que contribuirán la norma; podemos obtener, usando la expresión genérica (41) para $b_n(\infty)$ dada por la teoría, una expresión exacta (dentro de la exactitud del esquema planteado) para $b_{\Delta TK}^{(I)}$ y $b_{\Delta TK}^{(II)}$ y mostrar de inmediato las aseveraciones ii).-

Así podemos poner: (I)

$$b_{\Delta TK}^{(I)}(\infty) = \frac{H_{\Delta K}^{A^*}}{(E_K - E_{AT}^* + \frac{1}{2}i\hbar \Gamma(E_K))} =$$

$$= \frac{H_{\Delta K}^{A^*}}{(E_K - E_{AT}^* + \frac{1}{2}i\hbar \gamma_A - \frac{I^2(E_K, R)}{(E_K - E_{AT}^* + \frac{1}{2}i\hbar \gamma_T)})} \quad (60)$$

(II)

$$b_{\Delta TK}^{(II)}(\infty) = \frac{I(E_K, R_{AT})}{(E_K - E_{AT}^* + \frac{1}{2}i\hbar \gamma_A - \frac{I^2(E_K, R_{AT})}{(E_K - E_{AT}^* + \frac{1}{2}i\hbar \gamma_T)})} \times$$

$$\frac{H_{TK}^{T^*} e^{-i\vec{K}\vec{R}_T}}{(E_K - E_{AT}^* + \frac{1}{2}i\hbar \gamma_T)} \quad (61)$$

Podemos ahora, considerando que $I < \hbar \cdot \gamma$ desarrollar en serie, así las expresiones anteriores nos quedarán:

(I)

$$b_{\Delta TK}^{(I)}(\infty) \cong \frac{H_{\Delta K}^{A^*}}{E_K - E_{AT}^* + \frac{1}{2}i\hbar \gamma_A} + \frac{I^2(E_K, R_{AT})}{(E_K - E_{AT}^* + \frac{1}{2}i\hbar \gamma_T)(E_K - E_{AT}^* + \frac{1}{2}i\hbar \gamma_A)^2} + \dots + \frac{H_{\Delta K}^{A^*}}{(I^4)} \quad (62)$$

(II)

$$b_{\Delta TK}^{(II)}(\infty) = \frac{I(E_K, R)}{(E_K - E_{AT}^* + \frac{1}{2}i\hbar \gamma_A)} \cdot \frac{H_{TK}^{T^*} e^{-i\vec{K}\vec{R}_T}}{(E_K - E_{AT}^* + \frac{1}{2}i\hbar \gamma_T)} + \dots$$

Una simple inspección de estos desarrollos muestra de inmediato (ver los órdenes de magnitud y el ancho espectral de cada uno de los términos) lo que intuitivamente cabía esperar acorde al fenómeno estudiado y la influencia del término de reemisión. Para tiempos t finitos, integrando las expresiones genéricas dadas (60) y (61) despreciando dado su orden de magnitud el término en I^2 y usando la ///

//// aproximación discutida para I; considerando además que el camino de integración siguiente para la función $i/x - x_0$, nos define la forma operacional de la distribución $\zeta(x - x_0)$



obtenemos para el caso de átomos A y T idénticos las siguientes expresiones aproximadas:

$$b_{ATK}^{(I)}(t) \cong \frac{1 - e^{i(E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)t/\hbar}}{(E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)} \quad (t > 0)$$

$$b_{ATK}^{(II)}(t) = -\frac{1}{2}\hbar\gamma \cdot \frac{3}{4} \frac{A + B}{E_0 R/\hbar c} e^{iE_K R/\hbar c} H_{TK}^T e^{-i\vec{K}\vec{R}_T} \left\{ \frac{1 - e^{i(E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)(t - \frac{R}{c})/\hbar}}{(E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)^2} + \frac{e^{i(t - R/c)/\hbar} e^{i(E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)(t - R/c)/\hbar}}{(E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)} \right\} \quad (ct > R_{AT}) \quad (63)$$

Debemos hacer notar para mayor claridad en la interpretación, que esta última expresión para $b_{ATK}^{(II)}(t)$ puede obtenerse directamente a partir del estudio del campo emitido por el átomo T, por medio de :

$$i\hbar b_{ATK}^{(II)}(t) = H_{TK}^T e^{-i\vec{K}\vec{R}_T} b_{AT}^X(t) e^{i(E_K - E_0)t/\hbar}$$

reemplazando en esta la forma obtenida en pags. anteriores para $b_{AT}^X(t)$, , obtendremos la expresión de b_{ATK}^{II} escrita arriba.

Además de los hechos conocidos (campo fluorescente), la expresión mencionada muestra la existencia de un transitorio, durante el cual el átomo T emite su propio ancho natural (x).

-----oooooooo-----

Conclusiones: Luego de este análisis a grandes rasgos, podemos concluir que la expresión \vec{A}_{ass} (ver cap. anterior) representa en buena aproximación (a menos de los efectos del cuerpo de prueba; donde en estos incluimos el fenómeno de reemisión, y salvo frecuencias negativas con sus implicancias estudiadas) el campo cuántico emitido por la fuente \mathcal{A} producida en las aproximaciones mencionadas sus mismos efectos.

CAMPO CUANTICO DE DOS FOTONES

Trataremos ahora de definir conceptos similares para transi-
 ciones cuánticas que involucren dos fotones. Es decir, estu-
 diaremos la propagación de un campo cuántico de dos fotones
 por medio de expresiones asociadas escritas en el espacio
 tiempo de configuraciones.

El criterio que usaremos para asociar a estos campos cuánticos, expresiones que nos den una imagen de su evolución espacio-temporal, será en esencia el mismo ya empleado en el primer capítulo, a saber:

Los "campos asociados" han de ser tales que puestos en interac-
 ción con cuerpos de prueba reales, han de dar lugar a los mis-
 mos efectos del campo cuántico.-

Comenzaremos con la emisión de dos átomos ubicados a distan-
 cia relativa R; definiremos nuestro sistema de la siguiente
 forma:

Un átomo A, de estado fundamental ϕ_A que se en-
 cuentra inicialmente en el estado excitado ϕ_A^* , a una
 distancia R_{AB} de él se encuentra un átomo B de estado fundamen-
 tal ϕ_B que inicialmente está en el estado excitado ϕ_B^* .-

Los estados en consideración y las condiciones iniciales son pues:

Estado inicial	$\phi_A^* \phi_B \Gamma^0$	$b_{AB}^*(0)=1$	$E_{AB}^* = hc(K_A + K_B)$
Estados intermedios <u>1^{er}</u> orden	{ $\phi_A \phi_B^* \Gamma^1_K$	$b_{ABK}^*(0)=0$	$E_{ABK}^* = hc(K_B + K)$
		$\phi_A^* \phi_B \Gamma^1_K$	$E_{ABK}^* = hc(K_A + K)$
Estados finales <u>2^o</u> orden	{ $\phi_A \phi_B \Gamma^1_K \Gamma^1_{K'}$	$b_{ABKK'}(0)=0$	$E_{ABKK'} = hc(K + K')$

(64)

///

Además, después de un tiempo t grande comparado con

$$\zeta_A = 1/\gamma_A \cong \zeta_B = 1/\gamma_B$$

deberemos tener:

$$b_{AB}^{xx}(\infty) = b_{ABK}^{xx}(\infty) = b_{ABK'}^{xx}(\infty) = 0$$

$$b_{ABKK'}^{xx}(\infty) \neq 0 \quad (65)$$

Con los habituales desarrollos perturbativos, tendremos entonces el siguiente sistema de ecuaciones a resolver

$$i\hbar \dot{b}_{AB}^{xx} = \sum_K b_{ABK}^{xx} H_{AB}^{xK} e^{i(E_A - E_K)t/\hbar} + \sum_{K'} b_{ABK'}^{xx} H_{AB}^{xK'} e^{i(E_B - E_{K'})t/\hbar} \quad (a)$$

$$i\hbar \dot{b}_{ABK}^{xx} = H_{ABK}^{xK} b_{AB}^{xx} e^{i(E_K - E_A)t/\hbar} + \sum_{K'} H_{ABK}^{xK'} b_{ABKK'}^{xx} e^{i(E_B - E_{K'})t/\hbar} \quad (b)$$

$$i\hbar \dot{b}_{ABK'}^{xx} = H_{ABK'}^{xK} b_{AB}^{xx} e^{i(E_K - E_B)t/\hbar} + \sum_{K'} H_{ABK'}^{xK'} b_{ABKK'}^{xx} e^{i(E_A - E_{K'})t/\hbar} \quad (c)$$

$$i\hbar \dot{b}_{ABKK'}^{xx} = H_{ABKK'}^{xK} b_{ABK}^{xx} e^{i(E_K - E_A)t/\hbar} + H_{ABKK'}^{xK} b_{ABK}^{xx} e^{i(E_K - E_A)t/\hbar} \quad (66)$$

$$(d)$$

$$i\hbar \dot{b}_{ABKK'}^{xx} = H_{ABKK'}^{xK} b_{ABK'}^{xx} e^{i(E_{K'} - E_B)t/\hbar} + H_{ABKK'}^{xK'} b_{ABK'}^{xx} e^{i(E_{K'} - E_B)t/\hbar} +$$

$$+ H_{ABKK'}^{xK} b_{ABK}^{xx} e^{i(E_{K'} - E_A)t/\hbar} + H_{ABKK'}^{xK'} b_{ABK'}^{xx} e^{i(E_{K'} - E_A)t/\hbar} \quad (e)$$

Donde

$$H_{AB}^{xK} = H_{BK}^{xK} e^{-i\vec{K}\vec{R}_B}; \quad H_{ABK}^{xK} = H_{BK}^{xK} e^{-i\vec{K}\vec{R}_B}; \quad H_{ABK}^{xK'} = 2^{\frac{1}{2}} H_{BK}^{xK'} e^{-i\vec{K}\vec{R}_B} \quad (67)$$

yanálogamente para A.-

Para resolver este sistema de ecuaciones podríamos usar el tipo de cálculo desarrollado por W. Heitler (x) al tratar la teoría general de procesos de "damping", puesto que nuestro sistema involucra en estados ligados (ver solución en apéndice IN).-

Los resultados obtenidos con este método contienen términos de orden superior que provienen de la interacción radiativa entre los átomos A y B, (se ha despreciado la

(x) Loc.cit.

//// interacción estática) de importancia en cuenta se desea estudiar la coherencia parcial de la luz proveniente de fuentes semejantes ($K_A \sim K_B$; $\gamma_A \sim \gamma_B$) e igualmente orientadas situadas a pequeña distancia relativa ($R \ll c/\gamma$). Por ahora no nos ocuparemos de este problema, por eso para mayor claridad y sencillez resolveremos el sistema (66) usando ciertas suposiciones intuitivas y resultados ya obtenidos (emisión simple) que facilitan grandemente los cálculos. Posteriormente comprobaremos que los resultados obtenidos aquí concuerdan perfectamente con los obtenidos en el apart. IV para el caso particular de grandes distancias ($R_{AB} \gg \lambda$).

Pués bien, en primer orden podemos suponer independientes a los componentes de nuestro sistema, es decir, la probabilidad total de transición por unidad de tiempo del sistema estará dada por:

$$\Gamma = (\gamma_A + \gamma_B) \quad (\text{comparar con ap. IV}); \text{ es decir } b_{AB}^* = e^{-\frac{1}{2}(\gamma_A + \gamma_B)t} \quad (68)$$

Observando las ecuaciones (a) con las especificaciones (67), es decir

$$i\hbar \dot{b}_{AB}^* = \sum_K b_{ABK}^* H_A^{AK} e^{i\vec{K}\vec{R}_A} e^{i(E_A - E_K)t/\hbar} + \sum_K b_{ABK}^* H_B^{BK} e^{i\vec{K}\vec{R}_B} e^{i(E_B - E_K)t/\hbar} \quad (a')$$

y recordando el caso de emisión simple tratado en el primer capítulo, a saber:

$$i\hbar \dot{b}_A = i\hbar d/dt(e^{-\frac{1}{2}\gamma_A t}) = \sum_K b_{AK}^* H_A^{AK} e^{i(E_A - E_K)t/\hbar}$$

Veremos entonces que es posible satisfacer la (a') suponiendo que:

$$\begin{aligned} b_{ABK}^* &= b_B^* \cdot b_{AK} \\ b_{ABK}^* &= b_A^* \cdot b_{BK} \end{aligned} \quad (69)$$

(Comparar éstos resultados con los obtenidos en ap. IV).

/// donde b_{AK} es la amplitud de probabilidad para el caso de emisión simple por parte del átomo A aislado; análogamente.

b_{BK} Es decir,

$$b_{AK} = H_{AK}^{A*} e^{-i\vec{k}\vec{R}_A} \frac{1 - e^{i(E_K - E_A + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)t/\hbar}}{(E_K - E_A + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)}$$

$$b_{BK} = H_{BK}^{B*} e^{-i\vec{k}\vec{R}_B} \frac{1 - e^{i(E_K - E_B + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)t/\hbar}}{(E_K - E_B + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)}$$

Esta suposición que cumple las condiciones iniciales (64) y las (65) y que es correcta según veremos salvo término de tercer orden, satisface la ecuación (a''), en efecto:

$$i\hbar \frac{d}{dt}(b_A^* \cdot b_B^*) = b_B^* \sum_K H_{AK}^{A*} b_{AK} e^{i(E_A - E_K)t/\hbar} + b_A^* \sum_K H_{BK}^{B*} e^{i(E_B - E_K)t/\hbar} b_{BK}$$

$$= b_B^* (i\hbar \delta_A^*) + b_A^* (i\hbar \delta_B^*) = i\hbar \frac{d}{dt}(b_A^* \cdot b_B^*)$$

Reemplazando ahora las (69) en las ecuaciones (d) y (e) y recordando siempre el caso de emisión simple, tendremos:

$$i\hbar \delta_{ABKK} = b_{BK} 2^{\frac{1}{2}} H_{AK}^{A*} b_A^* e^{i(E_K - E_A)t/\hbar} + b_{AK} 2^{\frac{1}{2}} H_{BK}^{B*} b_B^* e^{i(E_K - E_B)t/\hbar}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \left[b_{BK} (i\hbar \delta_{AK}^*) + b_{AK} (i\hbar \delta_{BK}^*) \right]$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} i\hbar \frac{d}{dt} (b_{BK} \cdot b_{AK})$$

y análogamente

$$i\hbar \frac{d}{dt}(b_{ABKK}^*) = b_{AK} (i\hbar \delta_{BK}^*) + b_{AK}^* (i\hbar \delta_{BK}^*) + b_{BK} (i\hbar \delta_{AK}^*) + b_{BK}^* (i\hbar \delta_{AK}^*)$$

$$= i\hbar \frac{d}{dt} (b_{AK} \cdot b_{BK}^* + b_{AK}^* \cdot b_{BK})$$

Es decir salvo términos de orden superior tendremos:

$$\begin{cases} b_{ABKK}^* = b_{AK} b_{BK}^* + b_{AK}^* b_{BK} \\ b_{ABKK} = 2^{\frac{1}{2}} b_{AK} b_{BK} \end{cases} \quad (70)$$

(Comparar estos resultados con los obtenidos en apend.(IV).

//
 Dado que nuestro sistema de ecuaciones (66) autoconsistente, conservándose la norma como es fácil comprobar; podemos tener una idea del error cometido con nuestras suposiciones, introduciendo los resultados obtenidos (70) en las ecuaciones (b) y computar las diferencias con (69)

$$i\hbar \dot{b}_{ABK} = H_{AK}^{Ax} b_{AB}^{Ax} e^{i(E_K - E_A)t/\hbar} + \sum_{K' (\neq K)} H_{B^{K'}}^{BK'} (b_{AK} b_{BK'} + b_{AK'} b_{BK}) e^{i(E_B - E_{K'})t/\hbar} + 2^{\frac{1}{2}} H_{B^{K'}}^{BK'} b_{AK} b_{BK} e^{i(E_B - E_K)t/\hbar}$$

Como el valor del integrando en un punto no influye en el resultado de la integral, podemos introducir el tercer sumando en la sumatoria sobre K' y extender la suma a todos los valores, incluso K = K'. -

$$i\hbar \dot{b}_{ABK} = b_B^{Ax} H_{AK}^{Ax} b_A^{Ax} e^{i(E_K - E_A)t/\hbar} + b_{AK} \sum_{K'} H_{B^{K'}}^{BK'} b_{BK'} e^{i(E_B - E_{K'})t/\hbar} + b_{BK} \sum_{K'} H_{B^{K'}}^{BK'} b_{AK'} e^{i(E_B - E_{K'})t/\hbar} \\ = b_B^{Ax} (i\hbar \dot{b}_{AK}) + b_{AK} (i\hbar \dot{b}_B^{Ax}) + b_{BK} \sum_{K'} \overbrace{H_{B^{K'}}^{BK'} b_{AK'}}^{(x)} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{R}_B} e^{i(E_B - E_{K'})t/\hbar}$$

Dado el significado físico de la contribución (x) a la amplitud a saber:

El átomo B pasa al estado excitado absorbiendo el fotón emitido por A; deberemos esperar:

a) $(x) \sim (i\hbar \dot{b}_B^{Ax})$

Para distancias muy pequeñas y átomos A y B idénticos e igualmente orientados.

b) $(x) \ll (i\hbar \dot{b}_B^{Ax})$ para $R_{AB} \gg \lambda$

En efecto:

Consideraremos como dijimos ($k_A = k_B = k_C; \gamma_A = \gamma_B = \gamma$),

entonces:

$$(x) = \sum_{K'} H_{B^{K'}}^{BK'} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{R}_B} b_{AK'} e^{i(E_0 - E_{K'})t/\hbar} = e^{-\frac{1}{2}\gamma t} \sum_{K'} H_B^{BK'} H_{AK'}^{A-} e^{i\vec{k}' \cdot (\vec{R}_B - \vec{R}_A)t/\hbar} \frac{1}{(E_0 - E_{K'} - \frac{1}{2}i\hbar\gamma)} e^{i(E_0 - E_{K'} + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)t/\hbar}$$

//

//
 ahora bien, dado el significado físico de esta contribución, los tiempos de interés son mucho mayores que el período atómico $t \omega_0 \gg 1$. Esto nos deja en libertad de elegir tiempos mayores o menores que la vida media, puesto que $1/\gamma \ll 1/\omega_0$ ("damping" pequeño).-

Con estas suposiciones y aplicando los mismos razonamientos que en el caso de emisión simple (Ver W.Heitler loc. cit. pag. 183), podemos poner esencialmente:

$$\langle x \rangle = e^{-\frac{1}{2}\gamma t} \cdot \sum_{\mathbf{k}} H_{B^*}^{BK'} H_{AK'}^{A^*} e^{i\mathbf{k}' \cdot \vec{R}_{AB}} \int (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{\mathbf{k}'})$$

La integral $\int_{\mathbf{k}'} = I$ ha sido ampliamente estudiada en el ap. III, con sus propiedades vemos de inmediato que:

$$\langle x \rangle \longrightarrow 0 \quad \text{para} \quad R_{AB} \gg \lambda$$

Es decir, nuestro cálculo es correcto a aquellas distancias para las cuales sea posible desprestigiar toda interacción radiativa entre los átomos emisores. Comparando además estos resultados con los obtenidos en el apéndice IV vemos que están en perfecta concordancia, como era de esperar.-

EVOLUCION ESPACIO - TEMPORAL DEL CAMPO CUANTICO DE DOS FOTONES

La función de onda que describe el desarrollo no estacionario de nuestro sistema, estará dada entonces en forma general por:

$$\begin{aligned} \phi(t) = & b_{AB}^{xx}(t) \phi_A^x \phi_B^x e^{-i(E_A+E_B)t/\hbar} + \\ & + \phi_A^x \phi_B e^{-iE_A t/\hbar} \sum_K b_{ABK}^x(t) \Gamma_K' e^{-iE_K t/\hbar} + \phi_A \phi_B^x e^{-iE_B t/\hbar} \sum_K b_{ABK}^x(t) \Gamma_K e^{-iE_K t/\hbar} \\ & + \phi_A \phi_B \left(\sum_{K \neq K'} b_{ABKK'}(t) \Gamma_K' \Gamma_{K'} e^{-i(E_K+E_{K'})t/\hbar} + \sum_K b_{ABKK} e^{-2iE_K t/\hbar} \right) \end{aligned} \quad (71)$$

Donde para el caso que hemos estudiado $R_{AB} \rightarrow \infty$ ($R_{AB} \gg \lambda$), explícitamente podemos escribir:

$$\begin{aligned} b_{AB}^{xx} &= b_A^x \cdot b_B^x = e^{-(\gamma_A + \gamma_B)t/2} \\ b_{ABK}^x(t) &= b_A^x \cdot b_{BK} = e^{-\frac{1}{2}\gamma_A t} \cdot H_{BK}^{Bx} e^{-i\vec{k}\vec{R}_B} \frac{1 - e^{i(E_K - E_B + \frac{1}{2}\hbar\gamma_B)t/\hbar}}{(E_K - E_B + \frac{1}{2}\hbar\gamma_B)} \quad (72) \end{aligned}$$

$$b_{ABK}^x(t) = b_B^x \cdot b_{AK} = e^{-\frac{1}{2}\gamma_B t} \cdot H_{AK}^{Ax} e^{-i\vec{k}\vec{R}_A} \frac{1 - e^{i(E_K - E_A + \frac{1}{2}\hbar\gamma_A)t/\hbar}}{E_K - E_A + \frac{1}{2}\hbar\gamma_A}$$

$$b_{ABKK'} = (b_{AK} \cdot b_{BK'} \quad b_{AK'} \cdot b_{BK}) \quad K \neq K'$$

$$b_{ABKK} = 2^{\frac{1}{2}} b_{AK} \cdot b_{BK}$$

Los b_{AK} y b_{BK} son las amplitudes de probabilidad para el caso de emisión simple por parte de los átomos A y B aislados.-

Como vemos, en forma general podemos considerar la parte

$$\sum_{K \neq K'} b_{ABKK'} \Gamma_K' \Gamma_{K'} e^{-i(E_K+E_{K'})t/\hbar} + \sum_K b_{ABKK} \Gamma_K^2 e^{-2iE_K t/\hbar} \quad (73)$$

Como aquella que da cuenta del campo emitido de dos fotones en estado naciente. Es a ella a quien podremos asociar expresiones que nos den una imagen de la evolución espacio-temporal del campo cuántico, de dos fotones; así como sus correlaciones.-

En efecto, para $t \gg 1/\gamma$ la función de onda del campo es esencialmente la expresión (73), que representa el paquete de dos fotones emitidos por las fuentes A y B (los $b_{ABKK'}$ muestran la simetría característica de los bosones $b_{ABKK'} = b_{ABK'K}$). Debemos mencionar el hecho de que por ser autoconsistente el esquema (66) de ecuaciones usado, deberemos tener en todo momento:-

$$|b_{AB}|^2 + \sum_K (|b_{ABK}^x|^2 + |b_{ABK}^y|^2) + \frac{1}{2} \sum_{KK'} |b_{ABKK'}|^2 + \sum_K |b_{ABKK}|^2 = 1 \quad (74)$$

Ahora bien en el caso que hasta ahora hemos estudiado (distancias R_{AB} que involucran la insignificancia de toda interacción entre las fuentes A y B) tenemos las expresiones fácilmente calculables considerando la normalización en el proceso de emisión simple.

$$|b_{AB}^x|^2 = |b_A^x|^2 |b_B^x|^2 = e^{-(\gamma_A + \gamma_B)t}$$

$$\begin{aligned} \sum_K (|b_{ABK}^x|^2 + |b_{ABK}^y|^2) &= |b_A^x|^2 \sum_K |b_{BK}^x|^2 + |b_B^x|^2 \sum_K |b_{AK}^x|^2 = \\ &= e^{-\gamma_A t} (1 - e^{-\gamma_B t}) + e^{-\gamma_B t} (1 - e^{-\gamma_A t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{KK'} |b_{ABKK'}|^2 + \sum_K |b_{ABKK}|^2 &= \sum_K |b_{AK}^x|^2 \cdot \sum_K |b_{BK}^x|^2 + \left| \sum_K b_{AK}^x b_{BK}^{x*} \right|^2 = \quad (75) \\ &= (1 - e^{-\gamma_A t})(1 - e^{-\gamma_B t}) + |\beta|^2 \quad (\text{Ver ap. V}_b) \end{aligned}$$

donde
$$\beta(t) = \sum b_{AK} \cdot b_{BK}^* \quad (76)$$

Sumando las (75) e igualando a la unidad, concluimos que en el caso que nos ocupa ($R_{AB} \gg \bar{\lambda}$):

$$\beta(t) = 0 \quad (R_{AB} \gg \bar{\lambda})$$

Este resultado es fácilmente verificable por cálculo directo; ver ap.V.

Nota: Otra propiedad interesante (ver ap. V) (veremos su significado físico) de la expresión genérica:

$$\beta(t) = \sum b_{AK}(t) b_{BK}^*(t) = 0 \quad \text{para } t < R_{AB}/c \quad (78)$$

cualquiera sea R_{AB} .

///

Para tiempos de interés físico ($t \geq 1/\gamma$ que en vista de las expresiones (72) y (75) tomaremos como $t=0$) tenemos para $\beta(\infty)$

la siguiente expresión genérica en función de la distancia R_{AB} : (Ver ap. V)

$$\beta(\infty) = \frac{1}{[(E_A - E_B) - \frac{1}{2}i\hbar(\gamma_A + \gamma_B)]} \left\{ I(E_B + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B; R_{AB}) - I(E_A + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A; R_{AB}) \right\} \quad (79)$$

recordando las propiedades de la función I, ampliamente estudiadas en el ap. III y IV ; $\lim_{R_{AB} \rightarrow \infty} I = 0$ ($R_{AB} \gg \lambda$) tenemos nuevamente comprobada la aseveración (77).-

Debemos hacer notar que (oo) a quien llamaremos (por razones que veremos posteriormente) "grado de coherencia", es una expresión intrínseca en el sentido que posee un sentido matemático bien preciso (luego veremos sus implicancias físicas) independientemente de los cálculos y aproximaciones hechas.- En efecto, para $t > 1/\gamma$ cuando el nº de fotones es diagonal (los átomos A y B puede considerarse que han ciertamente emitido) $\beta(\infty)$ representa el producto escalar en el espacio de los impulsos de los paquetes $\Gamma(A)$ y $\Gamma(B)$ que emitirían espontáneamente los átomos A y B aislados.

$$\Gamma(A) = \sum_K b_{AK}(\infty) \Gamma_K^1 e^{-iE_K t/\hbar} ; \quad b_{AK}(\infty) = \frac{H_{AK}^* e^{-i\vec{k}\vec{R}_A}}{(E_K - E_A + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)}$$

$$\Gamma(B) = \sum_K b_{BK}(\infty) \Gamma_K^1 e^{-iE_K t/\hbar} ; \quad b_{BK}(\infty) = \frac{H_{BK}^* e^{-i\vec{k}\vec{R}_B}}{(E_K - E_B + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)}$$

$$\beta(\infty) = \langle \Gamma(A) | \Gamma(B)^* \rangle = \sum b_{AK}(\infty) \cdot b_{BK}^*(\infty) \quad (80)$$

También dado lo visto en Cap. I (pag. 10 y siguientes), debemos mencionar que podemos interpretar a $\beta(\infty)$ como el producto escalar de lo que hemos llamado "funciones de onda en el espacio de configuraciones" de los fotones mencionados.

///

$$\vec{F}_{(A)}(\vec{R}, t) = (4\pi c^2 / L^3)^{\frac{1}{2}} \sum_{\kappa} \vec{e}_{\kappa} b_{AK} e^{i(\vec{\kappa}\vec{R} - \omega_{\kappa} t)}$$

$$\vec{F}_{(B)}(\vec{R}, t) = (4\pi c^2 / L^3)^{\frac{1}{2}} \sum_{\kappa} \vec{e}_{\kappa} b_{BK} e^{i(\vec{\kappa}\vec{R} - \omega_{\kappa} t)} \quad (81)$$

$$\beta = \langle \vec{F}_{(A)} \cdot \vec{F}_{(B)}^* \rangle = \int_{\mathcal{V}} \vec{F}_{(A)}(\vec{r}, t) \vec{F}_{(B)}(\vec{r}, t) d\mathcal{V} = \sum_{\kappa} b_{AK} b_{BK}^*$$

Sin embargo desde el punto de vista físico; en lugar de considerar las funciones $\vec{F}(\vec{r}, t)$ es más conveniente expresar β en base a cantidades más conocidas y bien estudiadas de la teoría clásica. Así considerando los campos asociados a las transiciones cuánticas en los átomos A y B:

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{A}_{\text{ass}(A)}^{(C)} &= (4\pi c^2 / L^3)^{\frac{1}{2}} \sum_{\kappa_{\lambda}} \vec{e}_{\kappa_{\lambda}} (\hbar/2 \omega_{\kappa})^{\frac{1}{2}} b_{AK}(t) e^{i(\vec{\kappa}\vec{r} - \omega_{\kappa} t)} \\ &\quad (C) = \text{Coulomb gauge} \\ \vec{A}_{\text{ass}(B)}^{(C)} &= (4\pi c^2 / L^3)^{\frac{1}{2}} \sum_{\kappa_{\lambda}} \vec{e}_{\kappa_{\lambda}} (\hbar/2 \omega_{\kappa})^{\frac{1}{2}} b_{BK}(t) e^{i(\vec{\kappa}\vec{r} - \omega_{\kappa} t)} \end{aligned} \right.$$

Podremos expresar rigurosamente $\beta(t)$ (y en particular $\beta(\infty)$) en la siguiente forma más apropiada a la interpretación física (ver ap. II - (27_{II})).

$$\beta(t) = \sum_{\kappa_{\lambda}} b_{AK}(t) b_{BK}^*(t) = -\frac{i}{\hbar c} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \left(\vec{A}_{\text{ass}(A)}^{(L)} \vec{E}_{\text{ass}(B)}^* - \vec{A}_{\text{ass}(B)}^{(L)*} \vec{E}_{\text{ass}(A)} \right) d\mathcal{V} \quad (82)$$

donde la relación entre $\vec{A}_{\text{ass}}^{(L)}$ y $\vec{A}_{\text{ass}}^{(C)}$ puede verse en Ap. II, expresiones (23_{II}) y (24_{II}) ($\vec{A}_{\text{ass}}^{(L)}$ = campo asociado en la medida de Lorentz).-

Examinando las expresiones (78), (79), (80), (81) y (82); vemos que estas muestran que $\beta = 0$ cuando:

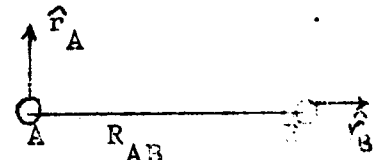
- $\beta = 0$ {
- a) Por polarización ortogonal de la luz proveniente de las fuentes A y B.
 - b) Por falta de superposición en frecuencia de los paquetes emitidos; es decir fuentes con frecuencias medias muy diferentes comparadas con la extensión de la línea.
 - c) Cuando las emisiones de los átomos A y B no se superponen, en un cierto instante en el espacio (ver (78), (81), y (82)). Esto último implica ausencia de interacción radiativa entre las fuentes emisoras, durante el proceso de emisión.

Pondremos más explícitamente la (79) para (∞) (ver Ap.V) donde se ven estas aseveraciones:-

$$\beta \cong \frac{e^2 K_A K_B / r_A / r_B / ((\hat{r}_A \times \hat{R}_{AB}) \cdot (\hat{r}_B \times \hat{R}_{AB}))}{\hbar c} \cdot \frac{1}{[(K_A - K_B) - \frac{1}{2}i(\gamma_A + \gamma_B)/c] R_{AB}} \left[e^{-iK_A R_{AB} - \frac{1}{2}R_{AB}/l_c^A} \cdot e^{+iK_B R_{AB} - \frac{1}{2}R_{AB}/l_c^B} \right]$$

donde $K_A = \frac{2\pi}{\lambda_A} = \frac{E_A}{\hbar c}$; $l_c^A = c/\gamma_A$

La (83) muestra claramente que: $\beta = 0$ si

a) $[(\hat{r}_A \times \hat{R}_{AB}) \cdot (\hat{r}_B \times \hat{R}_{AB})] = 0$ -----> 

b) $K_A \gg K_B$

$\gamma_A, \gamma_B \ll K_A - K_B$

c) $R_{AB} > l_c = 2c/\gamma$ "longitud de coherencia"

Para el caso más favorable de átomos A y B Idénticos (no necesariamente igual orientación) $E_A = E_B = E_0$; $\gamma_A = \gamma_B = \gamma$; la expresión (79) nos conduce a la siguiente:

$$\beta(\infty) = \beta^*(\infty) = - \frac{1}{\hbar \gamma / 2} \text{Imag.} (I(E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma ; R_{AB})) \quad (84)$$

Considerando nuevamente distancias del orden R_{AB} y recordando la expresión aproximada de I para este orden de distancias tendremos:

$$\beta = -3/2 ((\hat{r}_A \times \hat{R}_{AB}) \cdot (\hat{r}_B \times \hat{R}_{AB})) \frac{\text{sen} E_0 R_{AB} / \hbar c}{E_0 R_{AB} / \hbar c} e^{-\frac{1}{2}R_{AB}/l_c} \quad (85)$$

Veremos luego, que el hecho de ser $\beta \approx 0$ para distancias R_{AB} del orden o mayores que la "longitud de coherencia", implicará (al menos para distancias de este orden) incoherencia entre las excitaciones proveniente de las fuentes A y B; en el sentido que los átomos A y B contribuyen aditivamente a la intensidad luminosa observada en un punto del espacio (esto independientemente de cualquier correlación de fases de los átomos emisores). //

///Hasta ahora hemos considerado distancias ($R_{AB} > l_c = 2c/\gamma$) para las cuales es despreciable la interacción radiativa entre las fuentes emisoras; sin embargo para distancias menores entre los átomos emisores ($R_{AB} \ll l_c$) no es posible ignorar esta interacción. En este caso el paquete de dos fotones emitidos no tendrá ya la expresión simple que obtuvimos:

$$\left\{ \begin{aligned} b_{ABKK}(00) &= 2^{\frac{1}{2}} b_{AK}(00) \cdot b_{BK}(00) \\ b_{ABKK'} &= (b_{AK}(00)b_{BK'}(00) - b_{AK'}b_{BK}) \end{aligned} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(válida como dijimos, sólo} \\ \text{para } R_{AB} \gg l_c) \end{array}$$

donde el paquete de dos fotones se representa por un producto simetrizado de dos paquetes de un fotón, de acuerdo con la estadística de Bose para los fotones. Este es debido a que para el orden de distancias que considerábamos se trataba de dos fotones que nacían por dos procesos independientes. En el caso de distancias $R_{AB} \ll l_c$ esta independencia ya no existe y veremos que una representación por productos individuales ya no es posible, sino que las correlaciones existente entre los procesos de emisión de los fotones, se manifestarán por términos no separables en productos simples.

En efecto un estudio más cabal de los detalles nos proporciona una expresión genérica para el paquete de dos fotones que se reduce a la expresión vista para el caso de grandes distancias entre las fuentes emisoras (ver apéndice IV). Para los tiempos de interés físico ($t > 1/\gamma$) esta expresión es:

$$b_{KK}(00) = \sqrt{2} \left\{ \frac{H_{AK}^A e^{i\vec{k}\vec{R}_A} H_{BK}^B e^{i\vec{k}'\vec{R}_B} [(E_K - E_B + \frac{i\hbar}{2}\gamma_B) + (E_K - E_A + \frac{i\hbar}{2}\gamma_A)] + [(E_K, R_{AB})] [(H_{BK}^B)^2 e^{2i\vec{k}\vec{R}_B} + (H_{AK}^A)^2 e^{2i\vec{k}\vec{R}_A}]}{[(E_K - E_B + \frac{i\hbar}{2}\gamma_B)(E_K - E_A + \frac{i\hbar}{2}\gamma_A) - I^2(E_K, R_{AB})] [(E_{KK} - (E_A + E_B) + \frac{i\hbar}{2}\Gamma)]} \right\}$$

$$b_{KK'}(00) = \left\{ \frac{H_{AK}^A H_{BK}^B e^{i\vec{k}\vec{R}_A} e^{i\vec{k}'\vec{R}_B} (E_{K'} - E_A + i\hbar\gamma_A/2) + H_{AK'}^A H_{BK}^B e^{i\vec{k}\vec{R}_A} e^{i\vec{k}'\vec{R}_B} (E_{K'} - E_B + i\hbar\gamma_B/2)}{[(E_{K'} - E_B + \frac{i\hbar}{2}\gamma_B)(E_{K'} - E_A + \frac{i\hbar}{2}\gamma_A) - I^2(E_{K'}, R_{AB})] [(E_{KK'} - (E_A + E_B) + \frac{i\hbar}{2}\Gamma)]} + \right.$$

$$\left. + \frac{I(E_{K'}, R_{AB}) (H_{BK}^B H_{BK'}^B e^{-i(\vec{k} + \vec{k}')\vec{R}_B} + H_{AK}^A H_{AK'}^A e^{-i(\vec{k} + \vec{k}')\vec{R}_A})}{[(1 - I^2)] [\quad]} \right\} + \quad (86)$$

$$+ \left\{ \text{término simétrico, cambiando } K, K' \text{ por } K', K \right\}$$

Donde

$$\Gamma = \gamma_A + \gamma_B + O.\text{sup.} (\bar{\lambda}/R_{AB})$$

$$I(E_K; R_{AB}) = \sum_{K'} H_{B^*}^{BK'} H_{AK'}^{A^*} e^{i\vec{K}'(\vec{R}_B - \vec{R}_A)} \{ (E_{KK'} - E_{KK'}) \}$$

Estas expresiones han sido ya ampliamente discutidas en ap. IV y III respectivamente.

Despreciando términos de orden superior a λ/R_{AB} es posible poner las (86) en la siguiente forma más compacta que muestra los hechos esenciales:

$$b_{ABKK'}^{(\infty)} = 2^{\frac{1}{2}} b_{AK} b_{BK'} + 2^{\frac{1}{2}} I(E_K, R) \frac{H_{BK}^{B^*} H_{BK'}^{B^*} e^{-2i\vec{K}\vec{R}_B} + H_{AK}^{A^*} H_{AK'}^{A^*} e^{-2i\vec{K}\vec{R}_A}}{(E_K - E_B + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)(E_K - E_A + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)(E_{KK'} - E_{AB} + \frac{1}{2}i\hbar(\gamma_A + \gamma_B))}$$

$$b_{ABKK'}^{(\infty)} = b_{AK} b_{BK'} + b_{AK'} b_{BK} +$$

$$+ \left[\frac{I(E_{K'}, R_{AB})}{(E_{K'} - E_B + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)(E_{K'} - E_A + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)} + \frac{I(E_K; R_{AB})}{(E_K - E_B + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)(E_K - E_A + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)} \right]$$

$$\cdot \left[\frac{H_{BK}^{B^*} H_{BK'}^{B^*} e^{-i(\vec{K} + \vec{K}')\vec{R}_B} + H_{AK}^{A^*} H_{AK'}^{A^*} e^{-i(\vec{K} + \vec{K}')\vec{R}_A}}{(E_{KK'} - E_A - E_B + \frac{1}{2}i\hbar(\gamma_A + \gamma_B))} \right]$$

(87)

Por ahora simplemente mencionaremos que en este caso $R_{AB} > \lambda$; nuestro β a quien llamamos "grado de coherencia" (por razones que luego veremos) no es necesariamente nulo como en el caso anterior, ya que tenemos en forma general para átomos idénticos la expresión (84), a saber:

$$\beta^{(\infty)} = \beta^{*(\infty)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\hbar\gamma} \cdot \text{Imag.} (I(E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma; R_{AB}))$$

donde para el caso de distancias $R_{AB} > \bar{\lambda}$

$$\beta = \beta^* = -3/2 \left[(\hat{r}_A \times \hat{R}_{AB}) \cdot (\hat{r}_B \times \hat{R}_{AB}) \right] \frac{\text{sen } E_0 R_{AB}/\hbar c}{E_0 R_{AB}/\hbar c} e^{-\frac{1}{2}R_{AB}/lc}$$

($lc = c/\gamma$)

IMAGEN DE LA EVOLUCION ESPACIO-TEMPORAL - INTENSIDAD DEL CAMPO EN UN PUNTO DEL ESPACIO - INCOHERENCIA; COHERENCIA

Nos proponemos ahora obtener una imagen de la evolución espacio-temporal del campo cuántico en estudio.-

Esto implica un mecanismo, que en esencia puede ser reducido a dos átomos de prueba capaces de poner en evidencia en el espacio y en el tiempo á los dos fotones involucrados.- Para un tratamiento consistente del problema es necesario entonces, acoplar el campo de radiación libre con las fuentes A y B y con los dos átomos de prueba T_1 y T_2 . En efecto para poner en evidencia los dos fotones con los átomos T_1 y T_2 participará el mismo mecanismo de acoplamiento que determina la excitación del campo por las fuentes A y B.

El hecho, que los cuerpos de prueba participaran en el proceso emitiendo a su vez fotones que subsiguientemente serán absorbidos por A y B será despreciado pues da según vimos contribuciones poco sensibles para gran distancia entre fuente y zonda.

En esencia para un cálculo ordinario según los desarrollos perturbativos corrientes consideraremos los siguientes estados.-

EST.INICIAL	1º ORDEN	2º ORDEN	3º ORDEN	4º ORDEN
$b_{ABT_1 T_2}^{xx}$	$b_{ABT_1 T_2 K}^x$	$b_{ABT_1 T_2}^{xx}$ $b_{ABT_1 T_2}^{xx}$ } (a) $b_{ABT_1 T_2 KK'}^x$ (c) $b_{ABT_1 T_2}^{xx}$ $b_{ABT_1 T_2}^{xx}$ } (b)	$b_{ABT_1 T_2 K}^x$	$b_{ABT_1 T_2}^{xx}$

Podemos ver inmediatamente (con los desarrollos y resultados obtenidos anteriormente) que las contribuciones del 2º orden provienen sensiblemente de los estados (c), puesto que la probabilidad de ocurrencia de uno cualquiera de los estados (a) o (b) es despreciable frente a la probabilidad de ///

///aparición de los dos fotones.-

Entonces si consideramos que las distancias (R_{AT_1} , R_{AT_2} ; R_{BT_1} ; R_{BT_2}) entre las fuentes y zondas son del orden o mayores que c/γ = l_c (efecto despreciable de los cuerpos de prueba sobre las fuentes como consecuencias del fenómeno de reenisión), podremos empezar nuestro cálculo considerando que los estados $b_{ABT_1T_2KK'}$ están dados esencialmente por los obtenidos en el caso de emisión de los átomos A y B aislados (en ausencia de T_1 y T_2); es decir:

$$b_{ABT_1T_2KK'} = b_{ABKK'}(t)$$

Además dado el orden de magnitud considerado para las distancias fuente-zonda, los tiempos de interés físico para las amplitudes de probabilidad $b_{ABT_1T_2K}^*(t)$, $b_{ABT_1T_2K}^*(t)$,

$b_{ABT_1T_2}^{**}(t)$ serán del orden o mayor que: $t \geq 1/\gamma$ (como consecuencia de la causalidad en la transmisión de señales, ver pag.). Para tiempos de este orden (ver pag.) los estados $b_{ABKK'}(t)$ son prácticamente constantes y adoptan sus valores de régimen $b_{ABKK'}(\infty)$ (ver expresiones (72) (87) según sea el orden de distancias R_{AB} considerado).

Con estas consideraciones podremos

poner:

$$i\hbar \dot{b}_{ABT_1T_2K}^* = \sum_{K'} H_{ABT_1T_2K}^{ABT_1T_2KK'} b_{KK'} e^{i(E_{T_1} - E_{K'})t/\hbar} + (\text{reenisión } b_{ABT_1T_2}^*)$$

$$i\hbar \dot{b}_{ABT_1T_2K}^* = \sum_{K'} H_{ABT_1T_2K}^{ABT_1T_2KK'} b_{KK'} e^{i(E_{T_2} - E_{K'})t/\hbar} + (\text{reenisión } b_{ABT_1T_2}^*)$$

$$i\hbar \dot{b}_{ABT_1T_2}^{**} = H_{T_1T_2K}^{T_1T_2K} b_{T_1T_2K}^* e^{i(E_{T_2} - E_K)t/\hbar} + H_{T_1T_2K}^{T_1T_2K} b_{T_1T_2K}^* e^{i(E_{T_1} - E_K)t/\hbar} \quad (88)$$

Donde como hemos mencionado hemos eliminado los términos de reenisión de las zondas.

Ya hemos visto que la expresión analítica para el paquete

///

///de dos fotones emitidos por las fuentes es diferente según sea el orden de distancias considerado R_{AB} (ver pags y , o bien ap. IV). Así tendremos la expresión (72), a saber:

$$\begin{cases} b_{ABKK}(\infty) = 2^{\frac{1}{2}} b_{AK}(\infty) b_{BK}(\infty) \\ b_{ABKK'}(\infty) = b_{AK} b_{BK'} + b_{AK'} b_{BK} \end{cases} \quad (89)$$

don $\beta(\infty) = \sum_K b_{AK} b_{BK}^* = 0$

cuando la distancia relativa entre las fuentes es del orden o mayor que $l_c = c/\gamma$ (fuentes sin interacción radiativa),

O bien la expresión (87) a saber:

$$b_{KK}(\infty) = 2^{\frac{1}{2}} (b_{AK} b_{BK} + I(E_K; R_{AB})) \frac{H_{BK}^{B^*} H_{BK}^{B^*} e^{-2i\vec{K}\vec{R}_B} + H_{AK}^{A^*} H_{AK}^{A^*} e^{-2i\vec{K}\vec{R}_A}}{(E_K - E_B^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)(E_K - E_A^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)(E_{KK} - E_{AB}^* + \frac{1}{2}i\hbar(\gamma_A + \gamma_B))}$$

$$b_{KK'}(\infty) = b_{AK} b_{BK'} + b_{AK'} b_{BK} + \left[\frac{H_{BK}^{B^*} H_{BK'}^{B^*} e^{-i(\vec{K} + \vec{K}')\vec{R}_B} + H_{AK}^{A^*} H_{AK'}^{A^*} e^{-i(\vec{K} + \vec{K}')\vec{R}_A}}{(E_{KK'} - E_{AB}^* + \frac{1}{2}i\hbar(\gamma_A + \gamma_B))} \right] \quad (90)$$

$$\left[\frac{I(E_{K'}; R_{AB})}{(E_{K'} - E_B^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)(E_{K'} - E_A^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)} + \frac{I(E_K; R_{AB})}{(E_K - E_B^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)(E_K - E_A^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)} \right]$$

cuando la distancia relativa R_{AB} entre las fuentes está comprendida entre:

$$\bar{\lambda} < R_{AB} \ll l_c = c/\gamma$$

(Nótese que esta expresión para el paquete de dos fotones tiende a la anterior para distancias $R_{AB} \sim l_c$, pues en este caso $I \rightarrow 0$)

Ahora β está dado por la siguiente expresión: (para $E_A = E_B = E_0$;

$$\gamma_A = \gamma_B = \gamma) \quad \beta = \sum_K b_{AK} b_{BK}^* = -\frac{1}{2} \frac{1}{\hbar\gamma} \cdot \text{Imag.} (I(E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma; R_{AB}))$$

que se reduce a:

$$\beta = \beta^* \approx -3/2 \left[(r_A \times R_{AB}) \cdot (r_B \times R_{AB}) \right] \frac{\text{sen } E_0 R_{AB}/\hbar c}{E_0 R_{AB}/\hbar c} e^{-R_{AB}/l_c} \quad (\text{para } R_{AB} > \bar{\lambda})$$

Buscaremos la solución dle sistema (88) en el primer caso es decir con la forma analítica (89) para el paquete de dos fotones. Usando las especificaciones siguientes:

$$\begin{matrix} H_{ABT} & T & KK' \\ H_{ABT} & 1 & 2 \\ & 1 & 2 \end{matrix} = H_{T1}^{TK} \quad ; \quad \begin{matrix} H_{ABT} & T & K \\ H_{ABT} & 1 & 2 \\ & 1 & 2 \end{matrix} = H_{T1}^{TK} \quad ; \text{ y análogamente.}$$

/// y recordando además los resultados obtenidos para el caso de una fuente y un cuerpo de prueba (expresiones (32)) a saber:

$$i\hbar b_{AT}^x = \sum_K H_{AT}^{ATK} b_{AK} e^{i(E_T - E_K)t/\hbar}$$

podremos poner para las dos primera filas del sistema (88):

$$i\hbar b_{ABT_1 T_2 K}^x = b_{AK}(i\hbar b_{BT_1}^x) + b_{BK}(i\hbar b_{AT_1}^x)$$

$$i\hbar b_{ABT_1 T_2 K}^x = b_{AK}(i\hbar b_{BT_2}^x) + b_{BK}(i\hbar b_{AT_2}^x)$$

recordando que los b_{AK} y b_{BK} son prácticamente constantes para los tiempos en consideración tendremos:

$$b_{ABT_1 T_2 K}^x = b_{BT_1}^x \cdot b_{AK}^{(\infty)} + b_{AT_1}^x \cdot b_{BK}^{(\infty)}$$

(91) (Ver nota al pie de página)

$$b_{ABT_1 T_2 K}^x = b_{BT_2}^x \cdot b_{AK}^{(\infty)} + b_{AT_2}^x \cdot b_{BK}^{(\infty)}$$

Introduciendo las (91) en la tercera fila del sistema (88) obtendremos:

$$\begin{aligned} i\hbar b_{ABT_1 T_2}^x &= b_{BT_1}^x (i\hbar b_{AT_2}^x) + b_{BT_2}^x (i\hbar b_{AT_1}^x) + b_{AT_2}^x (i\hbar b_{BT_1}^x) + b_{AT_1}^x (i\hbar b_{BT_2}^x) \\ &= i\hbar/dt (b_{BT_1}^x \cdot b_{AT_2}^x + b_{AT_1}^x \cdot b_{BT_2}^x) \end{aligned}$$

es decir:

$$b_{ABT_1 T_2}^x = b_{BT_1}^x b_{AT_2}^x + b_{AT_1}^x b_{BT_2}^x \quad (92) (x)$$

Las expresiones explícitas de $b_{AT_1}^x$, etc. pueden verse en (57) allí hemos tenido en cuenta la reemisión de la zonda; cuando como en este caso dejamos de lado esta reemisión tenemos ///

Nota: Dada la importancia de los detalles que discutiremos con ayuda de las (91), hemos creído conveniente resolver por separado este problema ("dos fuentes emisoras A y B y un cuerpo de prueba T") en forma más rigurosa. Así hemos usado el método de "damping" ya esbozado y explicado en otros capítulos. Este método nos va mostrando paso a paso los detalles finos del proceso y nos proporciona además un "test" sobre la bondad de los resultados obtenidos aquí. Ver apéndice VI

(x) Los mismos resultados pueden obtenerse por medio de dos teoremas que pueden probarse por método de operadores. Ver U. Fano "Journal of American Physics" Agosto 1961-- R.P.Feynman P. Rev., 84 108 (1951).-

////(Ver Pag. 3 de ap. VI)

$$b_{AT}^x(t) = \frac{I(E_o, R_{AT})}{\frac{1}{2} i \hbar \gamma} (1 - e^{-\frac{1}{2} \hbar \gamma (t - R_{AT}/c)/\hbar}) \quad t > R_{AT}/c \quad (93).$$

donde recordemos que:

$$I(E_o; R_{AT}) = -3/2 \cdot \frac{1}{2} \hbar \gamma \cdot [(\hat{r}_A \times \hat{r}_{AT}) \cdot (\hat{r}_T \times \hat{r}_{AT})] \frac{e^{iE_o R_{AT}/\hbar c}}{E_o R_{AT}/\hbar c} \quad (R_{AT} > \bar{\lambda})$$

Dejaremos por ahora de lado el resultado (92) para discutir primero la (91).

Intensidad del campo en un punto del espacio. Incoherencia de las excitaciones. Coherencia.-

a) Para el caso de dos fuentes independientes A y B ($R_{AB} \gg l_c = c/\gamma$; $\beta = 0$) y un cuerpo de prueba T; tomando una cualquiera de las (91) (ver también ap. VI), obtenemos para la probabilidad de que la zonda T pase a su estado excitado T^* y un fotón de vector de onda \vec{K} bien determinado permanezca en el campo, la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} |b_{ABTK}^x|^2 &= |b_{AK}^x|^2 |b_{BT}^x|^2 + |b_{BK}^x|^2 |b_{AT}^x|^2 + b_{AK}^x b_{BT}^{x*} b_{BK}^{x*} b_{AT}^x + b_{AK}^x b_{BT}^{x*} b_{BK}^x b_{AT}^x = \\ &= |b_{AK}^x|^2 |b_{BT}^x|^2 + |b_{BK}^x|^2 |b_{AT}^x|^2 + \\ &\quad + 2\text{Re.}(b_{AK}^x b_{BK}^{x*} b_{BT}^{x*} b_{AT}^x) \end{aligned} \quad (94)$$

El primero y segundo de estos términos representan la probabilidad de que el cuerpo de prueba T sea excitado por la radiación proveniente del átomo B o A respectivamente, mientras que el fotón K, de vector de onda bien determinado, haya sido emitido por el otro átomo (A o B). Los términos cruzados representan términos de interferencia debidos a la superposición de las emisiones de A y B (es decir provienen de la imposibilidad de mostrar, con la experiencia realizada, de cual de los átomos proviene el fotón K; una observación destinada a mostrar esto destruiría estas interferencias).

Según las expresiones anteriormente vistas para $b_{AK}^{(\infty)}$,

$b_{BK}^{(\infty)}$, b_{AT}^x y b_{BT}^x ; tenemos por ej. en el caso de átomos //

/// A y B iguales e igualmente orientados:

$$b_{AK}^* b_{BK}^* = \left| \frac{H_{AK}^*}{(E_K - E_0 + \frac{1}{2} i \hbar \gamma)} \right|^2 e^{i \vec{K}(\vec{R}_B - \vec{R}_A)} \quad (95)$$

$$b_{BT}^* b_{AT}^* = \left\{ \begin{aligned} & 3/2 \frac{((\hat{r}_B \times \hat{R}_{BT}) \cdot (\hat{r}_T \times \hat{R}_{BT}))}{E_0 R_{BT}/\hbar c} (1 - e^{-\frac{1}{2} \gamma/c \cdot (ct - R_{BT})}) \\ & 3/2 \frac{((\hat{r}_A \times \hat{R}_{AT}) \cdot (\hat{r}_T \times \hat{R}_{AT}))}{E_0 R_{AT}/\hbar c} (1 - e^{-\frac{1}{2} \frac{\gamma}{c} (ct - R_{AT})}) \end{aligned} \right\} e^{i E_0 (R_{BT} - R_{AT})/\hbar c}$$

(t > R_{AT}/c ; R_{BT}/c)

Luego los términos de interferencia:

$$2 \operatorname{Re} \left\{ \left| \frac{H_{AK}^*}{(E_K - E_0 + \frac{1}{2} i \hbar \gamma)} \right|^2 e^{i [\vec{K}(\vec{R}_B - \vec{R}_A) + K_0 (R_{BT} - R_{AT})]} \right\} \quad (96)$$

donde $E_0 = \hbar c K_0 = \frac{2 \pi \hbar c}{\lambda_0}$

no son, de manera alguna, nulos y no podemos decir que las emisiones de A y de B son microscópicamente incoherentes. Las fases relativas responsables por las interferencias producidas son:

$$\Theta = \vec{K}(\vec{R}_B - \vec{R}_A) + K_0 (R_{BT} - R_{AT}) \quad (97)$$

Debemos hacer notar que en este proceso elemental (dos fotones involucrados) las fases $e^{i\alpha_A}$ y $e^{i\alpha_B}$ de los átomos emisores A y B son irrelevantes, puesto que si incluimos estas, nuestro estado inicial estará dado entonces por:

$$b_{AB} e^{i(\alpha_A + \alpha_B)}$$

ahora bien dada la linealidad de nuestro sistema de ecuaciones

$$i \hbar \dot{b}_n = \sum_m H_{n/m} b_m e^{i(E_n - E_m)t/\hbar}$$

podemos ver que todos los estados, en especial los $b_{ABTKK'}$ y en consecuencia los b_{ABTK} tienen el mismo factor de fase $e^{i(\alpha_A + \alpha_B)}$ que desaparece con la operación (94).

//Para poder observar las interferencias mencionadas, necesitamos conocer sin embargo, el valor exacto del vector de onda K del fotón no absorbido, con una precisión mucho más grande que el ancho γ de las líneas consideradas.

Lo que se observa comunmente y lo que se considera como una medida de la luz llegada al átomo T es la probabilidad total de excitación de la zonda independientemente del estado cuántico K del fotón no absorbido.

$$\begin{aligned} \sum_K |b_{ABTK}|^2 &= |b_{BT}^*|^2 \sum_K |b_{AK}|^2 + |b_{AT}|^2 \sum_K |b_{BK}|^2 + \\ &+ 2R_e \left\{ b_{BT}^* b_{AT}^* \sum_K b_{AK} b_{BK}^* \right\} = \\ &= |b_{BT}|^2 + |b_{AT}|^2 \end{aligned} \quad (98)$$

debido a que

$$\sum_K |b_{AK}|^2 = 1 \quad \sum_K |b_{BK}|^2 = 1 \quad (\text{ver (27)})$$

y a que para el orden de distancias $R_{AB} \gg l_c$ considerado tenemos:

$$\sum_K b_{AK} b_{BK}^* = 0 \quad (\text{ver cap. anterior o ap. V}) \quad (99)$$

En la suma (98), que se extiende sobre un dominio del ancho de la línea γ , aparece solamente la suma de las intensidades de las emisiones provenientes de A y de B, mientras que los términos de interferencia (96) de los términos individuales desaparecen según la (99).

La relación (99) es, luego, responsable de lo que comunmente se llama la incoherencia de las emisiones de A y B.

Esta relación (99) puede ser escrita (ver (95)) en la forma siguiente:

$$\sum_K p_K e^{i\vec{K}(\vec{R}_B - \vec{R}_A)} \quad (100)$$

y representa una medida pesada, con pesos p_K bien definidos, de las fases relativas de las emisiones provenientes de A y de B.

////

La suma (100) reemplaza, luego, en la teoría cuántica, en forma precisa y físicamente bien determinada el promedio intuitivo sobre las fases relativas "distribuidas al azar" de la teoría clásica.

La teoría cuántica de la coherencia difiere sin embargo de la teoría clásica por el planteo del problema, haciendo intervenir en detalle, el proceso de observación y el concepto de fotones; mientras que la teoría clásica se limita a calcular la suma de dos amplitudes con sus fases relativas, las que pueden interferir independientemente de la distancia a la cual son emitidas (por ej. dos antenas).-

b) Para el caso de fuentes a pequeña distancia relativa

$$\bar{\lambda} < R_{AB} \ll l_c = c/\gamma$$

nuestro paquete de dos fotones tiene la expresión (90), que pondremos ahora en la siguiente forma abreviada:

$$b_{ABKK} = 2^{\frac{1}{2}} b_{AK} b_{BK} + \beta_{KK} ; b_{ABKK'} = b_{AK} b_{BK'} + b_{AK'} b_{BK} + \beta_{KK'}$$

No entraremos aquí en detalle sobre los procesos que contribuyen a los $\beta_{KK'}$ (estos están suficientemente estudiados en el ap. IV), sólo diremos aquí que para el orden de distancias considerado los fotones no nacen ya por procesos completamente independientes, sino que tendremos (ya en tercer orden) contribuciones a $\beta_{KK'}$ por ej. del tipo siguiente: A emite K---->B emite un fotón que puede ser absorbido por A-----> y luego A volver a desexcitarse emitiendo K'; análogamente para B.

La solución del problema de dos fuentes emisoras A y B y una zonda T nos proporciona en este caso la siguiente expresión genérica (ver ap. VI), que encierra como caso particular la vista en (91): (consideramos átomos idénticos $E_A^x = E_B^x = E_0 ; \gamma_A = \gamma_B = \gamma_T$; pero no necesariamente de igual orientación)

$$b_{ABTK}^x = b_{AK}(\infty) b_{BT}^x(t) + b_{BK}(\infty) \cdot b_{AT}^x(t) + \frac{I(E_0; R_{AB})}{\frac{1}{2} i \hbar \gamma} (b_{AK}(\infty) b_{AT}^x(t) + b_{BK}(\infty) \cdot b_{BT}^x(t)) + O.\text{sup.} \quad (101)$$

///

(Recordemos que estamos trabajando con $R_{AT}, R_{BT} \gg \lambda_0$)

Recordando la expresión aproximada de $I(E_0; R_{AB})$ para el orden

de distancias $R_{AB} > \lambda_0$ a saber:

$$\frac{I(E_0; R_{AB})}{\frac{1}{2} i \hbar \gamma} = - \frac{I}{2 \pi i} \frac{1}{3/2} \cdot ((\hat{r}_A \times \hat{r}_{AB}) \cdot (\hat{r}_B \times \hat{r}_{AB})) \cdot \frac{\lambda_0}{R_{AB}} e^{2\pi i \frac{R_{AB}}{\lambda_0}}$$

donde $\lambda_0 = \frac{2 \pi}{k_0} = \frac{2 \pi \hbar c}{E_0}$

Vemos que la última fila en la expresión (101) es del orden λ_0/R_{AB} veces la primera fila. Esta proviene de las contribuciones de los β_{KK} ; es decir, debido a la interacción radiativa entre las fuentes emisoras A y B en el rango de distancias considerado. Así el primer sumando de la segunda fila significa: A emite K, luego es excitado por el fotón proveniente de B - el término $I(E_0; R_{AB})$ da cuenta de esto - y A en su desexcitación posterior puede excitar al átomo zona T.-

Usando (101) podremos poner:

$$\begin{aligned} |b_{ABTK}^x|^2 &= |b_{AK}^z|^2 |b_{BT}^x|^2 + |b_{BK}^z|^2 |b_{AT}^x|^2 + 2 \operatorname{Re} \cdot (b_{AK}^z b_{BK}^z b_{BT}^x b_{AT}^x)^* + \\ &+ |b_{AK}^z|^2 2 \operatorname{Re} \cdot \left(-\frac{I(E_0; R_{AB})}{\frac{1}{2} i \hbar \gamma} b_{AT}^x b_{BT}^x \right)^* + |b_{BK}^z|^2 2 \operatorname{Re} \cdot \left(-\frac{I(E_0; R_{AB})}{\frac{1}{2} i \hbar \gamma} b_{AT}^x b_{BT}^x \right)^* + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \cdot (b_{AK}^z b_{BK}^z \frac{I(E_0; R_{AB})}{\frac{1}{2} i \hbar \gamma}) |b_{AT}^x|^2 + 2 \operatorname{Re} \cdot (b_{AK}^z b_{BK}^z \frac{I(E_0; R_{AB})}{\frac{1}{2} i \hbar \gamma}) |b_{BT}^x|^2 + \\ &+ \frac{I(E_0; R_{AB})}{\frac{1}{2} i \hbar \gamma} (|b_{AK}^z|^2 |b_{AT}^x|^2 + |b_{BK}^z|^2 |b_{BT}^x|^2 + 2 \operatorname{Re} \cdot (b_{AK}^z b_{BK}^z b_{AT}^x b_{BT}^x)^*) \end{aligned} \quad (102)$$

Con ayuda de la (102) y usando las especificaciones ya vistas:

$$\sum_K |b_{AK}(\infty)|^2 = \sum_K |b_{BK}(\infty)|^2 = 1$$

$$\beta = \sum_K b_{AK}^z b_{BK}^z = \beta^* \quad (\text{para átomos idénticos})$$

Podemos poner la probabilidad total de excitación de la zonda,

en la forma siguiente: $P_T^x = \sum_K |b_{ABTK}^x|^2 = |b_{BT}^x|^2 + |b_{AT}^x|^2 +$

$$\begin{aligned} &+ 2 \operatorname{Re} \cdot (\beta b_{BT}^x b_{AT}^x)^* + 2 \operatorname{Re} \cdot \left(\frac{I(E_0; R_{AB})}{\frac{1}{2} i \hbar \gamma} \right) \cdot 2 \operatorname{Re} \cdot (b_{BT}^x b_{AT}^x)^* + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \cdot \left(\beta \frac{I(E_0; R_{AB})}{\frac{1}{2} i \hbar \gamma} \right) |b_{BT}^x|^2 + 2 \operatorname{Re} \cdot \left(\beta \frac{I(E_0; R_{AB})}{\frac{1}{2} i \hbar \gamma} \right) |b_{AT}^x|^2 + \\ &+ \left| \frac{I(E_0; R_{AB})}{\frac{1}{2} i \hbar \gamma} \right|^2 (|b_{BT}^x|^2 + |b_{AT}^x|^2 + 2 \operatorname{Re} \cdot (\beta b_{AT}^x b_{BT}^x)^*) \end{aligned} \quad //$$

///

Ahora bien, ya que para el orden de distancias considerado

$$R_{AB} > \lambda_0 = \frac{2\pi}{K_0} \text{ tenemos:}$$

$$= \frac{3}{2} ((\hat{r}_A \times \hat{R}_{AB}) \cdot (\hat{r}_B \times \hat{R}_{AB})) \frac{\text{sen } K_0 R_{AB}}{K_0 R_{AB}} e^{-R_{AB}/2l_c}$$

que como vemos es del orden λ_0/R_{AB} al igual que $I(E_0; R_{AB})/\frac{1}{2}i\hbar\gamma$

. Además para el rango importante de distancias:

$l_c = c/\gamma \gg R_{AB} > \bar{\lambda}$ (ya que para $R_{AB} \sim l_c$ desaparece como vimos todo factor interferencial) tenemos:

$$\text{Re.} \left(\frac{I(E_0, R_{AB})}{\frac{1}{2}i\hbar\gamma} \right) = -\beta e^{R_{AB}/l_c} \approx -\beta$$

Para fijar ideas respecto de esta aproximación consideremos el espectro visible, donde:

$$\lambda_0 \approx 10^{-5} \text{ cm.} \quad c/\gamma = l_c \approx 3 \cdot 10^2 \text{ cm.} = 3 \cdot 10^7 \bar{\lambda}$$

entonces es claro que:

$$e^{R_{AB}/l_c} = e^{R_{AB}/10^7 \bar{\lambda}} \approx 1$$

Pues bien, con ayuda de las anteriores y despreciando los términos de superior orden podremos poner en muy buena aproximación:

$$F_T^* = \sum_K |b_{ABTK}^*|^2 = |b_{BT}^*|^2 + |b_{AT}^*|^2 - 2 \text{Re.} (b_{BT}^* b_{AT}^*) \quad (103)$$

Usando la forma explícita de b_{AT} y b_{BT} (ver (93)) podremos poner la (103) en la forma siguiente:

$$P_T^* = P_{BT}^* + P_{AT}^* - 2 \beta (P_{BT}^* P_{AT}^*)^{\frac{1}{2}} \cos K_0 (R_{BT} - R_{AT}) \quad (104)$$

$$\text{donde } P_{BT}^* = |b_{BT}^*|^2; \quad P_{AT}^* = |b_{AT}^*|^2$$

//

/// La expresión (104) nos describe como vemos un clásico fenómeno de interferencia; donde β desempeña el papel de "grado de coherencia" mutua de las excitaciones provenientes de las fuentes elementales A y B. (x).

(x) Ver "Principles of optics" Max Born and E.Wolf - pag. 500.

EXPRESIONES ASOCIADAS EN EL ESPACIO - TIEMPO DE CONFIGURACIONES

Para asociar a un particular campo cuántico de dos fotones expresiones escritas en el espacio-tiempo de configuraciones, empezaremos considerando el caso de dos fotones provenientes de fuentes A y B sin interacción ($R_{AB} \geq 1_c$) recientemente estudiado (ver (72)):

$$b_{KK}(t) = 2^{\frac{1}{2}} b_{AK}(t) \cdot b_{BK}(t) \quad (105)$$

$$b_{KK'}(t) = b_{AK}(t) \cdot b_{BK'}(t) + b_{AK'}(t) \cdot b_{BK}(t)$$

y los resultados obtenidos en este caso, para la excitación de dos cuerpos de prueba T_1 y T_2 (ver (92)), a saber:

$$i\hbar\delta_{ABT_1T_2}^{xx} = b_{BT_1}^{*x}(i\hbar\delta_{AT_2}^{*x}) + b_{AT_1}^{*x}(i\hbar\delta_{BT_2}^{*x}) + b_{BT_2}^{*x}(i\hbar\delta_{AT_1}^{*x}) + b_{AT_2}^{*x}(i\hbar\delta_{BT_1}^{*x})$$

o bien: (106)

$$b_{ABT_1T_2}^{xx}(t) = b_{BT_1}^{*x}(t) \cdot b_{AT_2}^{*x}(t) + b_{AT_1}^{*x}(t) \cdot b_{BT_2}^{*x}(t) \quad (\text{para } R_{AT}, R_{BT} > 1_c)$$

La significación física de la (106), es clara recordando los conceptos y las notaciones introducidos al tratar la excitación de un átomo T por un fotón nacido en la emisión de un átomo fuente A. Con estas aclaraciones es fácil ver que la probabilidad de excitación de los átomos T_1 y T_2 ($1/b_{ABT_1T_2}^{xx}$) está dada por la contribución de los siguientes eventos competitivos, que indicaremos esquemáticamente así:

$$(B \text{ ----} \rightarrow T_1; A \text{ ----} \rightarrow T_2) \quad \text{y} \quad (B \text{ ----} \rightarrow T_2; A \text{ ----} \rightarrow T_1)$$

Estos eventos alternativos implican interferencias - dado que la observación no puede distinguir entre los dos conjuntos, a menos que las emisiones o excitaciones estén muy separadas en espacio y en tiempo. Vemos entonces que la superposición de luz incoherente si bien no conduce (según lo visto en (98) y 99)) a efectos interferenciales en probabilidades que son //

///proporcionales a la intensidad total; conduce si a efectos interferenciales en probabilidades que son cuadráticas en la intensidad, como muestra la (106) (x). Puede verse de la (105) y (106) que estos efectos son consecuencia de la estadística de Bose para los fotones.

Considerando ahora que el campo cuántico en consideración está constituido por dos campos independientes (en el sentido descrito) de un fotón

$$b_{BK} \quad \text{y} \quad b_{AK}$$

y dada la independencia, en el sentido explicado en pags. anteriores de los campos

$$\vec{A}_{\text{ass}(B)}(\vec{r}, t) \quad \text{y} \quad \vec{A}_{\text{ass}(A)}(\vec{r}, t)$$

que es posible asociar a las emisiones de luz por parte de las fuentes B y A; podemos intuir que ellos entraran como ingredientes básicos en las expresiones que asociemos a nuestro particular campo cuántico de dos fotones.

Dada la forma de la (106) es conveniente empezar con el estudio de uno cualquiera de sus términos; así vimos que era posible escribir en términos del campo asociado (ver (34)):

$$i\hbar \delta_{AT_1}^*(t') = e^{iE_{T_1} t'/\hbar} \int \phi_{T_1}^* (-e \vec{\alpha}_{T_1}) \vec{A}_{\text{ass}}(\vec{R}_{T_1}, t') \phi_{T_1} d\epsilon \quad (107)$$

donde

$$\vec{A}_{\text{ass}(A)}(\vec{R}, t) = (4\pi c^2 / L^3) \sum_{K_\lambda} \epsilon_{K_\lambda} (\frac{1}{2}\hbar/\omega_k)^{\frac{1}{2}} q_{AK_\lambda} e^{i[\vec{K}(\vec{R}-\vec{R}_A) - \omega_k t]} \quad (108)$$

$$q_{AK_\lambda} e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} = b_{AK_\lambda}$$

es el campo asociado a la transición cuántica del átomo A aislado. Indicando con R y t la coordenada espacial del lugar //

(x) Estas correlaciones en la recepción de luz incoherente por medio de dos detectores o por métodos equivalentes han sido observadas por:

R. Handury Brown and R.Q. Twiss, PhilMag, 45, 663 (1954)
Nature, London 177, 28, 178, 1046 and 1447 (1956)

A.T. Forrester, R.A. Gudmundsen and P.O. Johnson, Phys. Rev. 99, 1961, (1955). A.T. Forrester, Amer. J. Phys. 24, 192 (1956). y convenientemente descritas por U. Fano en Journal of Amer. Phys, August (1961)

///en que se considera el campo y el tiempo en que se efectúa tal observación. De acuerdo a esto la (107) expresa que el crecimiento de $b_{AT_1}^x$ a cada tiempo t' se efectúa a expensas de la "acción" del campo proveniente de A, en dicho tiempo t' sobre el átomo de prueba puesto en el lugar de coordenadas R_{T_1} .

Usando entonces el campo asociado $\vec{A}_{ass(A)}$

podemos poner para la amplitud de probabilidad $b_{AT_1}^x$ considerada a un tiempo t , la siguiente expresión:

$$b_{AT_1}^x(t) = 1/i\hbar \int_0^t e^{iE_{T_1} t'/\hbar} dt' \left\{ \int \phi_{T_1}^* (-e\vec{\alpha}_{T_1}) \vec{A}_{ass(A)}(\vec{R}_{T_1}, t') \phi_{T_1} d\mathcal{U} \right\} \quad (109)$$

donde la integral temporal representa el efecto agregado de las "acciones de campo" en tiempos sucesivos t' hasta el tiempo t .

Debemos mencionar el hecho que la integral (109) está en realidad extendida desde tiempos $t' = R_{AT_1}/c$ (ver las expresiones ap. II - (10_{II}) y (57), (93)).-

En lo sucesivo, sin embargo, consideraremos (por ser el caso de interés para nosotros) que las sondas T_1 y T_2 están situadas de tal forma que son simultáneamente sometidas a los trenes de onda provenientes de A, y B.

Pués bien, con ayuda de la (109) podremos poner la (106) en la forma siguiente, en función de los campos asociados a la transiciones en A y en B.:

$$\begin{aligned} b_{ABT_1 T_2}^x(t) &= b_{BT_1}^x b_{AT_2}^x + b_{AT_1}^x b_{BT_2}^x = \\ &= 1/i\hbar \int_0^t e^{iE_{T_1} t'/\hbar} dt' \left\{ \int \phi_{T_1}^* (-e\vec{\alpha}_{T_1}) \vec{A}_{ass(B)}(\vec{R}_{T_1}, t') \phi_{T_1} d\mathcal{U}_1 \right\} \cdot \\ &\cdot 1/i\hbar \int_0^t e^{iE_{T_2} t'/\hbar} dt' \left\{ \int \phi_{T_2}^* (-e\vec{\alpha}_{T_2}) \vec{A}_{ass(A)}(\vec{R}_{T_2}, t') \phi_{T_2} d\mathcal{U}_2 \right\} + \\ &+ 1/i\hbar \int_0^t e^{iE_{T_1} t'/\hbar} dt' \left\{ \int \phi_{T_1}^* (-e\vec{\alpha}_{T_1}) \vec{A}_{ass(A)}(\vec{R}_{T_1}, t') \phi_{T_1} d\mathcal{U}_1 \right\} \cdot \\ &\cdot 1/i\hbar \int_0^t e^{iE_{T_2} t'/\hbar} dt' \left\{ \int \phi_{T_2}^* (-e\vec{\alpha}_{T_2}) \vec{A}_{ass(B)}(\vec{R}_{T_2}, t') \phi_{T_2} d\mathcal{U}_2 \right\} \end{aligned} \quad (110)$$

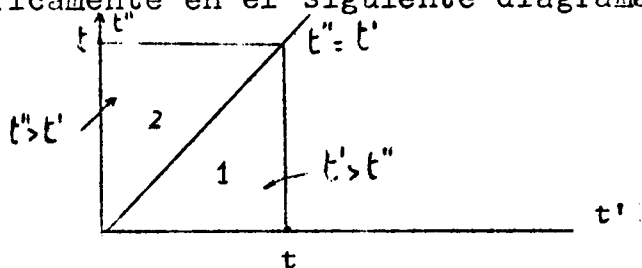
///Haciendo uso del concepto de "ordenación temporal" (x); podemos poner este producto de integrales en otra forma más accesible para la interpretación física; en efecto partiendo del hecho genérico de que:

$$\text{si } h(t) = f(t), g(t) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} f(t) = \int_0^t n(t') dt' \\ g(t) = \int_0^t m(t') dt' \end{cases}$$

es entonces posible expresar

$$h(t) = \int_0^t n(t') dt' \cdot \int_0^t m(t'') dt'' = \int_0^t dt' \int_0^{t'} n(t') m(t'') dt'' + \int_0^t dt'' \int_0^{t''} m(t'') n(t') dt'$$

donde los dominios de integración en el plano $t't''$ son los expresados gráficamente en el siguiente diagrama:



1 y 2 se refieren a los dominios para la integral doble del 1º y 2º sumando respectivamente,

Así; usando las especificaciones anteriores, podremos poner la (110) en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} b_{ABT_1 T_2}^x (t) = & \\ = (\frac{1}{\hbar})^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{i(E_{T_1} t_1 + E_{T_2} t_2)/\hbar} & \left\{ \left[\phi_{T_1}^* \phi_{T_2}^* e^{i(\alpha_{T_1} t_1 + \alpha_{T_2} t_2)} \left[\vec{A}_{(B)}^{(R_{T_1}, t_1)} \vec{A}_{(A)}^{(R_{T_2}, t_2)} + \vec{A}_{(A)}^{(R_{T_1}, t_1)} \vec{A}_{(B)}^{(R_{T_2}, t_2)} \right] \phi_{T_1} \phi_{T_2} \right] \right. \\ + (\frac{1}{\hbar})^2 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 e^{i(E_{T_1} t_1 + E_{T_2} t_2)/\hbar} & \left. \left[\vec{A}_{(A)}^{(R_{T_1}, t_1)} \vec{A}_{(B)}^{(R_{T_2}, t_2)} + \vec{A}_{(B)}^{(R_{T_1}, t_1)} \vec{A}_{(A)}^{(R_{T_2}, t_2)} \right] \phi_{T_1} \phi_{T_2} \right\} dz_1 dz_2 \end{aligned} \quad (111)$$

La expresión (111) admite ahora la siguiente interpretación en base a procesos ordenados temporalmente:

- i) El primer sumando, expresa que el átomo T_2 pasa a su estado excitado a un tiempo $t_2 \leq t_1$ por influencia del campo proveniente ya sea del átomo A, o bien del átomo B; mientras que la zonda T_1 es excitada posteriormente a un tiempo t_1 por el campo restante proveniente de B ó A. //

(x) Ver ej. SCHWEBER, BETHE, DE HOFFMANN "Mesons and Fields" Vo. I (1955) pag. 195.

///

ii) En cuanto al segundo sumando, expresa en forma análoga el evento alternativo siguiente: excitación de T_1 a un tiempo $t_1 < t_2$ y la posterior absorción por parte de T_2 del campo restante de un fotón.

Podemos ver de inmediato que la (111)

expresa claramente al sistema de ecuaciones (88), a saber:

$$i\hbar b_{AB\dot{T}_2\dot{T}K} = \sum_{K'} H_{AB\dot{T}_2\dot{T}K}^{AB\dot{T}_2\dot{T}K K'} (b_{AK} b_{BK'} + b_{BK} b_{AK'}) e^{i(E_{T_2} - E_{K'})t/\hbar}$$

$$\text{con } b_{AB\dot{T}_2\dot{T}K} = b_{AK} b_{BT_2} + b_{BK} b_{AT_2} \quad (a)$$

$$i\hbar b_{AB\dot{T}_1\dot{T}K} = \sum_{K'} H_{AB\dot{T}_1\dot{T}K}^{AB\dot{T}_1\dot{T}K K'} (b_{AK} b_{BK'} + b_{BK} b_{AK'}) e^{i(E_{T_1} - E_{K'})t/\hbar}$$

$$\text{con } b_{AB\dot{T}_1\dot{T}K} = b_{AK} b_{BT_1} + b_{BK} b_{AT_1} \quad (b)$$

$$i\hbar b_{AB\dot{T}_1\dot{T}_2} = \sum_{K'} H_{AB\dot{T}_1\dot{T}_2}^{AB\dot{T}_1\dot{T}_2 K} b_{AB\dot{T}_1\dot{T}_2 K} e^{i(E_{T_1} - E_K)t/\hbar} + \sum_{K'} H_{AB\dot{T}_1\dot{T}_2}^{AB\dot{T}_1\dot{T}_2 K} b_{AB\dot{T}_1\dot{T}_2 K} e^{i(E_{T_2} - E_K)t/\hbar}$$

$$\text{con } b_{AB\dot{T}_1\dot{T}_2} = b_{BT_1} b_{AT_2} + b_{AT_1} b_{BT_2} \quad (c)$$

en efecto, una simple inspección muestra que las dos primeras integraciones sobre t_2 y t_1 en el 1º y 2º sumando de la (111) representan los resultados (a) y (b) respectivamente, mientras que las dos integraciones restantes sobre t_1 y t_2 representan el resultado (c); es decir, la absorción del campo restante de un fotón.

La expresión obtenida (111), análoga de la expresión (109) para el caso de un fotón, nos permite entonces considerar a la expresión tensorial siguiente:

(112)

$$\vec{A}_{ass} = \vec{A}_{ass(B)}(\vec{R}_I, t_I) \vec{A}_{ass(A)}(\vec{R}_{II}, t_{II}) + \vec{A}_{ass(A)}(\vec{R}_I, t_I) \vec{A}_{ass(B)}(\vec{R}_{II}, t_{II})$$

Como la expresión escrita en el espacio tiempo de configuraciones, asociada a nuestro particular campo cuántico de dos fotones independientes.-

Usando las conocidas expresiones para los campos asociados $\vec{A}_{ass(A)}$ y $\vec{A}_{ass(B)}$ podremos poner la (112) explícitamente en la forma siguiente como expresión tensorial simétrica.

(113)

$$\vec{A}_{ass} = \text{cte.} \sum_{KK'} \left(\frac{\hbar}{2Kc}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\hbar}{2K'c}\right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_K \epsilon_{K'} (b_{AK} b_{BK'} + b_{AK'} b_{BK}) e^{i(\vec{K}'\vec{R}_I - K'ct_I)} \cdot e^{i(\vec{K}\vec{R}_{II} - Kct_{II})}$$

///

Considerando que $b_{AK} b_{BK'} b_{AK'} b_{BK} = b_{ABKK'}$ son los coeficientes del paquete de dos fotones en estudio, podremos generalizar de inmediato la (113) a paquetes generales de dos fotones

$$L(\vec{K}, \vec{K}') = L(\vec{K}', \vec{K})$$

no necesariamente independientes. Así la expresión tensorial simétrica más general que podremos asociar a un campo cuántico genérico de dos fotones describiendo su evolución espacio-temporal es:

$$\vec{A}_{ass} = cte \sum_{KK'} \epsilon_{\vec{K}\vec{K}'} \left(\frac{h^2}{4c^2 KK'} \right)^{\frac{1}{2}} L(\vec{K}, \vec{K}') e^{i(\vec{K}\vec{R}_I - Kct_I)} e^{i(\vec{K}'\vec{R}_{II} - Kct_{II})}$$

donde $\epsilon_{KK'}$ es el tensor siguiente:

$$\begin{vmatrix} \epsilon_K \epsilon_{K'} & \epsilon_K^2 \epsilon_{K'}^2 & \epsilon_K^3 \epsilon_{K'}^3 \\ \epsilon_K^2 \epsilon_{K'}^2 & \epsilon_K^2 \epsilon_{K'}^2 & \epsilon_K^2 \epsilon_{K'}^3 \\ \epsilon_K^3 \epsilon_{K'}^3 & \epsilon_K^3 \epsilon_{K'}^2 & \epsilon_K^3 \epsilon_{K'}^3 \end{vmatrix} \quad (114)$$

La expresión (114) que aparece como la generalización natural para el caso de dos fotones de su correspondiente para el caso de un fotón (ver expresión (10)); muestra una dependencia en que podemos llamar coordenadas espacio-temporal de los cuerpos de prueba T_I y T_{II} usados en el proceso de "puesta en evidencia" de los fotones involucrados como venos, su aparición está entonces estrechamente ligada con la observación. Por supuesto los tiempos t_I y t_{II} en los "registradores" T_I y T_{II} pueden eventualmente coincidir en un experimento particular.

Nota: Lo anterior nos sugiere un formalismo de "muchos tiempos" para ecuaciones fundamentales de la electrodinámica cuántica; en efecto la ecuación de evolución usada hasta ahora:

$$(-i \hbar \frac{\partial}{\partial t} + H) \phi(t, q, R_1, R_2, \dots) = 0$$

veamos que no contiene las coordenadas espaciales y temporales en una forma simétrica.

En una formulación covariante-Lorentz de la electrodinámica

///uno debería asignar a cada partícula su "tiempo individual" t_n de modo que las coordenadas espacio-temporales (R_n, t_n) de cada partícula formen un cuadrivector en el espacio de Minkowski, junto con las coordenadas (R, t) del campo que también forman un cuadrivector y aparecen como argumentos en las funciones de campo. Dirac, Fock y Podolsky (x) han encontrado una tal formulación invariante de la electrodinámica cuántica que se reduce a la teoría usual (con una sola coordenada temporal) cuando hacemos coincidir todos los tiempos t_n de las partículas con el tiempo del campo t . Ellos usan una función de Schröedinge que depende de las variables de campo q y de las variables electrónicas R_n y también de los tiempos individuales t_n

$$\phi = \phi (q; R_I, t_I; R_{II}, t_{II} ; \dots \dots \dots)$$

$dq d^3R_I d^3R_{II} \dots$ puede interpretarse en términos de probabilidades para cierta clase de mediciones (xx).

Para determinar como la función depende de cada uno de los tiempos individuales t_n son necesarias tantas ecuaciones como partículas, ellos entonces postulan para cada partícula:

$$\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial t_n} + H_n \right) \phi = 0$$

$$\text{donde } H_n = m_n c^2 \beta_n + c \left\{ \alpha_n (p_n - e_n/c \vec{A}(\vec{R}_n, t_n)) \right\} - e_n i A_4(\vec{R}_n, t_n)$$

$$\text{y } A(\vec{R}, t) = e^{itH_{\text{radiación}}/\hbar} A^{\text{op.}}(\vec{R}) e^{-it/\hbar} H_{\text{rad.}}$$

En conexión con la nota anterior, debemos mencionar que nuestro mecanismo físico de asociación; es decir, la observación en tiempos genéricos t_I y t_{II} de los fotones involucrados por medio de los átomos de prueba T_I y T_{II} , nos conduce para : ///

(x) Ver G. Wentzel "Quantum theory of fields" 1949 Chap. IV 18
 (xx) Bloch Physik Z. Sowjetunion 5,301, 1934.

$$L(\vec{K}_I, \vec{K}_{II}; t_I, t_{II}) = L(\vec{K}_I, \vec{K}_{II}) e^{-iK_I ct_I} e^{-iK_{II} ct_{II}}$$

al siguiente sistema de ecuaciones:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t_I} L(\vec{K}_I, \vec{K}_{II}; t_I, t_{II}) = \hbar c K_I L(\vec{K}_I, \dots)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t_{II}} L(\vec{K}_I, \vec{K}_{II}; t_I, t_{II}) = \hbar c K_{II} L(\dots, \vec{K}_{II})$$

o bien, al sistema equivalente:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial T} L = \hbar c (K_I + K_{II}) L$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial Z} L = \hbar c \frac{1}{2} (K_I - K_{II}) L$$

$$\text{donde } T = \frac{1}{2}(t_I + t_{II}) \quad \frac{\partial}{\partial t_I} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial Z}$$

$$Z = (t_I - t_{II}) \quad \frac{\partial}{\partial t_{II}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial Z}$$

Como vemos, sólo en el caso de coincidencia de los tiempos de observación, t_I y t_{II} de las partículas "registradoras" T_I y T_{II} ; tendremos la ecuación de evolución ordinaria

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} L = \hbar c (K_I + K_{II}) L$$

donde $t = t_I = t_{II}$.

Antes de finalizar, debemos aun hacer notar que la expresión asociada obtenida, contiene implícitas en las amplitudes $L(\vec{K}_I, \vec{K}_{II})$ las mismas correlaciones que el campo propuesto de dos fotones.

CORRELACIONES FUERTES ENTRE FOTONES

Vimos que el caso de dos átomos excitados distantes entre si, conducen a un campo de dos fotones independientes, o bien poco correlacionados por un pequeño grado de coherencia, y como esto ya estaba en cierta forma implícito en la estructura analítica del paquete:

$$L(\vec{k}_I, \vec{k}_{II}) = L(\vec{k}_{II}, \vec{k}_I) = b(\vec{k}_I) \cdot a(\vec{k}_{II}) + a(\vec{k}_I) \cdot b(\vec{k}_{II})$$

Un caso opuesto está dado por dos fotones que nacen en un sólo proceso cuántico; por ej. en la desintegración del positronio en su estado 1S . Aquí (como veremos) el paquete no presenta ya la forma simple anterior, lo que implica que ya no es posible la división en contribuciones de dos paquetes independientes de un fotón.

Trataremos entonces este caso, por ser un ejemplo significativo de dos fotones fuertemente correlacionados y de tratamiento relativamente simple. Veremos luego de aplicar a este caso los esquemas recientemente estudiados; es decir, describiremos en el espacio-tiempo de configuraciones al paquete de dos fotones propuesto. Posteriormente veremos en forma somera la conveniencia de esta representación para la visualización de cierto tipo de fenómenos.

Paquete de dos fotones - Aniquilación del positronio en su estado 1S .

Para la discusión que sigue nos restringiremos al caso en que el impulso del centro de masa es nulo $\vec{P} = 0$; es decir, el caso en que el positronio está en reposo.

Las predicciones teóricas (x) y los hechos experimentales (xx) en excelente acuerdo, muestran que//

- (x) Ver por ej. J.M.Jauch and F.Rohrlich "The Theory of Photons and Electrons" Addison-Wesley 1955 - Chap 12 pags 274 y sig.
(xx) M. Deutsch Progress in Nuclear Physics Vol. 3 pag. 131 (1953) que contiene además una lista bastante completa de referencias.

////la desintegración del positronio en su estado fundamental 1S ($E_{\text{lig}} = 6.8 \text{ ev.}$ y $\tau \approx 10^{-10} \text{ seg.}$) se produce a través de dos fotones de impulso opuesto \vec{K} y $-\vec{K}$ (y por lo tanto de impulso angular nulo), además se muestra que cada fotón es emitido en un estado de polarización ortogonal al otro, independientemente de la elección de los ejes respecto de los cuales es expresado el estado de polarización (xxx).

Debemos mencionar que este último resultado es semejante al obtenido en la aniquilación de un par muy lento (xxxx).

Pues bien usaremos estos hechos conocidos para escribir explícitamente la configuración de dos fotones monocromáticos con las características dadas, que nos permitirá posteriormente construir (mediante una suma sobre energías en la zona del ancho de línea el paquete de dos fotones resultantes de la desintegración.

Partiendo entonces de la forma general para un paquete de dos fotones:

$$\Gamma^2 = \sum_{\vec{K}_{I,\lambda}, \vec{K}_{II,\mu}} L(\vec{K}_{I,\lambda}, \vec{K}_{II,\mu}) a_{\vec{K}_{I,\lambda}}^+ a_{\vec{K}_{II,\mu}}^+ \Gamma^0 \quad (115)$$

donde $\begin{cases} \lambda=1,2 \\ \mu=1,2 \end{cases} \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2 = 0$ y $a_{\vec{K}_{I,\lambda}}^+, a_{\vec{K}_{II,\mu}}^+$ son los operadores de emisión

actuando sobre la función de onda del vacío.

Procederemos ahora paso a paso a delimitar la forma analítica de las amplitudes $L(\vec{K}_{I,\lambda}, \vec{K}_{II,\mu})$ de forma que el paquete (115) nos represente efectivamente los dos fotones propuestos. Podemos entonces en primer lugar ///

- (xxx) Jauch and Rohrlich pag. 282 y 284
 (xxxx) O.W.Heitler "Quantum theory of Radiation" loc.cit.pag. 268 (3a, ed.)

////para cada término $L(\vec{K}_I; \vec{K}_{II})$ efectuar la suma sobre las polarizaciones

$$\lambda (\pi 1,2) \text{ y } \mu (\pi 1,2)$$

desechando aquellos términos que no expresen el hecho físico conocido de polarización ortogonal de los fotones K_I y K_{II}

$$\Gamma^2 = \sum_{\vec{K}_I, \vec{K}_{II}} \left\{ L(K_{I_1}, K_{II_1}) a_{K_{I_1}}^+ a_{K_{II_1}}^+ + L(K_{I_1}, K_{II_2}) a_{K_{I_1}}^+ a_{K_{II_2}}^+ + L(K_{I_2}, K_{II_1}) a_{K_{I_2}}^+ a_{K_{II_1}}^+ + L(K_{I_2}, K_{II_2}) a_{K_{I_2}}^+ a_{K_{II_2}}^+ \right\} \Gamma^0$$

Debemos limitar ahora la suma anterior a aquellos pares de fotones con impulso opuesto ($\vec{K}_I = -\vec{K}_{II}$) y energía $hc K$ ($K = |\vec{K}_I| = |\vec{K}_{II}|$); entonces pondremos:

$$\Gamma^2 = \sum_{\vec{K}_I, \vec{K}_{II}} \left\{ L(\vec{K}_I, \vec{K}_{II}) a_{K_I}^+ a_{K_{II}}^+ + L(\vec{K}_{II}, \vec{K}_I) a_{K_{II}}^+ a_{K_I}^+ \right\} \Gamma^0 \delta(\vec{K}_I + \vec{K}_{II}) \delta(K_I - K_{II}) \quad (116)$$

Dada la simetría esférica del estado 1S , tenemos la misma probabilidad para todas las direcciones, entonces:

$$\left| L(K_{I_1}, K_{II_2}) \right|^2 = \left| L(\vec{K}_{I_2}, \vec{K}_{II_1}) \right|^2 = \text{cte.} \left| f(K_I) \right|^2 \quad (117)$$

Esta cte. puede ser luego determinada por normalización, pero no es esencial para nosotros. En cuanto a la función $f(K)$

es la densidad espectral; para obtener el paquete emitido en la desintegración del positronio deberemos sumar sobre energías K con esta función de peso; aquí dejaremos esto de lado pues estamos interesados sólo en un término típico (no crítico) de esta suma.

Usando (117) pondremos:

$$L(\vec{K}_{I_1}, \vec{K}_{II_2}) = \pm L(\vec{K}_{I_2}, \vec{K}_{II_1})$$

y reemplazando en la (116)

$$\Gamma^2 = \sum_{\vec{K}_I, \vec{K}_{II}} \text{cte.} f(K_I) (a_{K_{I_1}}^+ a_{K_{II_2}}^+ \pm a_{K_{I_2}}^+ a_{K_{II_1}}^+) \Gamma^0 \delta(\vec{K}_I + \vec{K}_{II}) \delta(K_I - K_{II})$$

///

///

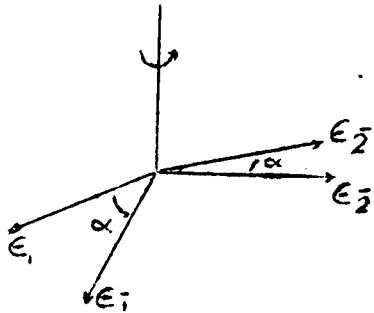
Ahora bien, como dijimos la función de onda correcta para la descripción de la experiencia en consideración, es aquella en la que los fotones esten en estados ortogonales de excitación independientemente de los ejes 1 y 2 elegidos para la representación de los estados de polarización. Veremos entonces que de las funcionales posibles:

$$\begin{aligned} \Gamma_{(1,2)}^{(1)} &= a_{K_I}^+ a_{K_{II}}^+ \Gamma^0 & \Gamma_{(1,2)}^{(S)} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (\Gamma_{(1,2)}^{(1)} + \Gamma_{(1,2)}^{(2)}) \\ & & & \end{aligned} \quad (119)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{(1,2)}^{(2)} &= a_{K_I}^+ a_{K_{II}}^+ & \Gamma_{(1,2)}^{(A)} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (\Gamma_{(1,2)}^{(1)} - \Gamma_{(1,2)}^{(2)}) \end{aligned}$$

sólo la combinación asimétrica ($\Gamma^{(A)}$) tiene la propiedad requerida de quedar invariante bajo una rotación ortogonal de los ejes de polarización.

En efecto si medimos la polarización según otro par de ejes ($\bar{1}, \bar{2}$) rotados con respecto a los anteriores (1,2) un genérico ángulo tal que:



$$\begin{cases} \epsilon_1 = \epsilon_{\bar{1}} \cos \alpha + \epsilon_{\bar{2}} \sin \alpha \\ \epsilon_2 = -\epsilon_{\bar{1}} \sin \alpha + \epsilon_{\bar{2}} \cos \alpha \end{cases}$$

y expresando las funcionales (119) en el sistema rotado de coordenadas (\bar{x}), tendremos: $\Gamma_{(1,2)}^{(1)} = (a_{K_{I\bar{1}}}^+ \cos \alpha + a_{K_{I\bar{2}}}^+ \sin \alpha)$.

$$\begin{aligned} & \cdot (-a_{K_{I\bar{1}}}^+ \sin \alpha + a_{K_{I\bar{2}}}^+ \cos \alpha) = \cos^2 \alpha (a_{K_{I\bar{1}}}^+ a_{K_{I\bar{2}}}^+ \Gamma^0) - \sin^2 \alpha (a_{K_{I\bar{2}}}^+ a_{K_{I\bar{1}}}^+) \Gamma^0 \\ & + \sin \alpha \cos \alpha (a_{K_{I\bar{2}}}^+ a_{K_{II\bar{2}}}^+ - a_{K_{I\bar{1}}}^+ a_{K_{II\bar{1}}}^+) \end{aligned}$$

(x) Debemos hacer notar que hemos impuesto a la ley de transformación usada el requerimiento físico de dejar invariante el número de fotones.-

///

y procediendo de manera análoga

$$\Gamma_{(1,2)}^{(1)} = \cos^2 \alpha \Gamma_{(\bar{1}, \bar{2})}^{(1)} - \sin^2 \alpha \Gamma_{(\bar{1}, \bar{2})}^{(2)} + \sin \alpha \cos \alpha (\Gamma_{(\bar{2}, \bar{2})}'' - \Gamma_{(\bar{1}, \bar{1})}'')$$

$$\Gamma_{(1,2)}^{(2)} = \cos^2 \alpha \Gamma_{(\bar{1}, \bar{2})}^{(2)} - \sin^2 \alpha \Gamma_{(1,2)}^{(1)} + \sin \alpha \cos \alpha (\Gamma_{(\bar{2}, \bar{2})}'' - \Gamma_{(\bar{1}, \bar{1})}'')$$

$$\Gamma_{(1,2)}^{(S)} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \Gamma_{(\bar{1}, \bar{2})}^{(S)} + 2 \sin \alpha \cos \alpha (\Gamma_{(\bar{2}, \bar{2})}'' - \Gamma_{(\bar{1}, \bar{1})}'')$$

$$\Gamma_{(1,2)}^{(A)} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} (\Gamma_{(\bar{1}, \bar{2})}^{(1)} - \Gamma_{(\bar{1}, \bar{2})}^{(2)}) = \Gamma_{(\bar{1}, \bar{2})}^{(A)}$$

De éstas podemos ver sólo $\Gamma_{(\bar{1}, \bar{2})}^{(A)}$ representa aun direcciones ortogonales de polarización para ambos fotones; es decir, en la expresión (118) deberemos tomar la combinación asimétrica.-

Podemos escribir entonces para nuestro campo cuántico particular la expresión genérica siguiente:

$$\Gamma^2 = \sum_{K_I, K_{II}} L(\vec{K}_I, \vec{K}_{II}) a_{K_I}^+ a_{K_{II}}^+ \Gamma^0 \quad (120)$$

donde:

$$L(K_I, K_{II}) = \text{cte.} f(K_{II}) \delta(\vec{K}_I + \vec{K}_{II}) \delta(K_I - K) \epsilon_{\lambda \mu}$$

y $\epsilon_{\lambda \mu}$ es el tensor antisimétrico de Levi-Civita:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} = 0 & \epsilon_{12} = 1 \\ \epsilon_{21} = -1 & \epsilon_{22} = 0 \end{pmatrix}$$

(El paquete de dos fotones resultante de la desintegración del positronio en su estado $\bar{1}S$ se obtendría sumando sobre las energías con la función de peso $f(K)$.)

Campo asociado en el espacio x -tiempo de configuraciones.

Estamos ahora en condiciones de calcular la particular expresión escrita en el espacio x -tiempo de configuraciones asociada al campo cuántico en cuestión; ésta según vimos estaba dada por la expresión (114), a saber:

$$\vec{A}_{AGS} = \text{cte.} \sum_{K_I, K_{II}} \left(\frac{\hbar^2}{4c^2 K_I K_{II}} \right)^{\frac{1}{2}} \vec{\epsilon}_{K_I} \vec{\epsilon}_{K_{II}} L(\vec{K}_I, \vec{K}_{II}) e^{i(\vec{K}_I \vec{R}_I - K_I ct_I)} \cdot e^{i(\vec{K}_{II} \vec{R}_{II} - K_{II} ct_{II})} \quad ///$$

///

reemplazando en esta, las amplitudes $L(\vec{K}_I, \vec{K}_{II})$ dadas por la expresión (120) tendremos:

$$\vec{A}_{ass=cte.} = \frac{f(K)}{K} e^{-iKc(t_I+t_{II})} \sum_{(direc.)} (\vec{\epsilon}_{K_{I1}} \vec{\epsilon}_{K_{II2}} - \vec{\epsilon}_{K_{I2}} \vec{\epsilon}_{K_{II1}}) e^{i(\vec{K}_I \vec{R}_I + \vec{K}_{II} \vec{R}_{II})} \delta(\vec{K}_I + \vec{K}_{II})$$

donde la suma se extiende únicamente sobre las direcciones;

llamando $\vec{K}_I = -\vec{K}_{II} = \vec{K}$ podemos explicitar:

$$\vec{A}_{ass=cte.} = \frac{f(K)}{K} e^{-iKc(t_I+t_{II})} \sum_{(direcciones)} \left\{ (\vec{\epsilon}_{K_1} \vec{\epsilon}_{-K_2} - \vec{\epsilon}_{K_2} \vec{\epsilon}_{-K_1}) e^{i\vec{K}(\vec{R}_I - \vec{R}_{II})} + (\vec{\epsilon}_{-K_1} \vec{\epsilon}_{K_2} - \vec{\epsilon}_{-K_2} \vec{\epsilon}_{K_1}) e^{-i\vec{K}(\vec{R}_I - \vec{R}_{II})} \right\}$$

donde los subíndices (1) en $\vec{\epsilon}_{K_1}$ indican polarizaciones.-

Introduciendo ahora formalmente los

cuadrivectores siguientes del espacio de Minkowski

$$(\vec{R}, cT) = \frac{1}{2} [(\vec{R}_I, ct_I) + (\vec{R}_{II}, ct_{II})] = \left[\frac{1}{2}(\vec{R}_I + \vec{R}_{II}); \frac{1}{2}c(t_I + t_{II}) \right]$$

$$(\vec{\rho}, c\mathcal{L}) = [(\vec{R}_I, ct_I) - (\vec{R}_{II}, ct_{II})] = \left[(\vec{R}_I - \vec{R}_{II}); c(t_I - t_{II}) \right]$$

$$(\vec{K}, E_K/hc) = [(\vec{K}_I, K_I) + (\vec{K}_{II}, K_{II})] = \left[(\vec{K}_I + \vec{K}_{II}); (K_I + K_{II}) \right]$$

$$(\vec{\mathcal{L}}, E_{\mathcal{L}}/hc) = \frac{1}{2} [(\vec{K}_I, K_I) - (\vec{K}_{II}, K_{II})] = \left[\frac{1}{2}(\vec{K}_I - \vec{K}_{II}); \frac{1}{2}(K_I - K_{II}) \right]$$

donde los dos últimos en nuestro caso particular (Positronio

1S en reposo, $\vec{K}_I = -\vec{K}_{II}$) son tales que:

$$(\vec{K}, E_K/hc) = (0, 2K) \quad (\vec{\mathcal{L}}, E_{\mathcal{L}}/hc) = (\vec{K}, 0)$$

Pues bien, introduciendo estos en la expresión anterior A_{ass}

tendremos:

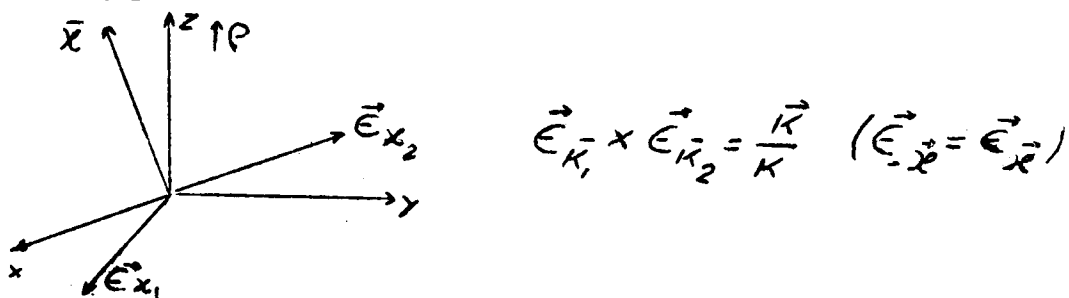
$$A_{ass} = cte. \frac{f(\vec{\mathcal{L}})}{\mathcal{L}} e^{-iE_K T/h} \sum_{\vec{\mathcal{L}}} \vec{T}_{12}(\vec{\mathcal{L}}) (e^{i\vec{\mathcal{L}}\vec{\rho}} - e^{-i\vec{\mathcal{L}}\vec{\rho}}) \quad (121)$$

donde $\vec{T}_{12}(\vec{\mathcal{L}})$ es el tensor antisimétrico en polarizaci-

////nes siguiente

$$\vec{\Pi}_{12}(\vec{x}) = (\vec{E}_{\vec{x}_1} \vec{E}_{\vec{x}_2} - \vec{E}_{\vec{x}_2} \vec{E}_{\vec{x}_1}) = -\vec{\Pi}_{21}(\vec{x})$$

Dado que cualquiera sea el sistema genérico de coordenadas (xyz) tenemos:



Podremos usar este hecho para poner:

$$\vec{\Pi}_{12}^{ij} = (\vec{E}_{\vec{x}_1}^i \vec{E}_{\vec{x}_2}^j - \vec{E}_{\vec{x}_2}^j \vec{E}_{\vec{x}_1}^i) = (\vec{E}_{\vec{x}_1} \times \vec{E}_{\vec{x}_2})^{ij} = \frac{\kappa^k}{\kappa} \epsilon_{ijk}$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor completamente antisimétrico de tercer orden tal que:

$$\epsilon_{ijk} \begin{cases} = 0 & \text{a menos que } i \neq j \neq k \\ = \pm 1 & \text{si } ijk \begin{cases} \text{permutación par de 123 (signo +)} \\ \text{permutación impar de 123 (signo -)} \end{cases} \end{cases}$$

En estas condiciones, tendremos para cada una de las componentes del tensor (121) la expresión genérica siguiente:

$$A_{\text{ass}}^{(ij)} = \text{cte.} \frac{f(x)}{x} e^{-iE_{\kappa} T/\hbar} \sum_{\vec{x}} \epsilon_{ijk} \frac{x^k}{x} (e^{i\vec{x}\vec{\rho}} - e^{-i\vec{x}\vec{\rho}}) \quad (122)$$

Podemos proceder ahora a la suma sobre las direcciones; considerando que,

$$\text{donde } \sum_{\vec{x}} \text{(direcciones)} = \text{cte} \int d\Omega_{\vec{x}}$$

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\vec{x}\vec{\rho} = x\rho \cos \theta$$

y tendremos después de efectuadas las operaciones y englobando constantes irrelevantes:

$$A_{\text{ass}}^{(ij)} = \text{cte.} \frac{f(x)}{x} e^{-iE_{\kappa} T/\hbar} \left(\frac{\cos x\rho}{x\rho} - \frac{\sin x\rho}{(x\rho)^2} \right) \frac{\rho^k}{\rho} \epsilon_{ijk}$$

o bien, explicitando en forma matricial todas las componentes:

$$\vec{A}_{ass} = cte. \frac{f(x)}{x} e^{-iE_{IK}T/\hbar} \left(\frac{\cos xP}{xP} - \frac{\text{sen} xP}{(xP)^2} \right) \begin{vmatrix} 0 & P^3/e & -P^2/e \\ -P^3/e & 0 & P^2/e \\ P^2/e & -P^2/e & 0 \end{vmatrix} \quad (123)$$

donde

$$E_{IK} = 2\hbar c K$$

$$\mathcal{E} = K$$

$$P = |R_I - R_{II}| ; P^i = x_I^i - x_{II}^i$$

Conclusiones:

La expresión A representa un tensor antisimétrico en el espacio - tiempo.

Debido a la elección particular del sistema de referencia (centro de gravedad en reposo) este tensor tiene solamente componentes espaciales no nulas. Una simple transformación de Lorentz nos permite escribir el tensor en un sistema de referencia inercial arbitrario.

$$\vec{A} \equiv \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & 0 & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & 0 & A_{34} \\ -A_{41} & A_{42} & A_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

En el sistema de referencia privilegiado (centro de gravedad en reposo) notamos que el tensor \vec{A} está dado por un producto de dos términos, uno de los cuales

$$e^{-iE_{IK} T/\hbar} = e^{-2iKcT}$$

depende solamente de las coordenadas del centro de gravedad del sistema $T = (t_I + t_{II})^{\frac{1}{2}}$ mientras que el otro depende de las coordenadas relativas espaciales $P = (R_I - R_{II})$.

El factor $e^{-iE_{IK} T/\hbar}$ es análogo a una onda de Broglie de centro de gravedad del sistema, mientras que el otro factor describe la

/// estructura interna del sistema.

Después de una transformación, si bien la separación en dos factores se mantiene, el tensor \vec{A}' transformado dependerá de las coordenadas R', T', ρ', z'

$$T' = \frac{1}{2} (t'_I + t'_{II})$$

$$\vec{R}' = \frac{1}{2} (\vec{R}'_I + \vec{R}'_{II})$$

$$\vec{\rho}' = (\vec{R}'_I - \vec{R}'_{II})$$

$$z' = (t'_I - t'_{II})$$

Notamos, en particular, que aparece el "tiempo relativo" que permite expresar que observando los fotones individualmente, aparecerá para cada uno de ellos el efecto Doppler.

-----oooooooo-----

Veremos ahora, por medio del caso tratado, en que forma esta representación nos permite describir y visualizar en el espacio-tiempo la propagación de los fotones (varios fotones en un caso más general).

Así con la ayuda del tensor (123), que como vimos nos describe a dos fotones libres con las características recientemente estudiadas; consideraremos someramente los siguientes ejemplos:-

i) La emisión espontánea de dos fotones tal como ocurre en la desintegración del positronio en su estado 1S (centro de gravedad en reposo). Como dijimos, deberemos proceder en la (123) a la suma sobre las energías en la zona del ancho de línea; así proponiendo para la función densidad espectral $f(\kappa)$, la forma simple adoptada por Weisskopf y Wigner para la emisión espontánea ($f(\kappa) = \frac{g(\kappa)}{\kappa - \kappa_0 + i\gamma/2c}$) tendremos que la luz emitida en la desintegración del positronio en su estado 1S ($\vec{P} = 0$) estará directamente descrita por la parte emergente ("outgoing") de la (123); a saber:

$$A_{\text{ass}}(\text{Posit. } ^1S) = \text{cte.} \left(1 - \frac{1}{(K_0 - \frac{1}{2}i\gamma/c)\rho} \right) \cdot \frac{e^{-i(K_0 - \frac{1}{2}i\gamma/c)(\rho - 2cT)}}{\rho^2}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \rho^3 & -\rho^2 \\ -\rho^3 & 0 & \rho' \\ \rho^2 & -\rho' & 0 \end{vmatrix} \quad (124)$$

/// ii) La Difusión de Luz por Luz (+)

Si consideramos ahora dos ondas planas (describiendo a dos fotones libres) de polarización ortogonal, en su sistema de centro de gravedad; es decir dadas sus componentes parciales por una suma del tipo (122). Teniendo presente la interacción de los fotones por intermedio de la producción virtual de pares (++), se producirá un desfase de las ondas, y las que contribuyen principalmente a la interacción serán:

$$A_{\text{ass}} = \text{cte.} e^{-iE_{\mathbf{K}T}/\hbar} \left(\frac{\cos(K\rho + \delta(K))}{K\rho} - \frac{\sin(K\rho + \delta(K))}{(K\rho)^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \rho^3 & -\rho^2 \\ -\rho^3 & 0 & \rho' \\ \rho^2 & -\rho' & 0 \end{pmatrix} \quad (125)$$

(Recordar las nociones elementales de la teoría de colisiones).

Como vemos en estas condiciones, la función \vec{A}_{ass} , no representa ya una función regular en el origen. Las fases $\delta(K)$ determinan la matriz S de la interacción entre fotones y fijan el tamaño de la sección de choque.

Del cálculo de las secciones eficaces sabemos que las fases $\delta(K)$ son en general extremadamente pequeñas. Sin embargo, como sabemos que, debido a la interacción culombiana de los pares, existen, en ciertos estados del positronio resonancias de ancho espectral muy estrecho; en estos dominios las fases $\delta(K)$ deben variar muy rápidamente, pudiendo adoptar valores próximos a $(n + \frac{1}{2})\pi$, conduciendo así a un estado intermedio real. -

(+) H. Euler, Ann. Phys. 26(1936), 398

(++) J. MacConnell Proc. Roy. Ir. Ac. 49(1943) 149

(+++) O.W. Heitler. loc. cit. pag. 326.

APENDICE I

(a) Con un campo clásico que incluya frecuencias positivas y negativas podemos formular una condición de causalidad en la forma siguiente: "Ninguna señal puede propagarse con velocidad mayor que c". En efecto para fijar ideas consideremos un campo clásico con un frente de onda perfectamente definido, por ejemplo un paquete deltiforme del tipo:

$$\begin{aligned}
 A_x &= \delta(z-ct) \\
 A_y &= 0 \\
 A_z &= 0
 \end{aligned}
 \quad \text{es decir:}
 \quad \vec{E} = -1/c \dot{A}
 \quad \vec{H} = \text{rot.} \vec{A}
 \quad \left\{ \begin{aligned} E_x &= \delta'(z-ct) \\ E_y &= 0 \\ E_z &= 0 \\ H_x &= 0 \\ H_y &= \delta'(z-ct) \\ H_z &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1/I)$$

determinaremos luego en primer orden del cálculo corriente de perturbaciones la amplitud de probabilidad

$$b_T^*$$

en función del tiempo y de la posición, para que un átomo T (ubicado en R_T) inicialmente en el estado fundamental T pase al estado excitado T^* por la acción del campo propuesto.-

La determinación de b_T^* ($t; R_T$) corresponde a una medición físicamente realizable del campo.-

Aunque no sea necesario para nuestro cálculo, procederemos (con el objeto de mostrar la influencia de la existencia del rango completo de frecuencias) a expresar el campo (1I) en la forma convencional.-

$$\vec{A} = \sum_{K_\lambda} \left\{ \alpha_{K_\lambda} \vec{A}_{K_\lambda} e^{-i\omega_K t} + \alpha_{K_\lambda}^* \vec{A}_{K_\lambda}^* e^{i\omega_K t} \right\} \quad \omega_K = +/K/c$$

donde $\vec{A}_{K_\lambda} = \vec{e}_{K_\lambda} (4\pi c^2/L^3)^{1/2} (k/2\omega_K)^{1/2} e^{i\vec{K}R}$

Para obtener las amplitudes α_{K_λ} pongamos las dos condiciones iniciales:

$$\vec{E}(\vec{R}, 0) = j_x \delta'(z) = \sum (\alpha_{K_\lambda} \vec{E}_{K_\lambda} + \alpha_{K_\lambda}^* \vec{E}_{K_\lambda}^*)$$

(Ap. I/2)

$$\vec{H}(\vec{R}, 0) = j_y \delta'(z) = \sum (\alpha_{K_\lambda} \vec{H}_K + \alpha_{K_\lambda}^* \vec{H}_{K_\lambda}^*)$$

donde: $\vec{E}_{K_\lambda} = 1/c \vec{E}_{K_\lambda} (4\pi c^2/L^3)^{1/2} (\hbar/2\omega_K)^{1/2} e^{i\vec{K}\vec{R}}$

$$\vec{H}_{K_\lambda} = i(\vec{K} \times \vec{E}_{K_\lambda}) (4\pi c^2/L^3)^{1/2} (\hbar/2\omega_K)^{1/2} e^{i\vec{K}\vec{R}}$$

Haciendo ahora uso de la ortogonalidad de estas funciones

$$1/L^3 \int_{-L/2}^{+L/2} \int \int e^{i(\vec{K} - \vec{K}') \cdot \vec{R}} d\tau = \delta_{\vec{K}\vec{K}'}, \quad (K_x = \frac{2\pi n_x}{L})$$

obtenemos inmediatamente

$$1/4\pi \int_V (\vec{E}_K \vec{E}_{K'}^* + \vec{H}_K \vec{H}_{K'}^*) d\tau = \hbar \omega_K \delta_{\vec{K}\vec{K}'}$$

usando esta y las cond. iniciales podemos escribir:

$$\alpha_{K_\lambda} \hbar \omega_K = 1/4\pi \int (\vec{E}(\vec{R}, 0) \vec{E}_{K_\lambda}^* + \vec{H}(\vec{R}, 0) \vec{H}_{K_\lambda}^*) d\tau$$

reemplazando en la integral la forma explícita de $\vec{E}(\vec{R}, 0)$ y

$\vec{H}(\vec{R}, 0)$ junto con $\vec{E}_{K_\lambda}^*$ y $\vec{H}_{K_\lambda}^*$ tenemos:

$$\alpha_K \hbar \omega_K = -i/4\pi (4\pi c^2/L^3)^{1/2} \left\{ 1/c(\vec{E}_K \cdot \vec{j}_x) (\hbar\omega_K/2)^{1/2} + ((\vec{K} \times \vec{E}_K) \cdot \vec{j}_y) (\hbar/2\omega_K)^{1/2} \right\} \int e^{-i\vec{K}\vec{R}} \delta'(z) d\tau$$

ahora bien integrando por partes podemos ver que

$$\int f \delta' dz = - \int \delta f' dz$$

entonces

$$\alpha_K \hbar \omega_K = \frac{1}{4\pi} (4\pi c^2/L^3)^{1/2} \left\{ 1/c(\vec{E}_K)_x (\hbar\omega_K/2)^{1/2} + (\vec{K} \times \vec{E}_K)_y (\hbar/2\omega_K)^{1/2} \right\} K_z \int \delta(z) e^{-i\vec{K}\vec{R}} d\tau$$

calculando explícitamente la integral tenemos:

$$\int \delta(z) e^{-i\vec{K}\vec{R}} d\tau = L^2 \delta_{K_x, 0} \delta_{K_y, 0}$$

entonces

$$\alpha_K \hbar \omega_K = \frac{L^2}{4\pi} \left(\frac{4\pi c^2}{L^3} \right)^{1/2} \left\{ 1/c \left(\frac{\hbar\omega_K}{2} \right)^{1/2} + K_z \left(\frac{\hbar}{2\omega_K} \right)^{1/2} \right\} K_z (\vec{E}_K)_x =$$

entonces:

$$\alpha_K = \frac{L^2}{4\pi} (4\pi c^2/L^3)^{1/2} (\hbar/2\omega_K)^{1/2} \frac{1}{\hbar\omega_K} \left(\frac{\omega_K}{c} \right)^2 \left(\frac{K_z}{|k_z|} + 1 \right)$$

pues $\omega_K/c = |K_z|$

//

///

tenemos la siguiente forma explícita para cada componente del campo

$$\alpha_K \vec{A}_K = \vec{j}_x / 2L (1 + K_z / |K|) e^{iK_z Z}$$

Nuestro campo expresado en la forma habitual tiene entonces la

$$\begin{aligned} \text{forma: } A_x = \int \delta(z-ct) &= 1/L \sum_{K=-\infty}^{\infty} e^{iK_z(Z-ct)} = \\ &= 1/2L \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ (K_z/|K| + 1) e^{i(K_z Z - K_z/ct)} + (K_z/|K| + 1) e^{-i(K_z Z - K_z/ct)} \right\} \end{aligned} \quad (2/I)$$

donde el primer y segundo sumando representan la contribución de las frecuencias positivas y negativas respectivamente.

Consideremos entonces el cálculo de b_T^* con $A = j_x \int \delta(z-ct)$

$$\text{tenemos } i\hbar \dot{b}_T^x = H_T^x / T b_T(0) e^{iE_T t/\hbar} \quad \text{con } \begin{cases} b_T(0) = 1 \\ b_T^*(0) = 0 \end{cases}$$

donde

$$H_T^x / T = -e \int \phi_T^* \alpha \cdot \vec{j}_x \delta(z-ct) \phi_T dz$$

entonces

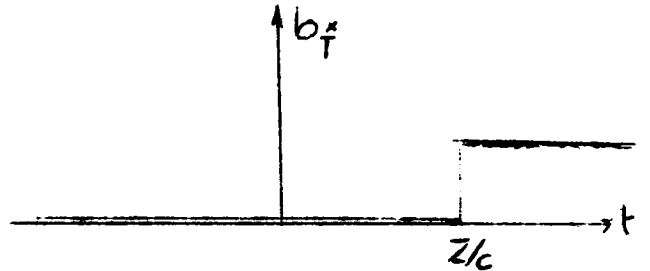
$$b_T^x(t) = -e/i\hbar \int_0^t \left[\int \phi_T^* \alpha \cdot \vec{j}_x \delta(z-ct') \phi_T dz \right] e^{iE_T t'/\hbar} dt'$$

cambiando el orden de las integraciones tenemos:

$$b_T^x(t) = -e/i\hbar \int dz \int_0^t \phi_T^* \alpha \cdot \vec{j}_x \delta(z-ct') \phi_T e^{iE_T t'/\hbar} dt'$$

entonces

$$(b) \quad b_T^x(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < Z/c \\ e^{iE_T Z/\hbar c} \left\{ -e/i\hbar \int \phi_T^* \alpha \cdot \vec{j}_x e^{iE_T z/\hbar c} dz \right\} & \text{para } t \geq Z/c \end{cases}$$



expresando gráficamente este resultado vemos claramente nuestra aserción inicial.-

-----000000-----

///

b) Si consideramos ahora un campo clásico que incluya sólo frecuencias positivas, no podremos formular la condición de causalidad en términos de un paquete incidente con un frente perfectamente definido ($A = 0$ para $t < t_0$) puesto que tal paquete no es posible construirlo debido al rango incompleto de frecuencias (0 a ∞); incluso podemos agregar que A no puede ser nulo en ningún intervalo de tiempo por pequeño que este sea. (x) Para el caso de un rango acotado de frecuencias (como caso particular) tenemos que la transformada de Fourier de un función de soporte acotado, no puede ser una función de soporte acotado salvo que sea la función idénticamente nula. Podemos en este respecto aclarar las ideas considerando un caso particular, por ejemplo, la parte de frecuencias positivas del campo deltiforme antes estudiado

$$A = \vec{j}_x / 2L \sum_{-\infty}^{+\infty} (K_z / |K_z| + 1) e^{i(K_z Z - |K_z|/ct)} \quad (4/I)$$

 Puede verse de inmediato, expresando (4I) en la forma

$$\vec{A} = \vec{j}_x / L \sum_0^{\infty} e^{iK_z(Z-ct)}$$

y pasando al espectro continuo con $dK = 2\pi/L \cdot dn$ que:

$$A = j_x / 2\pi \int_0^{\infty} e^{iK_z(Z-ct)} dK_z = \mathcal{D}^+(Z-ct) = \frac{1}{2} \mathcal{D}(Z-ct) + 1/2\pi i \frac{P}{(Z-ct)} \quad (5_I)$$

esta distribución representa la transformada de Fourier de la función de Heaviside

$$H(K_z) = \begin{cases} 0 & \text{para } K_z < 0 \\ 1 & \text{" } K_z > 0 \end{cases}; \quad \text{cuyo soporte es el semieje positivo.}$$

Análogamente podemos mostrar que la parte de frecuencias negativas de

$$A = \vec{j}_x / 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} (K_z / |K_z| + 1) e^{-i(K_z Z - |K_z|/ct)}$$

 (x) Ver H.M. Nussenzveig - "Analytic Properties of Non-Relativistic Scattering Amplitudes" pag. 48 - 49 Escuela Latinoamericana de Física 1962.

/// representa la distribución

$$\tilde{\delta}(Z-ct) = \frac{1}{2} \delta(Z-ct) - \frac{1}{2} \pi i \frac{P}{(Z-ct)}$$

Repetiremos el ejercicio anterior ahora con el campo (5_I) .

Procediendo analogamente al caso anterior podemos poner:

$$b_T^{(*)}(t) = -e/i\hbar \int_0^t \left\{ \int \phi_T^* \vec{\alpha} \cdot \vec{j}_x \tilde{\delta}(Z-ct') \phi_T dZ \right\} e^{iE_T t'/\hbar} dt'$$

introduciendo la expresión integral de $\tilde{\delta}(Z-ct)$ e intercambiando el orden de las integraciones:

$$\begin{aligned} b_T^{(*)} &= -e/i\hbar \int \phi_T^* \vec{\alpha} \cdot \vec{j}_x \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dK_z \int_0^t e^{iK_z(Z-ct')} e^{iE_T t'/\hbar} dt' \right] \phi_T dZ \\ &= -e/i \int \phi_T^* \vec{\alpha} \cdot \vec{j}_x \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dK_z e^{iK_z Z} \frac{e^{i(E_T - K_z c t) t/\hbar} - 1}{i(E_T - \hbar c K_z)} \right] \phi_T dZ \\ &= -e/i \int \phi_T^* \vec{\alpha} \cdot \vec{j}_x \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dK_z \dots \dots \dots \right] \phi_T dZ + \\ &+ e/i \int \phi_T^* \vec{\alpha} \cdot \vec{j}_x \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 dK_z \dots \dots \dots \right] \phi_T dZ \end{aligned}$$

Donde el primer sumando representa $b_T^{(*)}$ lo que puede comprobarse de inmediato calculando la integral por residuos,

entonces:-

$$b_T^{(*)} = b_T^{(S)}(t) + e/i \int \phi_T^* \vec{\alpha} \cdot \vec{j}_x \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 dK_z \frac{e^{iK_z(Z-ct)}}{i(E_T - \hbar c K_z)} e^{iE_T t/\hbar} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{iK_z Z}}{i(E_T - \hbar c K_z)} dK_z \right] \phi_T dZ$$

cambiando de variables K_z a $-K_z$ podemos poner:

$$b_T^{(*)}(t) = b_T^{(S)}(t) + e/i \int \phi_T^* \vec{\alpha} \cdot \vec{j}_x \left[-\frac{e^{iE_T t/\hbar}}{2\pi} \int_0^\infty dK_z \frac{e^{-iK_z(Z-ct)}}{i(E_T + \hbar c K_z)} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-iK_z Z}}{i(E_T + \hbar c K_z)} \right] \phi_T dZ$$

considerando que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-iK_z Z}}{(E_T + \hbar c K_z)} dK_z = -1/iZ \int_0^\infty \frac{de^{-iK_z Z}}{(E_T + \hbar c K_z)}$$

e integrando por partes en forma

////iterada obtenemos:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-iKz}}{(E_T + \hbar c K_z)} dz = \frac{1}{iZE_T} + \frac{\hbar c}{(ZE_T)^2} + \frac{2(\hbar c)^2}{i(ZE_T)^3} + \dots$$

entonces, limitándonos sólo a la potencias menores de E_T

$$b_T^{(+)}(t) = b_T^{(+)}(t) + e/i \int_0^z \phi_T^* \vec{\alpha} \cdot \vec{j}_x \left[\frac{-e^{iE_T t/\hbar}}{2\pi i} \left(\frac{1}{i(Z-ct)E_T} \right) + \frac{1}{2\pi i} \right. \\ \left. \cdot \left(\frac{1}{iZE_T} \right) \right] \phi_T dz$$

Considerando un tiempo $t = \xi$ infinitesimal de modo que

$$ct \ll Z$$

$$b_T^{(+)}(\xi) = 0 - e/i2\pi \cdot \left(\frac{1 - e^{iE_T \xi/\hbar}}{E_T} \right) \int \phi_T^* \vec{\alpha} \cdot \vec{j}_x \frac{1}{Z} \phi_T dz$$

que muestra que:

$$b_T^{(+)}(0) = 0 \quad \text{cond. inicial} \quad (6 I)$$

$$b_T^{(+)}(\xi) \neq 0 \quad \text{donde } \xi \ll Z/c$$

APENDICE II (1ª. Parte)

CALCULO DE \vec{A}_{ass} .

Partiremos de su desarrollo de Fourier

$$\vec{A}_{ass} = (4\pi c^2 / L^3)^{\frac{1}{2}} \sum_{K_\lambda} \epsilon_{K_\lambda} (\hbar/2Kc)^{\frac{1}{2}} b_{AK_\lambda}(t) e^{i(\vec{K}\vec{R} - Kct)} \quad (1/II)$$

donde

$$b_{AK_\lambda}(t) = H_{AK}^{A^x} \frac{1 - e^{i(\epsilon_K - \epsilon_A + \frac{1}{2}\hbar\gamma_A)t/\hbar}}{(\epsilon_K - \epsilon_A + \frac{1}{2}\hbar\gamma_A)} = H_{AK}^{A^x} g(\epsilon_K, t)$$

siendo en la aprox. N.R. (considerando sólo los términos dipolares)

$$H_{AK}^{A^x} = -e/m (1/L^3)^{\frac{1}{2}} (2\hbar/kc)^{\frac{1}{2}} \langle \phi_A^* \epsilon_{K_\lambda} e^{i\vec{K}\vec{r}} \phi_A \rangle = \quad (2 II)$$

$$= ie(2\pi\hbar c/L^3 K)^{\frac{1}{2}} \langle \vec{r}_A \cdot \vec{\epsilon}_{K_\lambda} \rangle K_A$$

Llamando a

$$e\vec{r}_A = \vec{P}_A \quad \text{"momento dipolar", tendremos:..}$$

$$A_{ass} = i \frac{2\pi\epsilon_A}{L^3} \sum_K \frac{g(\epsilon_K)}{K} e^{i(\vec{K}\vec{R} - Kct)} \left[\sum_{\lambda=1,2} \vec{\epsilon}_{K_\lambda} (\vec{\epsilon}_{K_\lambda} \cdot \vec{P}_A) \right]$$

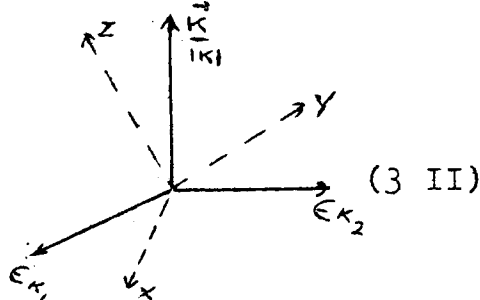
$$= i 2\pi\epsilon_A / L^3 \sum_K \frac{g(\epsilon_K)}{K} e^{i \dots} \left[\sum_{\lambda} \vec{\epsilon}_{K_\lambda} (\epsilon_{K_\lambda}^x P^x + \epsilon_{K_\lambda}^y P^y + \epsilon_{K_\lambda}^z P^z) \right]$$

entonces

$$A_{ass}^x = i \frac{2\pi\epsilon_A}{L^3} \sum_K \frac{g(\epsilon_K)}{K} e^{i \dots} \left[P_A^x \sum_{\lambda=1,2} \epsilon_{K_\lambda}^x \epsilon_{K_\lambda}^x + P_A^y \sum_{\lambda=1,2} \epsilon_{K_\lambda}^y \epsilon_{K_\lambda}^x + P_A^z \sum_{\lambda=1,2} \epsilon_{K_\lambda}^z \epsilon_{K_\lambda}^x \right]$$

Haciendo uso de las siguientes relaciones:(1)

$$\sum_{\lambda=1,2} \epsilon_{K_\lambda}^s \epsilon_{K_\lambda}^{s'} = \delta_{ss'} - \frac{K_s K_{s'}}{K^2}$$



(3 II)

(1) Ver L. Schiff "Quantum Mechanics" McGraw-Hill - Sec.ed. Pag. 379

podemos poner:

$$A_{ass}^x = i \frac{2\pi \epsilon_0 \Delta}{L^3} \sum_K \frac{g(\epsilon_K)}{K} e^{i(\vec{K}\vec{R}-Kct)} \left\{ P_A^x \left(1 - \frac{K_x^2}{K^2}\right) - P_A^y \frac{K_x K_y}{K^2} - P_A^z \frac{K_x K_z}{K^2} \right\}$$

$$= i \frac{2\pi \epsilon_0 \Delta}{L^3} \left\{ \sum_K P_A^x \frac{g(\epsilon_K)}{K} e^{i\dots} - \sum_K \frac{(\vec{P}_A \cdot \vec{K})}{K^2} K_x \frac{g(\epsilon_K)}{K} e^{i\dots} \right\}$$

Es decir:

$$\vec{A}_{ass} = i \frac{2\pi \epsilon_0 \Delta}{L^3} \left\{ \vec{P}_A \sum_K \frac{g(\epsilon_K)}{K} e^{i\dots} - \sum_K \frac{(\vec{P}_A \cdot \vec{K})}{K^2} \vec{K} \frac{g(\epsilon_K)}{K} e^{i\dots} \right\}$$

(4_{II})

$$= i \frac{2\pi \epsilon_0 \Delta}{L^3} \left\{ \vec{P}_A \sum_K \frac{g(\epsilon_K)}{K} e^{i\dots} + \text{grad}_R \text{div}_R \sum_K \frac{\vec{P}_A}{K^2} \frac{g(\epsilon_K)}{K} e^{i(\vec{K}\vec{R}-Kct)} \right\}$$

 Para el cálculo siguiente podemos dejar de lado el segundo término. Podemos ver de una manera muy simple comparando con los desarrollos análogos para el caso de un dipolo eléctrico lineal (similar clásico del átomo emisor A) que esta elección es equivalente a considerar la medida de Lorentz para el potencial; en cambio considerar ambos términos es equivalente a calcular en Coulomb gauge.-

En efecto, si consideramos el dipolo eléctrico lineal situado en el origen que vibra en una dirección fija arbitraria; tal dipolo estará caracterizado por su polarización eléctrica

$$\vec{P}(r, t) = \vec{p}(t) \delta(r)$$

El campo de este dipolo es obtenible en función de los potenciales escalar y vectorial por medio de las conocidas relaciones

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} \quad \vec{E} = -1/c \dot{\vec{A}} - \text{grad. } \phi$$

y los potenciales satisfacen las ecuaciones siguientes:

a) Medida de Lorentz	b) Medida de Coulomb //
$\nabla^2 \vec{A}_L - 1/c^2 \ddot{\vec{A}}_L = -4\pi/c \vec{J}$	$\nabla^2 \vec{A}_C - 1/c^2 \ddot{\vec{A}}_C = -4\pi/c \vec{J} + \text{grad} 1/c \phi_C$
$\nabla^2 \phi_L - 1/c^2 \ddot{\phi}_L = -4$	$\nabla^2 \phi_C = -4\pi \rho$
$\text{div. } \dot{\vec{A}}_L + 1/c \dot{\phi}_L = 0$	$\text{div. } \dot{\vec{A}}_C = 0$

////

donde:

$$\vec{J} = \dot{\vec{P}} = \dot{\vec{p}}(t) \delta(r) \quad (+)$$

(+)

$$\rho = -\text{div } \vec{P} = -\dot{\vec{p}}(t) \cdot \text{grad } \delta(r)$$

Mediante un desarrollo en serie de Fourier podemos comparar las amplitudes espectrales correspondientes, en ambas medidas.-

Con ese fin pongamos:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \int C(K_0) e^{-iK_0 ct} dK_0 \quad \delta(\vec{r}) = \int e^{i\vec{K}\vec{r}} d^3K$$

entonces

$$-4\pi\rho = 4\pi i \iint (\vec{p}_0 \cdot \vec{K}) C(K_0) e^{i(\vec{K}\vec{r} - K_0 ct)} d\vec{K} dK_0$$

$$-\frac{4\pi}{c} \vec{J} = 4\pi i \iint \vec{p}_0 K_0 C(K_0) e^{i(\vec{K}\vec{r} - K_0 ct)} d\vec{K} dK_0 \quad (6 \text{ II})$$

a) Medida de Lorentz

$$\phi_L(\vec{r}, t) = \iiint \phi_L(\vec{K}, K_0) e^{i(\vec{K}\vec{r} - K_0 ct)} d\vec{K} dK_0$$

$$\vec{A}_L(\vec{r}, t) = \iiint \vec{a}_L(\vec{K}, K_0) e^{i(\vec{K}\vec{r} - K_0 ct)} d\vec{K} dK_0$$

puesto que

$$\nabla^2 \phi_L - 1/c^2 \ddot{\phi}_L = \iint (K_0^2 - K^2) \phi_L(\vec{K}, K_0) e^{i(\dots)} d\vec{K} dK_0 = -4\pi\rho \quad (7 \text{ II})$$

$$\nabla^2 \vec{A}_L - 1/c^2 \ddot{\vec{A}}_L = \iint (K_0^2 - K^2) \vec{a}_L(\vec{K}, K_0) e^{i(\dots)} d\vec{K} dK_0 = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

comparando (6II) y (7II) vemos que

$$\phi_L(\vec{K}, K_0) = \frac{4\pi i}{K_0^2 - K^2} (\vec{p}_0 \cdot \vec{K}) C(K_0)$$

$$\vec{a}_L(\vec{K}, K_0) = \frac{4\pi i}{K_0^2 - K^2} \vec{p}_0 K_0 C(K_0) \quad (8 \text{ II})$$

(1) Ver Bor and Wolt "Optics" pag. 75 y sig.

///

//// b) Medida de Coulomb

$$\vec{\nabla}^2 \rho_C = - \iint K^2 \varphi_C(\vec{K}, K_0) e^{i(\vec{K}\vec{r} - K_0 ct)} d\vec{K} dK_0 = -4\pi\rho \quad (9II)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}_C - 1/c^2 \ddot{\vec{A}}_C = \iint (K_0^2 - K^2) \vec{a}_C(\vec{K}, K_0) e^{i\dots} d\vec{K} dK_0 = -4\pi \vec{J}/c + \text{grad. } 1/c \varphi_C$$

comprando (9 II) y 6II) vemos que

$$\begin{aligned} \varphi_C(\vec{K}, K_0) &= -\frac{4\pi i}{K^2} (\vec{p}_0 \cdot \vec{K}) C(K_0) \\ \vec{a}_C(K, K_0) &= \vec{a}_L(K, K_0) + \frac{\vec{K}}{(K_0^2 - K^2)} K_0 \varphi_C(\vec{K}, K_0) \\ &= \vec{p}_0 \frac{4\pi i}{(K_0^2 - K^2)} K_0 C(K_0) - \frac{(\vec{p}_0 \cdot \vec{K})}{K^2} \cdot \vec{K} \frac{4\pi i}{(K_0^2 - K^2)} K_0 C(K_0) \end{aligned}$$

Comparando esta expresión con la (4II) podemos observar la estrecha analogía existente y además nos deja en condiciones de interpretar cada uno de los términos:-

Pués bién considerando sólo el primer término (con ambos términos podemos ver directamente de la expresión (1II) que se cumple $\text{div. } \vec{A}_{\text{ass}} = 0$), y dado que:

$$\rho_K = (L/2\pi)^3 K^2 dK d\Omega \quad \varepsilon_K = \hbar c K = \hbar \omega_K$$

tendremos

$$\vec{A}_{\text{ass}}^{(L)} = i \frac{\varepsilon_A}{(2\pi)^2} \vec{p}_A \iiint_0^{2\pi} \frac{g(\varepsilon_K)}{K} e^{i(KR \cos \theta - Kct)} K^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi$$

efectuando la integración en φ y llamando

$$G(\varepsilon_K, t) = g(\varepsilon_K, t) e^{-iKct} = \frac{e^{-i\varepsilon_K t/\hbar} - e^{-i(\varepsilon_A - i\hbar \gamma_A) t/\hbar}}{(\varepsilon_K - \varepsilon_A + \frac{1}{2} i \hbar \gamma_A)}$$

tendremos

$$\begin{aligned} \vec{A}_{\text{ass}}^{(L)} &= \frac{i \varepsilon_A}{2\pi^2} \cdot \vec{p}_A \int_0^\pi G(\varepsilon_K, t) K e^{iKR \cos \theta} \sin \theta d\theta dK \\ \text{puesto que} & \quad -\frac{1}{iR} \frac{d}{d\theta} (e^{iKR \cos \theta}) = K e^{iKR \cos \theta} \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\vec{A}_{\text{ass}}^{(L)} = \varepsilon_A / 2\pi \frac{\vec{p}_A}{R} \int_0^\infty (e^{iKR} - e^{-iKR}) G(\varepsilon_K, t) dK$$

$$\begin{aligned} \vec{A}_{\text{ass}}^{(L)} &= \frac{\varepsilon_A}{2\pi \hbar c} \cdot \frac{\vec{p}_A}{R} \int_0^\infty \frac{e^{-i\varepsilon_K(t/\hbar + R/\hbar c)} + e^{-i\varepsilon_K R/\hbar c} e^{-i(\varepsilon_A - \frac{1}{2} i \hbar \gamma_A) t/\hbar}}{(\varepsilon_K - \varepsilon_A + \frac{1}{2} i \hbar \gamma_A)} + \\ & \quad + \frac{e^{i\varepsilon_K R/\hbar c} e^{-i(\varepsilon_A - \frac{1}{2} i \hbar \gamma_A) t/\hbar} - e^{-i\varepsilon_K(t/\hbar + R/\hbar c)}}{(\varepsilon_K - \varepsilon_A + \frac{1}{2} i \hbar \gamma_A)} d\varepsilon_K \end{aligned}$$

///Dado que la mayor contribución a la integral proviene de un rango muy estrecho de frecuencias alrededor de A , podemos sin error apreciable (pero con las salvedades citadas en el texto) extender la integración a todo el rango de frecuencias. Veremos que en este caso $A_{ass}^{(L)}$ representa un tren de ondas de frente bien definido en $R=ct$. En efecto: integrando por residuos en el semiplano inferior y considerando que el tercer término no contribuye y que el segundo y cuarto término anulan sus contribuciones, tendremos;

$$\vec{A}_{ass}^{(L)} = -\frac{i E_A}{\hbar c} \vec{P}_A \frac{e^{-i(E_A - \frac{1}{2}\hbar\omega_A)(t/\hbar - R/\hbar c)}}{R} H(t-R/c) \quad (10_{II})$$

donde H es la función de Heaviside $\begin{cases} 0 & \text{para } t < R/c \\ 1 & \text{para } t > R/c \end{cases}$

En la medida de Lorentz, un campo clásico satisface la ecuación

$$\nabla^2 A^{(L)} - 1/c^2 \ddot{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

sabemos que una solución particular de esta ecuación es

$$\vec{A}^{(L)}(R, t) = 1/c \int \frac{J(\vec{R}'; t - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{c})}{|\vec{R} - \vec{R}'|} d^3 R' \quad (11_{II})$$

Veremos que nuestro campo satisface una ecuación de este tipo; en efecto retomando la (10_{II}) podemos poner

$$-iE_A/\hbar c \vec{P}_{AA} = -i\frac{E_A}{\hbar c} e \cdot \vec{r}_{AA}^* = -ieE_A/\hbar c \int \phi_A^* \vec{r} \phi_A^* d^3 r = \frac{i\hbar e}{m} \int \phi_A^* \text{grad.} \phi_A^* d^3 r$$

entonces:

$$\vec{A}_{ass}^{(L)} = 1/c \int e (i\hbar/m \phi_A^* \text{grad.} \phi_A^*) \frac{e^{-i(E_A - \frac{1}{2}\hbar\omega_A)(t/\hbar - R/\hbar c)}}{R} d^3 r$$

comparando (12_{II}) y (11_{II}) vemos que

$$\vec{J}(r, t) = e (i\hbar/m \phi_A^*(\vec{r}) \text{grad.} \phi_A^*(\vec{r})) e^{-i(E_A - \frac{1}{2}\hbar\omega_A)t/\hbar} \quad (13_{II})$$

Además es fácil demostrar que se verifica la ecuación

$$\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{si} \quad \rho = e \phi_A^* \phi_A^* e^{-i(E_A - \frac{1}{2}\hbar\omega_A)t/\hbar} \quad (14_{II})$$

///

/// APENDICE II (2ª. Parte)

DENSIDAD DE PROBABILIDAD EN TERMINO DE LOS CAMPOS ASOCIADOS

Vimos que los campos asociados a transiciones cuánticos que involucran un fotón, a saber:

$$\vec{A}_{ass}^{(C)} = (4\pi c^2 / L^3)^{\frac{1}{2}} \sum_{\kappa_\lambda} \epsilon_{\kappa_\lambda} b_{AK_\lambda}(t) e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - Kct)} \quad (\text{"Coulomb gauge"}) \quad (14II)$$

$$\text{con } b_{AK_\lambda}(t) = H_{AK_\lambda}^A \frac{1 - e^{i(E_K - E_A + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)t/\hbar}}{(E_K - E_A + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)} \quad y$$

$$\sum_{\kappa_\lambda} |b_{AK}(t)|^2 = \text{probabilidad de tener un fotón presente al tiempo } t \quad (15II)$$

son expresiones complejas que satisfacen las ecuaciones de Maxwell. Estas en la "medida de Lorentz" tienen la siguiente forma explícita para $\vec{A}_{ass}^{(L)}$ y su conj.complejo $\vec{A}_{ass}^{(L)*}$. (ya vimos la relación (4II) entre $\vec{A}^{(L)}$ y $\vec{A}^{(C)}$).

$$\begin{aligned} \nabla_{ass}^2 \vec{A}_{ass}^{(L)} - 1/c^2 \ddot{\vec{A}}_{ass}^{(L)} &= -4\pi/c \vec{J} & \nabla_{ass}^2 \vec{A}_{ass}^{(L)*} - 1/c^2 \ddot{\vec{A}}_{ass}^{(L)*} &= -4\pi/c \vec{J}^* \\ \nabla_{ass}^2 \phi_{ass}^{(L)} - 1/c^2 \ddot{\phi}_{ass}^{(L)} &= -\frac{4\pi}{c} (\rho c) & \dots\dots\dots & \\ \text{div } \vec{A}_{ass}^{(L)} + 1/c \dot{\phi}_{ass}^{(L)} &= 0 & \dots\dots\dots & \end{aligned} \quad (16II)$$

Trataremos ahora de obtener por medio de las (16II) es decir en término del campo asociado) la expresión escrita en el espacio-tiempo de configuraciones, asociada a la densidad de probabilidad (15II).

Por comodidad pongamos las (16II) en su forma covariante-Lorentz; así haciendo uso de la métrica siguiente:

$$x^1 = x; \quad y = x^2 = -x_2; \quad z = x^3 = -x_3; \quad ct = x^4 = x_4$$

$$\text{es decir } g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \quad g_{44} = 1$$

$$\text{tendremos: } (\quad \square = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}; \mu = 1, 2, 3, 4 \quad \text{indice repetido} \\ = \text{suma})$$

(Ap. II/7)

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^{*\nu} = \frac{4\pi}{c} J^{*\nu}$$

$$\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} = 0$$

$$\frac{\partial A^{*\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (17II)$$

donde: $A^\nu = (A^1, A^2, A^3, A^4) \equiv (A_x, A_y, A_z, \phi)$

$J^\nu = (J^1, J^2, J^3, J^4) \equiv (J_x, J_y, J_z, c\rho)$

Multiplicando la primera fila de las (17II) por A_ν^* y A_ν respectivamente (sobreentendemos que $A_{ass.}^{(L)} = A$) tendremos

$$A_\nu^* \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu = \frac{4\pi}{c} A_\nu^* J^\nu$$

$$A_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^{*\nu} = \frac{4\pi}{c} A_\nu J^{*\nu}$$

restando estas tendremos:

$$(A_\nu^* \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu - A_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^{*\nu}) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (A_\nu^* \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu - A_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^{*\nu}) = \frac{4\pi}{c} (A_\nu^* J^\nu - A_\nu J^{*\nu})$$

que pondremos así:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[A_\nu^* \left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \right) - A_\nu \left(\frac{\partial A^{*\nu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^{*\mu}}{\partial x_\nu} \right) + A_\nu^* \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - A_\nu \frac{\partial A^{*\mu}}{\partial x_\nu} \right] = \frac{4\pi}{c} (A_\nu^* J^\nu - A_\nu J^{*\nu})$$

considerando que los paréntesis nos definen el tensor electromagnético

$$F^{\nu\mu} = \left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \right) = \begin{matrix} \nu & \mu \rightarrow \\ \downarrow & \begin{vmatrix} 0 & H_z & -H_y & -E_x \\ -H_z & 0 & H_x & -E_y \\ H_y & -H_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{vmatrix} \end{matrix} \quad (18II)$$

podremos poner:

$$(A_\nu^* F^{\nu\mu} - A_\nu F^{*\nu\mu}) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (A_\nu^* \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - A_\nu \frac{\partial A^{*\mu}}{\partial x_\nu}) = \frac{4\pi}{c} (A_\nu^* J^\nu - A_\nu J^{*\nu})$$

donde el segundo sumando es nulo; en efecto: 2° sumando =

$$= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (A_\nu^* A^\mu - A_\nu A^{*\mu}) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial A_\nu^*}{\partial x_\nu} A^\mu - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} A^{*\mu} \right) = 0$$

Entonces tenemos la siguiente ley de conservación

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (A_\nu^* F^{\nu 4} - A_\nu F^{*\nu 4}) + \frac{\partial}{\partial x^i} (A_\nu^* F^{\nu i} - A_\nu F^{*\nu i}) = \quad (19II)$$

$$\frac{4\pi}{c} (A_\nu^* J^\nu - A_\nu J^{*\nu})$$

///que pondremos en la forma siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x^4} \rho^4 + \text{div} \vec{\rho} = 4\bar{n}/c (A_\nu^* J^\nu - A_\nu J^{\nu*}) = \text{escalar}$$

donde

$$\rho^4 = (\vec{A} \cdot \vec{E}^* - \vec{A}^* \cdot \vec{E})$$

$$\rho^i = (\phi^* \vec{E} - \phi \vec{E}^*)^i + [(\vec{A}^* \times \vec{H})^i - (\vec{A} \times \vec{H}^*)^i] \quad (20_{II})$$

Comprobaremos ahora que:

$$\rho_{\text{ass.}}^4(r, t) = (\vec{A}_{\text{ass}}^{(L)} \cdot \vec{E}_{\text{ass}}^* - \vec{A}_{\text{ass}}^{*(L)} \cdot \vec{E}_{\text{ass}}) \quad (21_{II})$$

es a menos de constantes universales (c, ħ) la densidad asociada en el espacio - tiempo de configuraciones a la expresión (15_{II}).

$$\sum_{\kappa_\lambda} |b_{AK_\lambda}(t)|^2$$

En efecto partiendo de la expresión (14_{II}) de Ass. en la medida de Coulomb, a saber:

$$\vec{A}_{\text{ass.}}^{(C)} = \left(\frac{4\pi c^2}{L^3}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\kappa_\lambda} \vec{E}_{K_\lambda} (\hbar/2\omega_K)^{\frac{1}{2}} b_{AK_\lambda}(t) e^{i(\vec{K}\vec{r}-Kct)} \quad Kc = \omega_K$$

y expresando $b_{AK_\lambda}(t)$ en la forma siguiente (Ver ap. II - 1)

$$b_{AK_\lambda}(t) = \vec{E}_{K_\lambda} \cdot \vec{p}_K(t)$$

Reemplazando esta expresión en $A_{\text{ass.}}^{(C)}$ y en $\sum |b_{AK_\lambda}(t)|^2$ y haciendo la suma sobre las polarizaciones ($\lambda = 1,2$) con las técnicas ya descritas, tendremos:

$$\sum_{\kappa_\lambda} |b_{AK_\lambda}(t)|^2 = \sum_{\kappa} (|\vec{p}_K(t)|^2 - \frac{(\vec{p}_K(t) \cdot \vec{K})(\vec{p}_K^*(t) \cdot \vec{K})}{K^2}) \quad (22_{II})$$

$$\vec{A}_{\text{ass.}}^{(C)} = \left(4\pi c^2/L^3\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{\kappa} (\hbar/2\omega_K) \vec{p}_K(t) e^{i(\vec{K}\vec{r}-Kct)} - \sum_{\kappa} (\hbar/2\omega_K) \frac{(\vec{p}_K(t) \cdot \vec{K}) \vec{K}}{K^2} e^{i(\vec{K}\vec{r}-Kct)} \right\} \quad (23_{II})$$

///

///

Vimos (pag. AII-2) que el primer término corresponde a $A_{ass}^{(L)}$ en la medida de Lorentz:

entonces:

$$\vec{A}_{ass}^{(L)} = (4\pi c^2/L^3)^{\frac{1}{2}} \sum_{\kappa} (\hbar/2\omega_{\kappa})^{\frac{1}{2}} \vec{p}_{\kappa}(t) e^{i(\vec{K}\vec{r}-Kct)} \quad (24_{II})$$

y usando la condición de Lorentz

$$\phi_{ass}^{(L)} = (4\pi c^2/L^3)^{\frac{1}{2}} \sum_{\kappa} (\hbar/2\omega_{\kappa})^{\frac{1}{2}} (\vec{p}_{\kappa}(t) \cdot \vec{K})/K e^{i(\vec{K}\vec{r}-Kct)}$$

Con estas y usando la expresión genérica

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial (ct)} - \text{grad. } \phi$$

tendremos:

$$\vec{E}_{ass} = i(4\pi c^2/L^3)^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{\kappa} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\kappa}}\right)^{\frac{1}{2}} K \vec{p}_{\kappa}(t) e^{-i(\vec{K}\vec{r}-Kct)} - \sum_{\kappa} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\kappa}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(\vec{p}_{\kappa}(t) \cdot \vec{K}) \vec{K}}{K} e^{i(\vec{K}\vec{r}-Kct)} \right\} \quad (25_{II})$$

Usando las (25_{II}), (24_{II}) tendremos para (21_{II}) la siguiente expresión:

$$\rho(r,t) = -2i \left(\frac{4\pi c^2}{L^3}\right) \left\{ \sum_{\kappa\kappa'} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\kappa}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\kappa'}}\right)^{\frac{1}{2}} K' \vec{p}_{\kappa'}^* \cdot \vec{p}_{\kappa} e^{i[(\vec{K}-\vec{K}')\vec{r}-(K-K')ct]} - \sum_{\kappa\kappa'} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\kappa}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\kappa'}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(\vec{p}_{\kappa'}^* \cdot \vec{K}')(\vec{p}_{\kappa} \cdot \vec{K})}{K'} e^{i[(\vec{K}-\vec{K}')\vec{r}-(K-K')ct]} \right\}$$

Integrando esta expresión a todo el espacio, esperamos que nos conduzca a la misma probabilidad de fotones como la (15_{II}); en efecto:

Si consideramos que

$$1/L^3 \int_{[3]} e^{i(\vec{K}-\vec{K}')\vec{r}} d\tau = \delta_{\kappa\kappa'}$$

tendremos:

$$\int \rho(r,t) d^3r = -i\hbar c 4\pi \sum_{\kappa} \left\{ |p_{\kappa}(t)|^2 - \frac{|(\vec{p}_{\kappa}(t) \cdot \vec{K})|^2}{K^2} \right\} = -i\hbar c 4\pi \sum_{\kappa_{\lambda}} |b_{AK_{\lambda}}(t)|^2$$

///

Entonces es justificado llamar , "Densidad asociada" a:

$$D_{\text{ass}(A)}(\vec{r}, t) = \frac{i}{\hbar c 4\pi} (\vec{A}_{\text{ass}}^{(L)} \vec{E}_{\text{ass}}^* - \vec{A}_{\text{ass}(A)}^* \vec{E}_{\text{ass}}(t)) \quad (26_{II})$$

-----000000000-----

Formalmente en una manera completamente análoga, puede mostrarse que considerando las transiciones en dos átomos A y B aislados y sus respectivos campos asociados $\vec{A}_{\text{ass}(A)}$ y $\vec{A}_{\text{ass}(B)}$ se tiene la siguiente expresión (de la que posteriormente veremos su significado físico): (ver pag./82)

$$\beta(t) = \sum_{K_\lambda} b_{\Delta K_\lambda} b_{BK_\lambda}^*(t) = \frac{i}{\hbar c 4\pi} \int (\vec{A}_{\text{ass}(A)}^{(L)} \vec{E}_{\text{ass}(B)}^* - \vec{A}_{\text{ass}(B)}^{(L)*} \vec{E}_{\text{ass}(A)}) d^3r \quad (27_{II})$$

APENDICE III

CALCULO DE:

$$I^+(E, R_{AT}) = H_T^{TK} \lambda H_A^{A*} e^{i\vec{K}\vec{R}_{AT}} \zeta (E - E_{ATK})$$

Si consideramos emisión dipolar solamente, aprox. N.R. tendremos: $(E_K = \hbar c K = \hbar \omega_K)$

$$H_A^{A*} = ie K_A c (2\pi\hbar/L^3 Kc)^{\frac{1}{2}} \vec{e}_{K_\lambda} \cdot \vec{r}_{AA^*}$$

$$H_T^{TK} = -ie K_T c (2\pi\hbar/L^3 Kc)^{\frac{1}{2}} \vec{e}_{K_\lambda} \cdot \vec{r}_{TT}$$

(a) Suma sobre polarizaciones

$$I^+ = e^2 K_A K_T \frac{2\pi}{L^3} \vec{r}_T \cdot \sum_{\vec{K}} \frac{e^{i\vec{K}\vec{R}}}{K} \zeta (E - E_K) \sum_{\lambda=1,2} \vec{e}_{K_\lambda} (\vec{e}_{K_\lambda} \cdot \vec{r}_A)$$

donde $\zeta (E - E_K) = 1/\hbar c \zeta (K_E - K)$

Usando las mismas técnicas desarrolladas en el apéndice II, podemos poner

$$\sum_{\lambda} \vec{e}_{K_\lambda} \cdot (\vec{e}_{K_\lambda} \cdot \vec{r}_A) = \vec{r}_A - \frac{(\vec{r}_A \cdot \vec{K}) \vec{K}}{K^2}$$

entonces

$$I^+ = e^2 K_A K_T \frac{2\pi}{L^3} \left\{ \vec{r}_T \cdot \sum_{\vec{K}} \left[\vec{r}_A - \frac{(\vec{r}_A \cdot \vec{K}) \vec{K}}{K^2} \right] \frac{e^{i\vec{K}\vec{R}}}{K} \zeta (E - E_K) \right\} \\ = \frac{2\pi}{L^3} e^2 K_A K_T \left\{ \sum_{\vec{K}} (\vec{r}_A \cdot \vec{r}_T) \frac{e^{i\vec{K}\vec{R}}}{K} \zeta (E - E_K) + \vec{r}_T \cdot \text{grad}_R \text{div}_R \sum_{\vec{K}} \frac{\vec{r}_A}{K^2} \frac{e^{i\vec{K}\vec{R}}}{K} \zeta \right\}$$

b) Suma sobre direcciones y energías

Transformaremos la suma anterior en una integral con: $\rho_K = \frac{L^3 K^2 dK d\Omega}{(2\pi)^3}$

$$I^+ = \frac{e^2 K_A K_T}{(2\pi)^2} \left\{ \iiint_{0,0,0}^{2\pi,\pi,\infty} (\vec{r}_A \cdot \vec{r}_T) e^{iKR \cos \theta} \sin \theta K \zeta (E - E_K) dK d\theta d\varphi + \right. \\ \left. \vec{r}_T \cdot \text{grad}_R \text{div}_R \iiint \frac{\vec{r}_A}{K^2} e^{iKR \cos \theta} \sin \theta K \zeta (E - E_K) dK d\theta d\varphi \right\}$$

integrando sobre y considerando que:

$$\left(-\frac{1}{iKR} \right) d/d\theta (e^{iKR \cos \theta}) = e^{iKR \cos \theta} \sin \theta :$$

///

se obtiene

$$I^+ = \frac{e^2 K_A K_T}{2\pi} \left\{ \int_0^\pi \int_0^\infty (\vec{r}_A \cdot \vec{r}_T) \left(\frac{i}{KR} \right) d/d\theta (e^{iKR \cos \theta}) K \zeta(K_B - K) dK + \right.$$

$$\left. \vec{r}_T \cdot \text{grad}_R \text{div}_R \int_0^\pi \int_0^\infty \left(-\frac{\vec{r}_A}{K^2} \right) \left(-\frac{i}{KR} \right) d/d\theta (e^{iKR \cos \theta}) K \zeta(K_B - K) dK \right.$$

realizando ahora la integración sobre θ tendremos:

$$I^+ = \frac{e^2 K_A K_T}{2\pi} \left\{ \int_0^\infty (\vec{r}_A \cdot \vec{r}_T) \left(\frac{i}{KR} \right) (e^{-iKR} - e^{iKR}) K \zeta(K_B - K) dK + \right.$$

$$\left. + \vec{r}_T \cdot \text{grad}_R \text{div}_R \int_0^\infty \left(-\frac{\vec{r}_A}{K^2} \right) \left(-\frac{i}{KR} \right) (e^{-iKR} - e^{iKR}) K \zeta(K_B - K) dK \right.$$

es decir,

$$I^+ = \frac{e^2 K_A K_T}{\pi} \left\{ \int_0^\infty (\vec{r}_A \cdot \vec{r}_T) \frac{\text{sen} KR}{KR} K \zeta(K_B - K) dK + \right.$$

$$\left. \vec{r}_T \cdot \text{grad}_R \text{div}_R \int_0^\infty \left(-\frac{\vec{r}_A}{K^2} \right) \left(-\frac{\text{sen} KR}{KR} \right) K \zeta(K_B - K) dK \right.$$

calculando se obtiene:

$$\text{grad}_R \text{div}_R \left(-\frac{\vec{r}_A}{K^2} \cdot \frac{\text{sen} KR}{KR} \right) =$$

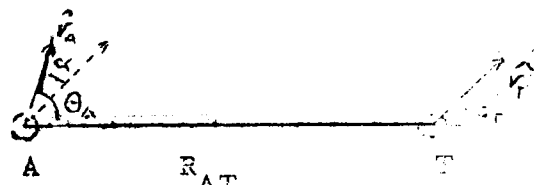
$$= -\frac{(\hat{R} \cdot \vec{r}_A) \hat{R}}{K R} \text{sen} KR + \frac{(\vec{r}_A - 3(\vec{r}_A \cdot \hat{R}) \hat{R})}{(K R)^2} \cos KR - \frac{(\vec{r}_A - 3(\vec{r}_A \cdot \hat{R}) \hat{R})}{(K R)^3} \text{sen} KR$$

Llamando entonces

$$A = \cos \alpha + \cos \theta_A \cos \theta_T \quad (1_{III})$$

$$B = \cos \alpha - 3 \cos \theta_A \cos \theta_T$$

$$A \cdot B = 2((\hat{r}_A \times \hat{r}_T) \cdot (\hat{r}_A \times \hat{r}_T))$$



tendremos

$$I^+ = \frac{e^2 K_A K_T / r_A / r_T}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[\frac{A+B}{K R} - \frac{2B}{(K R)^3} \right] \text{sen} KR + \right.$$

$$\left. + \frac{2B}{(K R)^2} \cos KR \right\} K \zeta(K_B - K) dK \quad (2_{III})$$

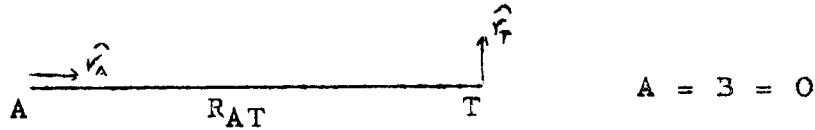
c) dependencia de I^+ con la distancia R y orientaciones de los átomos.-

La expresión anterior junto con las especificaciones (1_{III}) nos permite ver de inmediato que:

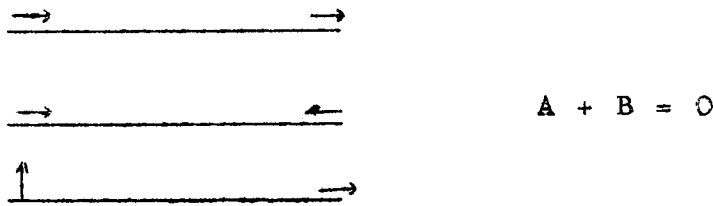
$$\lim_{R \rightarrow \infty} I^+ = 0$$

///

///Además vemos que I es nulo independientemente de la distancia (cuando como en nuestro caso se considera la interacción coulombiana despreciable), si las orientaciones respectivas son;



o bien para el caso de R cuando son despreciables los órdenes superiores en $O(1/KR)$



Esto está en perfecta concordancia con los hechos clásicos de interacción entre dipolos cuando se desprecia la parte estática ($1/R^2$; $1/R^3$) (x).

Hasta ahora la expresión es correcta ; sin embargo mediante el uso de ciertas aproximaciones (de error muy pequeño) podemos poner (2_{III}) en otra forma más conveniente para el cálculo.

Para ese fin pongamos:

d)

$$-\frac{1}{2}ih\gamma_{AT}(E') \cos\alpha = \sum_{\vec{k}} H_{T^*}^{TK} H_{AK}^{A^*} \int (E-E_k) \quad (3_{III})$$

Esta expresión para el caso de átomos idénticos ($A \equiv T$) e igualmente orientados ($\cos\alpha = 1$) se transforma en:

$$-\frac{1}{2}ih\gamma_A = -\frac{1}{2}ih\gamma_T$$

Calcularemos explícitamente la expresión (3_{III}) en la aproximación dipolar para los elementos de matriz: $-\frac{1}{2}ih\gamma_{AT}(E) \cos\alpha =$

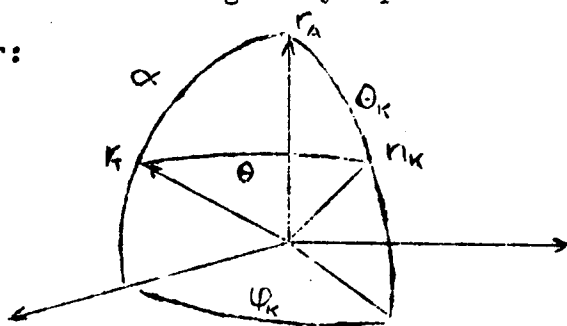
$$= \frac{e^2 k_A k_T 2\pi}{L^3} \sum_{\vec{k}} (\vec{r}_A \cdot \vec{r}_T) - \frac{(\vec{r}_A \cdot \vec{k})(\vec{r}_T \cdot \vec{k})}{k^2} - 1/k \cdot \int (E-E_k)$$

$$= \frac{e^2 k_A k_T}{(2\pi)^2} \iiint (\vec{r}_A \cdot \hat{n}_k) \cdot (\vec{r}_T \cdot \hat{n}_k) k \int (E-E_k) d\Omega dk$$

(x) Ver Born and Wolf "Principles of Optics" pag. 81

///

Observando la figura y aplicando el teorema del coseno, podemos poner:



$$(\vec{r}_A \times \hat{n}_K) \cdot (\vec{r}_T \times \hat{n}_K) d\Omega = /r_A /r_T / (\cos\alpha - \cos\theta_K \cos\theta) \text{sen}\theta_K d\theta_K d\varphi_K$$

$$\cos\theta = \cos\alpha \cos\theta_K + \text{sen}\alpha \text{sen}\theta_K \cos\varphi_K$$

reemplazando en la anterior:

$$(\vec{r}_A \times \hat{n}_K) \cdot (\vec{r}_T \times \hat{n}_K) d\Omega =$$

$$/r_A /r_T / (\cos\alpha \text{sen}^3\theta_K d\theta_K d\varphi_K - \text{sen}\alpha \text{sen}^2\theta_K \cos\theta_K \cos\varphi_K d\theta_K d\varphi_K)$$

entonces

$$-\frac{1}{2} i \hbar \chi_{AT}(E) \cos\alpha =$$

$$= \frac{e^2 K_A K_T}{(2\pi)^2} /r_A /r_T / \iiint \cos\alpha \text{sen}^3\theta_K d\theta_K d\varphi_K K \zeta(K_E - K) dK$$

ya que el 2º término da contribución nula al integrar sobre φ_K entre los límites $(0, \pi)$ pues $\text{sen}^2\theta_K \cos\theta_K$ es par, usando:

$$\int_0^\pi \text{sen}^3 x dx = 4/3$$

$$-i \frac{1}{2} \hbar \chi_{AT}(E) = \frac{2e^2 K_A K_T /r_A /r_T /}{3 \pi} \int_0^\infty K \zeta(K_E - K) dK$$

Dejando de lado el oo de la "self-energy", es decir:

despreciando la parte finita de la parte imaginaria que como sabemos da corrimientos de frecuencia, tendremos:

$$-\frac{1}{2} i \hbar \chi_{AT}(E) = -i \frac{2e^2 K_A K_T /r_A /r_T /}{3} K_E \tag{4_{III}}$$

Retomando entonces la expresión φ_{III} junto con la anterior

) vemos que podemos poner

$$\frac{e^2 K_A K_T /r_A /r_T /}{2 \pi} = \frac{1}{2} \hbar \chi_{AT}(E) \cdot \frac{3}{4} \frac{1}{\pi K_E}$$

///

e) Expresión aproximada de I

Por otra parte en la expresión (2. III) debido a la función sólo tienen contribución importante los valores $K \sim K_B$, entonces dada la lenta variación de los términos en A y B frente a sen KR y CosKR pondemos:

$$I^+ = I^- \approx \left\{ \left[\frac{A+B}{K_E R} - \frac{2B}{(K_E R)^3} \right] \int_0^\infty \text{senKR} \zeta(K_B - K) dK + \left[\frac{2B}{(K_E R)^2} \right] \int_0^\infty \text{cosKR} \zeta(K_B - K) dK \right\} h \gamma_{AT}(E) \cdot \frac{3}{4} \pi$$

Ahora bien con

$$\zeta(x) = \frac{P}{x} - i\pi\delta(x)$$

$$\int_0^\infty \text{sen KR} \zeta(K_B - K) dK = -i\pi \text{sen} K_B R + P \int_0^\infty \frac{\text{senKR}}{K_B - K} dK$$

$$\int_0^\infty \text{cos KR} \zeta(K_B - K) dK = -i\pi \text{cos} K_B R + P \int_0^\infty \frac{\text{cos KR}}{K_B - K} dK$$

Para la solución final (Ver fórmula () en el texto pag.

) el rango de valores K que interesan son los centrados en $K_B \sim \omega_A/c \sim \omega_T/c = \frac{10^{15}}{3 \cdot 10^{10}}$ para frecuencias visibles, podemos por lo tanto extender la integración a todo el rango de frecuencias sin error apreciable, entonces:

$$\int_0^\infty \text{sen KR} \zeta(K_B - K) dK \approx -i\pi \text{sen} K_B R - \pi \text{cos} K_B R$$

$$\int_0^\infty \text{cos KR} \zeta(K_B - K) dK \approx -i\pi \text{cos} K_B R + \pi \text{sen} K_B R$$

es decir podremos poner:

$$I^+ = I^- = -\frac{1}{2} i h \gamma_{AT}(E) \cdot \frac{3}{4} (G_2(K_B R) - i G_1(K_B R)) e^{i K_B R} \tag{5_{III}}$$

Donde:

$$G_2 = \frac{2B}{(K_E R)^2} \quad G_1 = \frac{A+B}{K_E R} - \frac{2B}{(K_E R)^3}$$

En general consideraremos distancias tales que: $R > \lambda_B$ entonces sólo consideraremos el término $\frac{A+B}{K_E R}$

APENDICE IV: EMISION DE DOS ATOMOS A Y B UBICADOS A LA DISTANCIA RELATIVA R_{AB} ; EN ESTADOS INICIALES DE EXCITACION DADOS POR A Y B RESPECTIVAMENTE.-

Para la solución de este problema podemos limitarnos en esencia a los estados en resonancia directa y despreciaremos la influencia de los estados virtuales no en resonancia, cuyas contribuciones sabemos poco sensibles. Así tendremos el siguiente esquema de ecuaciones autoconsistentes (en el sentido que $\sum_n |b_n(t)|^2 = 1$)

$$i\hbar \dot{b}_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}} = \sum_K (H_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}}^{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}K} b_{\overset{\star}{A}K} e^{i(E_{\overset{\star}{A}} - E_K)t/\hbar} + H_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}}^{\overset{\star}{B}\overset{\star}{A}K} b_{\overset{\star}{B}K} e^{i(E_{\overset{\star}{B}} - E_K)t/\hbar} + i\hbar \delta(t) \quad (a)$$

$$i\hbar \dot{b}_{\overset{\star}{A}K} = H_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}}^{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}K} b_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}} e^{i(E_K - E_{\overset{\star}{A}})t/\hbar} + \sum_{K'} H_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}}^{\overset{\star}{A}K K'} b_{\overset{\star}{A}K K'} e^{i(E_{\overset{\star}{A}K} - E_{K'})t/\hbar} \quad (b)$$

$$i\hbar \dot{b}_{\overset{\star}{B}K} = H_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}}^{\overset{\star}{B}\overset{\star}{A}K} b_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}} e^{i(E_K - E_{\overset{\star}{B}})t/\hbar} + \sum_{K'} H_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}}^{\overset{\star}{B}K K'} b_{\overset{\star}{B}K K'} e^{i(E_{\overset{\star}{B}K} - E_{K'})t/\hbar} \quad (c)$$

$$i\hbar \dot{b}_{\overset{\star}{A}K K'} = H_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}}^{\overset{\star}{A}K K'} b_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}} e^{i(E_{K'} - E_{\overset{\star}{A}})t/\hbar} + H_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}}^{\overset{\star}{A}K K'} b_{\overset{\star}{A}K} e^{i(E_{K'} - E_{\overset{\star}{A}})t/\hbar} + H_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}}^{\overset{\star}{A}K K'} b_{\overset{\star}{A}K} e^{i(E_{K'} - E_{\overset{\star}{A}})t/\hbar} + H_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}}^{\overset{\star}{A}K K'} b_{\overset{\star}{A}K} e^{i(E_{K'} - E_{\overset{\star}{A}})t/\hbar} \quad (1)$$

$$i\hbar \dot{b}_{\overset{\star}{B}K K'} = H_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}}^{\overset{\star}{B}K K'} b_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}} e^{i(E_{K'} - E_{\overset{\star}{B}})t/\hbar} + H_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}}^{\overset{\star}{B}K K'} b_{\overset{\star}{B}K} e^{i(E_{K'} - E_{\overset{\star}{B}})t/\hbar} \quad (e)$$

donde $i\hbar \delta(t)$ puesta en la ecuación (1a) nos da cuenta del salto del estado $b_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}}(t)$ en $t=0$ como consecuencia de las condiciones temporales siguientes (ver nota):

Estado inic.	ϕ_A^*	ϕ_B^*	_____	$b_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}}(t)$	=	$\begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \text{ (-0)} \\ 1 & \text{" } t = +0 \text{ } \end{cases}$	$E_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}}$
Estados	ϕ_A	ϕ_B	_____	$b_{\overset{\star}{A}K}(t)$	=	0	para $t \leq 0$ _____ $E_{\overset{\star}{A}K}$
	Interm.	ϕ_A	ϕ_B	_____	$b_{\overset{\star}{A}K}(t)$	=	0
Estados finales		ϕ_A	ϕ_B	_____	$B_{\overset{\star}{A}K K'}$	=	0
		ϕ_A	ϕ_B	_____	$b_{\overset{\star}{A}K K'}(t)$	=	0

$(E_A = \hbar c K_A ; E_B = \hbar c K_B ; E_{\overset{\star}{A}\overset{\star}{B}} = \hbar c K)$

Nota: "Nuestro problema envuelve dos átomos en estados excitados discretos, entonces habrá una probabilidad finita de decaimiento hacia estados inferiores acompañadas de emisión en consecuencia no podremos fijar las condiciones iniciales por ej. a $t = -\infty$ sino que deberemos fijarlas a un tiempo finito que elegiremos como $t=0$. Ahora bien, nosotros queremos una

///solución de la ec. de Schrödinger:

$$i\hbar \dot{b}_n(t) = \sum_m H_{n/m} b_m e^{i(E_n - E_m)t/\hbar} \quad (a)$$

que satisfaga una condición inicial tal que a $t=0$ el sistema se encuentre en un estado δ_A^* δ_B^* y todas las otras amplitudes de probabilidad sean nulas:

$$b_n(0) = 0 \quad (\text{para } n \neq A, B) \quad \text{y} \quad b_{AB}^{**}(0) = 1 \quad (b)$$

(+0 significa t tendiendo a cero del lado positivo).

Por lo expuesto más arriba nuestra ecuac. (1) y sus soluciones $b(t)$ sólo tienen sentido físico para $t > 0$ a partir del momento cuando preparamos nuestro estado inicial; sin embargo por razones analíticas como un intento para resolver el problema es conveniente extender la solución al eje negativo de t ; así elegiremos todos los $b(t)$ nulos para $t < 0$ a pesar de sus implicancias físicas (ya que la emisión de la luz debe ser tratada en conexión con el método de excitación si se desean detalles finos en la línea emitida. Este problema aparece cuando se consideran correcciones radiativas de orden superior para el ancho de línea; aquí no estamos interesados en tales detalles y el método que esbozaremos da muy buenas aproximaciones cuando dejemos de lado estas correcciones así como el desplazamiento de la línea que es usualmente mucho más pequeño que el ancho para las transiciones permitidas - Para más detalles ver W.Heitler loc. cit. § 16.3 y § 34.4 así como E. Arnous and W.Heitler Pro.of. Roy.Soc. A 220 (1953), 290.)-

Ahora la ecuación (a) se satisface idénticamente para $t < 0$, pero la normalización para tiempos negativos está hecha a cero en lugar de serlo a la unidad. Podemos extender la ec. (a) a tiempos negativos incluyendo $t=0$ agregando un término inhomogeneo que de cuenta del salto de b_{AB}^{**} , así pondremos:

$$i\hbar \dot{b}_n(t) = \sum_m H_{n/m} b_m e^{i(E_n - E_m)t/\hbar} + i\hbar \delta_{n/AB}^{**} \delta(t) \quad (c)$$

La ec. (c) es válida ahora para todo t . Se sigue además de la (c) que todos los b_n para $n \neq A, B$ son continuos para $t=0$ mientras que b_{AB}^{**} hace allí el salto requerido. Lo que se desea entonces es una solución de la ec. (c) tal que $b_n = b_{AB}^{**} = 0$ para $t < 0$; entonces por la continuidad y el salto mencionados, las condiciones iniciales (b) estarán automáticamente satisfechas. Debemos tener en cuenta además que la solución con las condiciones iniciales impuestas es única.

Para la solución del sistema (1) usaremos la teoría general de los procesos de "dampinión" cuyo método esbozamos en la pag. ; seguiremos aquí su uso con cierto detalle en orden a facilitar la lectura. Así en lugar de utilizar las amplitudes de probabilidad $b_n(t)$ trabajaremos con sus amplitudes de Fourier, lo que corresponde al bien conocido método matemático de resolver una ec. diferencial convirtiéndola en un sistema algebraico por medio del uso de transformaciones integrales; poniendo entonces:

$$b_n(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(E) e^{i(E_n - E)t/\hbar} dE$$

$$i\hbar \delta(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(E_{AB}^{**} - E)t/\hbar} dE \quad (2 IV) \quad //$$

///

A pesar de no ser estrictamente necesario, en lo sucesivo consideraremos (por ser el caso común) a $G(E)$ como una función analítica regular ("holomorfa") en el semiplano superior de la variable E y que tiende a cero lo suficientemente rápido para $E \rightarrow \infty$. En estas condiciones podemos ver de inmediato (eligiendo un contorno cerrado por el semicírculo en el infinito del semiplano superior) que se satisfacen las condiciones temporales impuestas en $t < 0$, a saber: $b_n(t < 0) = 0$.-

Reemplazando (2) en el sistema (1) tendremos que el sistema de ecuac. diferenciales en las amplitudes de probabilidad $b_n(t)$ es equivalente al siguiente sistema algebraico en las amplitudes de Fourier:

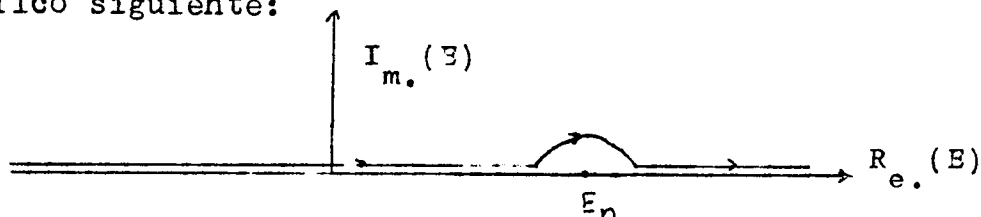
$$(E - E_{\check{A}\check{B}}) G_{\check{A}\check{B}}(E) = \sum_M H_{\check{A}\check{B}/M} G_M(E) + 1 \quad (\text{para } n = \check{A}\check{B}) \quad (3 \text{ IV})$$

$$(E - E_n) G_n(E) = \sum_M H_{n/M} G_M(E) \quad (\text{para } n \neq \check{A}\check{B})$$

Para obtener una ecuación para las $G_n(E)$ deberemos dividir (3) por $(E - E_n)$; ahora bien al efectuar esta división introducimos ambigüedades (en el eje real de E) en las integrales (2). Es fácil ver que podemos eliminar estas ambigüedades de acuerdo a las exigencias físicas de nuestro problema tomando E como una variable compleja con una parte imaginaria positiva arbitrariamente pequeña, en orden a obviar polos en el eje real. Así pondremos:

$$\text{división por } (E - E_n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(E - E_n + i\epsilon)} \quad (4 \text{ IV})$$

de modo que el camino de integración en las (2) sea el fijado en el gráfico siguiente:



///

//
 Es decir como consecuencia de la división por $(E - E_n)$ tenemos un factor $\frac{1}{(E - E_n + i\epsilon)}$

a la derecha de las ecuaciones (3). Por conveniencia separaremos además un factor G_{AB}^{xx} y pondremos:

$$G_n(E) = U_n(E) G_{AB}^{xx}(E) \cdot \frac{1}{(E - E_n + i\epsilon)} \quad \text{para } n \neq AB \quad (5' IV)$$

Para facilitar la comparación con la cita mencionada (W. Heitler 16.) continuaremos con la notación allí adoptada; así deberemos notar que dado el camino de integración elegido para cumplir las condiciones iniciales tenemos formalmente la siguiente igualdad:



Es decir: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(E - E_n + i\epsilon)} = \frac{P}{(E - E_n)} + (-i\pi) \delta(E - E_n) = \zeta(E - E_n)$

y $G_n(E) = U_n(E) G_{AB}^{xx}(E) \zeta(E - E_n)$ (para $n \neq AB$) (5' IV)

Considerando entonces que $x \zeta(x) = 1$ tendremos que (3) deviene el sig. sistema algebrico. (Donde de ahora en adelante $\zeta(x)$ significa:

66

(x) Las propiedades fundamentales de la distribución $\zeta(x)$ escritas en la forma habitual (aunque matemáticamente incorrecta) son las siguientes:

a) $\zeta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\epsilon} = -i \int_0^{\infty} e^{ixt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{ixt}}{x} = \frac{P}{x} - i\pi \delta(x)$

b) $x \cdot \zeta(x) = 1$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(x) e^{ixt} dx = \begin{cases} 0 & \text{para } t > 0 \\ -2\pi i & \text{para } t < 0 \end{cases}$

d) $-i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iKx} dK = -2\pi i \delta(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} -i \int_{-t}^{+\infty} e^{iKx} dK = \dots$
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} -ie^{-itx} \int_{-t}^{+\infty} e^{i(K+t)x} dK = \lim_{t \rightarrow \infty} -ie^{-itx} \int_0^{+\infty} e^{iSx} dS$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\pm ixt} \zeta(x) = \begin{cases} (+) = 0 \\ (-) = -2\pi i \delta(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\epsilon} \quad) \\
 (E - E_{AB}^*) G_{AB}^* &= G_{AB}^* \left[\sum_{\kappa} (H_{AB}^{\kappa} U_{ABK}^* \zeta(E - E_{BK}^*) + H_{AB}^{\kappa} U_{ABK}^* \zeta(E - E_{AK}^*)) \right] + 1 \quad (a) \\
 U_{ABK}^* &= H_{AB}^{\kappa} + \sum_{\kappa'} H_{ABK}^{\kappa'} U_{ABKK'}^* \zeta(E - E_{KK'}^*) + H_{ABK}^{\kappa} U_{ABKK}^* \zeta(E - E_{KK}^*) \quad (b) \\
 U_{ABK}^* &= H_{AB}^{\kappa} + \sum_{\kappa'} H_{ABK}^{\kappa'} U_{ABKK'}^* \zeta(E - E_{KK'}^*) + H_{ABK}^{\kappa} U_{ABKK}^* \zeta(E - E_{KK}^*) \quad (c) \\
 U_{ABKK'}^* &= H_{ABK}^{\kappa} U_{ABK}^* \zeta(E - E_{BK}^*) + H_{ABK}^{\kappa} U_{ABK}^* \zeta(E - E_{AK}^*) + \\
 & \quad + H_{ABK}^{\kappa'} U_{ABK'}^* \zeta(E - E_{BK'}^*) + H_{ABK}^{\kappa'} U_{ABK'}^* \zeta(E - E_{AK'}^*) \\
 U_{ABKK}^* &= H_{ABK}^{\kappa} U_{ABK}^* \zeta(E - E_{BK}^*) + H_{ABK}^{\kappa} U_{ABK}^* \zeta(E - E_{AK}^*) \quad (e)
 \end{aligned}$$

(6 IV)

De la (a) obtenemos:

$$G_{AB}^*(E) = \frac{1}{(E - E_{AB} + \frac{1}{2} i \hbar (E)/2)} \quad (7 IV)$$

donde hemos puesto:

$$-\frac{1}{2} i \hbar \Gamma(E) = \sum_{\kappa} (H_{AB}^{\kappa} U_{ABK}^* (E - E_{ABK}^*) + H_{AB}^{\kappa} U_{ABK}^* \zeta(E - E_{ABK}^*)) \quad (7' IV)$$

La expresión $\Gamma(E)$ en general prácticamente independiente de E en muy buena aproximación) tiene una parte real (siempre positiva) que tomada en un punto particular (E_{AB}^*) describe el ancho de la línea.

$$\text{Re.}(\Gamma(E)) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_m |U_{m/AB}(E)|^2 \delta(E - E_m) \quad (\text{See W. Whitler pag. 171})$$

y una parte imaginaria (que como hemos mencionado antes no tendremos en cuenta) que en una teoría renormalizada conduce al desplazamiento de la línea (que usualmente es mucho más pequeño que el ancho para las transiciones permitidas).

En cuanto al conjunto infinito de ecuaciones algebraicas (b), (c), (d) y (e) nos permitirá obtener la forma explícita de c/u de las U (E) como funciones de E; con estas funciones reemplazadas en (7') y (7) y luego por medio de la (5) o (5') obtendremos las amplitudes de Fourier $G_n(E)$ que nos permitirán calcular por

///medio de la (2) la dependencia temporal de c/u de las amplitudes de probabilidad $b_n(T)$ para el problema que nos ocupa.

Obtención de las amplitudes $U_n(E)$.

Con las especificaciones siguientes:

$$H_{ABK}^{\times\times} = H_{BK}^{\times} e^{-i\vec{K}\vec{R}_B} ; H_{ABK}^{ABKK'} = H_{B^{\times}K'}^{BK'} e^{i\vec{K}'\vec{R}_B} ; H_{ABK}^{ABKK} = 2^{\frac{1}{2}} H_{B^{\times}}^{BK} e^{i\vec{K}\vec{R}_B} \quad (8_{IV})$$

$$H_{ABK}^{\times\times} = H_{AK}^{\times} e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} ; H_{ABK}^{ABKK'} = H_{A^{\times}K'}^{AK'} e^{i\vec{K}'\vec{R}_A} ; H_{ABK}^{ABKK} = 2^{\frac{1}{2}} H_A^{AK} e^{i\vec{K}\vec{R}_A}$$

Reemplazando (6e) y (6d) en las (6b) y (6c) y ordenado convenientemente los términos tendremos:

$$U_{ABK}^{\times}(E) = H_{AK}^{\times} e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} +$$

$$+ U_{ABK}^{\times} \int (E - E_{ABK}^{\times}) \sum_{K'} H_{B^{\times}}^{BK'} H_{BK'}^{\times} \int (E - E_{KK'}) +$$

$$+ H_{AK}^{\times} e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} \sum_{K'} H_{B^{\times}}^{BK'} e^{i\vec{K}'\vec{R}_B} U_{ABK'}^{\times} \int (E - E_{ABK'}) \int (E - E_{KK'}) \quad (9_{IV})$$

$$+ U_{ABK}^{\times} \int (E - E_{ABK}^{\times}) \sum_K H_{B^{\times}}^{BK'} H_{AK'}^{\times} e^{i\vec{K}'(\vec{R}_B - \vec{R}_A)} \int (E - E_{KK'}) +$$

$$+ H_{BK}^{\times} e^{-i\vec{K}\vec{R}_B} \sum_{K'} H_B^{BK'} e^{i\vec{K}'\vec{R}_B} U_{ABK'}^{\times} \int (E - E_{ABK'}) \int (E - E_{KK'})$$

$$U_{ABK}(E) = H_{BK}^{\times} e^{-i\vec{K}\vec{R}_B} \dots\dots\dots(\text{expresión análoga cambiando A por B})$$

Antes de proseguir, debemos hacer notar que los tres primeros sumandos en c/u de las amplitudes U_{ABK}^{\times} y U_{ABK}^{\times} son los únicos términos que estarían presentes en el caso que consideráramos el problema de emisión de dos átomos ubicados a gran distancia relativa R_{AB} . En cambio la aparición de los dos últimos sumandos nos dan cuenta (para un orden finito de distancias R_{AB}) de la probabilidad finita de excitación de cada una de las fuentes por el fotón proveniente de la otra.-

Llamando:

$$\sum_{K'} |H_B^{BK'}|^2 \int (E - E_{KK'}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_K \frac{|H_B^{BK'}|^2}{(E - E_{KK'} + i\epsilon)} = -\frac{i\hbar\gamma_B}{2} (E - E_K) \quad (10_{IV})$$

pues para $E \sim E_{ABK}^{\times}$ coincide su parte real (como dijimos no consideramos desplazamientos de línea) con el ancho de línea del

//

///nivel B del átomo B aislado.(x)

Análogamente:

$$\sum_{K'} |H_A^{AK'}|^2 \delta(E - E_{KK'}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{K'} \frac{|H_A^{AK'}|^2}{(E - E_{KK'} + i\epsilon)} = -\frac{i\hbar}{2} \delta_A(E - E_K) \quad (11 IV)$$

pues para $E \sim E_{ABK}^*$ coincide con el ancho de línea del nivel A del átomo A aislado (x).

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \sum_{K'} H_A^{BK'} H_A^{A*} e^{i\vec{K}'\vec{R}_{AB}} \delta(E - E_{KK'}) &= \sum_{K'} H_A^{AK'} H_B^{B*} e^{-i\vec{K}'\vec{R}_{AB}} \delta(E - E_{KK'}) = \\ &= I(E - E_K; R_{AB}) = \\ &= I_K(E; R_{AB}) \end{aligned} \quad (12 II)$$

Esta es una integral del tipo ampliamente estudiado en ap. III; sus propiedades fundamentales eran:

a) En el caso de átomos idénticos e igualmente orientados:

$$\lim_{R_{AB} \rightarrow 0} I_K(E; R_{AB}) = -\frac{i\hbar}{2} \delta(E - E_K) (R_{AB} < \bar{\lambda}) \quad (12.a)$$

b) En la aproximación dipolar para los elementos de matriz:

$$I(E - E_K; R_{AB}) = \frac{e^2 K_A K_T / r_A / r_B}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[\frac{A+B}{K'R_{AB}} - \frac{2B}{(K'R_{AB})^3} \right] \text{sen} K'R_{AB} + \frac{2B}{(K'R_{AB})^2} \text{cos} K'R_{AB} \right\} K' \delta[(K_E - K) - K']$$

de esta expresión notamos (como debía ser acorde a su significado) :

$$\lim_{R_{AB} \rightarrow \infty} I_K(E - E_K; R_{AB}) = 0 \quad (R_{AB} \gg \bar{\lambda}) \quad (12.b)$$

c) En general podemos decir:

$$I(E - E_K; R_{AB}) < -\frac{i\hbar}{2} \delta(E - E_K) \quad (12.c)$$

donde la desigualdad se cumple en mayor grado cuanto mayor sea la distancia R_{AB} .

///
(x) Debemos hacer notar que ambas expresiones $\delta(E - E_K)$ y $\delta(E - E_K)$ son practicamente independiente de E y las necesitaremos para energías E centradas alrededor de $E_0 = E_A - B$, que difiere de los valores de $E_{AB}^* K$ y $E_A^* B_K$ a lo más en el orden de $\hbar \delta$.

//// d) Despreciando términos de orden superior a $\bar{\lambda}/R_{AB}$ tenemos la siguiente expresión aproximada para átomos A y B idénticos (no necesariamente igual orientación) $E_A = E_B = E_0$ y $\gamma_A = \gamma_B = \gamma$

$$I(E - E_K; R_{AB}) = -(\frac{1}{2}\hbar\gamma)^{3/4} \frac{(A+B)^{AB}}{E_0 R_{AB}/\hbar c} \cdot e^{i(E-E_K)R_{AB}/\hbar c} \quad (12.d)$$

Con las expresiones (10), (11) y (12) podemos poner a U_{ABK}^* y U_{ABK}^* en la siguiente forma más compacta:

$$U_{ABK}^* = H_{AK}^* e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} + U_{ABK}^* \left\{ (E - E_{ABK}^*) \left(\frac{-i\hbar}{2}\gamma_B \right) + U_{ABK}^* \left\{ (E - E_{ABK}^*) \cdot I(E - E_K; R_{AB}) + \right. \right. \\ + H_{AK}^* e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} \sum_{K'} H_{B^*}^{BK'} e^{i\vec{K}'\vec{R}_B} U_{ABK'}^* \int (E - E_{ABK'}^*) \int (E - E_{KK'})^* \\ + H_{BK}^* e^{-i\vec{K}\vec{R}_B} \sum_{K'} H_{B^*}^{BK'} e^{i\vec{K}'\vec{R}_B} U_{ABK'}^* \int (E - E_{ABK'}^*) \int (E - E_{KK'})^* \quad (13 IV)$$

$U_{ABK}^* = \dots\dots\dots$ expresión análoga cambiando A por B.

Antes de proseguir, debemos hacer notar que los términos descritos en el 4º y 5º sumando son del mismo tipo que los descritos en el 2º y 3º respectivamente (es decir procesos tipos y tipos I respectivamente); pero puede mostrarse mediante el uso del sistema original de ecuaciones (1), que difieren de los primeros por la distinta ordenación temporal de los eventos.

Multiplicando las (13) por $(E - E_{ABK}^*)$ y $(E - E_{ABK}^*)$ respectivamente y recordando que $\int(x) = 1$ tendremos:

$$U_{ABK}^* = \frac{(E - E_{ABK}^*)}{(E - E_{ABK}^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_B)} \left\{ H_{AK}^* e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} + U_{ABK}^* \int (E - E_{ABK}^*) \cdot I(E - E_K; R_{AB}) + \right. \\ + H_{AK}^* e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} \sum_{K'} H_{B^*}^{BK'} e^{i\vec{K}'\vec{R}_B} U_{ABK'}^* \int (E - E_{ABK'}^*) \int (E - E_{KK'})^* \\ +$$

$$/// + H_{BK}^B e^{-i\vec{k}\vec{R}_B} \sum_{K'} H_{B^*}^{BK'} e^{i\vec{k}'\vec{R}_B} U_{ABK'}^* \left\{ (E - E_{ABK'}) \zeta (E - E_{KK'}) \right\}$$

(13' IV)

$$U_{ABK} = \frac{(E - E_{ABK}^*)}{(E - E_{ABK}^* - \frac{i\hbar}{2}\gamma_A)} \left\{ H_{BK}^B e^{-i\vec{k}\vec{R}_B} \dots \dots \dots \right.$$

Podemos evaluar en buena aproximación las contribuciones de los procesos dados en el 3º y 4º sumandos, reemplazando en ellos a $U_{ABK'}^*$ y U_{ABK} esencialmente por sus términos de 1º orden (ya que el resto de los términos son como mínimo de 3º orden).

Así poniendo:

$$U_{ABK'}^* \approx \frac{(E - E_{ABK'}^*)}{(E - E_{ABK'}^* - \frac{i\hbar}{2}\gamma_B)} H_{AK'}^A e^{-i\vec{k}'\vec{R}_A} \quad U_{ABK} \approx \frac{(E - E_{ABK}^*) H_{BK}^B e^{-i\vec{k}\vec{R}_B}}{(E - E_{ABK}^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_A)}$$

(14 IV)

(Que son los valores adoptados por estas amplitudes en el caso de independencia de las fuentes A y B).

Para el primero de los sumandos señalados tendremos entonces:

$$H_{AK}^A e^{-i\vec{k}\vec{R}_A} \sum_{K'} \frac{H_{B^*}^{BK'} H_{BK'}^B \zeta (E - E_{KK'})}{(E - E_{ABK'}^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_A)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_{AK}^A e^{-i\vec{k}\vec{R}_A} \sum_{K'} \frac{|H_{B^*}^{BK'}|^2}{(E - E_{ABK'}^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_A)(E - E_{KK'} + i\epsilon)}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H_{AK}^A e^{-i\vec{k}\vec{R}_A}}{(E_K - E_A + i(\frac{i\hbar}{2}\gamma_A - \epsilon))} \left\{ \sum_{K'} \frac{|H|^2}{(E - E_{KK'} + i\epsilon)} - \sum_{K'} \frac{|H|^2}{(E - E_{ABK'}^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_A)} \right\}$$

Usando las notaciones adoptadas en (10) limitándonos siempre a la parte real de las constantes de "damping" pondremos:

$$= \frac{H_{AK}^A e^{-i\vec{k}\vec{R}_A}}{(E_K - E_A + \frac{i\hbar}{2}\gamma_A)} \left\{ -\frac{i\hbar}{2}\gamma_B (E - E_K) - \frac{i\hbar}{2}\gamma_B (E - E_A + \frac{i\hbar}{2}\gamma_A) \right\} \approx 0$$

Puesto que como hemos mencionado, γ_B es un término lentamente variable con la energía y además E_K difiere de E_A a lo sumo en el orden de .

Para el segundo de los sumandos señalados tendremos:

///

$$\begin{aligned}
 & \frac{H_{BK}^B e^{-i\vec{K}\vec{R}_B}}{\sum_{K'} \frac{H_{BK'}^B H_{AK'}^A e^{i\vec{K}'(\vec{R}_B - \vec{R}_A)} \zeta(E - E_{KK'})}{(E - E_{ABK}^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_B)}} = \\
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} & \frac{H_{BK}^B e^{-i\vec{K}\vec{R}_B}}{(E_K - E_B^* + i(\frac{\hbar}{2}\gamma_2 - \epsilon))} \left\{ \sum_{K'} \frac{H_{BK'}^B H_{AK'}^A e^{i\vec{K}'\vec{R}_{AB}}}{(E - E_{KK'} + i\epsilon)} - \sum_{K'} \frac{H_{BK'}^B H_{AK'}^A e^{i\vec{K}'\vec{R}_{AB}}}{(E - E_{ABK'}^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_3)} \right\}
 \end{aligned}$$

Usando las notaciones adoptadas en (12) pondremos:

$$= \frac{H_{BK}^B e^{-i\vec{K}\vec{R}_B}}{(E_K - E_B^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_B)} \left\{ I(E - E_K; R_{AB}) - I(E - E_B^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_3; R_{AB}) \right\}$$

Si recordamos las propiedades (12.a), (12.b) y (12.c) vemos que: para $R_{AB} \rightarrow 0$ (tenemos la situación discutida en la corrección anterior) ($R_{AB} < \bar{\lambda}$)

para $R_{AB} \rightarrow \infty$ (este término es nulo por serlo I) ($R_{AB} \gg \bar{\lambda}$)

Sin embargo por la (12.d) vemos que para un orden intermedio de distancias ($R_{AB} > \bar{\lambda}$) tenemos para el término I una variación sinusoidal con la energía, es decir; ya no tenemos la situación discutida en la corrección anterior. Por comodidad escribiremos esta corrección en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \frac{H_{BK}^B e^{-i\vec{K}\vec{R}_B} I(E - E_K; R_{AB})}{(E_K - E_B + \frac{i\hbar}{2}\gamma_B)} \left(1 - \frac{I(E - E_B^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_B; R_{AB})}{I(E - E_K; R_{AB})} \right) = \\
 & = \frac{H_{BK}^B e^{-i\vec{K}\vec{R}_B} I(E - E_K; R_{AB})}{(E_K - E_B^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_B)} \left(1 - e^{i(E_K - E_B^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_B) R_{AB}/\hbar c} \right)
 \end{aligned}$$

(15 IV)

Para fijar ideas respecto a la importancia de esta corrección podemos dar órdenes de magnitud; así para el espectro visible:

$$\bar{\lambda} \cong 10^{-5} \text{ cm.} \quad ; \quad c/\gamma \cong 3 \cdot 10^2 \text{ cm.} = 3 \cdot 10^7 \bar{\lambda}$$

///

///y para el rango de distancias en consideración: $R_{AB} > \bar{\lambda}$

$$I = \hbar \gamma / 2 \cdot \bar{\lambda} / R_{AB}$$

Tenemos:

$$(1 - e^{-\delta/c \cdot R_{AB}}) = (1 - e^{-10^{-7} R_{AB}/\lambda}) \approx 0$$

Como vemos también es posible dejar de lado la corrección (15); es decir, podemos limitarnos en esencia a los dos primeros sumandos en la expresión (13') con lo cual tendremos:

$$U_{ABK}^*(E) \cdot (E - E_{ABK}^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_B) = (E - E_{ABK}^*) \left[H_{AK}^A e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} + U_{ABK}^* \cdot \int (E - E_{ABK}^*) I (E - E_K; R_{AB}) \right]$$

$$U_{ABK}^*(E) (E - E_{ABK}^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_A) = (E - E_{ABK}^*) \left[H_{BK}^B e^{-i\vec{K}\vec{R}_B} + U_{ABK}^* \int (E - E_{ABK}^*) \cdot I (E - E_K; R_{AB}) \right]$$

Resolviendo este sistema encontramos:

$$U_{ABK}^* = \frac{(E - E_{ABK}^*)}{E - E_{ABK}^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_B - \frac{I_K^2(E; R_{AB})}{E - E_{ABK}^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_A}} \left\{ H_{AK}^A e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} + \frac{I(E - E_K; R_{AB}) H_{BK}^B e^{-i\vec{K}\vec{R}_B}}{(E - E_{ABK}^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_A)} \right\}$$

(16 IV)

$$U_{ABK}^* = \frac{(E - E_{ABK}^*)}{E - E_{ABK}^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_A - \frac{I_K^2(E; R_{AB})}{E - E_{ABK}^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_B}} \left\{ H_{BK}^B e^{-i\vec{K}\vec{R}_B} + \frac{I(E - E_K; R_{AB}) H_{AK}^A e^{-i\vec{K}\vec{R}_A}}{(E - E_{ABK}^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_B)} \right\}$$

Estas expresiones contienen todos los hechos esenciales para nuestro problema. Tomando una cualquiera de las amplitudes análogas; por ej., la U_{ABK}^* tenemos el siguiente origen para cada uno de los términos.

El primer término corresponde a la emisión en primer orden del fotón en estado K por parte del átomo A, permaneciendo B en su estado excitado. El 2º es un término

/// sistemas independientes. De la expresión anterior puede verse de inmediato (dado el orden de las correcciones) que en muy buena aproximación siempre es posible considerar:

$$-ik_{\frac{1}{2}} \Gamma(E_{AB}^{xx}) = -ih_{\frac{1}{2}}(\gamma_A + \gamma_B) \quad (18 \text{ IV})$$

Para el caso $R_{AB} \rightarrow \infty$ ($R_{AB} \gg \bar{\lambda}$; $I_K \rightarrow 0$) esto es obvio, pues tenemos

$$-i\frac{1}{2}k \Gamma(E_{AB}^{xx}) = \sum_K \frac{|H_{AK}^x|^2}{E_A^x - E_K + \frac{1}{2}ih\gamma_B} + \sum_K \frac{|H_{BK}^x|^2}{E_B^x - E_K + \frac{1}{2}ih\gamma_A}$$

Usando las notaciones adoptadas en (10) y (11) (considerando siempre la parte imaginaria de estas integrales ya que no estamos interesados en corrimientos de frecuencia podemos poner:

$$-ih_{\frac{1}{2}} \Gamma(E_{AB}^{xx}) = -\frac{1}{2}ih\gamma_A(E_A + \frac{1}{2}ih\gamma_B) + -ih_{\frac{1}{2}}\gamma_B(E_B + \frac{1}{2}ih\gamma_A) = -\frac{1}{2}ih(\gamma_A + \gamma_B)$$

En el caso ideal ($R_{AB} \rightarrow 0$ ($R_{AB} < \bar{\lambda}$) obtenemos un resultado similar; en efecto: para facilitar el análisis consideremos

$K_A = K_B = K_0$; $\gamma_A = \gamma_B = \gamma$, entonces:

$$-ik_{\frac{1}{2}} \Gamma(E) = \sum_K |H|^2 \frac{2(E - E_{OK} + \frac{1}{2}ih\gamma) + I_K(e^{-i\vec{K}\vec{R}}_{AB} + e^{+i\vec{K}\vec{R}}_{AB})}{(E - E_{OK} + \frac{1}{2}ih\gamma)^2 - I_K^2}$$

Ahora bien considerando que $\lim_{R_{AB} \rightarrow 0} I_K = -\frac{ih}{2}\gamma$ (ver ap. III)

tendremos:

$$\begin{aligned} -ik_{\frac{1}{2}} \Gamma(2E_0) &= 2 \sum_K |H|^2 \frac{(E_0 - E_K + \frac{1}{2}ih\gamma) - \frac{1}{2}ih\gamma}{(E_0 - E_K + \frac{1}{2}ih\gamma)^2 - (ih_{\frac{1}{2}}\gamma)^2} \\ &= 2 \sum_K |H|^2 \frac{1}{(E_0 - E_K + \frac{1}{2}ih\gamma) + \frac{1}{2}ih\gamma} \end{aligned}$$

Considerando nuevamente la notación adoptada en (10) y (11) tendremos:

$$-ik \Gamma(2E_0) = 2(-i\frac{1}{2}k) \gamma (E_0 + i\frac{1}{2}k\gamma) = -2 \cdot -\frac{1}{2}ih\gamma$$

Este es por supuesto un resultado ideal, que sirve para darnos

/// una idea del comportamiento del sistema a pequeñas distancias (un cálculo más correcto debería incluir la interacción electrostática entre ambos átomos.

Para un orden intermedio de distancias ($R_{AB} > \bar{\lambda}$) es posible un cálculo usando la expresión aproximada de $I(E - E_K; R_{AB})$ dada en (12.d); así para el caso de átomos idénticos (no necesariamente igualmente orientados)

$$I(E_{AB}^* - E_K; R_{AB}) = -3/4 \left(\frac{1}{2} \hbar \gamma\right) \frac{(A+B)}{E_0 R_{AB}/\hbar c} e^{i(2E_0 - E_K)R_{AB}/\hbar c} \quad (R_{AB} > \bar{\lambda})$$

-----0000000000-----

Cálculo de las amplitudes de probabilidad:

Considerando una cualquiera de las amplitudes análogas (16) por

ej. la U_{ABK}^* , a saber:

$$U_{ABK}^* = \frac{(E - E_{ABK}^*)}{E - E_{ABK}^* + \frac{1}{2} \hbar \gamma_B} \frac{1}{E - E_{ABK}^* + \frac{1}{2} \hbar \gamma_A} \left\{ H_{AK}^* e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} + \frac{I_K(E, R_{AB}) H_{BK}^* e^{-i\vec{K}\vec{R}_B}}{(E - E_{ABK}^* + \frac{1}{2} \hbar \gamma_A)} \right\}$$

Recordando que (See Hitler loc.cit.)

$$b_n(\infty) = \frac{U_n(E_n)}{E_n - E_{AB}^* + \frac{1}{2} \hbar \Gamma(E_n)}$$

Vemos de inmediato que el factor $(E - E_{ABK}^*)$ da cuenta de su anulación para tiempos grandes ($t > 1/\gamma$) como cabía esperar.

Pasaremos ahora al cálculo de $b_{ABK}^*(t)$

por medio de: -

$$b_n(t) = -\frac{1}{2\hbar i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_n(E) \int (E - E_n) e^{i(E - E_n)t/\hbar}}{(E - E_{AB}^* + \frac{1}{2} i \hbar \Gamma(E))} dE$$

Si consideramos un orden intermedio de distancias ($R_{AB} > \bar{\lambda}$)

y despreciamos entonces términos de orden superior (λ^2/R_{AB}^2 ;

λ^3/R_{AB}^3) que nos conducen a considerar que:

$$\Gamma = \gamma_A + \gamma_B \quad \text{y} \quad I_K^2 \cong 0$$

///

//entonces podremos poner:

$$b_{ABK}^*(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{AK}^{A*} e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} e^{i(E_{ABK}^* - E)t/\hbar} dE}{(E - E_{ABK}^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_B)(E - E_{AB}^* + \frac{i\hbar}{2}(\gamma_A + \gamma_B))} +$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_K(E; R_{AB}) H_{BK}^{B*} e^{-i\vec{K}\vec{R}_B}}{(E - E_{ABK}^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_B)} \cdot \frac{1}{(E - E_{ABK}^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_A)} \cdot \frac{e^{i(E_{ABK}^* - E)t/\hbar} dE}{(E - E_{AB}^* + \frac{i\hbar}{2}(\gamma_A + \gamma_B))}$$

(I) (II)

$$= b_{ABK}^*(t) + b_{ABK}^*(t) \tag{19 IV}$$

De esta expresión podemos ver mediante un simple cálculo de residuos que:

(I)

$$b_{ABK}^*(t) = e^{-\gamma_B t/2} \cdot H_{AK}^{A*} e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} \frac{1 - e^{i(E_K - E_A + \frac{i\hbar}{2}\gamma_A)t/\hbar}}{(E_K - E_A^* + \frac{i\hbar}{2}\gamma_A)} = b_B^* \cdot b_{AK} \tag{20 IV}$$

(t > 0)

El significado físico de esta expresión es claro. Debemos hacer notar además que en el caso $R_{AB} \gg \bar{\lambda}$, cuando $I_K \sim 0$, esta expresión es correcta y corresponde al caso de emisión de dos fuentes independientes; así para este caso tendremos:

(I)

$$b_{ABK}^*(t) = b_{ABK}^*(t) = b_B^*(t) \cdot b_{AK}(t) \tag{21 IV}$$

(II)

En cuanto a $b_{ABK}^*(t)$ (cuyas contribuciones se inician en tiempos $t=R_{AB}/c$ como es posible comprobar usando la expresión aproximada de I_K dada en (12.d) para el caso de átomos idénticos) corresponde al proceso ya explicado en pag. Como vemos es un término del orden γ veces $b_{ABK}^{(I)}$ y sus contribuciones son mayores en el caso de resonancia ($K_A=K_B$) e igual orientación de los átomos A y B y por supuesto en el caso de pequeñas distancias.-

///Introduciendo las amplitudes U_{ABK}^* y U_{ABK}^* en las ecuaciones (d) y (e) del sistema (6_{IV}) obtenemos:

$$U_{ABKK}(E) = 2^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{H_{AK}^A H_{BK}^B e^{-i\vec{k}\vec{R}_A} e^{-i\vec{k}'\vec{R}_B} ((E-E_{ABK}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A) + (E-E_{ABK}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B))}{(E-E_{ABK}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)(E-E_{ABK}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A) - I_K^2(E,R)} + \frac{I_K(E, R_{AB}) ((H_{BK}^B)^2 e^{-i2\vec{k}\vec{R}_B} + (H_{AK}^A)^2 e^{-i\vec{k}\vec{R}_A})}{() () - I_K^2(E, R_{AB})} \right\}$$

$$U_{ABKK'} = \left\{ \frac{H_{AK}^A H_{BK'}^B e^{-i\vec{k}\vec{R}_A} e^{-i\vec{k}'\vec{R}_B} (E-E_{ABK}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)}{(E-E_{ABK}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)(E-E_{ABK}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A) - I_K^2(E, R_{AB})} + \frac{H_{AK'}^A H_{BK}^B e^{-i\vec{k}'\vec{R}_A} e^{-i\vec{k}\vec{R}_B} (E-E_{ABK}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)}{(E-E_{ABK}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)(E-E_{ABK}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A) - I_K^2} + \frac{I_K(E, R_{AB}) (H_{BK}^B H_{BK'}^B e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{R}_B} + H_{AK}^A H_{AK'}^A e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{R}_A})}{(E-E_{ABK}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)(E-E_{ABK}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A) - I_K^2} \right\} +$$

(22_{IV})

+ { término simétrico, cambiando K y K' }

Estamos ahora en condiciones para el cálculo de las amplitudes de probabilidad de los estados con dos fotones presentes; después de un tiempo t grande ($t \sim 1/\gamma$) estos estados son los únicos responsables de la normalización y tendremos, considerando que:

$$b_n(\infty) = \frac{U_n(E_n)}{E_n - E_0 + \frac{1}{2} i \hbar \Gamma(E_n)}$$

$$I_K(E_{KK}, R) = I(E_K, R)$$

$$I_K(E_{KK'}, R) = I(E_{K'}, R) \quad \text{ver ap. III.}$$

$$I_{K'}(E_{KK'}, R) = I(E_K, R)$$

$$b_{ABKK} = \frac{U_{ABKK}(E_{KK})}{E_{KK} - E_{AB}^* + \frac{1}{2} i \hbar \Gamma(E_{KK})}$$

$$b_{ABKK'} = \frac{U_{ABKK'}(E_{KK'})}{E_{KK'} - E_{AB}^* + \frac{1}{2} i \hbar \Gamma(E_{KK'})}$$

////

Para el caso $R \rightarrow \infty$ ($R \rightarrow \infty$) un cálculo sencillo nos muestra que:

$$b_{ABKK}(t) = 2^{\frac{1}{2}} b_{AK}(t) b_{BK}(t)$$

$$b_{ABKK'}(t) = b_{AK}(t) b_{BK'}(t) + b_{AK'}(t) b_{BK}(t) \quad (24 \text{ IV})$$

donde las amplitudes b_{AK} y b_{BK} son las amplitudes de los campos que emitirían espontáneamente los átomos A y B aislados, es decir

$$b_{AK} = K_{AK}^A e^{-i\vec{kR}_A} \frac{1 - e^{i(E_K - E_A^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)t/\hbar}}{(E_K - E_A^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)}; \quad b_{BK} = H_{BK}^B e^{-i\vec{kR}_B} \dots\dots\dots$$

Para tiempos grandes ($t \rightarrow \infty$, en esencia $t > 1/\gamma$) las expresiones (21) válidas para $R_{AB} \rightarrow \infty$ pueden comprobarse directamente de las expresiones genéricas (20) teniendo en cuenta que para el orden de distancias considerado es $I = 0$ y

$$\Gamma = \gamma_A + \gamma_B$$

Notemos sin embargo que en este último caso, es decir para $R_{AB} \rightarrow \infty$ el paquete de dos fotones puede ser representado por un producto simetrizado de dos paquetes de un fotón, de acuerdo con la estadística de Bose-Einstein para los fotones. En este caso se trata de fotones que nacieron por dos procesos independientes (ver pag.).-

En el caso $R_{AB} < c/\gamma$ ésta independencia ya no existe y una representación por productos individuales ya no es posible (ver expresión 20). Las correlaciones existentes entre los procesos de emisión de los fotones, se manifiestan luego por términos no separables en productos simples.

Podemos aclarar aún más esta aseveración con un simple desarrollo en serie de la expresión (20)

///(donde el orden de distancias considerado involucra la consideración de la interacción radiativa entre las fuentes emisoras $I \neq 0$); en efecto despreciando términos de orden superior a $\bar{\lambda}/R_{AB}$ podemos poner la siguiente expresión más compacta que muestra claramente aún los hechos esenciales:

$$b_{ABKK}(oo) = 2^{\frac{1}{2}} b_{AK}(oo) b_{BK}(oo) + 2^{\frac{1}{2}} I(K, R_{AB}) \cdot$$

$$\frac{H_{BK}^{B^*} H_{BK}^{B^*} e^{-2i\vec{k}\vec{R}_B} + H_{AK}^{A^*} H_{AK}^{A^*} e^{-i2\vec{k}\vec{R}_A}}{(E_K - E_B^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)(E_K - E_A^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)(E_{KK} - E_{AB}^* + \frac{1}{2}i\hbar(\gamma_A + \gamma_B))}$$

$$b_{ABKK'}(oo) = b_{AK}(oo) b_{BK'}(oo) + b_{AK'}(oo) b_{BK}(oo) +$$

$$+ \left[\frac{I(K', R_{AB})}{(E_{K'} - E_B^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)(E_{K'} - E_A^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)} + \frac{I(K, R_{AB})}{(E_K - E_B^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)(E_K - E_A^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)} \right] \cdot$$

$$\left[\frac{H_{BK}^{B^*} H_{BK'}^{B^*} e^{-i(\vec{K} + \vec{K}')\vec{R}_B} + H_{AK}^{A^*} H_{AK'}^{A^*} e^{-i(\vec{K} + \vec{K}')\vec{R}_A}}{(E_{KK'} - E_{AB}^* + \frac{1}{2}i\hbar(\gamma_A + \gamma_B))} \right]$$

Donde: (con las aproximaciones descriptas)

$$I(K, R_{AB}) = -3/4 \cdot \frac{1}{2}\hbar\gamma \cdot \left(\frac{A}{K} + \frac{B}{R_{AB}} \right) e^{iKR_{AB}}$$

$$r \approx \gamma_A + \gamma_B + O.\text{sup.}(\lambda/R_{AB})$$

Como vemos la interacción radiativa entre las fuentes ($I \neq 0$) nos proporciona términos extra no separables en productos simples simetrizados de procesos independientes.

APENDICE V

CALCULO DEL "GRADO DE COHERENCIA" EN FUNCION DE LAS FRECUENCIAS, ORIENTACIONES Y DISTANCIA RELATIVA ENTRE LAS FUENTES EMISORAS A y B

$$\beta = \sum_{\vec{k}_\lambda} b_{AK_\lambda}(t) b_{BK_\lambda}^*(t) \quad (1)$$

Usando

$$b_{AK_\lambda} = H_{AK_\lambda}^A e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}_A} \frac{1 - e^{i(\epsilon_K - \epsilon_A^* + \frac{1}{2} i \hbar \gamma_A) t / \hbar}}{(\epsilon_K - \epsilon_A^* + \frac{1}{2} i \hbar \gamma_A)} \quad (2)$$

$$b_{BK_\lambda} = H_{BK_\lambda}^B e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}_B} \frac{1 - e^{-i(\epsilon_K - \epsilon_B^* + \frac{1}{2} i \hbar \gamma_B) t / \hbar}}{(\epsilon_K - \epsilon_B^* + \frac{1}{2} i \hbar \gamma_B)}$$

para los tiempos de interés físico $t \gg 1/\gamma$ tendremos:

$$\beta(\infty) = \sum_{\vec{k}_\lambda} \frac{H_{AK_\lambda}^A (H_{BK_\lambda}^B)^* e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_{AB}}}{(\epsilon_K - \epsilon_A^* + \frac{1}{2} i \hbar \gamma_A)(\epsilon_K - \epsilon_B^* - \frac{1}{2} i \hbar \gamma_B)} \quad (3)$$

I) Para el caso ideal $R \rightarrow 0$ (si consideramos átomos A y B idénticos e igualmente orientados) surge inmediatamente de la condición de normalización del paquete, (o bien por cálculo directo) que:

$$\beta(\infty) = \sum_{\vec{k}_\lambda} |b_{AK_\lambda}(\infty)|^2 = 1 \quad (4)$$

II) Para el caso más general consideremos que (tomando en cuenta emisión dipolar únicamente):

$$H_{AK_\lambda}^A = i e K_A c (2 \hbar / L^3 K c)^{\frac{1}{2}} (\vec{\epsilon}_{\vec{k}_\lambda} \cdot \vec{r}_{AA}^*) \quad \epsilon_A = \hbar c K_A$$

$$H_{BK_\lambda}^B = -i e K_B c (2 \hbar / L^3 K c)^{\frac{1}{2}} (\vec{\epsilon}_{\vec{k}_\lambda} \cdot \vec{r}_{BB}^*) \quad \epsilon_B = \hbar c K_B$$

entonces:-

$$\beta(\infty) = \frac{e^2 K_A K_B 2\pi}{L^3 \hbar c} \cdot \sum_{\vec{k}_\lambda} \frac{(\vec{\epsilon}_{\vec{k}_\lambda} \cdot \vec{r}_A)(\vec{\epsilon}_{\vec{k}_\lambda} \cdot \vec{r}_B) e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_{AB}}}{K (K - K_A + \frac{1}{2} i \gamma_A / c)(K - K_B - \frac{1}{2} i \gamma_B / c)}$$

a) Suma sobre polarizaciones

$$\beta(\infty) = \frac{e^2 K_A K_B 2\pi}{L^3 \hbar c} \cdot \sum_K \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_{AB}}}{K (K - K_A + \frac{1}{2} i \gamma_A / c)(K - K_B - \frac{1}{2} i \gamma_B / c)}$$

$$\cdot \left(\sum_{\lambda=1,2} (\vec{\epsilon}_{\vec{k}_\lambda} \cdot \vec{r}_A)(\vec{\epsilon}_{\vec{k}_\lambda} \cdot \vec{r}_B) \right) \quad \text{///}$$

////

Usando las técnicas desarrolladas en el ap.II podemos poner:-

$$\beta(\infty) = \frac{e^2 K_A K_B 2\pi}{L^3 h c} \left\{ \frac{\int \frac{(\vec{r}_A \cdot \vec{r}_B) e^{i\vec{K}\vec{R}}_{AB}}{K (K - K_A + \frac{1}{2}i\gamma_A/c)(K - K_B - \frac{1}{2}i\gamma_B/c)} + \vec{r}_B \text{ grad. div}_R \int \frac{\vec{r}_A}{K^2} \cdot \frac{e^{i\vec{K}\vec{R}}_{AB}}{(K - K_A + \frac{1}{2}i\gamma_A/c)(K - K_B - \frac{1}{2}i\gamma_B/c)K} \right\}$$

b) Suma sobre direcciones y energías

usando $\int_K = \frac{L^3 K^2 dK d\Omega}{(2\pi)^3}$ transformaremos la suma anterior

en:

$$\beta(\infty) = \frac{e^2 K_A K_B}{(2\pi)^2 h c}$$

$$\left\{ \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(\vec{r}_A \cdot \vec{r}_B) e^{iKR \cos\theta} \text{sen}\theta K dK d\theta d\varphi}{(K - K_A + \frac{1}{2}i\gamma_A/c)(K - K_B - \frac{1}{2}i\gamma_B/c)} + \vec{r}_B \text{ grad}_R \text{ div}_R \int \int \int \frac{\vec{r}_A}{K^2} \frac{e^{iKR \cos\theta} \text{sen}\theta K dK d\theta d\varphi}{(K - K_A + \frac{1}{2}i\gamma_A/c)(K - K_B - \frac{1}{2}i\gamma_B/c)} \right\}$$

Siguiendo los lineamientos del apéndice II (ó III) tendremos después de integrar sobre φ y θ .-

$$\beta(\infty) = \frac{e^2 K_A K_B}{\pi h c} \left\{ \int_0^\infty (\vec{r}_A \cdot \vec{r}_B) \frac{\text{sen}KR}{KR} \frac{K dK}{(K - K_A + \frac{1}{2}i\gamma_A/c)(K - K_B - \frac{1}{2}i\gamma_B/c)} + \vec{r}_B \cdot \text{grad div} \int_0^\infty \frac{\vec{r}_A}{K^2} \frac{\text{sen}KR}{KR} \frac{K dK}{(K - K_A + \frac{1}{2}i\gamma_A/c)(K - K_B - \frac{1}{2}i\gamma_B/c)} \right\}$$

Calculando se obtiene (ver ap.III), $\text{graddiv}(\frac{\vec{r}_A}{2}) \cdot \frac{\text{sen}KR}{KR} =$

$$= \left\{ \frac{-(\vec{r}_A \cdot \vec{R})\vec{R}}{KR} \text{sen}KR + \frac{(\vec{r}_A - 3(\vec{r}_A \cdot \vec{R})\vec{R})\text{cos}KR}{(KR)^2} - \frac{(\vec{r}_A - 3(\vec{r}_A \cdot \vec{R})\vec{R})\text{sen}KR}{(KR)^3} \right\}$$

Introduciendo en la integral anterior:-

$$\beta(\infty) = \frac{e^2 K_A K_B / r_A / r_B}{2 \pi h c}$$

$$\left\{ \int_0^\infty \left[\frac{A+B}{KR} - \frac{2B}{(KR)^3} \right] \text{sen}KR + \frac{2B}{(KR)^2} \text{cos}KR \right\} \cdot \frac{K dK}{(K - K_A + \frac{1}{2}i\gamma_A/c)(K - K_B - \frac{1}{2}i\gamma_B/c)} \tag{5}$$

//

///

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \cos\alpha + \cos\theta_A \cos\theta_B = (\hat{r}_A \cdot \hat{r}_B) + (\hat{r}_A \cdot \hat{R}_{AB})(\hat{r}_B \cdot \hat{R}_{AB}) \\ \mathcal{B} &= \cos\alpha - 3\cos\theta_A \cos\theta_B \quad (A+B) = 2((\hat{r}_A \times \hat{R}_{AB}) \cdot (\hat{r}_B \times \hat{R}_{AB})) \end{aligned}$$

De la expresión anterior vemos de inmediato que para el caso de ser despreciable toda interacción estática y radiativa entre los átomos emisores A y B. ($R \rightarrow \infty$).

$$\beta(\infty) \rightarrow 0 \quad (R_{AB} \gg \lambda)$$

como era de esperar por la condición de normalización() .-

Calcularemos ahora aproximadamente, despreciando los términos de orden superior a $1/KR$. Usando la siguiente identidad:

(es decir $R_{AB} > \lambda$)

$$\frac{1}{(K - K_A + \frac{1}{2}i\gamma_A/c)(K - K_B - \frac{1}{2}i\gamma_B/c)} = \frac{1}{[(K_A - K_B) - \frac{1}{2}i(\gamma_A + \gamma_B)/c]} \left(\frac{1}{K - K_A + \frac{1}{2}i\gamma_A/c} - \frac{1}{K - K_B - \frac{1}{2}i\gamma_B/c} \right)$$

podemos poner:

$$\beta(\infty) = \frac{e^2 K_A K_B / r_A / r_B}{2 \hbar c} \cdot \frac{2((\hat{r}_A \times \hat{R}_{AB}) \cdot (\hat{r}_B \times \hat{R}_{AB}))}{[(K_A - K_B) - \frac{1}{2}i(\gamma_A + \gamma_B)/c]} \cdot \frac{1}{R_{AB}} \int_0^\infty \left[\frac{\text{sen}KR}{K - K_A + \frac{1}{2}i\gamma_A/c} - \frac{\text{sen}KR}{K - K_B - \frac{1}{2}i\gamma_B/c} \right] dK \quad (6)$$

Dado que la mayor contribución a la integral proviene de un rango muy estrecho de frecuencias centradas alrededor de K_A y K_B , podremos sin error apreciable y para mayor sencillez extender la integración a todo el espectro. Un simple cálculo de residuos nos proporciona entonces:-

$$\begin{aligned} \beta(\infty) &= \frac{e^2 K_A K_B / r_A / r_B}{2 \hbar c} \cdot \frac{2((\hat{r}_A \times \hat{R}_{AB}) \cdot (\hat{r}_B \times \hat{R}_{AB}))}{[(K_A - K_B) - \frac{1}{2}i(\gamma_A + \gamma_B)/c]} \cdot \frac{1}{R_{AB}} \\ &\cdot (e^{-iK_A R_{AB}} e^{-\gamma_A/2c R_{AB}} - e^{iK_B R_{AB}} e^{-\gamma_B/2c R_{AB}}) \quad (7) \end{aligned}$$

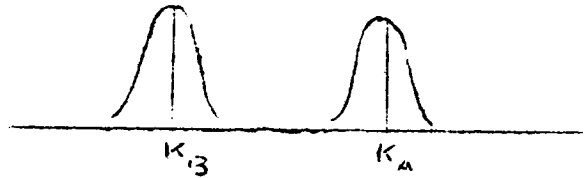
De la expresión anterior surge de inmediato que //

///

/// $\beta(\infty) = 0$ por:

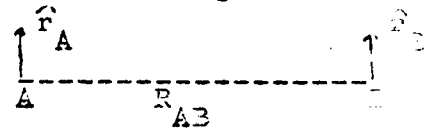
a) $(A + B) = 0$ polarización ortogonal de la luz proveniente de A y B.

b) $\begin{cases} K_A \gg K_B \\ \gamma_A, \gamma_B \ll K_A - K_B \end{cases} \rightarrow$



c) $R > 2c/\gamma = l_c$ "longitud de coherencia"

Para el caso más favorable de átomos idénticos e igualmente orientados en la forma siguiente:



$$(A + B) = 2((\hat{r}_A \times \hat{R}_{AB}) \cdot (\hat{r}_B \times \hat{R}_{AB})) = 2$$

\hat{r} = vectores unitarios

$$\gamma/2c = \frac{2 e^2 K_0^3 / r^2}{3 h c}$$

(Ver ap. III/4)

$$\beta(\infty) = 3/2 \frac{\text{sen} K_0 R_{AB}}{K_0 R_{AB}} e^{-\gamma/2c R_{AB}} \quad (R_{AB})$$

(8)

III) Es posible un cálculo más expeditivo y correcto de la expresión ($t \sim 1/\gamma$); así partiendo de la expresión (3), a saber:

$$\beta(t \sim 1/\gamma) = \frac{\sum_{\kappa} \frac{H_{AK}^A H_{B\kappa}^B e^{i\vec{K}\vec{R}_{AB}}}{(E_{\kappa} - E_A + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)(E_{\kappa} - E_B - \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)}}{\dots}$$

que pondremos en la forma siguiente

$$\beta(\infty) = \frac{1}{[(E_A - E_B) - \frac{1}{2}i\hbar(\gamma_A + \gamma_B)]} \cdot \sum_{\kappa} \left[\frac{H_{AK}^A H_{B\kappa}^B e^{i\vec{K}\vec{R}_{AB}}}{[(E_{\kappa} - E_B + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B) - E_K]} - \frac{H_{AK}^A H_{B\kappa}^B e^{i\vec{K}\vec{R}_{AB}}}{[(E_A - \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A) - E_K]} \right]$$

Recordando que (Ver ap. III)

$$I(E; R_{AB}) = \sum_{\kappa} \frac{H_{AK}^A H_{B\kappa}^B e^{i\vec{K}\vec{R}_{AB}}}{(E - E_K)} \zeta(E - E_K) = \sum_{\kappa} \frac{H_{B\kappa}^B H_{AK}^A e^{-i\vec{K}\vec{R}_{AB}}}{(E - E_K)} \zeta(E - E_K)$$

donde $\zeta(E - E_K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{[(E + i\epsilon) - E_K]}$

Podemos poner:

$$\beta(\infty) = \frac{1}{[(E_A - E_B) - \frac{1}{2}i\hbar(\gamma_A + \gamma_B)]} \quad (9)$$

$$\cdot \left\{ I(E_B + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B; R_{AB}) - I(E_A + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A; R_{AB}) \right\} //$$

///

Que coincide con (5) cuando expresemos I en la forma usada en ap. III.

Para el caso de átomos idénticos ($E_A = E_B = E_0$; $\gamma_A = \gamma_B = \gamma$) tenemos:

$$\beta(\infty) = \beta^*(\infty) = - \frac{1}{\frac{1}{2}\hbar\gamma} \text{Imag. } I(E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma; R_{AB}) \quad (10)$$

Si consideramos la expresión aproximada de I para distancias R_{AB} (ver ap. III) a saber:

$$I(E_0; R_{AB}) \approx -\frac{1}{2}\hbar\gamma \cdot \frac{3}{4} \frac{(A+B)}{E_0 R_{AB}/\hbar c} e^{iE_0 R_{AB}/\hbar c} \quad (R_{AB} > \bar{\lambda})$$

y reemplazando en (10) obtenemos:

$$\beta(\infty) \approx \frac{3}{4} (A+B) \frac{\text{sen} E_0 R_{AB}/\hbar c}{E_0 R_{AB}/\hbar c} e^{-R_{AB}/2\bar{\lambda}} \quad (R_{AB} > \bar{\lambda}) \quad (11)$$

que coincide con (8) para el caso de átomos igualmente orientados

$$(A+B) = 2$$

IV) Comprobaremos ahora en muy buena aproximación que:

$$\beta(t) = 0 \quad \text{para } t < R_{AB}/c \quad (12)$$

(esto es evidente para $t = 0$).

partiendo de las expresiones genéricas (2) y usando (1) podemos poner en forma general para todo tiempo :

$$\beta(t) = \int_{\vec{K}} \frac{H_A^A K^A H_B^B K^B e^{i\vec{K}(\vec{R}_B - \vec{R}_A)}}{(\hbar c)^2 (K - K_A + \frac{1}{2}i\gamma_A/c)(K - K_B - \frac{1}{2}i\gamma_B/c)} +$$

$$+ e^{-i[(K_A - K_B) - \frac{1}{2}i(\gamma_A + \gamma_B)/c] ct} \int_{\vec{K}} \dots +$$

$$- e^{-i(K_A - \frac{1}{2}i\gamma_A/c) ct} \int_{\vec{K}} \dots e^{iKct} +$$

$$- e^{i(K_B + \frac{1}{2}i\gamma_B/c) ct} \int_{\vec{K}} \dots e^{-iKct}$$

///

//// que podemos poner en la siguiente forma:

$$\beta(t) = \beta(\infty) + e^{-i \left[(K_A - K_B) - \frac{1}{2}i(\gamma_A + \gamma_B)/c \right] ct} \beta(\infty) + \beta'(t) + \beta''(t)$$

donde:

$$\beta'(t) = -e^{-i(K_A - \frac{1}{2}i\gamma_A/c)ct} \int_K \frac{H_{AK}^A H_{B^*K}^B e^{i\vec{K}(\vec{R}_B - \vec{R}_A)} e^{iKct}}{(hc)^2 (K - K_A + \frac{1}{2}i\gamma_A/c)(K - K_B - \frac{1}{2}i\gamma_B/c)} dK$$

$$\beta''(t) = -e^{i(K_B + \frac{1}{2}i\gamma_B/c)ct} \int_K \frac{H_{AK}^A H_{B^*K}^B e^{i(\vec{R}_B - \vec{R}_A)\vec{K}} e^{-iKct}}{(hc)^2 (K - K_A + \frac{1}{2}i\gamma_A/c)(K - K_B - \frac{1}{2}i\gamma_B/c)} dK$$

Podemos ahora calcular $\beta'(t)$ y $\beta''(t)$ en la misma forma que en II, y llegaremos esencialmente a expresiones del tipo (5), pero con los factores $\exp(iKct)$ y $\exp(-iKct)$ respectivamente dentro del signo integral. - (Con esto ya se muestra en forma general que $\beta(t) \rightarrow 0$ para $R_{AB} \rightarrow \infty$).

Calcularemos ahora estas integrales (tal como la (5)) en la aproximación $R_{AB} > \lambda$; así llegaremos a expresiones del tipo (6) siguientes:

$$\beta'(t) = -e^{-i(K_A - \frac{1}{2}i\gamma_A/c)ct} \text{cte.} \int_0^\infty \left[\frac{\text{sen}KR_{AB}}{(K - K_A + \frac{1}{2}i\gamma_A/c)} - \frac{\text{sen}KR_{AB}}{(K - K_B - \frac{1}{2}i\gamma_B/c)} \right] e^{iKct} dK$$

$$\beta''(t) = -e^{i(K_B + \frac{1}{2}i\gamma_B/c)ct} \text{cte.} \int_0^\infty \left[\frac{\text{sen}KR_{AB}}{(K - K_A + \frac{1}{2}i\gamma_A/c)} - \frac{\text{sen}KR_{AB}}{(K - K_B - \frac{1}{2}i\gamma_B/c)} \right] e^{-iKct} dK$$

que podemos poner en la siguiente forma más explícita para el cálculo:

$$\beta'(t) = -e^{-i(K_A - \frac{1}{2}i\gamma_A/c)ct} \text{cte.} \int_0^\infty \left[\frac{e^{iK(R+ct)} - e^{-iK(R-ct)}}{(K - K_A + \frac{1}{2}i\gamma_A/c)} - \frac{e^{iK(R+ct)} - e^{-iK(R-ct)}}{(K - K_B - \frac{1}{2}i\gamma_B/c)} \right] dK$$

$\beta''(t) = \dots\dots\dots$

Extendiendo (con los mismos razonamientos que en (6)) las integraciones a todo el dominio de frecuencias, y considerando

$$ct < R_{AB}$$

tendremos (calculando por residuos las integrales) las si//

///güientes expresiones del tipo (7):

$$\beta'(t) = -e^{-i(K_A - \frac{1}{2}i\gamma/c)ct} \text{cte.} \left[e^{-i(K_A - \frac{1}{2}i\gamma/c)(R-ct)} - e^{i(K_B + \frac{1}{2}i\gamma/c)(R+ct)} \right]$$

$$\beta''(t) = -e^{i(K_B + \frac{1}{2}i\gamma/c)ct} \text{cte.} \left[e^{-i(K_A - \frac{1}{2}i\gamma/c)(R+ct)} - e^{i(K_B + \frac{1}{2}i\gamma/c)(R-ct)} \right]$$

efectuando las operaciones , y sumando las dos expresiones de $\beta'(t)$ y $\beta''(t)$, tendremos : (en la aproximación descrita)

$$\beta'(t) + \beta''(t) = -\beta(\infty) - e^{-i \left[(K_A - K_B) - \frac{1}{2}i(\gamma_A + \gamma_B)/c \right] ct} \beta(\infty) \tag{16}$$

Introduciendo (16) en la (13) tendremos (12) es decir:

$$\beta(t) = 0 \quad \text{para } t < R_{AB}/c$$

AP. V.

NORMALIZACION DEL PAQUETE

$$\left\{ \begin{aligned} b_{ABKK} &= 2^{\frac{1}{2}} b_{AK} b_{BK} \\ b_{ABKK'} &= b_{AK} b_{BK'} + \end{aligned} \right.$$

$$(a) \sum_{\kappa} |b_{ABKK}|^2 = 2 \sum_{\kappa} |b_{AK}|^2 |b_{BK}|^2 = 4 \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\kappa} |b_{AK}|^2 |b_{BK}|^2 \right\} + b_{AK'} b_{BK}$$

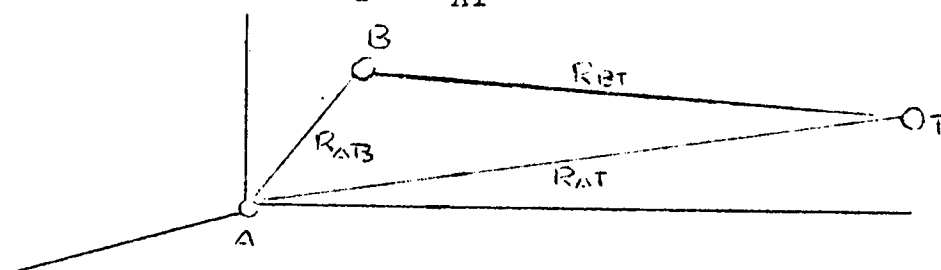
$$(b) \frac{1}{2} \sum_{\kappa \kappa'} |b_{ABKK'}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\kappa \kappa'} (|b_{AK}|^2 |b_{BK'}|^2 + |b_{AK'}|^2 |b_{BK}|^2 + b_{AK'}^* b_{AK} b_{BK'} b_{BK}^* + b_{AK'} b_{BK} b_{AK}^* b_{BK'}^*)$$

Sumando (a) y (b) y ordenando convenientemente

$$\begin{aligned} (a) + (b) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{\kappa \kappa'} |b_{AK}|^2 |b_{BK'}|^2 + \sum_{\kappa} |b_{AK}|^2 |b_{BK}|^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\sum_{\kappa \kappa'} |b_{AK'}|^2 |b_{BK}|^2 + \sum_{\kappa} |b_{AK}|^2 |b_{BK}|^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\sum_{\kappa \kappa'} b_{AK} b_{BK}^* b_{AK'}^* b_{BK'} + \sum_{\kappa} b_{AK} b_{BK}^* b_{AK}^* b_{BK} \right] + \frac{1}{2} [\dots] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\kappa} |b_{AK}|^2 \cdot \sum_{\kappa'} |b_{BK'}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\kappa'} |b_{AK'}|^2 \cdot \sum_{\kappa} |b_{BK}|^2 + \dots \\ &= \sum_{\kappa} |b_{AK}|^2 \cdot \sum_{\kappa} |b_{BK}|^2 + \sum_{\kappa} b_{AK} b_{BK}^* \cdot \sum_{\kappa} b_{AK}^* b_{BK} \\ &= \sum_{\kappa} |b_{AK}|^2 \sum_{\kappa} |b_{BK}|^2 + |\beta|^2 \end{aligned}$$

APENDICE VI: CAMPO DE DOS FOTONES Y SU INTENSIDAD EN UN PUNTO DEL ESPACIO

Tenemos como fuentes emisoras los átomos A y B (inicialmente en estados excitados A y B respectivamente y ubicados a la distancia relativa $R_{AB} = R_B$); como cuerpo de prueba tenemos el átomo T (inicialmente en su estado fundamental y ubicado en el lugar de coordenadas $R_T = R_{AT}$).



Según los desarrollos perturbativos habituales y limitándose a los términos en resonancia directa, emisión de un sólo fotón por cada átomo etc., tenemos los siguientes estados:

EST. INICIAL	1er. ORDEN	2º ORDEN	3er. ORDEN
b_{ABT}	b_{ABTK}	$b_{ABT} \quad (b)$	b_{ABTK}
	b_{ABTK}	$b_{ABTKK'} \quad (a)$	
	b_{ABTK}	$b_{ABT} \quad (c)$	

Podemos ver de inmediato (con los desarrollos y resultados anteriormente obtenidos) que las contribuciones del 2º orden provienen sensiblemente de los estados (a), puesto que la probabilidad de ocurrencia de uno cualquiera de los estados (b) o (c) es despreciable frente a la probabilidad de aparición de los dos fotones. Así tendremos entonces el siguiente esquema de ecuaciones:

$$i\hbar \dot{b}_{ABT}^{xx} = \sum_K (H_{AB}^{xABTK} b_{ABTK}^{xx} e^{i(E_A^x - E_K) t/\hbar} + H_{AB}^{xABTK} b_{ABTK}^{xx} e^{i(E_B^x - E_K) t/\hbar} + i\hbar \delta(t)) \quad (a)$$

$$i\hbar \dot{b}_{ABTK}^x = H_{ABTK}^{xABT} b_{ABT}^{xx} e^{i(E_K - E_A^x) t/\hbar} + \sum_{K'} H_{ABTK}^{xABTKK'} b_{ABTKK'}^{xx} e^{i(E_B^x - E_{K'}) t/\hbar} \quad (b)$$

$$i\hbar \dot{b}_{ABTK}^x = H_{ABTK}^{xABT} b_{ABT}^{xx} e^{i(E_K - E_B^x) t/\hbar} + \sum_{K'} H_{ABTK}^{xABTKK'} b_{ABTKK'}^{xx} e^{i(E_A^x - E_{K'}) t/\hbar} \quad (c)$$

$$\begin{aligned}
 \text{///} \\
 i\hbar \dot{b}_{\Delta BTKK'} = & H_{\Delta BTKK'}^{\Delta BTK} b_{\Delta BTK}^{\Delta BTK} e^{i(E_K' - E_B^*)t/\hbar} + H_{\Delta BTKK'}^{\Delta BTK} \sqrt{b_{\Delta BTK}^{\Delta BTK}} e^{i(E_K' - E_A^*)t/\hbar} + \\
 & + H_{\Delta BTKK'}^{\Delta BTK'} b_{\Delta BTK'}^{\Delta BTK'} e^{i(E_K - E_B^*)t/\hbar} + H_{\Delta BTKK'}^{\Delta BTK'} b_{\Delta BTK'}^{\Delta BTK'} e^{i(E_K - E_A^*)t/\hbar} + \\
 & + H_{\Delta BTKK'}^{\Delta BTK} b_{\Delta BTK}^{\Delta BTK} e^{i(E_K' - E_T^*)t/\hbar} + H_{\Delta BTKK'}^{\Delta BTK'} b_{\Delta BTK'}^{\Delta BTK'} e^{i(E_K - E_T^*)t/\hbar}
 \end{aligned} \quad (d)$$

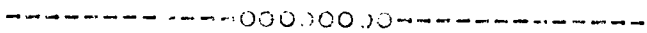
$$\begin{aligned}
 i\hbar \dot{b}_{\Delta BTKK} = & H_{\Delta BTKK}^{\Delta BTK} b_{\Delta BTK}^{\Delta BTK} e^{i(E_K - E_B^*)t/\hbar} + H_{\Delta BTKK}^{\Delta BTK} b_{\Delta BTK}^{\Delta BTK} e^{i(E_K - E_A^*)t/\hbar} + \\
 & H_{\Delta BTKK}^{\Delta BTK} b_{\Delta BTK}^{\Delta BTK} e^{i(E_K - E_T^*)t/\hbar}
 \end{aligned} \quad (e)$$

$$i\hbar \dot{b}_{\Delta BTK} = \sum_{K'} H_{\Delta BTK}^{\Delta BTKK'} b_{\Delta BTKK'}^{\Delta BTKK'} e^{i(E_T^* - E_{K'})t/\hbar} \quad (f)$$

(1_{VI})

Ahora bien en este esquema de ecuaciones los términos subrayados corresponden a términos de reemisión de la zonda, una vez ésta en su estado excitado; como en nuestro problema estamos interesados en las amplitudes $b_{\Delta BTK}^{\Delta BTK}(t)$ donde el estado cuántico K queremos que corresponda efectivamente a un estado emitido por las fuentes A ó B, entonces dejaremos de lado los términos de reemisión señalados pues dan contribuciones (en las que no estamos interesados) pequeñas a la amplitud de probabilidad $b_{\Delta BTK}^{\Delta BTK}$.

Físicamente esta omisión significa ubicar el cuerpo de prueba T a una distancia del orden de $l_c = c/\gamma$ con lo cual su influencia sobre las fuentes emisoras se hace despreciable.



Resumen: Antes de proceder a la solución de las ecuaciones (1) (con las acotaciones señaladas), haremos una breve recapitulación sobre el problema de una fuente y un cuerpo de prueba (Ver pag..... y siguientes.); puesto que sus resultados entrarán como ingredientes básicos en la forma analítica que obtengamos para $b_{\Delta BTK}^{\Delta BTK}$. Allí teníamos para el problema fuente-zonda:

////

///

el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$i\hbar \dot{b}_{\Delta T}^* = \sum_{\mathbf{k}} H_{\Delta T}^{\Delta T \mathbf{k}} b_{\Delta T \mathbf{k}} e^{i(E_{\Delta}^* - E_{\mathbf{k}})t/\hbar} + i\hbar S(t)$$

$$i\hbar \dot{b}_{\Delta T \mathbf{k}} = H_{\Delta T \mathbf{k}}^{\Delta T} b_{\Delta T}^* e^{i(E_{\mathbf{k}} - E_{\Delta}^*)t/\hbar} + \frac{H_{\Delta T \mathbf{k}}^{\Delta T} b_{\Delta T}^* e^{i(E_{\mathbf{k}} - E_{\Delta}^*)t/\hbar}}{1}$$

$$i\hbar \dot{b}_{\Delta T}^* = \sum_{\mathbf{k}} H_{\Delta T}^{\Delta T \mathbf{k}} b_{\Delta T \mathbf{k}} e^{i(E_{\Delta}^* - E_{\mathbf{k}})t/\hbar}$$

Cuyas equivalentes en términos del método de "damping" eran:

$$(E - E_{\Delta}^*) G_{\Delta T}^* = G_{\Delta T}^* \sum_{\mathbf{k}} H_{\Delta T}^{\Delta T \mathbf{k}} U_{\Delta T \mathbf{k}} \zeta(E - E_{\Delta T \mathbf{k}}) + 1$$

$$U_{\Delta T \mathbf{k}} = H_{\Delta T \mathbf{k}}^{\Delta T} + \frac{H_{\Delta T \mathbf{k}}^{\Delta T} e^{-i\vec{k}\vec{R}_{\Delta T}} U_{\Delta T}^* \zeta(E - E_{\Delta T \mathbf{k}})}{1}$$

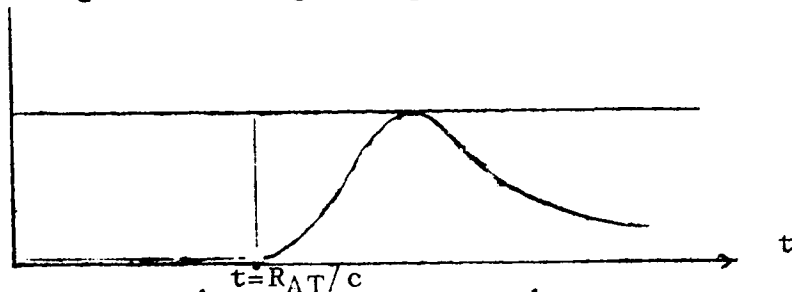
$$U_{\Delta T}^* = \sum_{\mathbf{k}} H_{\Delta T}^{\Delta T \mathbf{k}} e^{i\vec{k}\vec{R}_{\Delta T}} U_{\Delta T \mathbf{k}} \zeta(E - E_{\Delta T \mathbf{k}})$$

Resolviendo (término de reemisión inclusive) encontrábanos:

$$b_{\Delta T}^*(t) \cong i I(E_0, R_{\Delta T}) (t/\hbar - R_{\Delta T}/\hbar c) e^{-\frac{1}{2}\hbar\gamma (t/\hbar - R_{\Delta T}/\hbar c)} \quad (t > R_{\Delta T}/c)$$

donde: $I(E_0, R_{\Delta T}) = -\frac{1}{2}\hbar\gamma^{3/4} \frac{(A + B) e^{iE_0 R_{\Delta T}/\hbar c}}{E_0 R_{\Delta T}/\hbar c}$

Con el siguiente diagrama para la probabilidad:



Si omitimos el término de reemisión obtendremos:

$$U_{\Delta T \mathbf{k}} = H_{\Delta T \mathbf{k}}^{\Delta T}$$

$$U_{\Delta T}^* = \sum_{\mathbf{k}} H_{\Delta T}^{\Delta T \mathbf{k}} H_{\Delta T \mathbf{k}}^{\Delta T} e^{i\vec{k}\vec{R}_{\Delta T}} \zeta(E - E_{\mathbf{k}}) = I(E, R_{\Delta T}) \quad (2 VI)$$

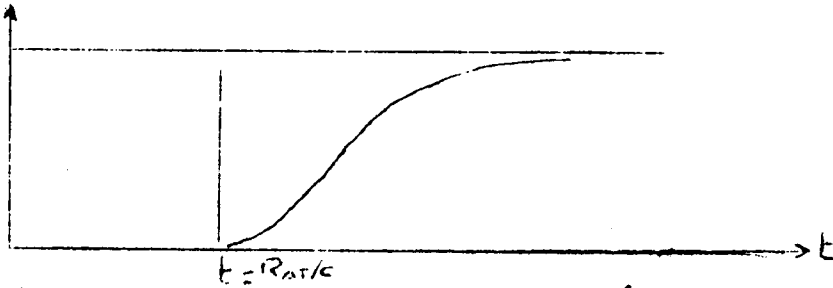
En este caso la solución es:

$$b_{\Delta T}^*(t) \cong -\frac{I(E_0, R)}{\frac{1}{2}\hbar\gamma} (1 - e^{-\frac{1}{2}\hbar\gamma (t/\hbar - R_{\Delta T}/\hbar c)}) \quad \text{para } t > R_{\Delta T}/c \quad (3 VI)$$

///

//

Con el siguiente diagrama para la probabilidad:



Solución del sistema (1): Usando el método de "damping" (Ver W.Heitler loc.cit.) ya esbozado y ampliamente explicado en cap. anteriores; tenemos el siguiente sistema de ecuaciones a resolver:

$$U_n(E) = H_{n/I} + \sum_{m \neq I} U_m H_{n/m} \zeta(E-E_m) \quad (n \neq I, \text{ estado inicial})$$

Este sistema de ecuaciones (con las omisiones señaladas en el sistema (1)) considerando las equivalentes a las ecuaciones (a), (b), (c),(d),(e); nos proporciona idénticos resultados a los obtenidos en el apéndice IV. Esto es debido al hecho de que la omisión de los términos de reemisión hace que las ecuaciones mencionadas sean las correspondientes a emisión de dos fotones por los dos átomos fuentes A y B, ya que en ellas no figura ahora la influencia del cuerpo de prueba. Es decir, tendremos:

$$(E-E_{AB}^{**})G_{AB}^{**} = G_{AB}^{**} \left[\sum_{\vec{k}} (H_A^{AK} U_{ABTK}^{*} \zeta(E-E_{ABTK}^{*}) + H_B^{BK} e^{i\vec{k}\vec{R}} U_{ABTK}^{*} \zeta(E-E_{ABTK}^{*})) \right] + 1 \quad (a)$$

$$U_{ABTK}^{*} = H_A^{AK} + \sum_{\vec{k}'} H_B^{BK'} e^{i\vec{k}'\vec{R}} U_{ABTKK'} \zeta(E-E_{KK'}) + 2^{\frac{1}{2}} H_B^{BK} e^{i\vec{k}\vec{R}} U_{ABTKK} \zeta(E-E_{KK}) \quad (b)$$

$$U_{ABTK}^{*} = H_B^{BK} e^{-i\vec{k}\vec{R}} + \sum_{\vec{k}'} H_A^{AK'} U_{ABTKK'} \zeta(E-E_{KK'}) + 2^{\frac{1}{2}} H_A^{AK} U_{ABTKK} \zeta(E-E_{KK}) \quad (c)$$

$$U_{ABTKK'} = H_B^{BK'} e^{-i\vec{k}'\vec{R}} U_{ABTK}^{*} \zeta(E-E_{ABTK}^{*}) + H_A^{AK'} U_{ABTK}^{*} \zeta(E-E_{ABTK}^{*}) + H_B^{BK} e^{-i\vec{k}\vec{R}} U_{ABTK}^{*} \zeta(E-E_{ABTK}^{*}) + H_A^{AK} U_{ABTK}^{*} \zeta(E-E_{ABTK}^{*}) \quad (d)$$

$$U_{ABTKK} = 2^{\frac{1}{2}} H_B^{BK} e^{-i\vec{k}\vec{R}} U_{ABTK}^{*} \zeta(E-E_{ABTK}^{*}) + 2^{\frac{1}{2}} H_A^{AK} U_{ABTK}^{*} \zeta(E-E_{ABTK}^{*}) \quad (e)$$

$$U_{ABTK}^{*} = \sum_{\vec{k}'} H_T^{TK'} e^{i\vec{k}'\vec{R}} U_{ABTKK'} \zeta(E-E_{KK'}) + 2^{\frac{1}{2}} H_T^{TK} e^{i\vec{k}\vec{R}} U_{ABTKK} \zeta(E-E_{KK}) \quad (f)$$

///

Reemplazando (4d) y (4e) en la (4f) tendremos:

$$\begin{aligned}
 U_{ABTK}^* &= U_{ABTK}^* \int (E - E_{ABTK}^*) I_K(E; R_{BT}) + \\
 &+ U_{ABTK}^* \int (E - E_{ABTK}^*) I_K(E; R_{AT}) + \quad (5 VI) \\
 &+ H_{AK}^A e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} \sum_{\kappa'} H_{T\kappa'}^{TK'} e^{i\vec{K}'\vec{R}_T} U_{ABTK'}^* \int (E - E_{ABTK'}) \int (E - E_{KK'}) + \\
 &+ H_{BK}^B e^{-i\vec{K}\vec{R}_B} \sum_{\kappa'} H_{T\kappa'}^{TK'} e^{i\vec{K}'\vec{R}_T} U_{ABTK'}^* \int (E - E_{ABTK'}) \int (E - E_{KK'})
 \end{aligned}$$

donde hemos puesto:

$$\begin{aligned}
 I_K(E; R_{BT}) &= I(E - E_K; R_{BT}) = \sum_{\kappa'} H_{T\kappa'}^{TK'} H_{BK}^B e^{i\vec{K}'(\vec{R}_T - \vec{R}_B)} \int (E - E_{KK'}) \\
 & \quad (6VI) \\
 I_K(E; R_{AT}) &= I(E - E_K; R_{AT}) = \sum_{\kappa'} H_{T\kappa'}^{TK'} H_{AK}^A e^{i\vec{K}'(\vec{R}_T - \vec{R}_A)} \int (E - E_{KK'})
 \end{aligned}$$

Recordemos que estas integrales son del mismo tipo ampliamente estudiado en ap. III y IV.

Si consideramos ahora las expresiones obtenidas en el ap. IV pag. para las amplitudes $U_{ABTK}^* = U_{ABK}^*$ y $U_{ABTK}^* = U_{ABK}^*$ (recordar la interpretación física obtenida para c/u de sus términos) a saber:-

$$\begin{aligned}
 U_{ABK}^* &= \frac{(E - E_{ABK}^*)}{E - E_{ABK}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B - \frac{I_K^2(E, R_{AB})}{E - E_{ABK}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A}} \left\{ H_{AK}^A e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} + \frac{I_K(E, R_{AB}) H_{BK}^B e^{-i\vec{K}\vec{R}_B}}{E - E_{ABK}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A} \right\} \\
 & \quad (7 VI) \\
 U_{ABK}^* &= \frac{(E - E_{ABK}^*)}{E - E_{ABK}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A - \frac{I_K^2(E, R_{AB})}{E - E_{ABK}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B}} \left\{ H_{BK}^B e^{-i\vec{K}\vec{R}_B} + \frac{I_K(E, R_{AB}) H_{AK}^A e^{-i\vec{K}\vec{R}_A}}{E - E_{ABK}^* + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B} \right\}
 \end{aligned}$$

Nota: para los fines que perseguimos, podemos dejar de lado los términos en $I_K^2(E; R_{AB})$ en el denominador de las (7); esto mediante un oportuno desarrollo en serie de $I(R_{AB})/\hbar\gamma$, dejando de lado los términos de orden superior a λ/R_{AB} . Esto equivale a no considerar la modificación

/// a los campos (como consecuencia de la interacción radiativa entre las fuentes A y B) que emitirían espontáneamente los átomos A y B (para más detalles ver pag.)

Reemplazando (7) en (5) y recordando que $\int \delta(x) = 1$

tendremos:

$$\begin{aligned}
 U_{ABTK}^x = & I_K(E; R_{BT}) \left[\frac{H_{AK}^A e^{-i\vec{K}\vec{R}_A}}{E - E_{ABK}^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B} + \frac{I_K(E, R_{AB}) H_{BK}^B e^{-i\vec{K}\vec{R}_B}}{(E - E_{ABK}^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)(E - E_{ABK}^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)} \right] + \\
 & + I_K(E, R_{AT}) \left[\frac{H_{BK}^B e^{-i\vec{K}\vec{R}_B}}{E - E_{ABK}^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A} + \frac{I_K(E, R_{AB}) H_{AK}^A e^{-i\vec{K}\vec{R}_A}}{(E - E_{ABK}^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)(E - E_{ABK}^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)} \right] + \\
 & + H_{AK}^A e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} \sum_{K'} \frac{H_{TK'}^T e^{i\vec{K}'\vec{R}_T}}{E - E_{ABK'}^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A} \left(H_{BK'}^B e^{-i\vec{K}'\vec{R}_B} + \frac{I_{K'}(E, R_{AB}) H_{AK'}^A e^{-i\vec{K}'\vec{R}_A}}{(E - E_{ABK'}^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)} \right) \delta(E - E_{KK'}) \\
 & + H_{BK}^B e^{-i\vec{K}\vec{R}_B} \sum_{K'} \frac{H_{TK'}^T e^{i\vec{K}'\vec{R}_T}}{E - E_{ABK'}^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B} \left(H_{AK'}^A e^{-i\vec{K}'\vec{R}_A} + \frac{I_{K'}(E, R_{AB}) H_{BK'}^B e^{-i\vec{K}'\vec{R}_B}}{(E - E_{ABK'}^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)} \right) \delta(E - E_{KK'})
 \end{aligned} \tag{8_{VI}}$$

Nos ocuparemos ahora de evaluar la 3^{ra}. línea de la expresión (8) para la 4^{ta}. línea los resultados serán similares), considerando por ahora los términos de orden superior es decir: el primer sumando dentro del paréntesis, tendremos:

$$H_{AK}^A e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} \sum_{K'} \frac{H_{TK'}^T H_{BK'}^B e^{i\vec{K}'\vec{R}_T}}{E - E_{ABK'}^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A} \delta(E - E_{KK'}) = .$$

usando : $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(E - E_{KK'} + i\epsilon)} = \delta(E - E_{KK'})$ tendremos:

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H_{AK}^A e^{-i\vec{K}\vec{R}_A}}{E_K - E_A + i(\frac{1}{2}\hbar\gamma_A - \epsilon)} \sum_{K'} H_{TK'}^T H_{BK'}^B e^{i\vec{K}'\vec{R}_T} \left(\frac{1}{E - E_{KK'} + i\epsilon} - \frac{1}{E - E_{ABK'}^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A} \right)$$

usando las notaciones adoptadas en (6) pondremos:

$$\frac{H_{AK}^A e^{-i\vec{K}\vec{R}_A}}{E_K - E_A + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A} \left\{ I(E - E_K; R_{BT}) - I(E - E_A + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A; R_{BT}) \right\}$$

que por conveniencia posterior pondremos en la siguiente forma:

$$I_K(E, R_{BT}) \frac{H_{AK}^A e^{-i\vec{K}\vec{R}_A}}{E_K - E_A + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A} \left(1 - \frac{I(E - E_A + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A; R_{BT})}{I(E - E_K; R_{BT})} \right)$$

Como vemos este término nos da una "corrección" (pequeña como después veremos) al 1^{er}. sumando de la 1^a. línea de la expresión (8). (Ver expresión (15) del ap. IV). Posteriormente en los //

///resultados finales aclararemos más su significado y su origen.

nota: Al comparar con la expresión (15) del ap. IV vemos que allí dejábanos de lado esta corrección dado que para el orden de distancias considerado allí $R_{AB} > \lambda$) era despreciable su magnitud frente al resto de los términos. Aquí dado que consideramos $R_{BT}, R_{AT} \gg R_{AB} > \lambda$) (en orden a eliminar la influencia de la zonda sobre las fuentes) tiene sentido su conservación.

En cuanto al 2º sumando del paréntesis ; los cálculos son más tediosos, pero siguiendo los lineamientos anteriores puede verse que conduce a "correcciones" del mismo tipo que la estudiada (pero por supuesto 2 órdenes más pequeñas) ahora para el 2º sumando en la 2ª. línea de la expresión (8). En nuestros desarrollos siguientes dejaremos de lado estos términos, dado que son correcciones de pequeña magnitud a términos de orden superior.

En definitiva tendremos para la expresión (8) la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}
 U_{ABTK}^x = & I_K(E, R_{BT}) \left[\frac{H_{AK}^x e^{-i\vec{k}\vec{R}_A}}{E - E_{ABK}^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B} + \frac{H_{AK}^x e^{-i\vec{k}\vec{R}_A}}{E - E_A^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A} \left(1 - \frac{I(E - E_A^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A; R_{BT})}{I(E - E_K; R_{BT})}\right) \right] + \\
 & + I_K(E; R_{AT}) \left[\frac{H_{BK}^x e^{-i\vec{k}\vec{R}_B}}{E - E_{ABK}^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A} + \frac{H_{BK}^x e^{-i\vec{k}\vec{R}_B}}{E - E_B^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B} \left(1 - \frac{I(E - E_B^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B; R_{AT})}{I(E - E_K; R_{AT})}\right) \right] + \\
 & + I_K(E, R_{BT}) \cdot \frac{I_K(E; R_{AB}) H_{BK}^x e^{-i\vec{k}\vec{R}_A}}{(E - E_{ABK}^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)(E - E_{ABK}^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)} + \\
 & + I_K(E, R_{AT}) \cdot \frac{I_K(E; R_{AB}) H_{AK}^x e^{-i\vec{k}\vec{R}_A}}{(E - E_{ABK}^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_B)(E - E_{ABK}^x + \frac{1}{2}i\hbar\gamma_A)}
 \end{aligned}
 \tag{9VI}$$

Considerando ahora la expresión (2), a saber: $U_{AT}^x = I(E; R_{BT})$

y teniendo presente la interpretación dada en ap. IV pag.

a las expresiones (7); estamos ya en condiciones de interpretar brevemente el significado físico de los procesos representados por la expresión (8). Así tenemos para cada línea:

///

///

1) El átomo B emite el estado K en consideración, pasando T a su estado excitado por absorción del fotón proveniente de B; (Los dos sumandos del corchete, puede mostrarse que corresponden a distinta ordenación temporal de los eventos: así tenemos, A emite K;---- B emite;----- T absorbe fotón emitido por B, o bien B emite;----A emite K;----- T absorbe el fotón emitido por B)

ii) El átomo B emite primero K pasando nuevamente a su estado excitado B por absorción del fotón proveniente de A.

iii) El átomo B emite primero K pasando nuevamente a su estado excitado $\overset{x}{B}$ por absorción del fotón proveniente de A (el término $I_K(E;R_{AB})$ da cuenta de este proceso), posteriormente T pasa a su estado excitado absorbiendo el fotón de la subsiguiente emisión de B. Es claro que estos procesos se inician en tiempos del orden $t = (R_{AB} + R_{BT}) / c$.

iiii) El átomo A emite primero el estado K en cuestión, pasando nuevamente a su estado excitado $\overset{x}{A}$ por el fotón proveniente de B, en su posterior reemisión el átomo A excita al átomo T. Este proceso, como veremos se inicia en tiempos $t = (R_{AB} + R_{AT}) / c$.

Como vemos estos procesos solamente aparecen debido a la interacción radiativa entre las fuentes emisoras A y B ($I_K(R_{AB}) \neq 0$ para distancias $R_{AB} < c/\gamma$).-

Cálculo de las amplitudes de probabilidad $b_{ABTK}^x(t)$.

Con la expresión (9) y haciendo uso de: (Ver W.Heitler loc. cit. 16)

$$b_n(t) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_n(E) \int (\mathcal{E} - \mathcal{E}_n) e^{i(\mathcal{E}_n - E)t/\hbar} d\mathcal{E}}{\mathcal{E} - \mathcal{E}_n + \frac{1}{2} i \hbar \Gamma} \quad (10)$$

donde recordemos que:

$$\int (\mathcal{E} - \mathcal{E}_n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(\mathcal{E} - \mathcal{E}_n + i\epsilon)}$$

//

/// Podremos calcular la amplitud de probabilidad $b_{ABTK}^*(t)$. Asi para el caso de átomos idénticos (orientaciones arbitrarias):

$$E_T^* = E_A^* = E_B^* = E_0 \quad ; \quad \gamma_A = \gamma_B = \gamma_T = \quad ; \quad E_I = E_{AB}^* = 2E_0$$

Haciendo uso de las expresiones aproximadas siguientes: (despreciando términos de orden superior a $\bar{\lambda}/R_{ij}$ y aproximación dipolar para los elementos de matriz; Ver ap. III y IV)

$$I_K(E; R_{ij}) = -\frac{1}{2} \hbar \gamma^{3/4} \frac{(A+B)^{ij}}{E_0 R_{ij} / \hbar c} e^{i(E-E_K)R_{ij}/\hbar c} =$$

que por comodidad pondremos asi

$$= \left[-\frac{1}{2} \hbar \gamma^{3/4} \frac{(A+B)^{ij}}{E_0 R_{ij} / \hbar c} e^{iE_0 R_{ij} / \hbar c} \right] e^{i(E-E_{OK})R_{ij} / \hbar c} = I(E_0 R_{ij}) e^{i(E-E_{OK})R_{ij} / \hbar c}$$

$$\Gamma \approx \gamma_A + \gamma_B = 2 \tag{11 VI}$$

donde

$$(A+B)^{ij} = 2 ((\hat{p}_i \cdot \hat{R}_{ij}) \cdot (\hat{p}_j \cdot \hat{R}_{ij}))$$

^ = indica vector unitario

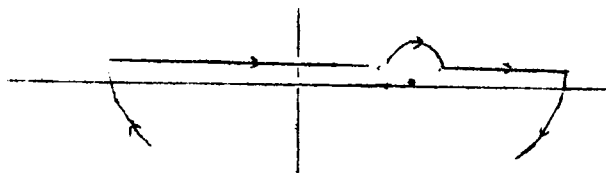
tendremos (calculando dos términos típicos de (9), por ej.

la primera (1ª.) y cuarta (4ª.) fila)

$$(1^a.) = -\frac{1}{2\pi i} \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(E_0 R_{BT}) H_{AK}^A e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(E-E_{OK})(t/\hbar - R_{BT}/\hbar c)}}{(E-E_{OK}+i\epsilon)(E-2E_0+\frac{1}{2}i\hbar\gamma)} \cdot \left[\frac{1}{(E-E_{OK}+\frac{1}{2}i\hbar\gamma)} + \left(\frac{1-e^{i(E-E_0+\frac{1}{2}i\hbar\gamma)R_{BT}/\hbar c}}{E-E_0+\frac{1}{2}i\hbar\gamma} \right) \right] dE \right\} \tag{12_{VI}}$$

$$(4^a.) = -\frac{1}{2\pi i} \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(E_0 R_{AT}) I(E_0 R_{AB}) H_{AK}^A e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(E-E_{OK})(t/\hbar - \frac{R_{AT}+R_{AB}}{\hbar c})}}{(E-E_{OK}+i\epsilon)(E-2E_0+i\hbar\gamma)(E-E_{OK}+\frac{1}{2}i\hbar\gamma)^2} dE \right\} \tag{13_{VI}}$$

Estas integrales son facilmente calculables por residuos; si elegimos en el plano complejo el camino de integración sig.:



///

///

tendremos: (1^{a.}) = $H_{AK}^{A^*} e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} I(E_0; R_{BT}) \left[\frac{1}{(\frac{1}{2}i\hbar\gamma)(E_K - E_0 + i\hbar\gamma)} - \frac{e^{-\frac{1}{2}\hbar\gamma(t/\hbar - R_{BT}/\hbar c)}}{(\frac{1}{2}i\hbar\gamma)(E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)} + \frac{e^{i(E_K - E_0 + i\hbar\gamma)(t/\hbar - R_{BT}/\hbar c)}}{(E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)(E_K - E_0 + i\hbar\gamma)} + \frac{1 - e^{i(E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)R_{BT}/\hbar c}}{(E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)} - \left(\frac{1 - e^{i(E_K - E_0 + i\hbar\gamma)(t/\hbar - R_{BT}/\hbar c)}}{E_K - E_0 + i\hbar\gamma} \right) \right]$

Considerando que: para $t > R_{BT}/c$

$$\frac{E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma}{E_K - E_0 + i\hbar\gamma} = \frac{E_K - E_0 + i\hbar\gamma - \frac{1}{2}i\hbar\gamma}{E_K - E_0 + i\hbar\gamma} = 1 - \frac{\frac{1}{2}i\hbar\gamma}{E_K - E_0 + i\hbar\gamma}$$

podremos poner:

$$(1^{a.}) = \frac{H_{AK}^{A^*} e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} I(E_0; R_{BT})}{(E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma) (\frac{1}{2}i\hbar\gamma)} \cdot \left[(1 - e^{-\frac{1}{2}\hbar\gamma(t/\hbar - R_{BT}/\hbar c)}) - (\frac{1}{2}i\hbar\gamma) e^{i(E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)R_{BT}/\hbar c} \cdot \left(\frac{1 - e^{i(E_K - E_0 + i\hbar\gamma)(t/\hbar - R_{BT}/\hbar c)}}{E_K - E_0 + i\hbar\gamma} \right) \right] \quad (14 VI)$$

Para las grandes distancias fuente-zonda con las que estamos trabajando ($R_{BT} \ll c/\gamma = l_c$) el último término de orden superior ($\frac{i\hbar\gamma}{2} e^{-R_{BT}/l_c}$) es despreciable y tendremos simplemente (recordando la (2)) :-

$$(1^{a.}) = \frac{H_{AK}^{A^*} e^{-i\vec{K}\vec{R}_A} I(E_0; R_{BT})}{(E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma) (\frac{1}{2}i\hbar\gamma)} (1 - e^{-\frac{1}{2}\hbar\gamma(t/\hbar - R_{BT}/\hbar c)})$$

$$= b_{AK}(t \sim \frac{1}{\gamma}) \cdot b_{BT}^*(t) \quad (t > R_{BT}/\hbar c) \quad (15 VI)$$

nota: este primer resultado es facilmente verificable directamente a partir de la fórmula:

$$i\hbar\delta_{ABTK}^* = \sum_{K'} H_{TK'}^{TK'} b_{ABKK'} e^{i(E_\phi - E_{K'})t/\hbar}$$

En efecto: si consideramos que;

$$b_{ABKK'}(t) = \underline{b_{AK}(T) b_{BK'}(t)} + b_{AK'}(t) \cdot b_{BK}(t) + \beta_{KK'}(t)$$

///

tomando el término típico subrayado:

$$b_{AK}(t) \cdot \sum_{K'} H_{TK'}^{TK'} b_{BK'}(t) e^{i(E_0 - E_{K'})t/\hbar} = b_{AK}(t) \cdot (i\hbar \delta_{BT}^x) =$$

(ver pags. 2 y 3; allí obtuvimos para $i\hbar \cdot$
 $\cdot b_{BT}^x$ la expresión entre paréntesis siguien-
 te:)

$$= H_{AK}^A e^{-i\vec{K}R_A} \frac{1 - e^{i(E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)t/\hbar}}{(E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)} \cdot (I(E_0; R_{BT}) e^{-\frac{1}{2}\hbar\gamma(t/\hbar - R_{BT}/\hbar c)} \text{Step}(t - R_{BT}/c))$$

Integrando esta expresión y dividiendo por $i\hbar$ obtenemos de inmediato la expresión escrita arriba (14). Este resultado es más correcto que la aproximación (1) que hemos obtenido en el texto (pag.) pues da cuenta de la variación temporal de las amplitudes $b_{AK}(t)$ que allí tomábamos en sus valores de régimen ($t \rightarrow \infty$ por $t \sim 1/\gamma$).

Procediendo análogamente podemos calcular la expresión (14); así tendremos:

$$(4^{a.}) = I(E_0; R_{AT}) I(E_0; R_{AB}) H_{AK}^A e^{-i\vec{K}R_A} \cdot$$

$$\left[\frac{1}{(\frac{1}{2}i\hbar\gamma)^2 (E_K - E_0 + i\hbar\gamma)} - \frac{e^{i(E_K - E_0 + i\hbar\gamma)(t/\hbar - \frac{R_{AT} + R_{AB}}{\hbar c})}}{(E_K - E_0 + i\hbar\gamma)(E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)^2} + \right.$$

$$+ \frac{i(t/\hbar - R_{AT}/\hbar c + R_{AB}/\hbar c) e^{-\frac{1}{2}\hbar\gamma(t/\hbar - \frac{R_{AT} + R_{AB}}{\hbar c})}}{(\frac{1}{2}i\hbar\gamma)(E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)} -$$

$$\left. \frac{e^{-\frac{1}{2}\hbar\gamma(t/\hbar - \frac{R_{AT} + R_{AB}}{\hbar c})}}{(\frac{1}{2}i\hbar\gamma)^2 (E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)} + \frac{e^{-\frac{1}{2}\hbar\gamma(t/\hbar - \frac{R_{AT} + R_{AB}}{\hbar c})}}{(i\hbar\frac{1}{2}\gamma)(E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma)} \right] \quad (16_{VI})$$

$t > (R_{AT} + R_{AB})/c$

Para los fines en que estamos interesados, es suficiente quedarnos con los términos de orden superior de la expresión (16); así pondremos: -

$$(4^{a.}) = \frac{H_{AK}^A e^{-i\vec{K}R_A}}{E_K - E_0 + \frac{1}{2}i\hbar\gamma} \cdot \frac{I(E_0; R_{AB})}{(\frac{1}{2}i\hbar\gamma)} \cdot \frac{I(E_0; R_{AT})}{(i\hbar\frac{1}{2}\gamma)} \cdot$$

$$\left[(1 - e^{-\frac{1}{2}\hbar\gamma(t/\hbar - \frac{R_{AT} + R_{AB}}{\hbar c})}) + O.\text{sup.} \right] \quad (17_{VI})$$

/// Haciendo uso de la (2) y (3) podremos poner:

$$(4^{a.}) \approx b_{AK}(t-\frac{1}{c}) \frac{I(E_0; R_{AB})}{(\frac{1}{2}i\hbar\gamma)} \cdot b_{AT}^*(t) \quad (t > (R_{AT}+R_{AB})/c \approx R_{AT}/c) \quad (18 \text{ VI})$$

Con las expresiones (15 y (18) podemos poner en muy buena aproximación:

$$b_{ABTK}^*(t) = b_{AK} \cdot b_{BT}^*(t) + b_{BK}(\infty) b_{AT}^*(t) + \frac{I(E_0; R_{AB})}{(\frac{1}{2}i\hbar\gamma)} (b_{AK}(\infty) b_{AT}^*(t) + b_{BK}(\infty) b_{BT}^*(t)) + O.\text{sup} \quad (19 \text{ VI})$$

Donde como vemos, la última fila aparece debido a la interacción radiativa entre las fuentes emisoras A y B para cierto orden de distancias R_{AB} (A emite K, luego A es excitado por el fotón proveniente de B ($I(E_0; R_{AB})$ en su desexcitación posterior puede excitar al átomo zonda T) análogamente para el otro sumando). Estos términos provienen de las contribuciones de los $\beta_{KK'}$ en la expresión analítica para el paquete de dos fotones emitidos por los átomos A y B, a saber:

$$b_{ABKK}(\infty) = \sqrt{2} b_{AK} b_{BK} + \beta_{KK} \quad (\text{ver expresión (87); o bien (25 IV)})$$

$$b_{ABKK'}(\infty) = \dots$$

Considerando la expresión aproximada (11) para $I(E_0; R_{AB})$ a saber:

$$\frac{I(E_0; R_{AB})}{(\frac{1}{2}i\hbar\gamma)} \approx -1/2\pi i \cdot 3/2 \left((\hat{p}_A \cdot \hat{r}_{AB}) \cdot (\hat{p}_B \cdot \hat{r}_{AB}) \right) \cdot \frac{\lambda_0}{R_{AB}} \cdot e^{2\pi i \frac{R_{AB}}{\lambda_0}}$$

$$R_{AB} > \lambda_0$$

$$\text{donde } \lambda_c = \frac{2\pi}{K_0} = \frac{2\pi\hbar c}{E_0}$$

(20VI)

Vemos que la última fila de la expresión (19) es del orden λ/R_{AB} veces la primera fila.-

///

Intensidad del campo en un punto del espacio

Con la experiencia descrita, esto se reduce a estudiar en detalle la probabilidad de excitación (como función de R_T) del cuerpo de prueba "T" en presencia de luz proveniente de las fuentes elementales A y B. Así lo que comunmente se denomina "intensidad" está dada por la expresión siguiente:

$$P_T^x = \sum_K P_{TK}^x = \sum_K |b_{ABTK}^x|^2 \quad (21 \text{ VI})$$

es decir; la probabilidad de excitación del átomo T, independientemente del estado cuántico del fotón no absorbido,

Usando (19) podemos calcular:

$$\begin{aligned} P_{TK}^x &= |b_{ABTK}^x|^2 = |b_{AK}^x|^2 |b_{BT}^x|^2 + |b_{BK}^x|^2 |b_{AT}^x|^2 + 2 \operatorname{Re} \cdot (b_{AK}^x b_{BK}^{*x} b_{BT}^x b_{AT}^{*x}) + \\ &+ |b_{AK}^x|^2 2 \operatorname{Re} \cdot \left(\frac{I(E_0, R_{AB})}{\frac{1}{2} i \hbar \gamma} b_{AT}^x b_{BT}^{*x} \right) + |b_{BK}^x|^2 2 \operatorname{Re} \cdot \left(\frac{I(E_0, R_{AB})}{i \hbar \frac{1}{2} \gamma} b_{AT}^{*x} b_{BT}^x \right) + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \cdot (b_{AK}^x b_{BK}^{*x} \cdot I / \frac{1}{2} i \hbar \gamma) |b_{AT}^x|^2 + 2 \operatorname{Re} \cdot (b_{AK}^{*x} b_{BK}^x I / \frac{1}{2} i \hbar \gamma) |b_{BT}^x|^2 + \\ &+ \left| I / \frac{1}{2} i \hbar \gamma \right|^2 \left(|b_{AK}^x|^2 |b_{AT}^x|^2 + |b_{BK}^x|^2 |b_{BT}^x|^2 + 2 \operatorname{Re} \cdot (b_{AK}^x b_{BK}^{*x} \cdot b_{AT}^x b_{BT}^{*x}) \right) \end{aligned} \quad (22 \text{ VI})$$

Con ayuda de la (22) y usando las especificaciones siguientes:

$$\sum_K |b_{AK}^x|^2 = 1 \quad ; \quad \sum_K |b_{BK}^x|^2 = 1 \quad (\text{ver pag. } \quad)$$

$$\beta = \sum b_{AK}^x b_{BK}^{*x} \quad (\text{ver ap. V } \quad)$$

$$\beta = \beta^* \quad \text{para átomos idénticos } (k_A = k_B ; \gamma_A = \gamma_B)$$

podemos poner (21) agrupada en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P_T^x &= \sum_K |b_{ABTK}^x|^2 = |b_{BT}^x|^2 + |b_{AT}^x|^2 + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \cdot (\beta b_{BT}^x b_{AT}^{*x}) + 2 \operatorname{Re} \cdot (I / i \hbar \frac{1}{2} \gamma) \cdot 2 \operatorname{Re} \cdot (b_{BT}^x \cdot b_{AT}^{*x}) + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \cdot (\beta I / \frac{1}{2} i \hbar \gamma) |b_{BT}^x|^2 + 2 \operatorname{Re} \cdot (\beta I / \frac{1}{2} i \hbar \gamma) |b_{AT}^x|^2 + \\ &+ \left| (I / \frac{1}{2} i \hbar \gamma) \right|^2 \left\{ |b_{BT}^x|^2 + |b_{AT}^x|^2 + 2 \operatorname{Re} \cdot (\beta b_{AT}^x \cdot b_{BT}^{*x}) \right\} \end{aligned}$$

/// Dado que para el orden de distancias considerado $R_{AB} \gg \lambda_c = \frac{2\pi}{K_0}$

tenemos:

$$\beta \approx 3/2 ((\hat{p}_A \times \hat{R}_{AB}) \cdot (\hat{p}_B \times \hat{R}_{AB})) \frac{\text{sen} K_0 R_{AB}}{K_0 R_{AB}} e^{-\frac{1}{2} R_{AB}/l_c}$$

que como vemos es del orden λ_c/R_{AB} .

$$\frac{I(E_0; R_{AB})}{(\frac{1}{2} i \hbar \gamma)} = i 3/2 ((\hat{p}_A \times \hat{R}_{AB}) \cdot (\hat{p}_B \times \hat{R}_{AB})) \frac{e^{i K_0 R_{AB}}}{K_0 R_{AB}}$$

que también es del orden λ_c/R_{AB} . Además para el rango importante de distancias $l_c = c/\gamma \gg R_{AB} > \bar{\lambda}$ (ya que para $R_{AB} \sim l_c$ desaparece todo factor interferencial) tenemos:

$$\text{Real} \left(\frac{I(E_0; R_{AB})}{\frac{1}{2} i \hbar \gamma} \right) = -\beta \cdot e^{\frac{1}{2} R_{AB}/l_c} \approx -\beta$$

Para fijar ideas consideremos el espectro visible donde:

$$\bar{\lambda} \approx 10^{-5} \text{ cm.} \quad l_c = c/\gamma \approx 3 \cdot 10^2 \text{ cm.} = 3 \cdot 10^7 \bar{\lambda}$$

entonces es claro que

$$e^{R_{AB}/l_c} = e^{R_{AB}/10^7 \bar{\lambda}} \approx 1$$

Con ayuda de las anteriores, despreciando los órdenes superiores podemos poner:

$$P_T^x = \sum_k |b_{ABTK}|^2 = |b_{BT}^x|^2 + |b_{AT}^x|^2 - 2 \beta \text{ Re. } (b_{BT}^x \cdot b_{AT}^{x*})$$

Usando la forma explícita de b_{AT}^x y b_{BT}^x (ver (2) a saber:

$$b_{AT}^x(t) = I(E_0, R_{AT}) / \frac{1}{2} i \hbar \gamma \quad (1 - e^{-\frac{1}{2} \hbar \gamma (t/\hbar - R_{AT}/\hbar c)}) \quad t > R_{AT}/c$$

podemos poner:

$$P_T^x = P_{BT}^x + P_{AT}^x - 2 \beta (P_{BT}^x \cdot P_{AT}^x)^{\frac{1}{2}} \cos K_0 (R_{BT} - R_{AT})$$

donde $P_{BT}^x = |b_{BT}^x|^2 \quad P_{AT}^x = |b_{AT}^x|^2$

Esta expresión nos describe como vemos un clásico fenómeno de interferencia, donde desempeña el papel de "grado de coherencia" mutua de las excitaciones provenientes de las fuentes elementales A y B.(x)

(x) Ver "Principles Of Optics" Max Born And E.Wolf.- Pag. 500.-

Quiero expresar mi profundo reconocimiento para con la persona del extinto Profesor Dr. José A. Balseiro, con quien me iniciara en la investigación, y cuyas múltiples enseñanzas, impartidas sin retaceos hasta sus últimos días, tuviera el honor de recibir.

Asimismo, deseo expresar mi sincero agradecimiento al Profesor Dr. Guido Beck por haberme sugerido el trabajo, por su ayuda y dirección constantes durante la ejecución del mismo y por sus diarias enseñanzas.

Finalmente, debo agradecer a la Comisión de Energía Atómica por todo el apoyo recibido, así como también a todo el personal del Centro Atómico Bariloche y del Instituto de Física "Dr. José A. Balseiro", que de una forma u otra prestó su eficaz colaboración.

