

08.57.01

Biblioteca	
AÑO	PUBLICACIONES
1	1957

NO SE PRESTA

REPUBLICA ARGENTINA

PUBLICACIONES

DE LA

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA

Serie de Publicaciones Internas

Nº 13

SOBRE UN PROBLEMA DE CINETICA DE REACTORES

Por Emilio Roxin y Vera W. de Spinadel

BUENOS AIRES

1957

SOBRE UN PROBLEMA DE CINETICA DE REACTORES

Emilio Roxin

Vera W. de Spinadel

Para mantener una reacción en cadena, la condición mínima es que, por cada núcleo que captura un neutrón y se fisiona haya en promedio otro neutrón que produzca la fisión de otro núcleo. Esta condición se expresa por medio del factor de multiplicación k , definido como el cociente del número de neutrones de una generación y el número correspondiente de la generación anterior. Si $k=1$, se mantiene la reacción en cadena.

Pero en un reactor nuclear finito, hay escape de neutrones hacia el exterior. El número de neutrones perdidos por escape depende del área de la superficie exterior, mientras que el número formado está determinado por el volumen. Para minimizar la pérdida de neutrones y por consiguiente aumentar la probabilidad de no escape P , es necesario reducir el cociente área/volumen. Se llama justamente tamaño crítico de un reactor aquel para el cual $kP=1$ (kP : factor de multiplicación efectiva) y masa crítica a la cantidad de combustible correspondiente.

Si se construye un reactor exactamente crítico, no permanece en esta condición durante mucho tiempo. Ello se debe fundamentalmente a tres efectos:

- 1) envenenamiento de la reacción en cadena por los productos de fisión que absorben neutrones;
- 2) agotamiento del combustible;
- 3) efectos de temperatura.

Lo que se hace entonces es comenzar con una reactividad en exceso $k_{ex} = k-1$ el funcionamiento del reactor, lo que se consigue introduciendo más cantidad de material fisionable en el núcleo que la masa crítica. Este exceso se compensa por medio de barras de control que absorben los neutrones excedentes, de modo que se produzcan tantos neutrones como se pierden por pérdida y absorción. Para reactores termales, estas barras se hacen de Cd ó B, sustancias que tienen gran sección eficaz de absorción para neutrones termales.

En un reactor nuclear, se libera una gran cantidad de energía en forma de calor, y aún cuando siempre se usa algún mecanismo de transferencia de calor para refrigerar el reactor, la temperatura sufre inevitablemente algunas variaciones durante la operación. Tal variación de temperatura puede, ya sea aumentar o bien disminuir el factor de multiplicación del reactor, y esto es, como hemos visto, de una importancia práctica muy grande desde el punto de vista de la estabilidad y control de reactor. Por ejemplo, un aumento de temperatura afecta la reactividad por dos razones:

- a) la energía media de los neutrones termalea aumenta y su absorción se ve afectada, pues las secciones eficaces dependende la temperatura;
- b) el libre camino medio y las probabilidades de escape son función de la densidad, que varía con la temperatura.

Estos efectos están descriptos por un sistema de ecuaciones no lineales que, en general, es tratado en forma linealizada en la bibliografía. Esta aproximación no siempre es satisfactoria, de modo que el estudio del sistema no lineal es sumamente interesante, tanto desde el punto de vista matemático como físico.

Ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones simplificadas que dan cuenta del comportamiento del reactor en función del tiempo son:

$$(1) \quad \frac{dn}{dt} = \lambda k_{ex} \cdot n,$$

$$(2) \quad k_{ex} = (k_{ex})_c - \beta T,$$

$$(3) \quad \frac{dT}{dt} = \lambda n - \lambda T,$$

donde $k_{ex} = k-1$, $(k_{ex})_c$ es la reactividad dada por el control, siendo n la densidad de neutrones, T la temperatura del reactor, $1/\lambda$ el tiempo medio de generación de neutrones, β el coeficiente de temperatura del reactor, λ la constante de relajación de eliminación de calor y λ una constante de conversión calórica.

Resolveremos estas ecuaciones sujetas a las condiciones iniciales

$$(4) \quad n=n_0; \quad T = T_0; \quad (k_{ex})_0 = (k_{ex})_c - \beta T_0.$$

El cero de la escala de temperaturas es la temperatura ambiente. Por razones físicas, n , γ y λ son cantidades positivas, pero discutiremos también el caso adiabático $\beta = 0$. Con respecto al signo de β , no lo fijaremos pues si bien el reactor es estable con respecto a la temperatura * si $\beta > 0$, el caso $\beta < 0$ no carece de interés.

Vamos ahora a reducir el sistema (1) (2) (3) a una sola ecuación diferencial de segundo orden. Para ello derivamos la (3):

$$\begin{aligned} T'' &= \gamma n' - \lambda T' = \alpha \gamma k_{ex} n - \lambda (\gamma n - \lambda T) \\ &= \alpha \gamma n \left[(k_{ex})_c - \beta T \right] - (\gamma n - \lambda T). \end{aligned}$$

Sumando y restando $\alpha (k_{ex})_c \lambda T$ y λT^2 obtenemos:

$$\begin{aligned} T'' &= - \left[\lambda - \alpha (k_{ex})_c \right] (\gamma n - \lambda T) + \alpha (k_{ex})_c \lambda T \\ &\quad - \alpha \beta \left[T (\gamma n - \lambda T) + \lambda T^2 \right]; \end{aligned}$$

o sea

$$T'' = - \left[\lambda - \alpha (k_{ex})_c \right] T' + \alpha (k_{ex})_c \lambda T - \alpha \beta (TT' + \lambda T^2).$$

Llamando $w = \alpha (k_{ex})_c$ nos queda:

$$(5) \quad T'' + (\lambda - w)T' - w \lambda T + \alpha \beta (TT' + \lambda T^2) = 0.$$

Esta ecuación es equivalente al sistema

$$(6) \quad \begin{cases} T' = z \\ z' = -\alpha \beta (Tz + \lambda T^2) - \lambda z + w (z + \lambda T). \end{cases}$$

Podemos considerar el sistema (5) como la superposición del sistema

$$(7) \quad \begin{cases} T' = z \\ z' = -\alpha \beta (Tz + \lambda T^2) - \lambda z, \end{cases}$$

que llamaremos sistema fundamental y el

$$(8) \quad \begin{cases} T' = 0 \\ z' = w (z + \lambda T), \end{cases}$$

que llamaremos sistema perturbador.

*) es decir, la reactividad disminuye cuando la temperatura aumenta.

Diremos que las soluciones del sistema (7) son curvas fundamentales y las del sistema (8) curvas perturbatrices, mientras que a las soluciones del sistema (6), las denominaremos simplemente trayectorias.

Dado el sistema (6), donde suponemos todas las funciones de T y z fijas, salvo $w = \alpha(k_{ex})_0$ que supondremos arbitraria, sujeta a las condiciones iniciales (4), podemos considerar el campo vectorial definido por tal sistema como resultante de la superposición de un vector $f(T, z)$ fijo en cada punto T y un vector variable $w(t)$. Dado el punto inicial T_0, z_0 a cada elección de la función $w(t)$ corresponderá una cierta trayectoria $T(t), z(t)$ y vamos a estudiar la totalidad de las trayectorias obtenidas al variar $w(t)$. Es decir, veremos qué regiones del espacio quedan cubiertas por las trayectorias $T = T(t), z = z(t)$ al variar $w(t)$.

Como no sabemos si siempre será posible pasar de un punto inicial T_0 a otro T_1 moviéndonos a lo largo de una trayectoria, daremos la siguiente definición:

Dado el sistema (6) con la condición inicial

$$(9) \quad (w)_0 = \alpha(k_{ex} - \beta T_0),$$

el punto T_1, z_1 se dirá alcanzable desde T_0, z_0 si existe una función $w(t)$ y un valor $t_1 > 0$ tal que el sistema (6) con la condición (9), posee la solución

$$T = T(t) \quad ; \quad z = z(t) \quad ;$$

que satisface a

$$T(t_1) = T_1 \quad ; \quad z(t_1) = z_1.$$

Como en el sistema (8), la función $w(t)$ que representa el término de control de reactividad, es arbitraria, estudiaremos las soluciones del sistema

$$(10) \quad \begin{cases} T' = 0 \\ z' = z + \lambda T. \end{cases}$$

Es evidente que dichas soluciones son rectas verticales de ecuación $T = \text{const.}$, con una recta singular o crítica (*) de pendiente $-\lambda$ (figura 1)

(*) Dado el sistema (6), se llama punto crítico del mismo, a aquel para el cual es simultáneamente $T' = 0, z' = 0$.

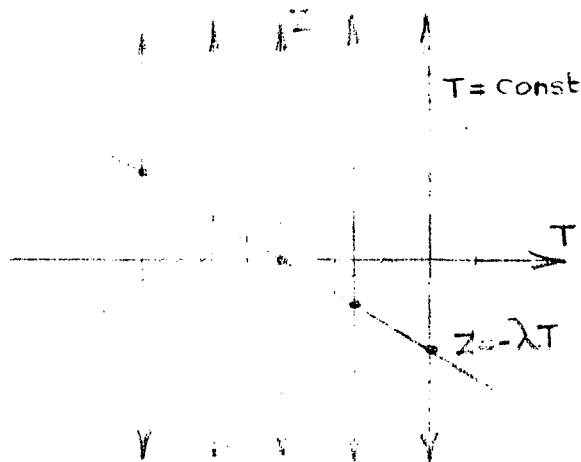


Figura 1

Las soluciones del sistema fundamental (7) no son, en cambio, tan inmediatas. Por ello, haremos el estudio vectorial de las curvas, ya que fundamentalmente nos interesa la dirección de las mismas más que su forma exacta.

Evidentemente, el único punto crítico de este sistema es el origen.

Agrupando los términos en (7) tenemos

$$(11) \quad \begin{aligned} T' &= z \\ z' &= -z(\lambda + \alpha T) - \alpha \lambda T^2. \end{aligned}$$

A lo largo de una recta perturbatriz de ecuación $T = \text{const.}$, evidentemente las curvas trayectorias pasarán de izquierda a derecha para valores de $z > 0$, ya que $T' = z$ y cualquiera sea el signo de z' , el vector resultante quedará en el semiplano de la derecha limitado por dicha perturbatriz; y en sentido contrario para $z < 0$ (figura 2). Sobre la recta crítica de ecuación $z = -T\lambda$, el sistema (11) se reduce a

$$\begin{aligned} T' &= z \\ z' &= T^2 + \alpha \beta \lambda T^2 - \alpha \beta \lambda T^2, \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} T' &= z \\ z' &= \lambda^2 T \end{aligned}$$

Veremos ahora qué dirección y sentido tienen las curvas a ambos lados de la recta crítica. Para ello, comparemos en valor absoluto

$$\left| \frac{z'}{T'} \right| \gtrless |\lambda|.$$

Evidentemente, de (12) resulta

$$\frac{T \lambda^2}{T \lambda} \Big| = |\lambda|$$

es decir, las trayectorias son tangentes a la recta singular (figura 2).

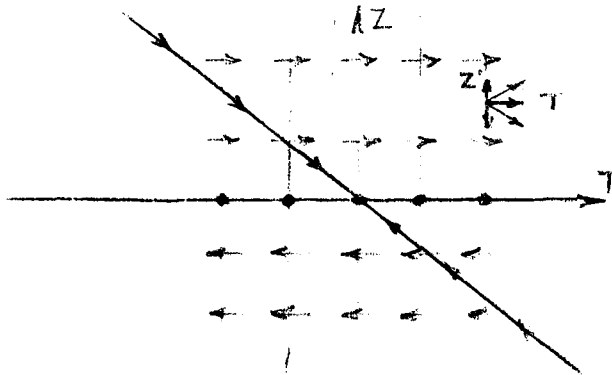


Figura 2

Examinando el comportamiento vectorial de las trayectorias del sistema (11), vemos, que, variando el vector $w(t)$, los puntos alcanzables son todos aquellos pertenecientes a sectores delimitados por semirectas del cuadrante $T > 0$ que llegan hasta la recta crítica $z = -T\lambda$ y la misma recta crítica. Por ejemplo, la zona rayada en la figura 2. Físicamente, ello significa que, si comenzamos el accionamiento del

reactor con una temperatura $T < T_0$, sólo podemos hacer crecer T (pero no disminuirla). En cambio, si comenzamos con $T > T_0$, podemos bajar T por medio del refrigerante o subir T aumentando la potencia del reactor. Los puntos sobre las rectas perturbatrices cuyo $z = 0$, son de régimen permanente, es decir, el reactor se enfría tanto como se calienta.

Caso adiabático

Para $\lambda = 0$, la ecuación (5) toma la forma

$$(13) \quad T'' - \alpha T' = -\beta T T'$$

La ecuación (13) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} T' = z \\ z' = wz - \alpha \beta z T, \end{cases}$$

que se puede suponer obtenido por superposición del sistema fundamental

$$(15) \quad \begin{cases} T' = z \\ z' = -\beta z T \end{cases}$$

y el perturbador

$$(16) \quad \begin{cases} T' = 0 \\ z' = wz \end{cases}$$

Las soluciones del sistema (16) son evidentemente rectas perturbatrices de ecuación $T = \text{const.}$ y el eje T es la recta crítica del mismo. En cambio, las soluciones del sistema (15) son parábolas, como se puede ver fácilmente integrando.

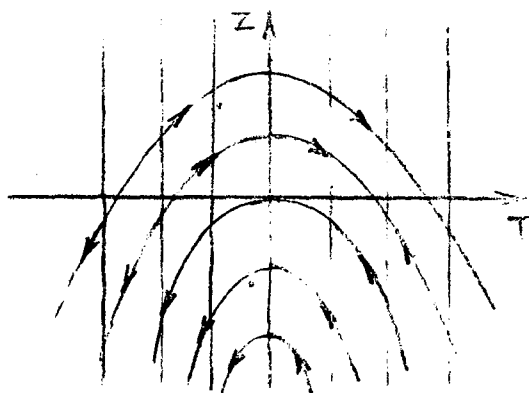


Figura 3

1951.

Los puntos alcanzables están en semiplanos delimitados por una semirecta vertical y el eje de las T y su simétrico, es decir, zonas como la rayada en la figura 3, por ejemplo.

La interpretación física es aquí análoga a la del caso anterior y los resultados es tán de acuerdo con los obtenidos experimentalmente por J. Chernick, BNL 173 (T-30),

Este análisis constituye un caso particular de una **teoría** completamente general de determinación de zonas alcanzables, que los autores tienen prácticamente lista para su publicación.

Buenos Aires, setiembre de 1957.-