

REPUBLICA ARGENTINA
COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
Dependiente de la Presidencia de la Nación
GERENCIA DE DESARROLLO

CAMPO ELECTROMAGNETICO Y GENERACION DE
CALOR EN LA REFUSION DE METALES POR ELECTROESCORIA

G. Sánchez Sarmiento* y E. E. Vicente**

* Empresa Nuclear Argentina de Centrales
Eléctricas S.A.
Av L. N. Alem 712 (1001) Buenos Aires

** Departamento de Materiales, Comisión
Nacional de Energía Atómica.
Av del Libertador 8250 (1429) Buenos Aires.

RESUMEN

Se presenta un modelo computacional adimensionalizado para el cálculo del campo electromagnético en la escoria durante el régimen estacionario de refusión de metales por electroescoria en hornos operados con corriente continua. Se resuelve, empleando la técnica de elementos finitos, la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas axisimétricas para la determinación del potencial escalar eléctrico. A partir de este se obtiene luego el campo eléctrico, la densidad de corriente, la generación de calor por efecto Joule (densidad de potencia), el campo magnético, la densidad de la fuerza de Lorentz y su rotor (contribución electromagnética a la vorticidad de la escoria), resistencia eléctrica y corriente y potencia totales. Se estudia la influencia de los parámetros geométricos del sistema en el campo electromagnético y, particularmente, en la resistencia eléctrica de la escoria. Se obtuvo muy buen acuerdo entre las predicciones de este modelo y algunos resultados teóricos y experimentales obtenidos por otros autores.

ABSTRACT

A computational dimensionless model is described for the prediction of the electromagnetic field in the slag during the steady state of the electros slag remelting process employing direct current. The Laplace's equation, in axisymmetric cylindrical coordinates, is solved through the finite element method in order to calculate the electrical scalar potential. Then, electric field, current density, heat generation rate by Joule effect (power density), magnetic field, Lorentz's force density, curl of Lorentz's force density (electromagnetic contribution to the transport vorticity equation), electrical resistance and total current and power, are obtained. The influence of the geometrical parameters on the electromagnetic field and specially on the electrical resistance of the slag, is studied. Some comparisons between theoretical and experimental results of other authors and the predicted ones with the present model are given. The agreement is very good.

A - INTRODUCCION

Los modelos computacionales son herramientas de gran utilidad para el estudio de diversos fenómenos de transporte en el proceso de refusión de metales por electroescoria (REE). El trabajo realizado en este campo hasta el año 1972 ha sido revisado por Mitchell y colaboradores /1/, y en años posteriores fueron publicados gran cantidad de modelos numéricos para el análisis, en este tipo de dispositivos, de diversos aspectos de la transferencia de calor y masa, del campo de velocidades, del campo electromagnético, etc.

En particular, la resolución de las ecuaciones de Maxwell para el cálculo del flujo magnetohidrodinámico y de la generación espacial de calor por efecto Joule en la escoria, ha sido tratada en las refs. /2-9/ para procesos de REE, y en las refs. /10-11/ para un proceso similar como es la soldadura por electroescoria (SEE). En todos los modelos citados las correspondientes ecuaciones diferenciales son resueltas aplicando la técnica de diferencias finitas (DF), la que requiere que algunos detalles geométricos del dispositivo deban ser simplificados. Entre estos detalles, la forma del electrodo cumple un papel preponderante en las relaciones entre las variables operativas del proceso, según muestran los resultados de un estudio reciente /12/.

Específicamente, los efectos que sobre dichos parámetros tienen las singularidades de la densidad de corriente y de la generación de calor en la escoria líquida, que aparecen en puntas y aristas filosas del electrodo sumergido, pueden ser estudiados solamente si esos detalles geométricos son simulados rigurosamente con la técnica numérica empleada. Si tales puntas y bordes filosos están presentes, los elevados valores que allí resultan para la generación de calor afectarán notablemente los perfiles correspondientes de temperatura, tendiendo a una mayor fusión en esas zonas con el consiguiente redondeo de las mismas.

Por otra parte, una singularidad en la densidad de corriente lleva aparejada también una singularidad en la contribución magnetohidrodinámica de las fuerzas que provocan el movimiento convectivo de la escoria líquida, afectando consiguientemente la transferencia de calor en el dispositivo.

Con un esquema en diferencias finitas que emplea un espaciado uniforme de la grilla, sólo se obtienen gruesas aproximaciones numéricas para esos puntos. Con el método de elementos finitos, en cambio, se tiene una gran facilidad para el tratamiento especial de esas zonas, ya que permite que la malla se ajuste rigurosamente al dominio de cálculo y que pueda ser allí densificada cuanto sea necesario.

El presente trabajo apunta a este último objetivo. Se describe aquí un modelo matemático, basado en el método de elementos finitos, para la predicción del campo electromagnético, del campo de fuerzas de Lorentz y de la generación local de calor por efecto Joule, en la escoria de un proceso REE operado con corriente continua en régimen estacionario. Expresando las distintas variables en forma adimensional, los resultados obtenidos son de validez general para cualquier dispositivo del tipo citado.

El modelo ha sido aplicado para presentar varios gráficos adimensionales que dan el valor de la resistencia eléctrica global (voltaje aplicado dividido por la corriente eléctrica total calculada), en término de los parámetros geométricos intervinientes. Ellos dan información general valiosa para la operación de tales dispositivos en condiciones estacionarias, e indican el grado en que los distintos parámetros influyen en su comportamiento eléctrico global.

Finalmente, se confronta el modelo con mediciones efectuadas por Mitchell y Joshi /13/ en un dispositivo de laboratorio, y con un modelo en diferencias finitas desarrollado por Dilawari y Szekeli /3/ y aplicado al mismo dispositi-

vo, obteniéndose un excelente acuerdo.

B - DESCRIPCION DEL DISPOSITIVO

La REE es un proceso metalúrgico empleado para la obtención de lingotes de aceros de alta calidad y de otras aleaciones especiales.

Consiste básicamente (fig.1), de una barra (electrodo consumible) de la aleación de composición química requerida, y producida por métodos convencionales, que "refunde" en un molde de cobre refrigerado por agua (lingotera) solidificando progresivamente a partir del fondo del molde aislada del aire por una capa de escoria fundida. Corriente continua o alterna (50-60 Hz) de bajo voltaje y alto amperaje circula desde el electrodo hacia el fondo del molde a través de la escoria líquida electroconductora y del lingote. La energía térmica es incorporada al sistema por efecto Joule en la escoria y es removida por el agua de refrigeración. Durante la refusión tienen lugar diversas reacciones químicas y electroquímicas entre la escoria (constituída a base de CaF_2 con adiciones de óxidos tales como Al_2O_3 , CaO , MgO y SiO_2) y el metal fundido, las cuales permiten la eliminación de diversas inclusiones no metálicas (sulfuros, etc) presentes en el electrodo, obteniéndose un lingote refinado que exhibe una sustancial mejora de varias propiedades metalúrgicas. Es decir, la escoria cumple varias funciones simultáneas: actúa como fuente de generación de calor, como medio de transferencia del calor producido, como refinador químico y como "continente" del metal fundido.

C - HIPOTESIS DEL MODELO

El modelo desarrollado obedece a las siguientes hipótesis:

- 1) Régimen estacionario.
- 2) Simetría cilíndrica. Ello implica despreciar los efectos

de campos extraños y las asimetrías generadas tanto por la formación de las gotas de metal fundido en la punta del electrodo como por el movimiento de las mismas a través de la escoria /14-15/.

3) Corriente continua. El metal se comporta como un conductor perfecto frente a la escoria. En consecuencia, la caída de potencial y la generación de calor por efecto Joule quedan confinadas exclusivamente en la escoria electroconductora. El potencial eléctrico aplicado, ϕ_e , es un dato del modelo.

4) Efectos electroquímicos en las interfaces escoria-metal tales como polarización anódica /16/ no han sido tenidos en cuenta.

5) La escoria se comporta como un fluido iónico, eléctricamente neutro, no permeable, no polarizable, con número de Reynolds magnético mucho menor que uno /2/. Ello implica que el movimiento convectivo de la escoria (térmico y electromagnético) no afecta al campo electromagnético, con lo cual las correspondientes ecuaciones diferenciales pueden desacoplarse.

6) La geometría del dispositivo (fig. 1) es otro dato del modelo. Las interfaces escoria-aire y escoria-pileta líquida se consideran planas. En la interfaz escoria-electrodo se aprecian las siguientes regiones /12/: a) el perfil del electrodo a la temperatura de fusión del metal ($0 \leq r \leq r_e$ y $z_2 \leq g(r) \leq z_3$); b) una superficie cilíndrica vertical comprendida entre las isotermas de fusión del metal y de la escoria ($r=r_e$ y $z_1 \leq z \leq z_2$); y c) una superficie cilíndrica vertical comprendida entre la isoterma de fusión de la escoria y la superficie libre de la escoria ($r=r_e$ y $0 \leq z \leq z_1$).

7) La conductividad eléctrica σ de la escoria se considera constante y es otro dato del modelo. Si bien este parámetro es fuertemente dependiente de la temperatura /17/, mediciones efectuadas durante el régimen estacionario de operación /13,21/ muestran que la temperatura es bastante uni-

forme en el seno de la escoria excepto en una delgada región próxima a las interfaces escoria-metal y escoria-molde. La intensa convección térmica y electromagnética, así como el comportamiento diatérmico (semitransparente) de la escoria /18-19/ han sido propuestos como los mecanismos responsables de esta homogenización de la temperatura.

8) Una "piel" de escoria sólida se forma en contacto con las paredes frías del molde, la cual actúa como un aislante eléctrico. Idem en la periferia del electrodo comprendida entre la superficie libre de la escoria y la temperatura de fusión de la escoria.

D - DESCRIPCION DEL MODELO MATEMATICO

Para campos electromagnéticos invariables en el tiempo, en un medio conductor eléctricamente neutro, no permeable, no polarizable, las ecuaciones de Maxwell se reducen a solo dos ecuaciones independientes /20/:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (2)$$

que se completan con la ley de Ohm para fluidos conductores con número de Reynolds magnético mucho menor que uno ($Re_m \ll 1$):

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (3)$$

La ecuación (1) implica que $\vec{E}$ es derivable de un potencial escalar :

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (4)$$

Tomando la divergencia en ambos miembros de la (2) se deduce la conservación de las cargas eléctricas:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (5)$$

Combinando las ecuaciones (3) a (5) se obtiene:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (6)$$

Con la hipótesis $\sigma = \text{cte}$ se arriba a la ecuación de Laplace para el potencial eléctrico:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (7)$$

y en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

con las siguientes condiciones de borde:

$$\begin{aligned} \phi &= 0 & \text{en} & \quad 0 \leq r \leq r_m \quad \text{y} \quad z = z_4 \\ \phi &= \phi_e & \text{en} & \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq r_e \quad \text{y} \quad z_2 \leq g(r) \leq z_3 \\ r = r_e \quad \text{y} \quad z_1 \leq z \leq z_2 \end{array} \right. \\ \frac{\partial \phi}{\partial r} &= 0 & \text{en} & \quad \left\{ \begin{array}{l} r = 0 \quad \text{y} \quad z_3 \leq z \leq z_4 \\ r = r_e \quad \text{y} \quad 0 \leq z \leq z_1 \\ r = r_m \quad \text{y} \quad 0 \leq z \leq z_4 \end{array} \right. \quad (9) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 & \text{en} & \quad r_e \leq r \leq r_m \quad \text{y} \quad z = 0 \end{aligned}$$

Conocido el potencial eléctrico en todo el dominio de cálculo, las restantes magnitudes físicas pueden ser fácilmente evaluadas a partir de aquel:

Campo eléctrico $\vec{E}$:

$$E_r(r, z) = -\frac{\partial \phi}{\partial r} ; \quad E_z(r, z) = -\frac{\partial \phi}{\partial z} ; \quad E_\theta = 0 \quad (10)$$

Densidad de corriente $\vec{J}$:

$$J_r(r, z) = -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial r} ; \quad J_z(r, z) = -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial z} ; \quad J_\theta = 0 \quad (11)$$

Generación de calor por efecto Joule:

$$\dot{q}(r, z) = \vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (12)$$

El campo magnético $\vec{H}(r, z)$ puede calcularse aplicando la forma integral de la ley de Ampère, haciendo una circulación concéntrica con el eje de simetría:

$$H_\theta(r, z) = \frac{\int_0^r J_z r' dr'}{r} ; \quad H_r = H_z = 0 \quad (13)$$

El campo de fuerzas de Lorentz está dado por:

$$\vec{F}(r, z) = \vec{J} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \times \vec{H} \quad (14)$$

o sea, en coordenadas cilíndricas:

$$F_r(r, z) = -\mu_0 J_z H_\theta ; \quad F_z(r, z) = \mu_0 J_r H_\theta ; \quad F_\theta = 0 \quad (15)$$

La corriente total I que circula por la escoria puede calcularse fácilmente por integración en la interfaz escoria-pileta.

$$I = 2\pi \int_0^{r_m} J_z(r, z_4) r dr \quad (16)$$

y con ella resulta la resistencia eléctrica total R de la escoria:

$$R = \frac{\phi_e}{I} \quad (17)$$

y la potencia eléctrica total P disipada por la escoria:

$$P = \phi_e I \quad (18)$$

Una parámetro de gran importancia en la determinación del flujo convectivo en la escoria es la contribución electromagnética en la ecuación de Navier-Stokes. Expresada esta última en términos de la función de corriente y de la vorticidad es necesario calcular el rotor de la fuerza de Lorentz cuya única componente no nula es /2/:

$$(\nabla \times \vec{F})_\theta(r, z) = \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} = \frac{2\mu_o J_r H_\theta}{r} \quad (19)$$

En el APENDICE se describe la formulación del programa en elementos finitos desarrollado para la resolución de los sucesivos problemas planteados.

E - FORMULACION ADIMENSIONAL DEL MODELO

El modelo matemático ha sido adimensionalizado a fin de poder comparar las magnitudes físicas de diferentes sistemas

geométricamente semejantes en puntos homólogos, y de obtener resultados de validez general:

Ecuación de Laplace para el cálculo de potencial eléctrico $\phi^*(r^*, z^*)$:

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^{*2}} = 0 \quad (20)$$

Condiciones de borde:

$$\begin{aligned} \phi^* &= 0 & \text{en} & \quad 0 \leq r^* \leq 1 \quad y \quad z^* = z_4^* \\ \phi^* &= 1 & \text{en} & \quad \begin{cases} 0 \leq r^* \leq r_e^* \quad y \quad z_2^* \leq g^*(r^*) \leq z_3^* \\ r^* = r_e^* \quad y \quad z_1^* \leq z^* \leq z_2^* \end{cases} \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} &= 0 & \text{en} & \quad \begin{cases} r^* = 0 \quad y \quad z_3^* \leq z^* \leq z_4^* \\ r^* = r_e^* \quad y \quad 0 \leq z^* \leq z_1^* \\ r^* = 1 \quad y \quad 0 \leq z^* \leq z_4^* \end{cases} \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial z^*} &= 0 & \text{en} & \quad r_e^* \leq r^* \leq 1 \quad y \quad z^* = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Campo eléctrico $\vec{E}^*(r^*, z^*)$ o densidad de corriente $\vec{J}^*(r^*, z^*)$:

$$E_r^* = J_r^* = -\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \quad y \quad E_z^* = J_z^* = -\frac{\partial \phi^*}{\partial z^*} \quad (22)$$

Generación de calor $\dot{q}^*(r^*, z^*)$:

$$\dot{q}^* = \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial z^*} \right)^2 \quad (23)$$

./.

- 10 -

Campo magnético $\vec{H}^*(r^*, z^*)$:

$$H_{\theta}^*(r^*, z^*) = \frac{\int_0^{r^*} J_z^* r^* dr^*}{r^*} ; \quad H_r^* = H_z^* = 0 \quad (24)$$

Campo de fuerzas de Lorentz $\vec{F}^*(r^*, z^*)$:

$$F_r^* = -J_z^* H_{\theta}^* ; \quad F_z^* = J_r^* H_{\theta}^* ; \quad F_{\theta}^* = 0 \quad (25)$$

Corriente eléctrica total I^* ó potencia eléctrica total P^* :

$$I^* = P^* = 2\pi \int_0^1 J_z^* r^* dr^* \quad \text{en} \quad z^* = z_4^* \quad (26)$$

Resistencia eléctrica R^* :

$$R^* = \frac{1}{I^*} \quad (27)$$

Contribución electromagnética a la vorticidad $(\nabla^* \times \vec{F}^*)_{\theta}(r^*, z^*)$:

$$(\nabla^* \times \vec{F}^*)_{\theta} = \frac{2 J_r^* H_{\theta}^*}{r^*} \quad (28)$$

F- RESULTADOS

El presente modelo en EF ha sido confrontado con resultados experimentales obtenidos por Mitchell y Joshi /13/, quienes midieron el potencial eléctrico y la corriente total en pequeños dispositivos de laboratorio.

Algunos de estos experimentos fueron también modelados por Dilawari y Szekely /3/ empleando el método de DF.

./.

En la tabla I se muestran los valores utilizados en los cálculos y en la tabla II se comparan los valores de corriente total medidos y calculados. Las figs. 2 a 7 muestran la red de EF empleada, el potencial eléctrico, la generación de calor, el campo magnético y el campo del rotacional de las fuerzas de Lorentz.

Puede apreciarse la intensa generación de calor que tiene lugar en las puntas del electrodo, debido al aumento en la densidad de corriente (fenómeno conocido de la electrodinámica clásica).

En dispositivos industriales la profundidad de inmersión del electrodo es pequeña frente a las dimensiones del molde ($z_3^* \ll 1$), particularmente cuando la relación de "llenado" (relación de secciones electrodo-molde) es alta. Por ello tiene interés el estudio de electrodos sin inmersión ($z_1^* = z_2^* = z_3^* = 0$).

En las figs. 8 a 11 se grafican los siguientes parámetros adimensionales: potencial eléctrico ϕ^* , generación de calor $\dot{q}^*$, campo magnético H_θ^* , campo de fuerzas de Lorentz $\vec{F}^*$ y contribución electromagnética a la vorticidad (rotor de la fuerza de Lorentz) $(\nabla^* \times \vec{F}^*)_\theta$, para un caso típico de electrodo sin inmersión:

$$r_e^* = 0.7 ; z_1^* = z_2^* = z_3^* = 0 ; z_4^* = 0$$

Nuevamente se aprecian los efectos relacionados con el aumento de la densidad de corriente en las puntas.

En la fig. 12 se grafica la resistencia de la escoria R^* en función de la distancia electrodo-pileta y diferentes relaciones de "llenado" para electrodos sin inmersión. La resistencia disminuye con la distancia y el efecto es más lineal a medida que la relación de llenado aumenta. Con fines de comparación se ha representado el "llenado perfecto" ($r_e^{*2} = 1$).

Se estudió el efecto de inmersión del electrodo en la escoria para electrodos cilíndricos con perfil de fusión plano

$(g^* (r^*) = z_2^* = z_3^*)$, con "piel" de escoria solidificada ($z_1^* = z_2^*$) y sin formación de "piel" ($z_1^* = 0$), para diferentes relaciones de llenado ($r_e^{*2} = 0.25 ; 0.5$ y 0.75) en dos series de experimentos numéricos:

1er. caso: manteniendo la distancia electro-pileta constante ($z_4^* - z_3^* = 0.5$) se aumenta el volumen de escoria hasta que la inmersión alcance un valor fijo $z_3^* = z_2^* = 0.5$ (fig. 13).

2do. caso: manteniendo el volumen de escoria constante ($V^* = \frac{\pi}{2}$) y disminuyendo la distancia electrodo-pileta desde $z_4^* - z_3^* = 0.5$ hasta $z_4^* - z_3^* = 0.1$ (fig. 14).

En el primer caso se observa que ni el agregado de escoria ni la formación de la "piel" tienen influencia en el valor de la resistencia eléctrica de la escoria para altas relaciones de llenado. Cuando este último parámetro es bajo, la resistencia disminuye asintóticamente hasta alcanzar un valor constante.

Cuando hay formación de "piel" la resistencia disminuye menos y alcanza su valor límite a menores inmersiones que en electrodos con "piel".

En el segundo caso se aprecia que, para altas relaciones de llenado, la disminución de la resistencia eléctrica es aproximadamente lineal con el acercamiento del electrodo a la pileta. La variación es más complicada para relaciones de llenado bajas en donde, además, se nota alguna influencia por la formación de la piel.

Otro estudio realizado con el presente modelo fue la influencia de la punta del electrodo consumible (perfil de fusión) en la generación de calor en la escoria. Para evitar las singularidades numéricas que aparecen en las puntas o bordes angulosos de los electrodos de forma cilíndrica o cónica se eligió un perfil de fusión elipsoidal:

$$g^*(r^*) = (z_3^* - z_2^*) \sqrt{1 - \frac{r^{*2}}{r_e^{*2}}} \quad (29)$$

más acorde con los perfiles observados en la práctica /12/. Las figs. 15 y 16 muestran la producción de calor para perfiles elipsoidales con comportamientos cualitativamente diferentes según el "achataamiento" del elipsoide: generación local máxima en el eje de simetría o en el borde del electrodo. La generación de calor cuando el elipsoide degenera en un plano se muestra en la fig. 17 donde se ven magnificados los efectos de la arista.

G - DISCUSION

Si bien el modelo presentado en este trabajo muestra excelente coincidencia con mediciones efectuadas en un dispositivo de laboratorio, no ha sido confrontado con resultados experimentales obtenidos en hornos de escala industrial. Esto se debe, en primer lugar, a que existe poca información bibliográfica con mediciones precisas del potencial eléctrico en la escoria ya que éstas son muy difíciles de efectuar en grandes unidades /18/. En segundo lugar, prácticamente la mayoría de los hornos industriales de REE operan con corriente alterna (50-60Hz) /18/. En su presente versión, el modelo ha sido utilizado para investigar la influencia de algunos parámetros importantes del proceso. Una mayor aproximación al fenómeno real debe tener en cuenta necesariamente la variación de la conductividad eléctrica con la temperatura. Ello requiere la resolución simultánea de las ecuaciones del campo electromagnético y térmico. Debroy y colab. /11/ mencionan que la variación de la conductividad eléctrica con la temperatura no produjo efectos significativos en la distribución de las superficies equipotenciales computadas para un caso simple, bidimensional, de SEE.

Por otra parte, Choudhary y Szekely /8/ concluyen que el uso de una conductividad eléctrica promedio es aceptable en la modelación de grandes unidades, aunque no así en dispositivos de laboratorio en los cuales pueden existir mayores gradientes de temperatura.

Otro aspecto que no contempla el modelo es la diferencia que se produce en la generación de calor al invertir la polaridad en un horno de REE con corriente continua.

La simulación de este aspecto requiere tener en cuenta los fenómenos electroquímicos en las interfaces escoria-metal, dado que, como resultado de la polarización anódica, existiría una generación de calor adicional en esta interfaz /16/.

A pesar de estas simplicidades el modelo propuesto, y fundamentalmente su formulación adimensional, permiten extraer importantes conclusiones respecto del aumento de escala ("scale up") de los dispositivos. En efecto, las principales magnitudes físicas pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\phi(r, z) = \phi_e \phi^*(r^*, z^*) \quad (30)$$

$$I = \sigma \phi_e r_m I^* \quad (31)$$

$$\vec{J}(r, z) = \frac{\sigma \phi_e}{r_m} \vec{J}^*(r^*, z^*) \quad (32)$$

$$H_\theta(r, z) = \sigma \phi_e H_\theta^*(r^*, z^*) \quad (33)$$

$$\dot{q}(r, z) = \frac{\sigma \phi_e^2}{r_m^2} \dot{q}^*(r^*, z^*) \quad (34)$$

$$\vec{F}(r, z) = \frac{\mu_o \sigma^2 \phi_e^2}{r_m} \vec{F}^*(r^*, z^*) \quad (35)$$

$$(\nabla \times \vec{F})_\theta(r, z) = \frac{\mu_o \sigma^2 \phi_e^2}{r_m^2} (\nabla \times \vec{F})_\theta^*(r^*, z^*) \quad (36)$$

en donde las magnitudes con asterisco, dependen exclusivamente de parámetros geométricos del dispositivo (r_e^* , z_1^* , z_2^* , z_3^* , z_4^* y $g^*(r^*)$). En consecuencia, para sistemas que respetan la semejanza geométrica, un aumento de las dimensiones lineales del dispositivo (por ejemplo, de la dimensión característica r_m) implica que la corriente aumentará linealmente, el campo magnético no será influenciado por el cambio de escala, y la generación local de calor y la convección electromagnética decrecerán con el cuadrado de las dimensiones del dispositivo.

Otra importante conclusión que emana del presente trabajo concierne a la variación del campo electromagnético y generación de calor asociada con la formación de las gotas de metal fundido en la punta del electrodo, durante el proceso:

a) Las gotas que se forman en la punta del electrodo y sobre el eje de simetría ($r=0$ y $z=z_3$) producirán un aumento en la componente J_z de la densidad de corriente, con lo cual habrá un incremento localizado de la producción de calor, pero no afectará significativamente la convección electromagnética de la escoria, dado que allí $(\nabla \times \vec{F})_\theta = 2\mu_0 J_r H_\theta / r \approx 0$. Esto explica los resultados computados por

Choudhary y colab./9/, quienes no encontraron grandes variaciones del campo de velocidades de la escoria computado para electrodos con puntas de distinto ángulo.

b) Las gotas que se forman en el borde del electrodo ($r=r_e$ y $z=z_2$) tendrán un efecto pronunciado tanto en la producción local de calor como en la contribución electromagnética a la vorticidad de la escoria, que generará fuertes asimetrías en el movimiento convectivo. El efecto de la formación de una única gota fuera del eje de simetría no puede ser estudiado con el presente modelo bidimensional.

H - CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo matemático para el análisis del campo electromagnético y generación de calor en la escoria durante el régimen estacionario de REE operado con corriente continua. Contiene como únicas variables independientes el potencial eléctrico aplicado, la conductividad eléctrica de la escoria y la geometría del dispositivo.

Se resuelve la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas y apropiadas condiciones de borde, con la técnica de elementos finitos. Se obtuvo buena concordancia con resultados experimentales y con otro modelo matemático en DF existentes en la literatura.

Las principales novedades son las siguientes:

1) La geometría del electrodo tiene gran influencia en el campo electromagnético y particularmente en la generación de calor a la escoria.

Las gotas que se forman en la punta del electrodo afectan localmente la generación de calor pero presumiblemente no afectan el campo de velocidades de la escoria.

Las gotas que se forman en el borde del electrodo pueden generar fuertes asimetrías en la generación local de calor y en el campo de velocidades de la escoria.

2) Los principales parámetros que determinan la resistencia global de la escoria son la distancia electrodo-pileta y la relación de llenado.

3) La formación de la piel de escoria sólida en la periferia del electrodo tiene influencia en la resistencia global de la escoria sólo para bajas relaciones de llenado.

4) El agregado de escoria (manteniendo la distancia electrodo-pileta constante) disminuye la resistencia global de la escoria hasta un valor límite para bajas relaciones de llenado. Para altas relaciones de llenado el efecto es despreciable.

5) La inmersión del electrodo (manteniendo el volumen de escoria constante) provoca una disminución lineal de la resis-

tencia eléctrica de la escoria para altas relaciones de llenado. El efecto es más complicado para bajas relaciones de llenado. En este último caso una brusca variación de la resistencia eléctrica del sistema tiene lugar cuando el electrodos opera próximo a la superficie libre de la escoria y puede ser la causa de la inestabilidad en la corriente frecuentemente observada en la práctica industrial.

AGRADECIMIENTOS

Los autores del presente trabajo desean expresar su agradecimiento al Programa Multinacional de Tecnología de Materiales OEA-CNEA por el apoyo económico brindado.

NOMENCLATURA

Parámetros dimensionales:

Letras latinas

$\vec{B}$	inducción magnética (Wb m^{-2})
$\vec{D}$	desplazamiento eléctrico (Coul m^{-2})
$\vec{E}, E_r, E_\theta, E_z$	campo eléctrico y sus componentes en coordenadas cilíndricas (V m^{-1})
$\vec{F}, F_r, F_\theta, F_z$	fuerza de Lorentz y sus componentes en coordenadas cilíndricas (N)
$g(r)$	perfil de fusión del electrodo (m)
$\vec{H}, H_r, H_\theta, H_z$	campo magnético y sus componentes en coordenadas cilíndricas (A m^{-1})
I	corriente eléctrica (A)
$\vec{J}, J_r, J_\theta, J_z$	densidad de corriente y sus componentes en coordenadas cilíndricas (A m^{-2})
P	potencia eléctrica total disipada por la escoria (W)
$\dot{q}$	generación de calor por efecto Joule por unidad de volumen y por unidad de tiempo (W m^{-3})
r	coordenada radial (m)
r_e	radio del electrodo (m)
r_m	radio del molde (m)
R	resistencia eléctrica de la escoria (Ω)

./.

V	volumen de escoria (m^3)
z	coordenada axial (m)
z_1	coordenada axial de la isoterma de fusión de la escoria en el electrodo (m)
z_2	coordenada axial de la isoterma de fusión del metal en el electrodo (m)
z_3	coordenada axial de la punta del electrodo (m)
z_4	coordenada axial de la interfaz escoria-pileta (m)

Letras griegas

ϕ	potencial eléctrico (V)
ϕ_e	potencial eléctrico del electrodo (V)
μ_0	permeabilidad magnética del vacío ($1,26 \times 10^{-6} \text{ Hm}^{-1}$)
σ	conductividad eléctrica de la escoria ($\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$)
∇	operador gradiente (m^{-1})

Parámetros adimensionales

Letras latinas

$$\vec{E}^* = \frac{\vec{E} r_m}{\phi_e} = \vec{J}^* \quad \text{campo eléctrico}$$

$$\vec{F}^* = \frac{\vec{F} r_m}{\mu_0 \sigma^2 \phi_e^2} \quad \text{fuerza de Lorentz}$$

$$g^* (r^*) = \frac{g(r)}{r_m} \quad \text{perfil de fusión del electrodo}$$

$$\vec{H}^* = \frac{\vec{H}}{\sigma \phi_e} \quad \text{campo magnético}$$

$$I^* = \frac{I}{\sigma r_m \phi_e} \quad \text{corriente eléctrica}$$

$$\vec{J}^* = \frac{\vec{J} r_m}{\sigma \phi_e} = \vec{E}^* \quad \text{densidad de corriente}$$

$$P^* = \frac{P}{\sigma \phi_e^2 r_m} = I^* \quad \text{potencia eléctrica}$$

$$\dot{q}^* = \frac{\dot{q} r_m^2}{\sigma \phi_e^2} \quad \begin{array}{l} \text{generación de calor por efecto} \\ \text{Joule} \end{array}$$

$$r^* = \frac{r}{r_m} \quad \text{coordenada radial}$$

$$r_e^* = \frac{r_e}{r_m} \quad \text{radio del electrodo}$$

./.

$$r_e^{*2} = \frac{r_e^2}{r_m^2}$$

relación de llenado (relación de secciones electrodo-molde)

$$R^* = R \sigma r_m$$

resistencia eléctrica de la escoria

$$Re_m$$

número de Reynolds magnético de la escoria

$$V^* = \frac{V}{r_m^3}$$

volúmen de escoria

$$z^* = \frac{z}{r_m}$$

coordenada axial

$$z_1^* = \frac{z_1}{r_m}$$

coordenada axial de la iso terma de fusión de la escoria en el electrodo

$$z_2^* = \frac{z_2}{r_m}$$

coordenada axial de la isoterna de fusión del metal en el electrodo

$$z_3^* = \frac{z_3}{r_m}$$

coordenada axial de la punta del electrodo

$$z_4^* = \frac{z_4}{r_m}$$

coordenada axial de la interfaz escoria-pileta.

Letras griegas

$$\nabla^* \equiv r_m \nabla$$

operador gradiente

$$\phi^* = \frac{\phi}{\phi_e}$$

potencial eléctrico

Tabla I

Valores empleados en la simulación del exp. 1 efectuado por Mitchell y Joshi /13/ :

$$\begin{aligned}r_e &= 0.019 \text{ m} \\r_m &= 0.04 \text{ m} \\Z_1 &= 0 \\Z_2 &= 0.015 \text{ m} \\Z_3 &= 0.025 \text{ m} \\Z_4 &= 0.04 \text{ m} \\\phi_e &= 23.75 \text{ V} \\\sigma &= 337.5 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1} (\text{F}_2\text{Ca} - 25\% \text{ Al}_2\text{O}_3) \text{ /3/}\end{aligned}$$

Tabla II

Comparación de valores de intensidad de corriente medidos por Mitchell y Joshi /13, exp. 1/, con las predicciones de Dilawari y Szekely /3/ y del presente modelo.

Mitchell y Joshi /13/:	I = 1150 A
Dilawari y Szekely /3/:	I = 1132 A
Presente modelo:	I = 1134 A

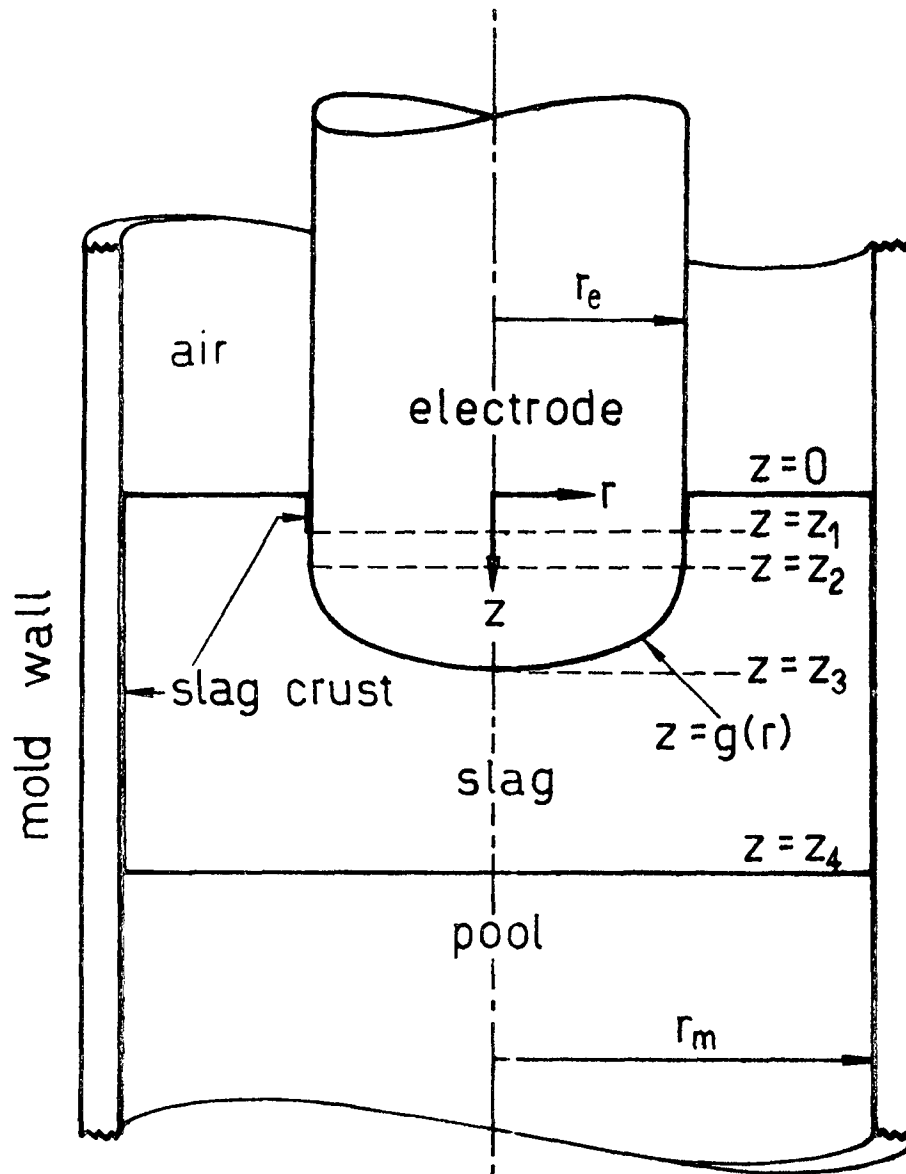


Fig. 1: Esquema de un horno de refusión de metales por electroescoria.

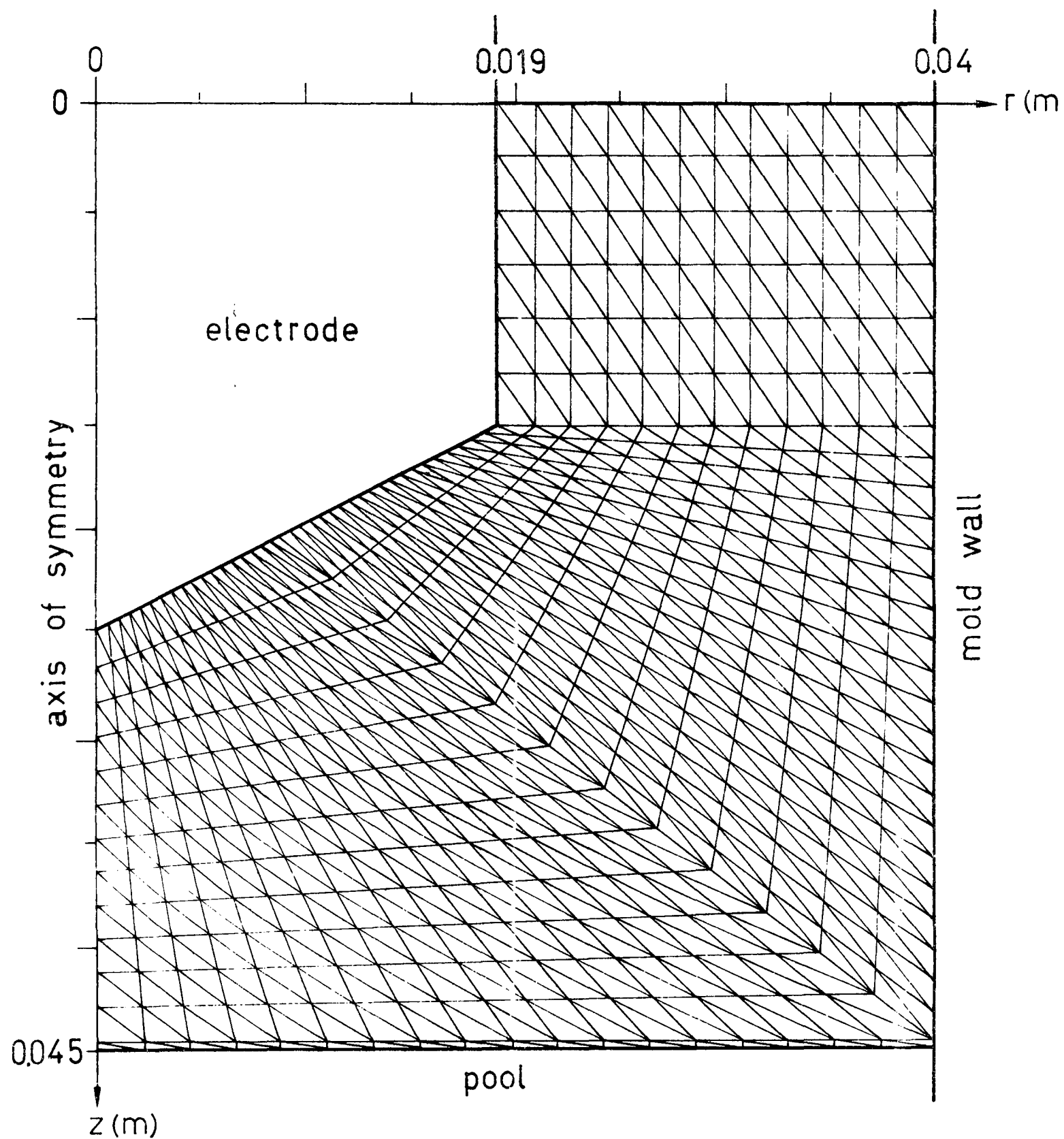


Fig. 2: Red de elementos finitos empleada para modelar los experimentos de Mitchell y Joshi /13/ Ver Tabla I

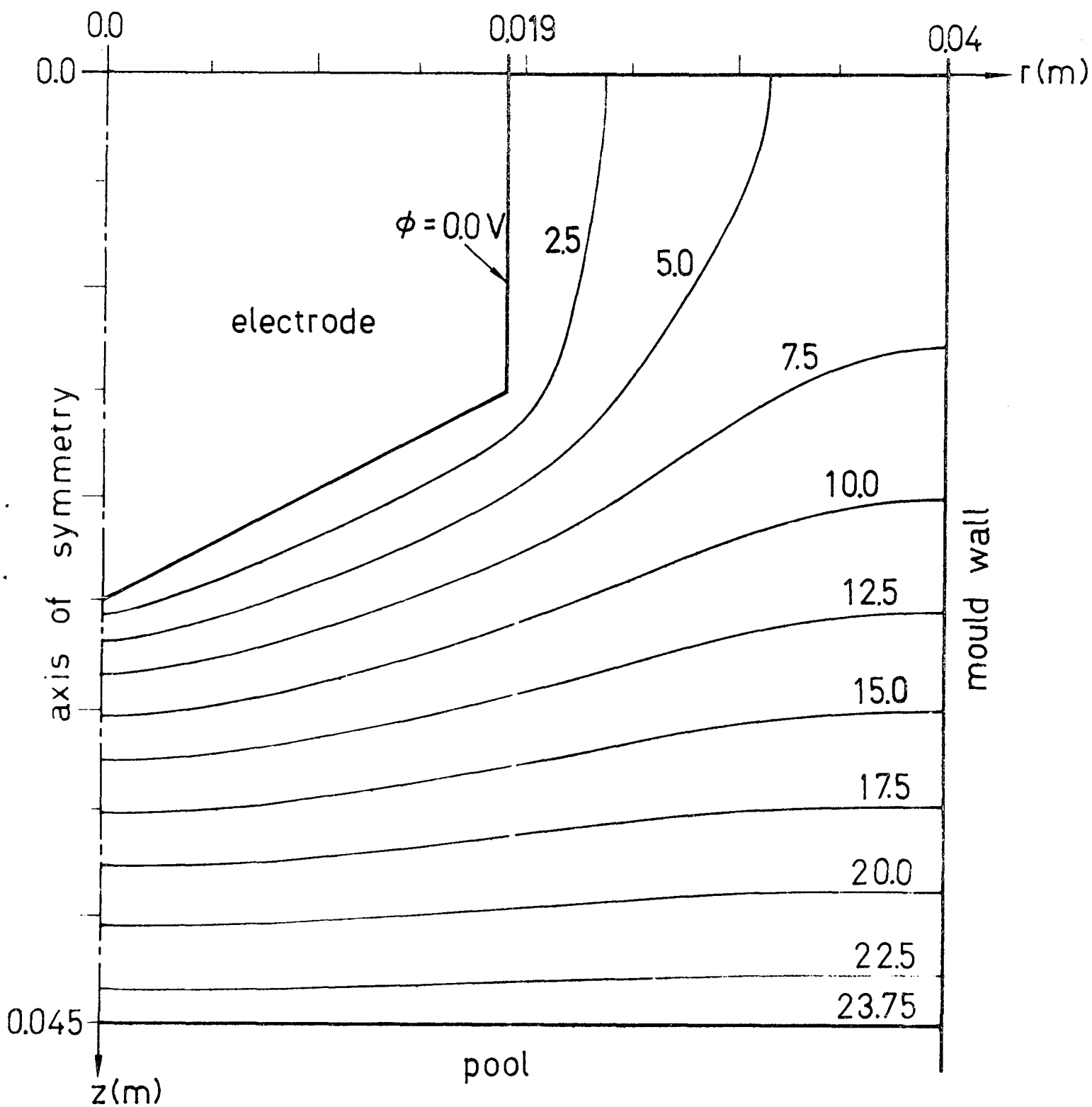


Fig. 3: Potencial eléctrico $\phi(r, z)$ calculado. Ver Tabla I.

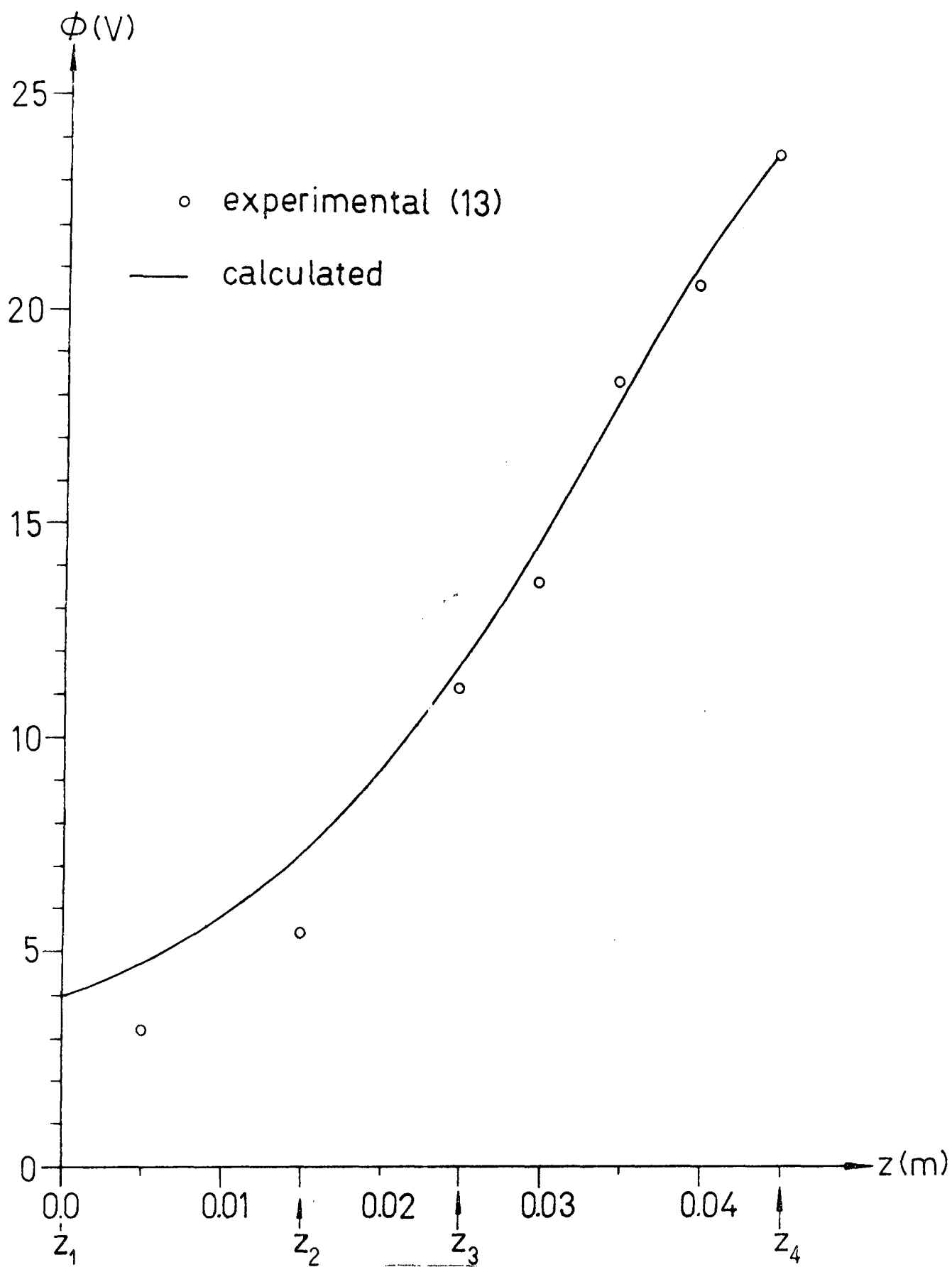


Fig. 4: Potencial eléctrico $\phi(r=0.03\text{m}, z)$ medido por Mitchell y Joshi /13/ y calculado.

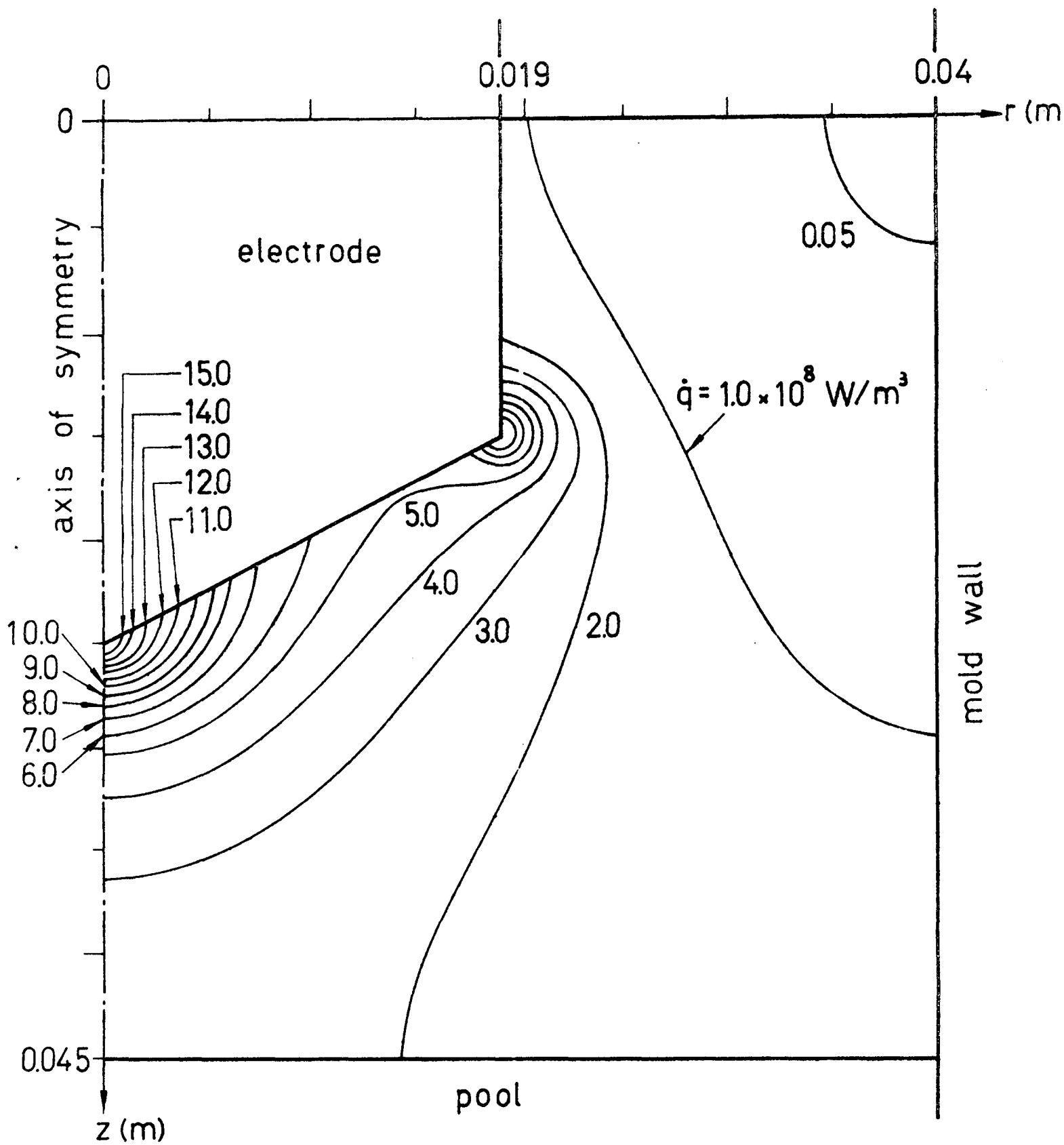


Fig. 5: Generación de calor $\dot{q}(r, z)$ calculada. Ver tabla I.

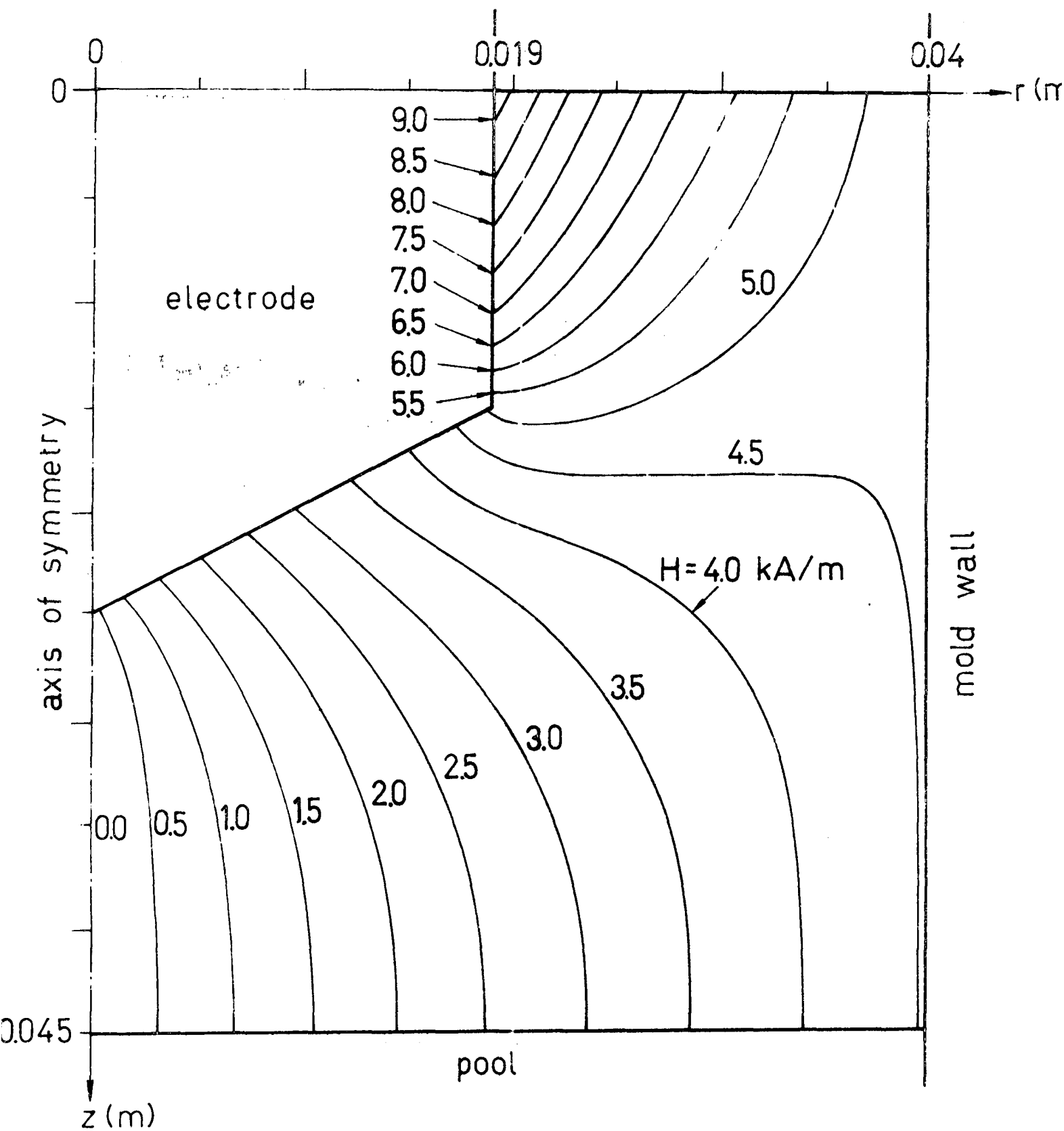


Fig. 6: Campo magnético $H_\theta(r, z)$ calculado. Ver tabla I.

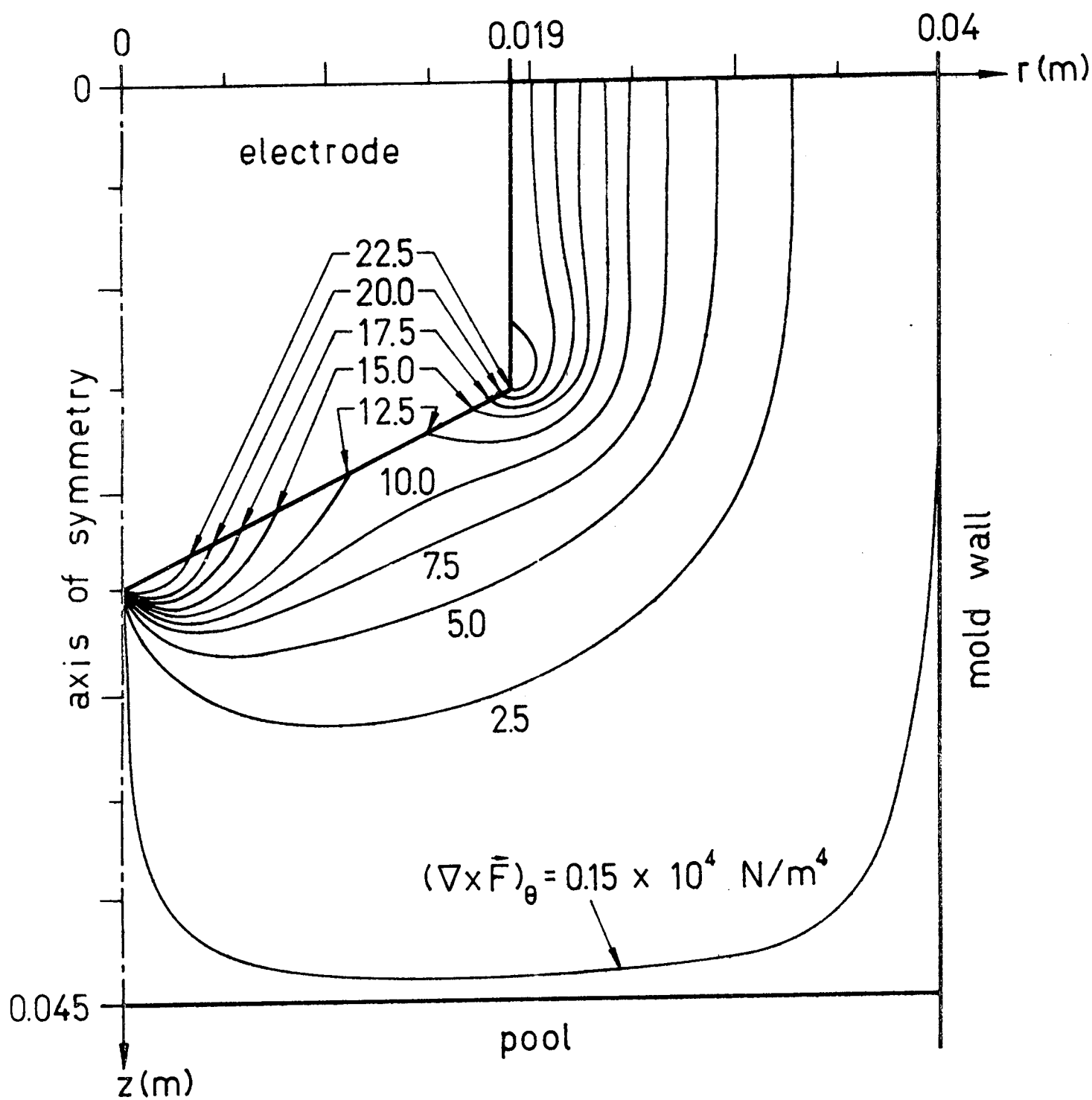


Fig. 7: Rotacional de la densidad de la fuerza de Lorentz $(\nabla \times \vec{F})_\theta$ calculado. Ver tabla I.

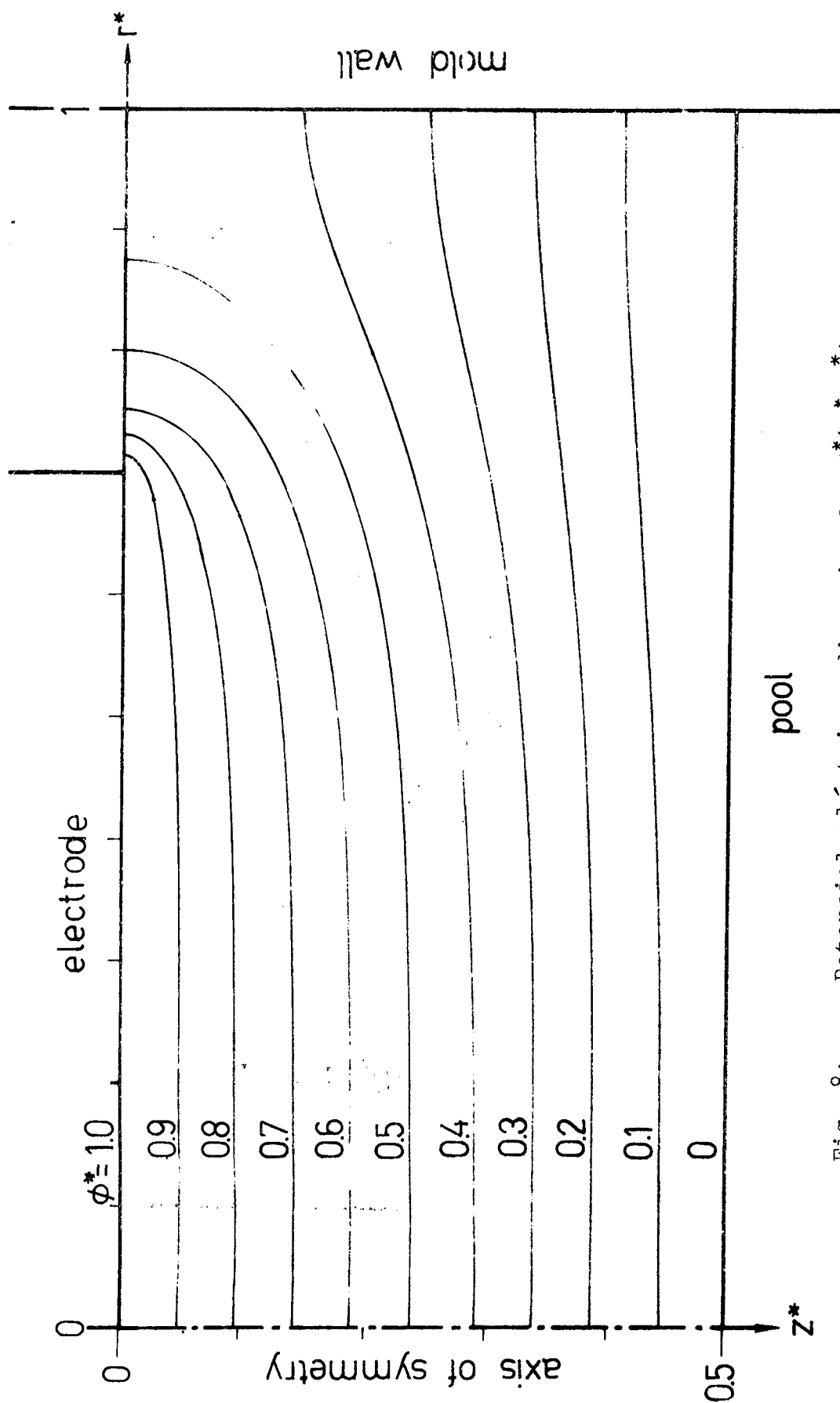


Fig. 8: Potencial eléctrico adimensional $\phi^*(r^*, z^*)$ calculado para electrodo sin inmersión $z_1^* = z_2^* = z_3^* = 0$; $z_4^* = 0.5$; $r_e^* = 0.7$.

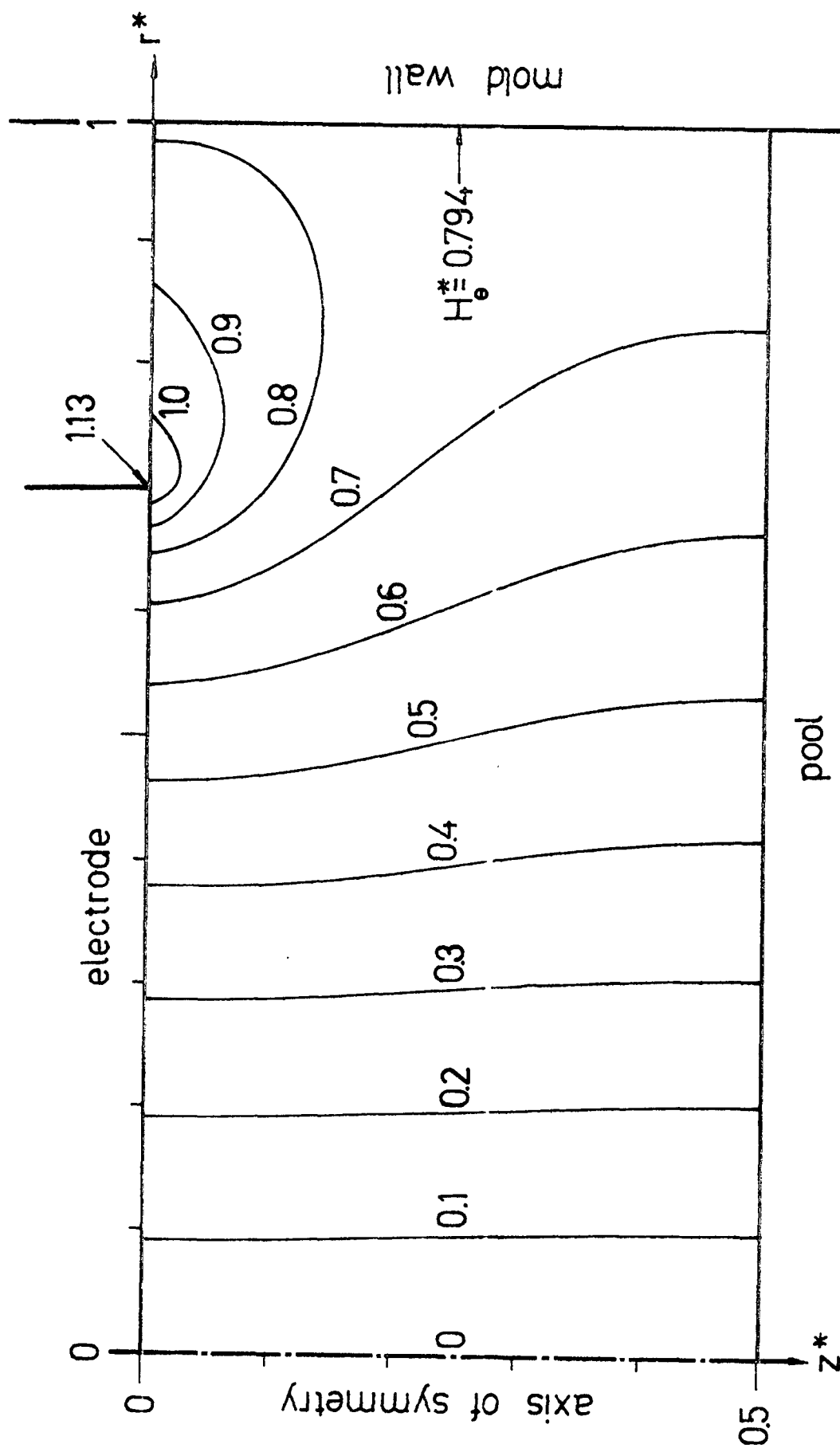


Fig. 9: Campo magnético adimensional $H_{\theta}^*(r^*, z^*)$

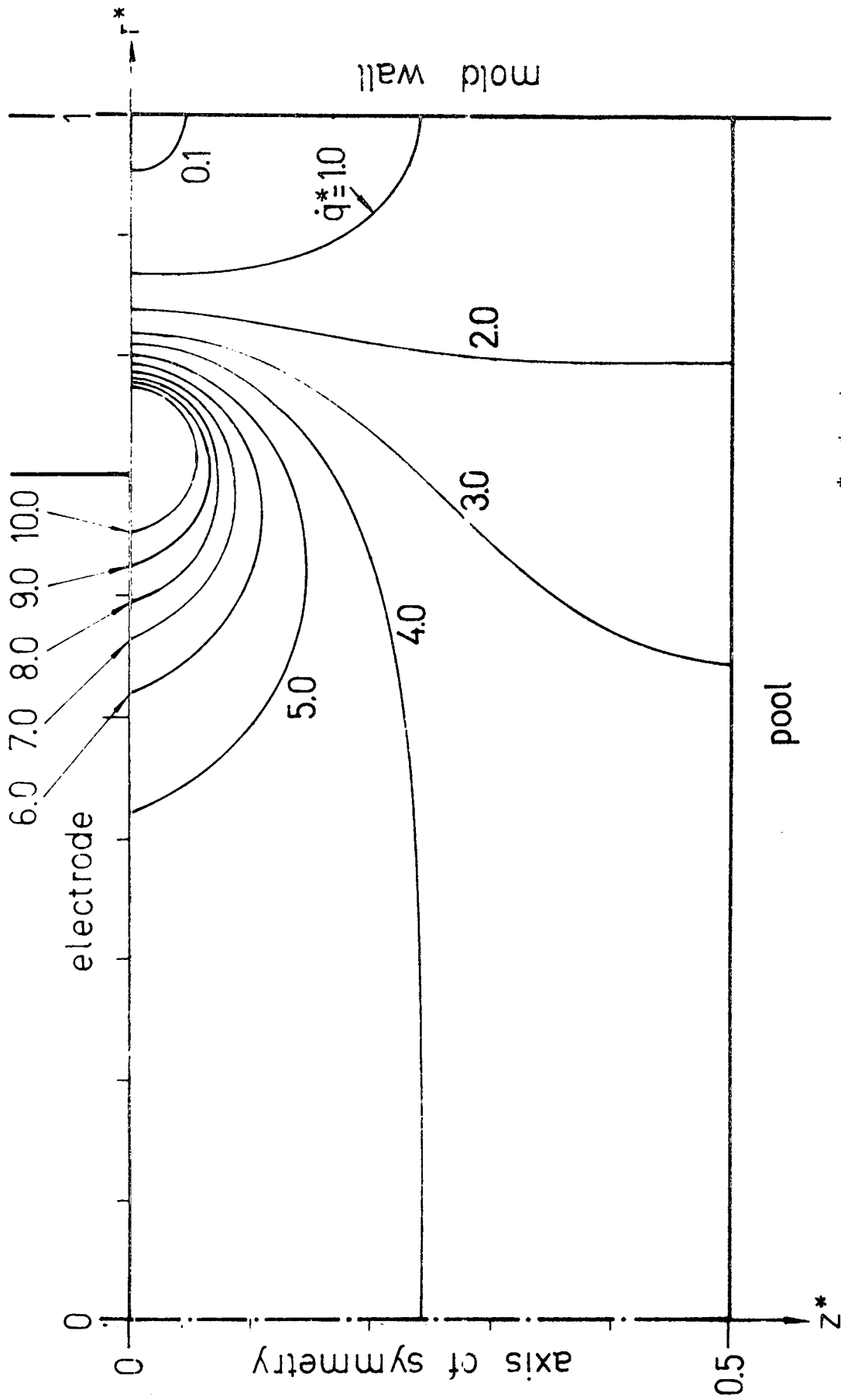


Fig. 10: Generación de calor adimensional $\dot{q}^*(r^*, z^*)$
 calculado . $z_1^* = z_2^* = z_3^* = 0$; $z_4^* = 0.5$; $r_e^* = 0.7$

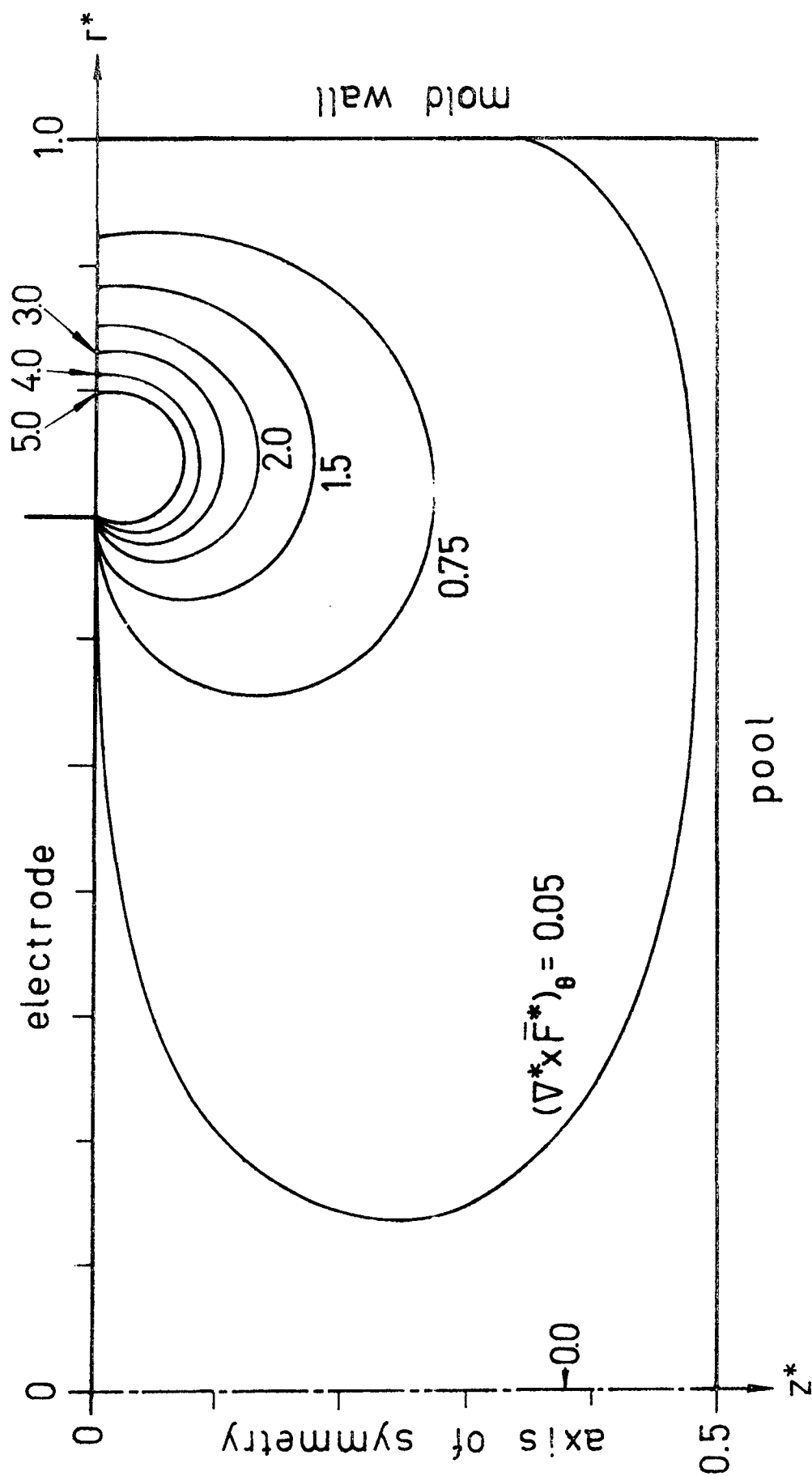


Fig. 11: Rotacional de la densidad de la fuerza de Lorentz
adimensional $(\nabla^* \times \vec{F}^*)_\theta$ calculado. $z_1^* = z_2^* = z_3^* = 0$;
 $z_4^* = 0.5$; $r_e^* = 0.7$.

Fig. 12: Resistencia eléctrica adimensional de la escoria R^* en función de la distancia adimensional electrodo-pileta z_4^* para diferentes secciones adimensionales de electrodo r_e^{*2} . Electrodo con perfil de fusión plano y sin inmersión: $g^*(r^*) = z_1^* = z_2^* = z_3^* = 0$.
+: valores calculados.

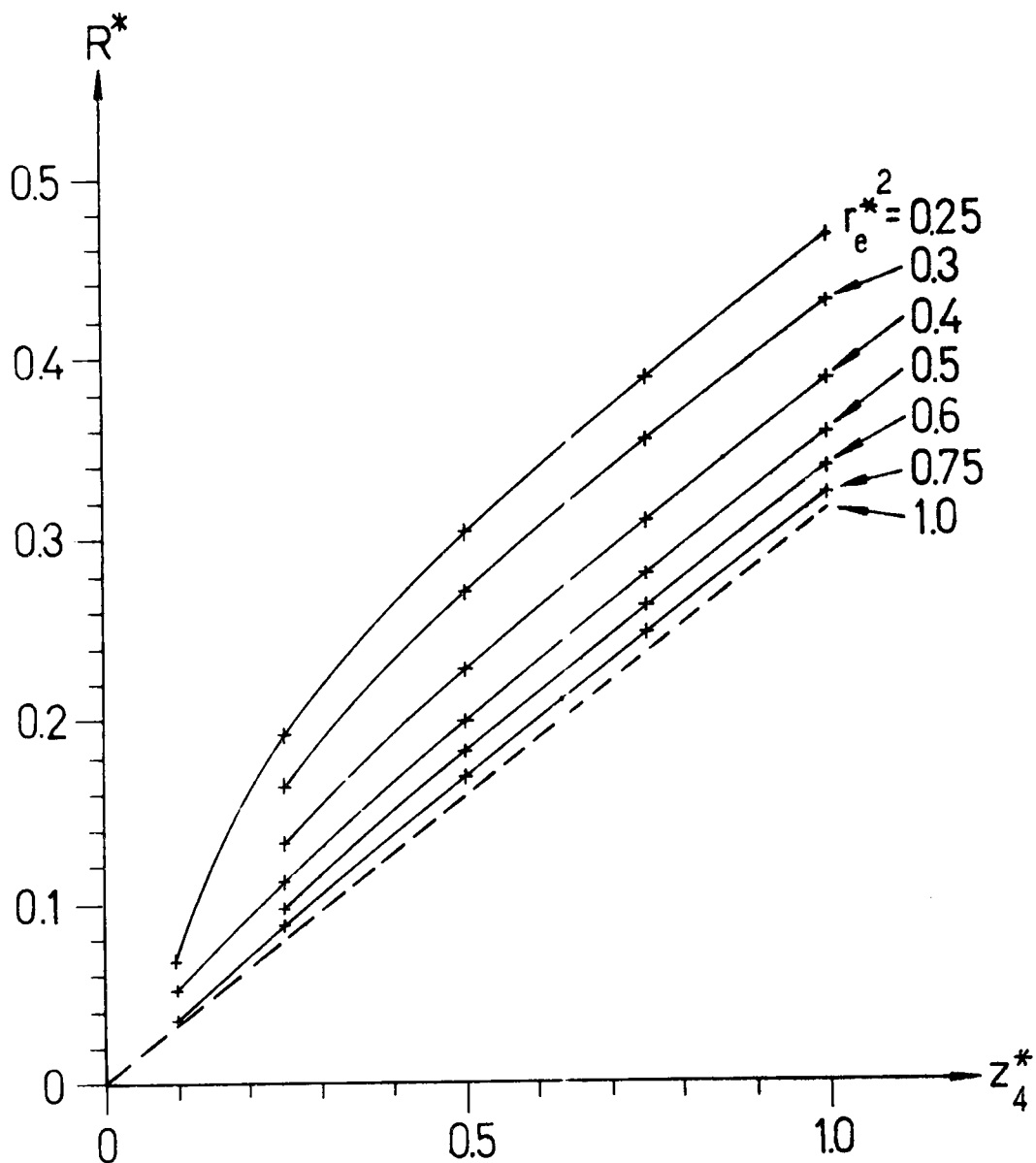


Fig. 13: Resistencia eléctrica adimensional de la escoria R^* en función de la inmersión adimensional del electrodo z_3^* para diferentes secciones adimensionales de electrodo r_e^{*2} . Electrodo con perfil de fusión plano: $g^*(r^*) = z_2^* = z_3^*$ y distancia adimensional electrodo-pileta constante: $z_4^* - z_3^* = 0.5$. ----: con "piel" de escoria ($z_1^* = z_2^*$). —: sin "piel" de escoria ($z_1^* = 0$)
+: valores calculados.

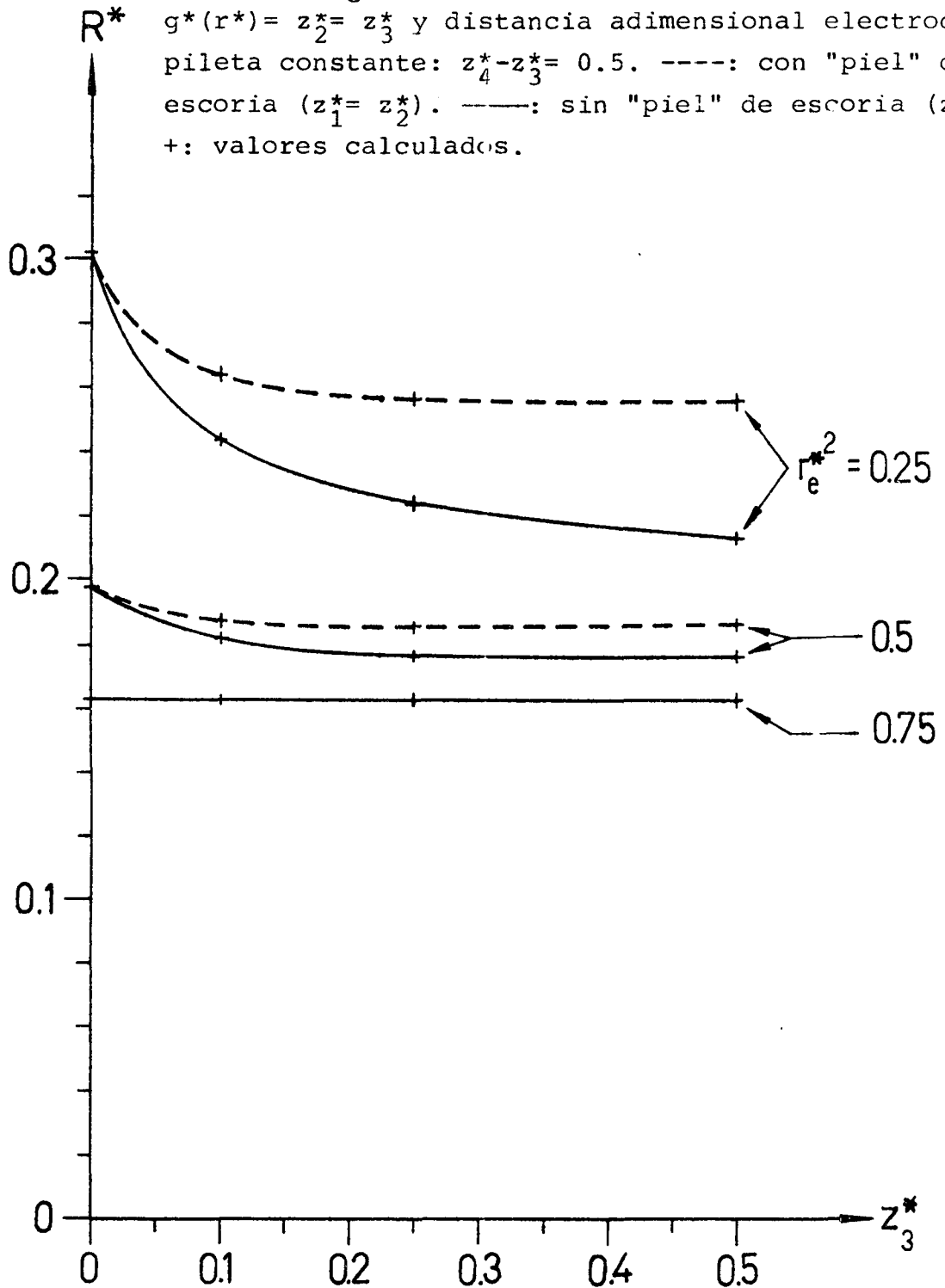
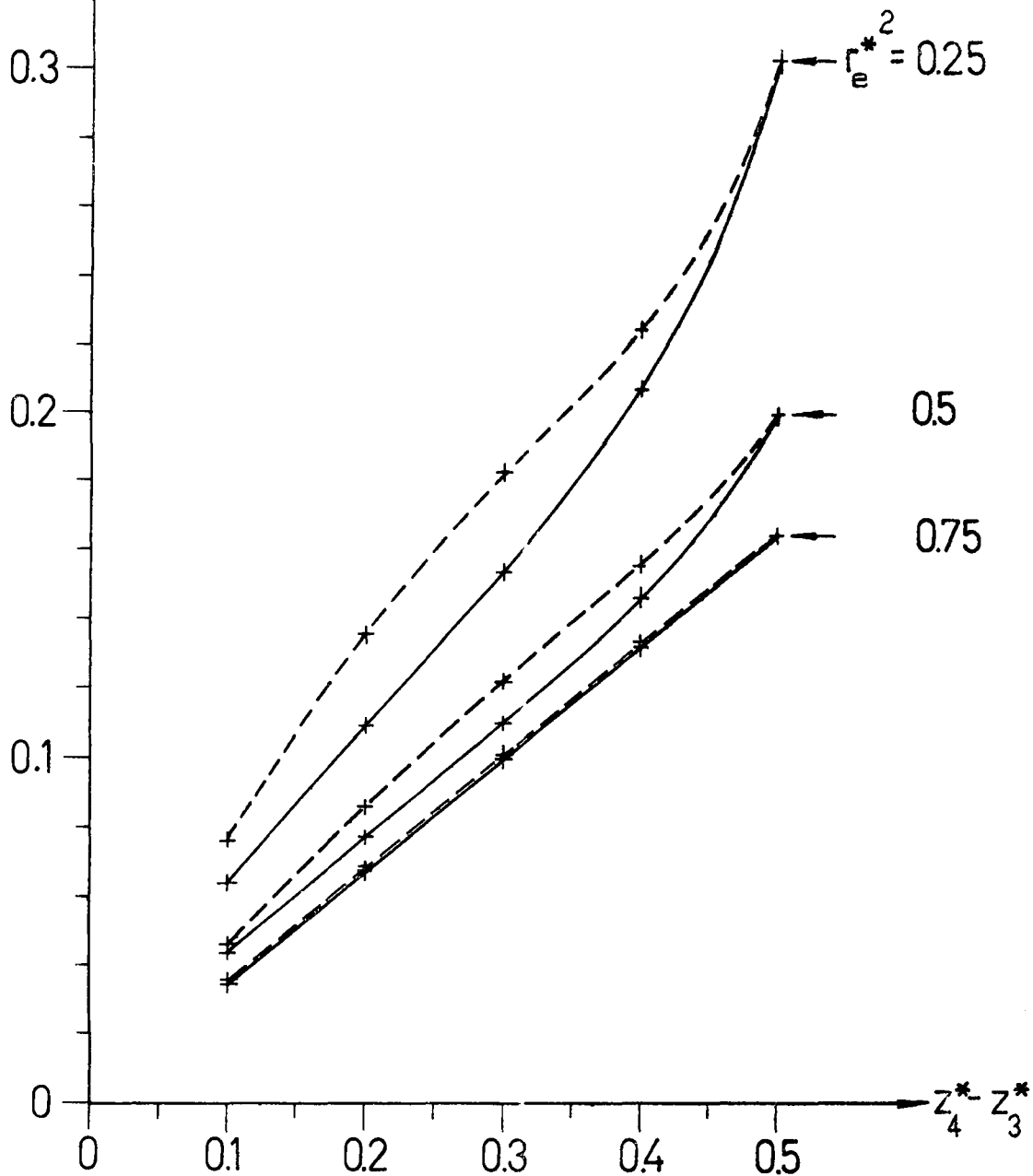


Fig. 14: Resistencia eléctrica adimensional de la escoria R^* en función de la distancia adimensional electrodo-pileta $z_4^* - z_3^*$ para diferentes secciones adimensionales de electrodo r_e^{*2} . Electrodo con perfil de fusión plano: $g^*(r^*) = z_2^* = z_3^*$. Volumen adimensional de escoria constante: $V^* = 1/2$. ----: con "piel" de escoria ($z_1^* = z_2^*$). —: sin "piel" de escoria ($z_1^* = 0$)
+: valores calculados.



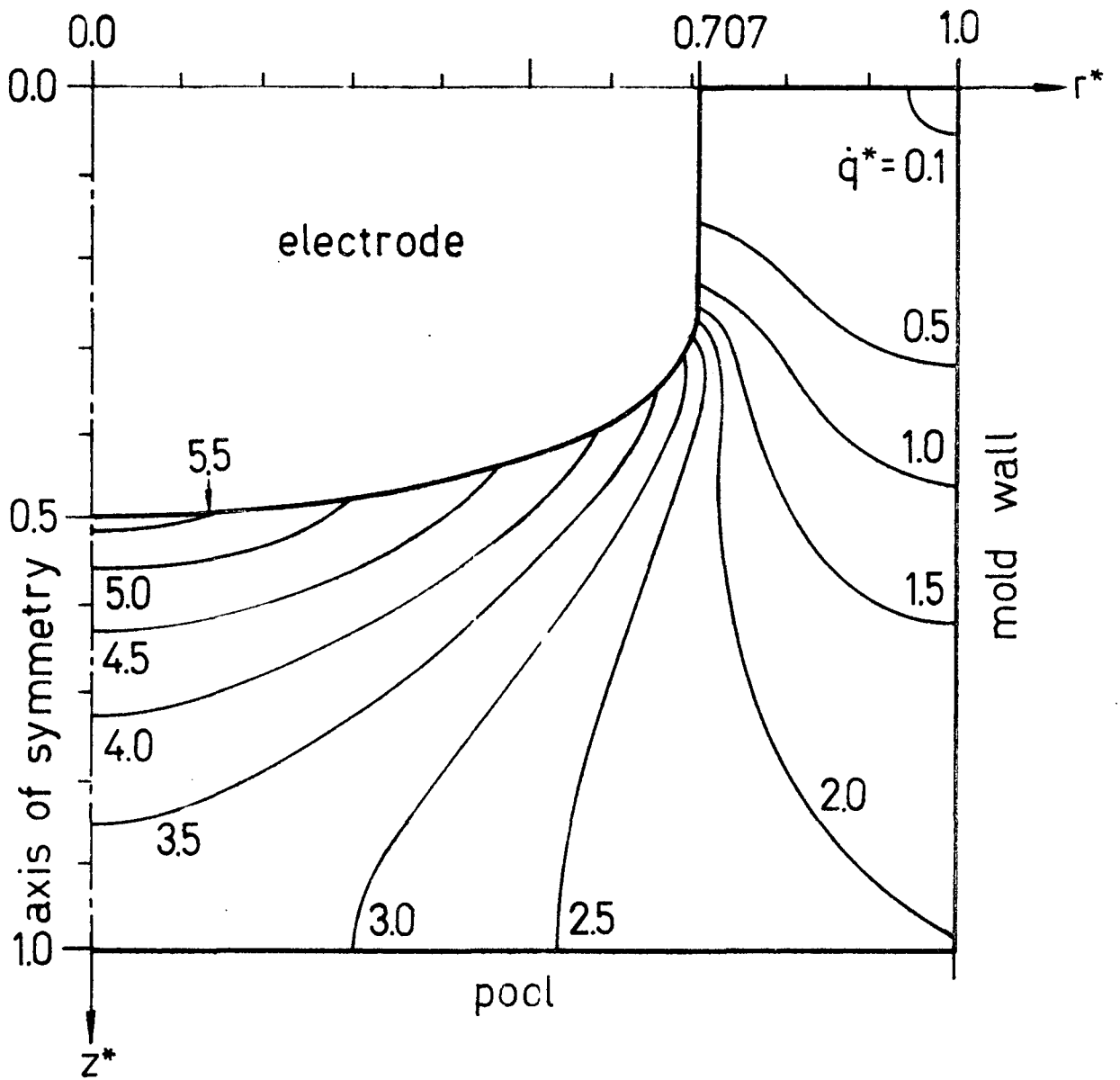


Fig. 15: Generación de calor adimensional $\dot{q}^*(r^*, z^*)$
 para electrodo con perfil de fusión elipsoidal:
 $r_e^{*2} = 0.5$; $z_1^* = 0$; $z_2^* = 0.25$; $z_3^* = 0.5$; $z_4^* = 1.0$

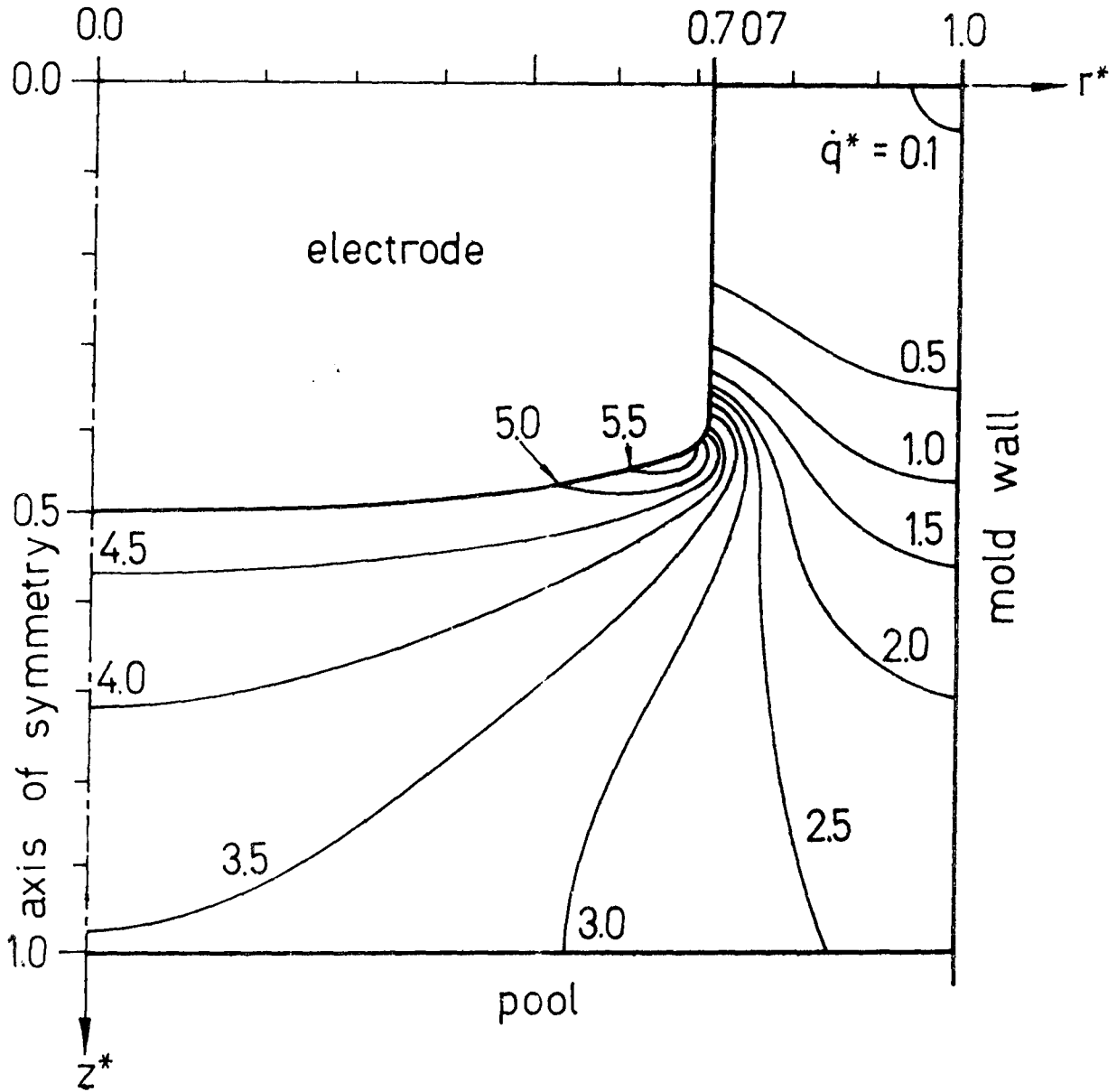


Fig. 16: Generación de calor adimensional $\dot{q}^*(r^*, z^*)$ para electrodo con perfil de fusión elipsoidal:
 $r_e^* = 0.5$; $z_1^* = 0$; $z_2^* = 0.4$; $z_3^* = 0.5$; $z_4^* = 1.0$

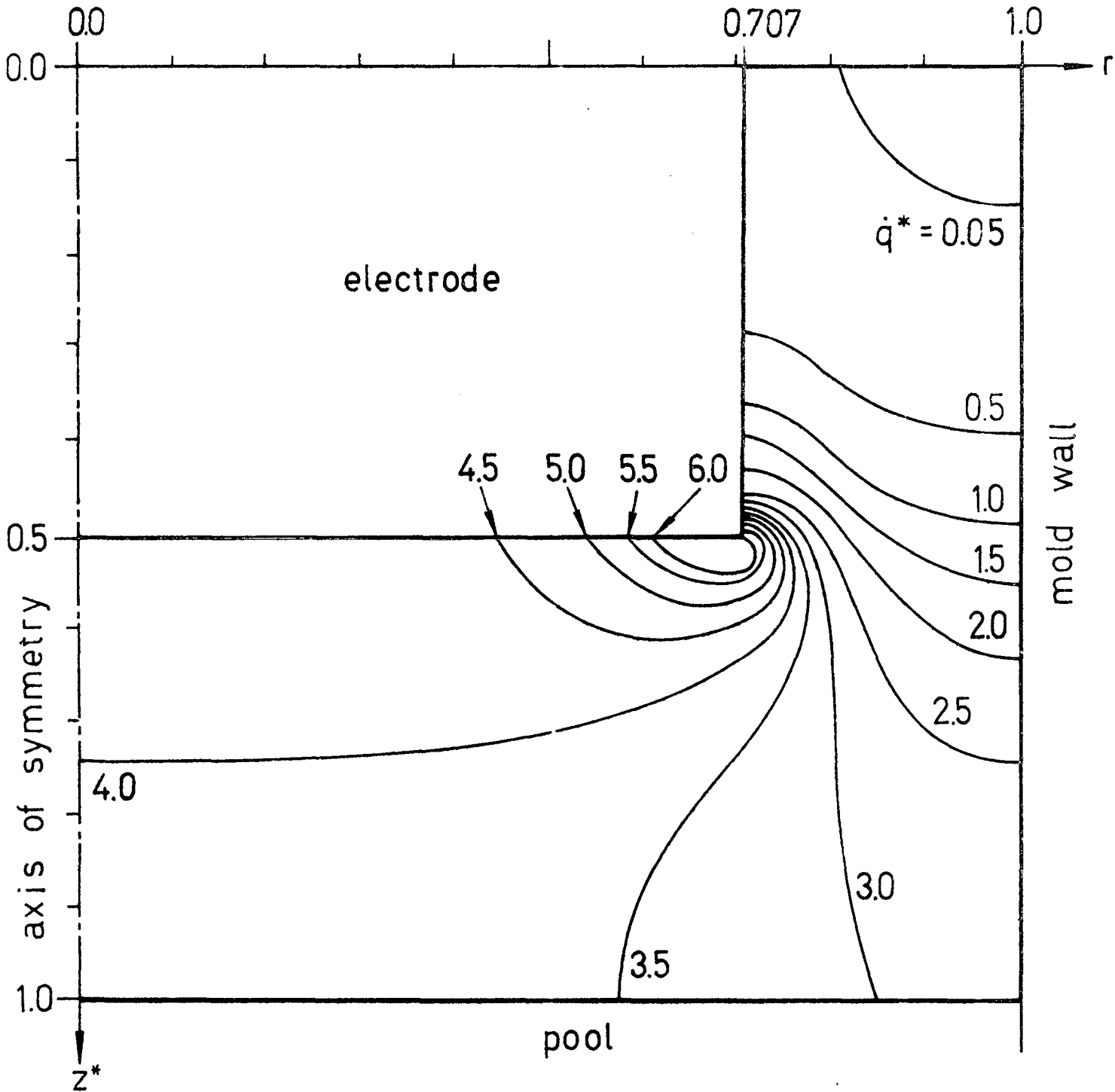


Fig. 17: Generación de calor adimensional $\dot{q}^*(r^*, z^*)$ para electrodo con perfil de fusión plano:

$$r_e^* = 0.5 ; z_1^* = 0 ; z_2^* = z_3^* = 0.5 ; z_4^* = 1.0$$

Referencias

- 1) A. Mitchell, J. Szekely y J.F. Elliott: "Applications of Mathematical Modelling to the ESR process". Proc. of a Conf. on ESR, The Iron and Steel Institute, London , 1973, pp 3-15.
- 2) A. H. Dilawari y J. Szekely: "A mathematical model of slag and metal flow in the ESR process". Metall. Trans. B, 1977, Vol. 8B, pp 227-236.
- 3) A. H. Dilawari y J. Szekely: "Calculation of current-voltage relationships and heat-generation patterns in electros-lag refining process". Ironmaking and Steelmaking, 1977, Vol 5, pp 308-312.
- 4) A. H. Dilawari y J. Szekely: "Heat transfer and fluid flow phenomena in electroslag refining". Metall. Trans. B, 1978, Vol 9B, pp 77-87.
- 5) J. Kreyenberg y K. Schwerdtfeger: "Stirring velocities and temperature field in the slag during electroslag remelting". Arch. Eisenhüttenwes., 1979, Vol 50, Nº1, pp 1-6.
- 6) M. Choudhary y J. Szekely: "The modeling of pool profiles, temperature profiles and velocity fields in ESR systems". Metall. Trans. B, 1980, Vol. 11B, pp 439-453.
- 7) M. Choudhary y J. Szekely: "Modelling of fluid flow and heat transfer in industrial - scale ESR system". Ironmaking and Steelmaking, 1981, Vol. 5, pp 225-231.
- 8) M. Choudhary y J. Szekely: "The effect of temperature dependent electrical conductivity on flow and temperature fields in slags in ESR systems". Metall. Trans. B, 1981, Vol. 12B, pp 418-421.
- 9) M. Choudhary, J. Szekely, B. I. Medovar y Yu. G. Emelyanenko "The velocity field in the molten slag region of ESR systems: a comparison of measurements in a model system with theoretical predictions". Metall. Trans. B, 1982, Vol. 13B, pp 35-43.

- 10) A. H. Dilawari, J. Szekely y T. Eagar: "Electromagnetically and thermally driven flow phenomena in electrosag welding". Metal. Trans. B, 1978, Vol. 9B, pp. 371-381.
- 11) T. Debray, J. Szekely y T. Eagar: "Heat generation patterns and temperature profiles in electrosag welding". Metall. Trans. B, 1980, Vol. 11B, pp. 593-605.
- 12) K. H. Tacke y K. Schwerdtfeger: "Melting of ESR electrodes". Arch. Eisenhüttenwes, 1981, Vol. 52, № 4 pp. 137-142.
- 13) A. Mitchell y S. Joshi: "The Thermal characteristics of the electrosag process". Metall. Trans., 1973, Vol. 4, pp. 631-642.
- 14) J. Campbell: "Fluid flow and droplet formation in the electrosag remelting process". J. of Metals, July 1970, Vol. 22, pp. 23-35.
- 15) J. D. W. Rawson, D. I. Dawson y N. Kirkham: "Slag and metal flow in electrosag remelting". Proc. 4 th Int. Symp. on ERS, The Iron and Steel Institute of Japan, Tokio, 1973, pp. 55-68.
- 16) A. Mitchell y G. Beynon: "Electrode polarization in the DC electrosag melting of pure iron". Metall. Trans., 1971, Vol. 2, pp. 3333-3345.
- 17) K.C. Mills y B.J. Keene: Physicochemical properties of CaF_2 -based slags". Int. Met. Reviews, 1981, Vol. 26, № 1, pp. 21-69.
- 18) A. Mitchell: "The chemistry of ESR slags". Can. Metall. Quart., 1981, Vol. 20, № 1, pp. 101-112.
- 19) A. Mitchell y J. F. Waider: "Some observations on the radiative properties of ESR slags". Can. Metall. Quart., 1981, Vol. 20, № 4 pp. 373-386.
- 20) J. D. Jackson: "Classical Electrodynamics", John Willey and Sons, New York, 1966.

- 21) M. Kawakami y K. S. Goto: "A survey on profiles of temperature and electrical potential in the flux and metal pool during electros^ulag remelting". Proc. 6 th Int. Vacuum Metallurgy. Conf. on Special Melting, San Diego, California, 23-27 Abril 1979. Eds. G.K. Bhat y R. Schlatter. American Vacuum Society, 1980, pp. 500-513
- 22) M. Kawakami, K. Nagata, M. Yamamura, N. Sakata, Y. Miyashita y K. S. Goto: "Profiles of temperatures, voltage and local heat generation in slag phase and metal pool of ESR unit under operation". Tetsu-to-Hagané, 1977, Vol. 63, pp. 220.
- 23) O.C. Zienkiewicz: "The Finite Element Method in Engineering Science". Mc Graw-Hill, 1971.
- 24) F.G.Basombrío y B.Cruz: "Resolución por elementos finitos de la ecuación cuasiarmónica bidimensional (Programas CUARM, AXICUARM y NOLICUARM)". CNEA-NT 31/78 (1978).
- 25) G.Sánchez Sarmiento: "REDEF. Un esquema simple para la generación automática de redes de elementos finitos bidimensionales". CNEA-NT 16/80 (1980).
- 26) S.Pissanetzky: Archivo computacional del Centro Atómico Bariloche, CNEA (1978).
- 27) S. Pissanetzky y F.G. Basombrío: "Efficient calculation of numerical values of a polyhedral function". International Journal for Numerical Methods in Engineering (1980).

APENDICE

ESQUEMA NUMERICO EN ELEMENTOS FINITOS E IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL. PROGRAMAS ELESCOR 3 Y ELESCOR 4.

A.1.- Objetivos de los programas

Los programas ELESCOR 3 y ELESCOR 4 constituyen las implementaciones computacionales de los esquemas en elementos finitos desarrollados para el cálculo de las distribuciones espaciales de las funciones $\phi(r,z)$, $\vec{J}(r,z)$, $\vec{q}(r,z)$, $H_\theta(r,z)$, $\vec{F}(r,z)$ y $(\nabla \times \vec{F})_\theta(r,z)$ en la escoria. Además, por integración numérica de $\vec{J}(r,z)$, se obtiene la corriente eléctrica total I , y de aquí la resistencia eléctrica global $R = \phi_e/I$.

Para el caso en que el electrodo tiene su punta inmersa en la escoria (ver figura 1) se desarrolló el programa ELESCOR 3, que genera automáticamente una malla del tipo de la mostrada en la figura 2 y posteriormente calcula las funciones citadas en dicho dominio discretizado, según se sintetiza a continuación. El programa ELESCOR 4, por su parte, corresponde a electrodos de punta plana sin inmersión en la escoria (ver figuras 8-11), con una malla de elementos finitos del tipo de la figura A.1.- El haber implementado separadamente ambos programas obedece a razones prácticas por ser diferentes los conjuntos de parámetros que definen los dos tipos de geometrías.

Los pasos fundamentales que siguen los mismos son los siguientes:

- a) Lectura de los datos geométricos y físicos de un dado dispositivo.
- b) Generación automática de la red de elementos finitos por transformaciones armónicas según se sintetiza más adelante en A.3.
- c) Graficación de dicha red por impresora.
- d) Cálculo de $\phi(r,z)$ resolviendo por el método de elementos finitos la ecuación de Laplace (8). Ver punto A.2 a continuación.

e) Cálculo de $\vec{J}(r,z)$ por derivación numérica de la función $\phi(r,z)$, calculada en d), ec. (11), según se detalla más adelante en el punto A.4.

f) Cálculo de la corriente total I integrando numéricamente $J_z(r, z = z_4)$ calculada en la interfaz escoria-metal líquido (ec. (16)).

g) Cálculo de la resistencia eléctrica global: $R = \phi_e / I$.

h) Cálculo de $\dot{q}(r,z)$ según la ecuación (12).

i) Cálculo de la generación de calor total P , integrando numéricamente $\dot{q}(r,z)$ en todo el volumen de escoria, a los fines de verificar por otra vía computacional el cálculo de I ya que debe ser $P = \phi_e I$.

j) Cálculo de $H_0(r,z)$ por aplicación de la Ley de Ampère, ec. (13), integrando numéricamente $\vec{J}(r,z)$ según se describirá en el punto A.5.

k) Cálculo de la fuerza de Lorentz $\vec{F}$ y de $\nabla \times \vec{F}$, según ecuaciones (14) y (19).

l) Impresión de resultados.

m) Graficación por impresora de curvas de nivel de las funciones calculadas ϕ , J_r , J_z , $\dot{q}$, H_θ , F_r , F_z y $(\nabla \times \vec{F})_\theta$.

A.2.- Resolución de la ecuación de Laplace con condiciones de contorno tipo Dirichlet por el método de elementos finitos.

La resolución de la ecuación de Laplace por el método de elementos finitos es ampliamente conocida [23], por lo cual no daremos aquí detalles sobre el procedimiento y sólo plantearemos los lineamientos generales y las ecuaciones básicas.

Sea la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas bidimensionales:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x,y) \in \Omega \quad (A.1)$$

o en coordenadas cilíndricas para sistemas de simetría de revolución:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad \forall (r,z) \in \Omega \quad (A.2)$$

La función incógnita $\phi(x,y)$ ó $\phi(r,z)$ respectivamente está sujeta a condiciones de contorno tipo Dirichlet $\phi = \delta$ en toda la frontera Γ del dominio Ω .

El procedimiento consiste básicamente en la subdivisión del recinto Ω en un conjunto de subrecintos llamados "elementos", del tipo de los mostrados en las figuras 2 y A.1 (discretización del recinto), y en la definición para cada uno de los vértices de los elementos, llamados "nodos" de la discretización, de sendas funciones de prueba para los métodos variacionales de Rayleigh-Ritz o de Galerkin. De esta manera el problema se reduce a la determinación de un número finito de incógnitas, que son los valores ϕ_i^h que toma en cada nodo i la función poliédrica ϕ^h , aproximación buscada de la función incógnita ϕ . Las ϕ_i^h son las incógnitas de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, el que se resuelve posteriormente por algún procedimiento numérico.

Llamaremos N al número total de nodos de la red, y M al número de nodos que pertenecen a Γ . Los M valores

$$\phi_k^h = \delta_k, \quad k \in P = \{i, j, m, \dots\}$$

donde P es el conjunto de índices de todos los nodos sobre Γ , constituyen la "discretización" de la condición de contorno impuesta. Los $N-M$ valores restantes ϕ_i^h son las incógnitas del sistema lineal:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \notin P}} K_{ij} \phi_j^h = - \sum_{j \in P} K_{ij} \delta_k \quad \forall i \notin P \quad (A.3)$$

La matriz de coeficientes $K = [K_{ij}]$, llamada "matriz de rigi-

dez", se construye acoplando las contribuciones que provienen separadamente de cada elemento.

Consideremos primero una subdivisión de un recinto bidimensional plano de coordenadas cartesianas (x,y), en elementos finitos triangulares con tres nodos coincidentes con sus vértices. A estos elementos le corresponden funciones de prueba que valen 1 en el respectivo nodo, 0 en todos los demás, y varían linealmente en los elementos que tienen a ese nodo por vértice.

Llamando (x_i, y_i) , (x_j, y_j) y (x_m, y_m) a las coordenadas de los tres vértices i,j,m de un elemento genérico e, la función aproximante ϕ^h para todo punto interior al mismo vale /23,24/:

$$\phi^h(x,y) = \frac{1}{2\Delta} [(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \phi_i^h + (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) \phi_j^h + (\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y) \phi_m^h] \quad (A.4)$$

donde:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ \beta_i &= y_j - y_m \\ \gamma_i &= x_m - x_j \end{aligned} \quad (A.5)$$

y el resto de los coeficientes resulta de permutar cíclicamente los índices i,j,m. La contribución de este elemento a la matriz K está dado por la siguiente matriz de orden 3x3, llamada "matriz elemental":

$$K_e = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} \beta_i^2 + \gamma_i^2 & \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j & \beta_i \beta_m + \gamma_i \gamma_m \\ \beta_j \beta_i + \gamma_j \gamma_i & \beta_j^2 + \gamma_j^2 & \beta_j \beta_m + \gamma_j \gamma_m \\ \beta_m \beta_i + \gamma_m \gamma_i & \beta_m \beta_j + \gamma_m \gamma_j & \beta_m^2 + \gamma_m^2 \end{pmatrix} \quad (A.6)$$

donde:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

Como (A.6) es una matriz simétrica, en ausencia de datos de Dirichlet sobre r , la matriz K que resulta de sumar los componentes de todas las K_e según la designación de sus tres nodos, resultará también simétrica, y además de estructura banda y definida positiva /23/. De aquí que, como se estilaba normalmente, por comodidad y economía computacional la matriz se construye como si todos los nodos fuesen incógnitas, y a posteriori se la transforma imponiendo, para todo $i \in P$:

$$K_{ii} = 1 ; K_{ij} = K_{ji} = 0 \quad \forall j \neq i$$

y poniendo los datos δ_i como términos independientes de las filas i . Resulta de este modo otro sistema:

$$K' \underline{\phi}^h = \underline{\delta} \quad (A.7)$$

de N ecuaciones en las N incógnitas ϕ_i^h , incluídas las δ_i , siendo su matriz simétrica, banda y definida positiva. En los programas ELESOR 3 y ELESOR 4 se resuelve el sistema (A.7) mediante el algoritmo de eliminación de Gauss implementado para matrices banda simétricas.

Para sistemas de simetría de revolución (ec.A.2), la discretización del dominio análoga a la bosquejada para coordenadas (x,y) , consiste en subdividirlo en elementos anulares de sección triangular con eje de simetría coincidente con el eje z . De esta manera, la descripción de la malla queda fijada por su sección a través de un plano meridiano, y el esquema numérico para la resolución de (A.2) es prácticamente idéntico al anterior, reemplazando x por r e y por z .

La única diferencia respecto del anterior es que ahora cada una de las matrices K_e de (A.4) quedan multiplicadas por la coordenada r del baricentro del elemento respectivo.

A.3.- Generación automática de la red

Las generaciones automáticas de las redes de elementos finitos que se realiza en ambos programas siguen el esquema general del código REDEF/25/. Dicho esquema está basado en una transformación armónica de un recinto rectangular D (llamado "recinto primario") de frontera R , en el recinto Ω con frontera Γ que se quiere discretizar en elementos finitos, específicamente en nuestro caso, el plano meridiano de la escoria. Tal transformación consiste en la resolución de dos ecuaciones de Laplace en el recinto primario con condiciones de contorno tipo Dirichlet, cuyas incógnitas son separadamente las coordenadas r, z de todo punto de la escoria:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} = 0 \quad \forall (u, v) \in D \quad (A.8)$$

$$r = \bar{r}(u, v) \quad \forall (u, v) \in R$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0 \quad \forall (u, v) \in D \quad (A.9)$$

$$z = \bar{z}(u, v) \quad \forall (u, v) \in R$$

Los valores impuestos $\bar{r}$ y $\bar{z}$ en R para r y z respectivamente, son justamente las coordenadas de los puntos de la frontera Γ de Ω .

Dado que la red para el recinto primario D es de muy fácil generación automática, ambas ecuaciones pueden resolverse también por el esquema en elementos finitos bosquejado en la sección A.2, empleando las mismas subrutinas.

En los programas se calcula primeramente las coordenadas de los puntos básicos que definen a Γ , a partir de las dimensiones y forma de la escoria. Posteriormente, los puntos interiores a cada segmento rectilíneo son interpolados linealmente.

A.4.- Derivación numérica de $\phi(\vec{r})$. Cálculo de $\vec{J}$ y de $\dot{q}$.

De la expresión (A.4), cambiando x por r e y por z y derivando,

resultan para las componentes del gradiente de $\phi(\vec{r})$ las siguientes aproximaciones:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \approx \frac{\partial \phi^h}{\partial r} = \frac{1}{2\Delta} (\beta_i \phi_i^h + \beta_j \phi_j^h + \beta_m \phi_m^h) \quad (A.10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \approx \frac{\partial \phi^h}{\partial z} = \frac{1}{2\Delta} (\gamma_i \phi_i^h + \gamma_j \phi_j^h + \gamma_m \phi_m^h)$$

constantes dentro de cada elemento. Los programas calculan estas expresiones para cada elemento de la red, y posteriormente las componentes de $\vec{J}$ y $\vec{q}$ según (11) y (12) en cada nodo, promediando los valores de (A.10) para todos los elementos que tienen a aquél por vértice.

A.5.- Cálculo de H_θ por integración numérica de $\vec{J}$.

Habiendo calculado $\vec{J}$ en cada elemento según las expresiones (A.10), la componente según θ del campo magnético $\vec{H}$ se obtiene a partir de la Ley de Ampère de acuerdo con el esquema numérico que se describe a continuación.

Para un circuito cerrado cualquiera que concatena una corriente total I , la Ley de Ampère establece que:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (A.11)$$

donde $d\vec{l}$ es una diferencial de la longitud del circuito donde hay un campo magnético $\vec{H}$.

Por la simetría del problema, eligiendo un circuito circular de radio r , concéntrico con el eje z , resulta la siguiente particularización de (A.11):

$$H_\theta 2\pi r = I(r, z) = \int_c |\vec{J}| \cdot \cos \alpha \cdot 2\pi r \cdot dl$$

$$\text{o sea:} \quad H_\theta = \frac{\int_c \sqrt{J_r^2 + J_z^2} r \cos \alpha \, dl}{r} \quad (A.12)$$

donde (ver figura A.2), c es una trayectoria cualquiera desde un

punto A arbitrario sobre el eje hasta el punto P (r,z) donde se tiene el campo magnético $\vec{H}$ a determinar.

Para el caso general en que el electrodo tiene una porción sumergida en la escoria, la red de elementos finitos empleada en el programa ELESSOR 3 es del tipo de la esquematizada en la figura A.3. Se desprende claramente de la misma que, si se integra numéricamente (A.12) a lo largo de una poligonal genérica como la AB allí mostrada, a medida que se avanza en la integración se van determinando todos los valores de H_θ en los nodos que se encuentran sobre la misma.

De manera que el campo H_θ en todos los nodos de la red puede calcularse repitiendo el procedimiento para todas las poligonales del tipo de la AB, comenzando con la OE y terminando con la FG, a partir solo del conocimiento de J_r y J_z en cada elemento:

$$H_\theta(P) \cong \frac{\sum \sqrt{\bar{J}_{rij}^2 + \bar{J}_{zij}^2} \cdot A_{ij} \cos \alpha_{ij}}{2\pi r_j} \quad (A.13)$$

donde:

$$\bar{J}_{rij} = \frac{1}{2} (J_{rk} + J_{rm})$$

$$\bar{J}_{zij} = \frac{1}{2} (J_{zk} + J_{zm})$$

$$A_{ij} = \pi(r_i + r_j) \sqrt{(r_j - r_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

$$\alpha_{ij} = \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma$$

$$\beta = \arctg \frac{\bar{J}_{zij}}{\bar{J}_{rij}}$$

$$\gamma = \arctg \frac{z_j - z_i}{r_j - r_i}$$

y la sumatoria se extiende a todos los segmentos ij desde A a P.

La situación es mucho más simple para el caso de electrodo sin inmersión que contempla el programa ELESCOR 4 (Figura A.4).

Se verifica fácilmente que en este caso la expresión (A.13) se reduce a:

$$H_{\theta}(P) = \frac{\sum (r_j^2 - r_i^2) \bar{J}_{zij}}{2r_j} \quad (A.14)$$

A.6.- Estructura de los programas y descripción de las subrutinas.

Ambos programas siguen los pasos básicos indicados en A.1. Están compuestos de un programa principal y de un conjunto de subrutinas llamadas por cada uno de ellos. Estos difieren solamente en sus programas principales, adecuados cada uno a los dos tipos de redes que corresponden a la inmersión o no de una parte del electrodo en la escoria líquida, y el conjunto de subrutinas es exactamente el mismo para ambos. El objetivo de cada una de ellas se sintetiza a continuación:

GENRED: Tiene por objeto la generación de la red de elementos finitos en base al procedimiento bosquejado en A.3. Está constituido por la parte básica del código REDEF /25/, adaptado especialmente para los propósitos presentes. Como entrada de la subrutina, debe incorporársele la información básica de la correspondiente red. La salida está constituida por dos matrices: una provee las coordenadas de todos los nodos, y la otra la conectividad entre ellos (definición de los elementos).

Esta subrutina llama a su vez a las cuatro siguientes:

REDPRI: Construye la red primaria rectangular en base a los datos básicos que se definen en el programa principal.

KCOMP6: Construye la matriz de rigidez del sistema (A.7), acoplando las contribuciones de cada elemento que a su vez son calculadas por la subrutina KELEM6, a la cual llama sucesivamente para cada uno de los elementos de la red.

KELEM6: Construye la matriz de rigidez K_e correspondiente a cada

elemento, según las expresiones (A.5) y (A.6).

GAUSS1: Resuelve un sistema de ecuaciones algebraicas lineales de matriz simétrica y de tipo banda, mediante el algoritmo de iteración de Gauss.

GRADI: Dada una función poliédrica ϕ , solución aproximada de las ecuaciones de Laplace (A.1) o (A.2), calcula el gradiente de la misma según lo expresado en el punto A.4.

TRANS, INTELM, CLASEL y GRAFEEF: Paquete de subrutinas previamente elaboradas por S. Pissanetzky /26/, para la graficación por impresora de una función poliédrica según un esquema descrito en /27/.

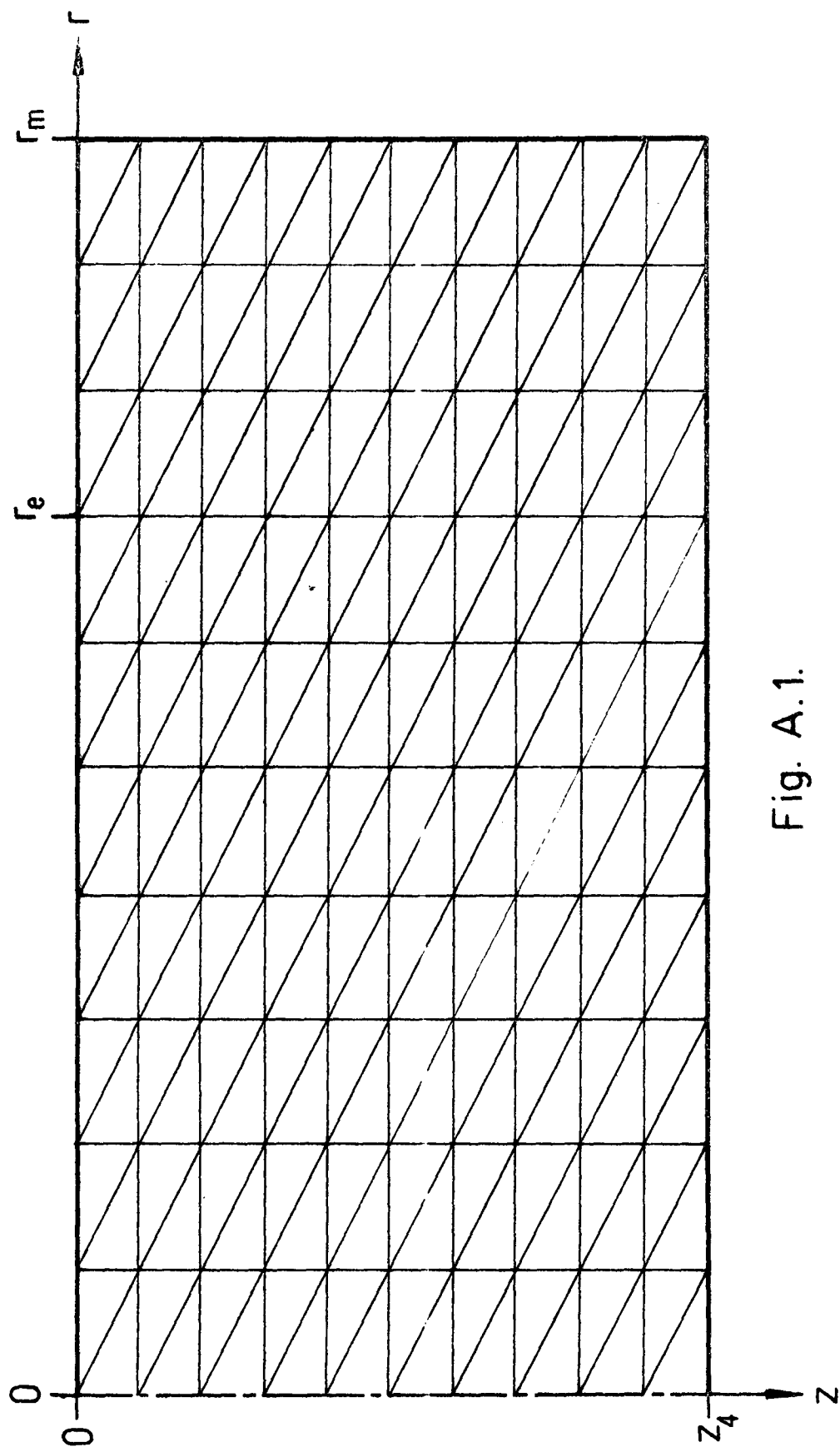


Fig. A.1.

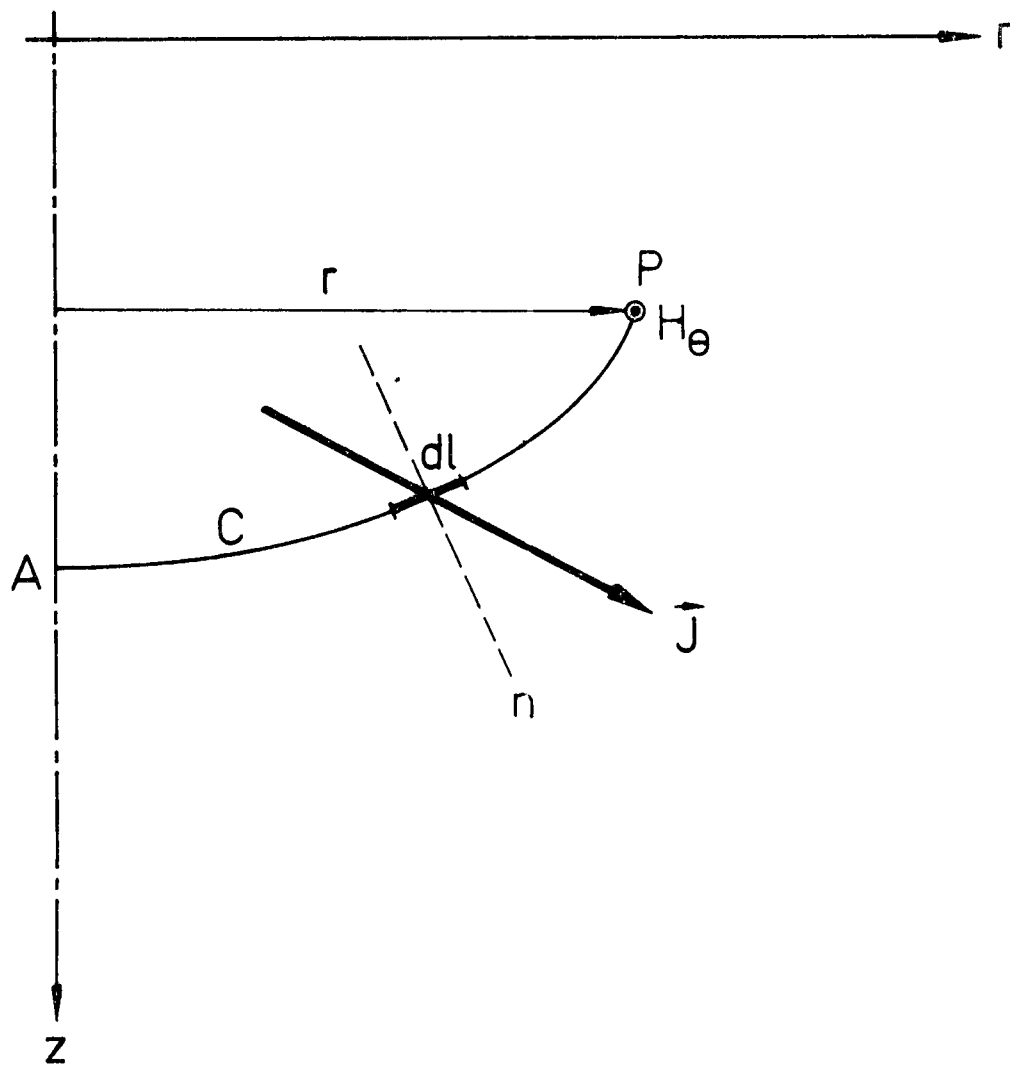


Fig. A.2.

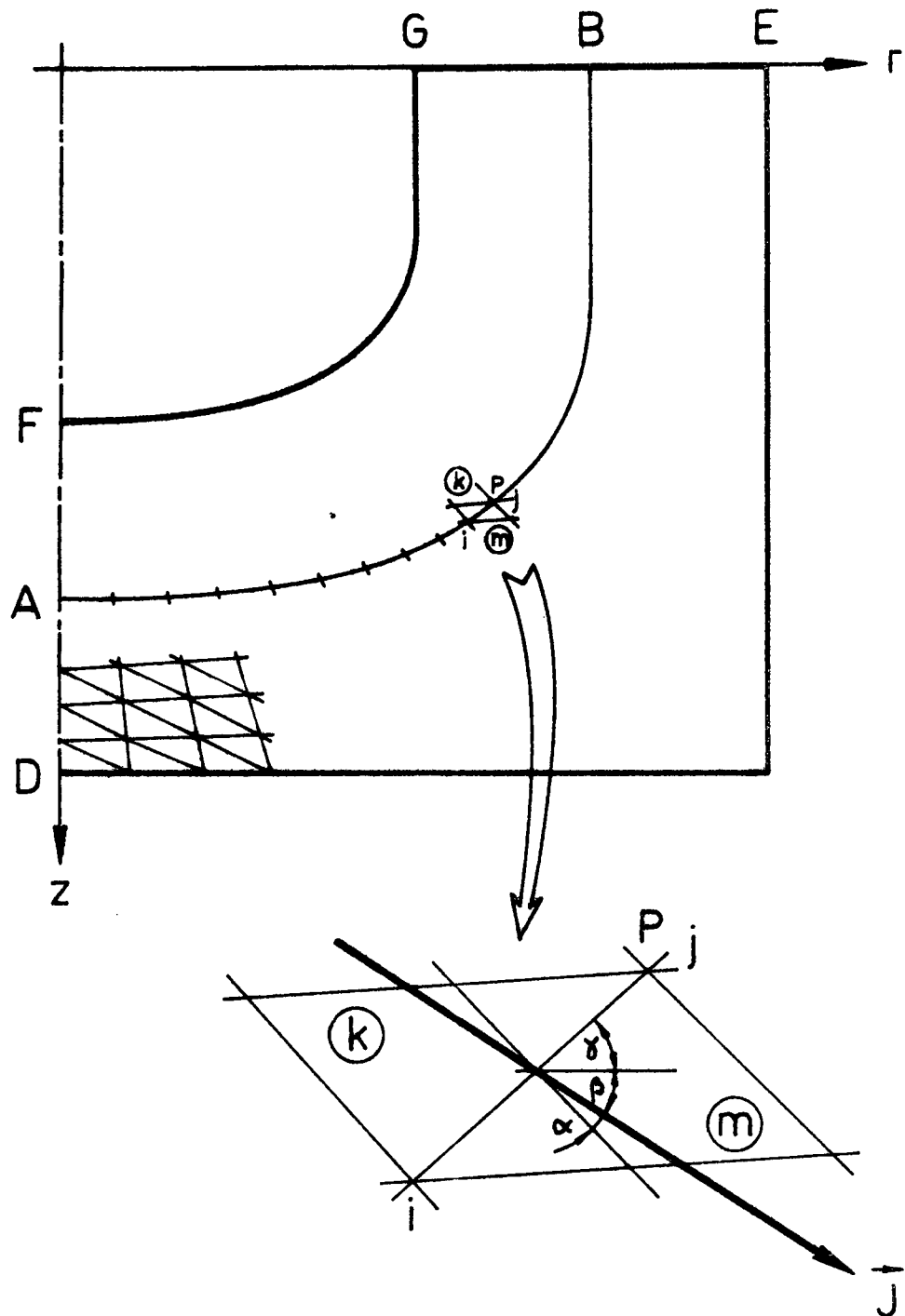


Fig. A.3.

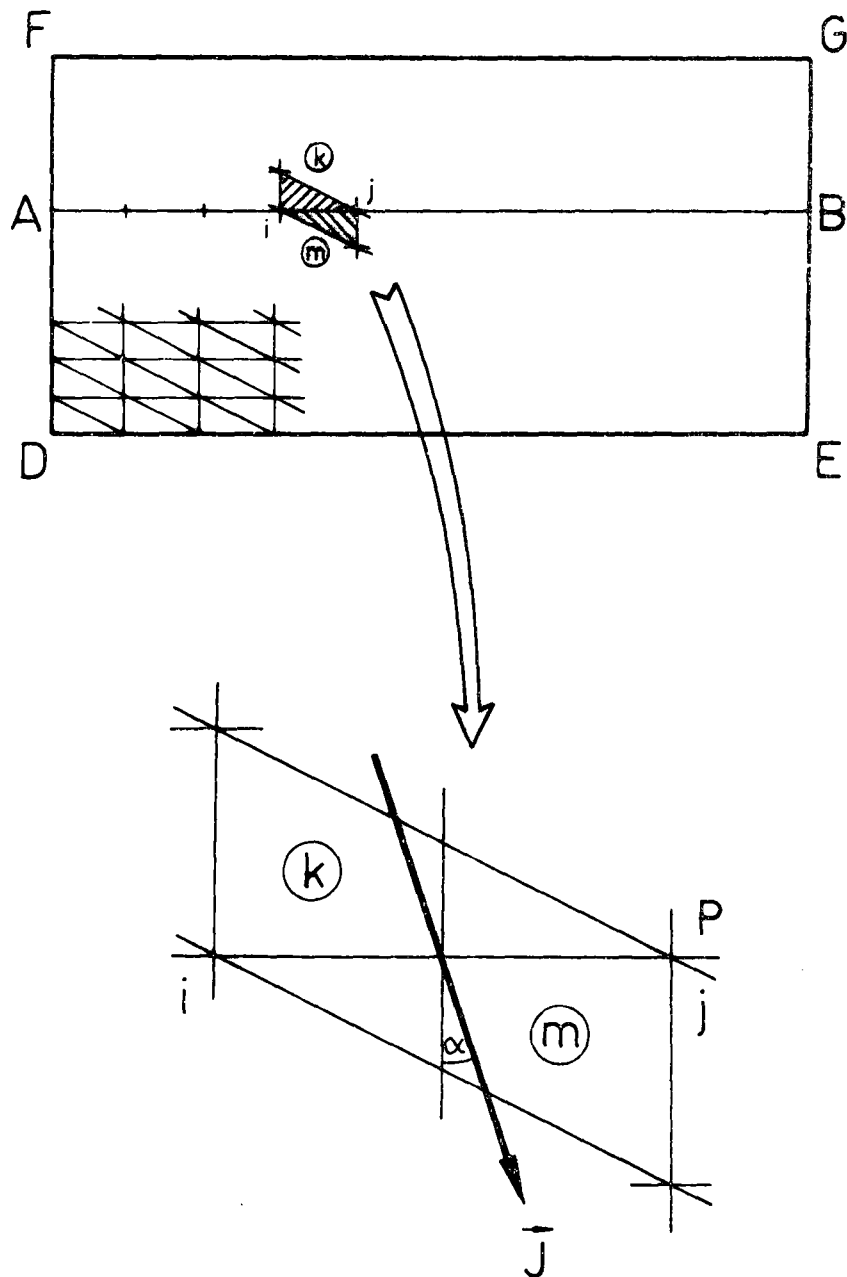


Fig. A.4.