

CNEA - NT. 9

REPUBLICA ARGENTINA

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA

DIRECCION DE INVESTIGACION Y DESARROLLO
GERENCIA DE INVESTIGACIONES
DEPARTAMENTO DE PROSPECTIVA Y ESTUDIOS ESPECIALES
DIVISION ENERGIA SOLAR

ANALISIS DE LA DISTRIBUCION
DE INTENSIDADES EN CONCENTRADORES
PARABOLOIDES DE REVOLUCION

Laura E. Dawidowski y Rubén O. Nicolás

BUENOS AIRES

1987

ANALISIS DE LA DISTRIBUCION DE INTENSIDADES EN CONCENTRADORES PARABOLOIDES DE REVOLUCION[†]

Laura E. Dawidowski y Rubén O. Nicolás

RESUMEN

Se describe un análisis óptico que permite determinar la distribución de intensidades en el plano receptor de concentradores paraboloides de revolución, considerando que dicho plano se encuentra ubicado en forma paralela al plano de apertura, y que contiene al foco del sistema. El análisis es válido para concentradores perfectos y no perfectos, entendiendo por estos últimos, a aquellos para los que el vector normal a cada elemento diferencial de superficie especular se aparta de su posición correcta un ángulo Ω de valor medio $\bar{\Omega}$ y desviación estandar σ , y cuyo ángulo azimutal ξ sigue una distribución uniforme entre 0 y 2π . Se estudia, además, el efecto de desplazar paralelamente el plano receptor una distancia Δf respecto de su posición ideal. Sobre la base del análisis efectuado, se realiza la simulación del comportamiento de los concentradores.

Se muestran y comparan resultados para distintos juegos de los parámetros que caracterizan el comportamiento de un concentrador dado.

† La presente publicación contiene el material básico del que constituyó el trabajo de Tesis de Licenciatura que presenta la Lic. Laura E. Dawidowski a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

INDICE

	Pág.
CAPITULO 1 : Introducción	1
1.1: Usos y aplicaciones de los concentradores parabólicos de revolución	1
1.2: Modelo propuesto	3
1.3: Antecedentes	4
 CAPITULO 2 : Análisis óptico teórico de concentradores paraboloideos de revolución	 6
2.1: Definición de parámetros	6
2.2: Cálculo del factor de concentración. Expresiones generales	9
2.3: Concentrador perfecto	14
2.4: Concentrador no perfecto	25
 APENDICES	
2.a: Análisis de la uniformidad de la intensidad de la elipse	34
2.b: Cálculo de a , b , r_c y ω	37
2.c: Cálculo de los coeficientes T_k	43
 CAPITULO 3 : Programa de simulación del comportamiento del concentrador	 45
 CAPITULO 4 : Resultados y conclusiones	 53
 Agradecimientos	 63
Referencias	64

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1. INTRODUCCION

1.1. Usos y aplicaciones de los concentradores parabólicos de revolución

Los concentradores de radiación solar con foco puntual son especialmente aptos para la generación de vapor a media y alta temperatura (300-1100°C). Esta característica los presenta como una muy buena opción para la generación fototérmica de electricidad utilizando una turbina o motor-generator prácticamente convencionales, respecto de lo cual, es de destacar el desarrollo alcanzado últimamente a nivel mundial, por los concentradores parabólicos de revolución. Ejemplos de sistemas de este tipo, actualmente en operación, son la central de 25 kWe de White Cliffs (Australia), y la de 100 kWe emplazada en Kuwait. Cabe mencionar, también, la utilización de un motor-generator Stirling en la zona focal de estos concentradores, como una de las alternativas más estudiadas en este momento [1,2], por la alta eficiencia (del orden de 25%) que es posible lograr en la transformación de energía solar en electricidad, evitando el transporte de fluido a alta temperatura.

Existen también diversas aplicaciones en procesos industriales, como la central de vapor y electricidad de 400 kWe [3] construida por la Bleyle Textile en Shenandoah, Georgia (USA), cuya temperatura de operación es de 400°C (ver Foto 1), o el sistema de fusión de sales de almacenaje, utilizado en el proyecto Themis en Targasonne (Francia), que opera a 320°C. Es de destacar que el uso más tradicional de estos concentradores es como hornos solares, cuyo ejemplo más conocido es el de Odeillo (ver Foto 2) en los Pirineos franceses, el cual permite alcanzar temperaturas del orden de 3800°C con una potencia térmica de 1 MW. Su importancia radica, entre otras cosas, en que permite obtener temperaturas elevadas en atmósfera limpia, lo cual es requerido, por



Foto 1: Central de vapor y electricidad de 400 kWe, emplazada en Shenandoah, Georgia (U.S.A.).

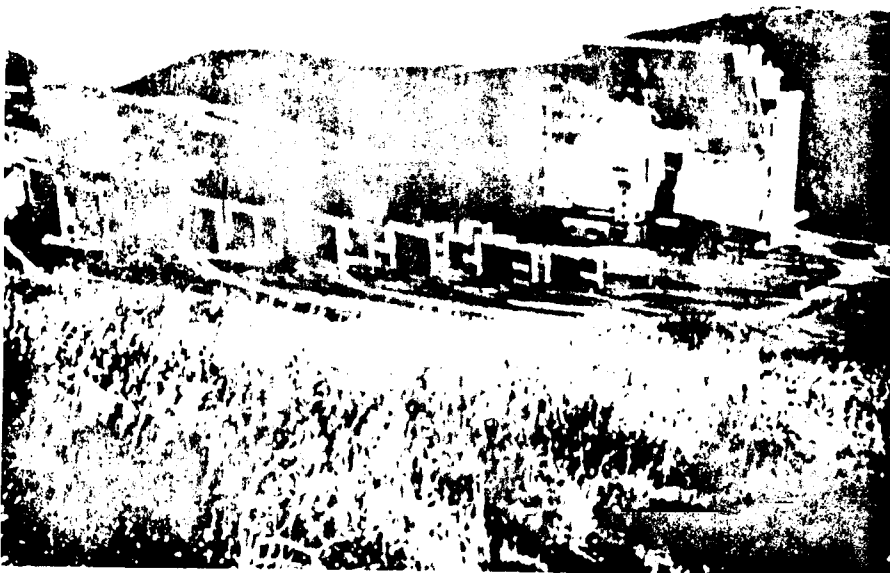


Foto 2: Horno Solar de Odeillo, en los Pirineos franceses.

ejemplo, para la producción de aleaciones con muy alto grado de pureza.

Se encuentra también actualmente en estudio [4,5] el uso de estos concentradores con celdas solares, para optimizar la relación costo-eficiencia que estas presentan.

1.2. Modelo propuesto

Para realizar un correcto diseño de los sistemas de las aplicaciones mencionadas en la sección anterior, resulta fundamental conocer la distribución de intensidades que se obtiene en el plano receptor de los mencionados concentradores en función de los distintos parámetros característicos de los mismos. Este trabajo consiste en realizar un desarrollo teórico que permita determinar dicha distribución de intensidades, teniendo en cuenta los apartamientos que presentan los concentradores reales respecto de los perfectos, para así estar en condiciones de estudiar la influencia de la precisión requerida en la construcción de los diferentes sistemas, sobre el costo total de los mismos.

Un modelo realista de un concentrador debe tener en cuenta los apartamientos del mismo respecto del caso ideal. En el presente trabajo se describe un análisis óptico de un concentrador paraboloide de revolución no perfecto, entendiendo como tal, aquel cuyo versor normal se aparta de su posición correcta un ángulo Ω según una distribución gaussiana de valor medio $\bar{\Omega}$ y desviación estandar σ , y cuyo ángulo azimutal ξ sigue una distribución uniforme entre 0 y 2π , lo que constituye una buena aproximación para el tratamiento de concentradores reales. Se estudian, además, desplazamientos paralelos del plano receptor, el que consideramos ubicado en forma perpendicular al eje del concentrador.

El análisis óptico descrito en este trabajo, combinado con un análisis térmico del receptor, puede ser usado para realizar una apropiada selección de los parámetros del concentrador desde el punto de vista de la colección de energía.

De todos modos, utilizando sólo los resultados obtenidos con el análisis óptico, se puede realizar una primera aproximación a un diseño racional del concentrador considerado. Es importante señalar que uno de los parámetros que debe ser cuidadosamente seleccionado es σ , ya que el costo por metro cuadrado de concentrador depende fuertemente de él.

1.3. Antecedentes

La bibliografía disponible con respecto al tema específico del estudio de la distribución de intensidades en el plano receptor de estos concentradores, en ningún caso proporciona un análisis del tipo propuesto en este trabajo, que permite conocer, previo a la construcción del colector, el margen de tolerancia de los errores en la superficie del concentrador. Esta bibliografía se puede separar en dos grupos:

1) El que considera el concentrador perfecto con el plano receptor perpendicular al eje y conteniendo al foco del sistema [6,7]; dentro de este grupo hay trabajos que estudian, además, desplazamientos del receptor, ya sea en forma longitudinal [8] cuanto transversal [9] al eje. Cabe consignar que los resultados de los trabajos mencionados, coinciden con los obtenidos en éste para $\sigma = 0$.

2) El que considera errores en la superficie de los espejos con el plano receptor en la zona focal y perpendicular al eje. Hay dos trabajos que tratan el tema: el de Biggs y Vittitoe [10], que asumen directamente que la distribución de intensidades es gaussiana (con una dispersión que toman en forma arbitraria igual a 2 mrad) y el de N. Hukuo y H. Mii [11], quienes realizan el análisis suponiendo que los puntos en los cuales los rayos reflejados cortan el plano receptor se dispersan dentro de un círculo de intensidad uniforme, en función de cuyo radio presentan los resultados. Como se puede apreciar, ambos trabajos requieren, previamente al diseño, información acerca de la distribución de intensidades en el plano receptor: el primero la dispersión estandar y el segun-

do el radio del círculo, que sólo se pueden medir experimentalmente una vez construido el colector.

CAPITULO 2

ANALISIS OPTICO TEORICO DE CONCEN- TRADORES PARABOLOIDES DE REVOLUCION

2. ANALISIS OPTICO TEORICO DE CONCENTRADORES PARABOLOIDES DE REVOLUCION

En este capítulo se presenta un análisis teórico que permite obtener la distribución de intensidades en el plano receptor de un concentrador paraboloide de revolución. El desarrollo se encuentra basado en lo hecho por Rubén O. Nicolás y Julio C. Durán [12,13] para concentradores con simetría cilíndrica, y se fundamenta en las siguientes hipótesis simplificadoras:

- a) La intensidad de la radiación solar es uniforme a través de todo el disco solar.
- b) El receptor es circular plano con un radio mucho menor que el de apertura del paraboloide, y se encuentra ubicado en forma perpendicular al eje del concentrador de modo que éste pase por su centro.
- c) El rayo proveniente del centro del sol, incide en forma paralela al eje del concentrador.

Para mayor claridad se analiza en primer término un concentrador parabólico de revolución perfecto con el plano receptor ubicado en la zona focal; se estudia luego el caso general en que el concentrador sea no perfecto, considerando además desplazamientos paralelos del plano receptor en una distancia Δf .

En el desarrollo se utilizan los parámetros y las coordenadas definidos en la Fig.1, y todas las longitudes se expresan en unidades de la distancia focal.

2.1. Definición de parámetros

El comportamiento óptico de un concentrador [12] está definido por los siguientes parámetros:

- a) Factor de concentración puntual: es el cociente entre el flujo de energía a través de un punto dado del plano receptor, definido por $\vec{r} = (r, \phi_r)$, y la intensidad I_0 de la radia-

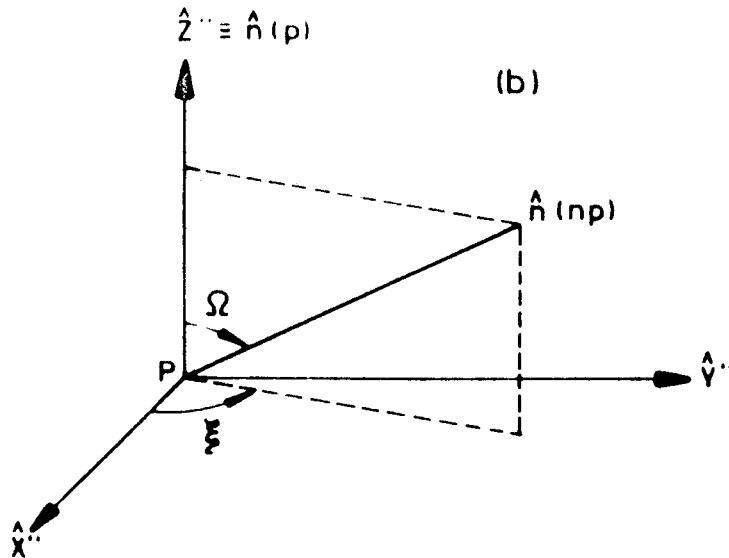


Fig. 1: (Continuación)

que el concentrador sea perfecto

X_r, Y_r : sistema cartesiano bidimensional, proyección de X e Y sobre π_r

Δf : Distancia $O'F$. Indica el desplazamiento en forma paralela del plano receptor, respecto del plano focal

$\theta_{\max}$: ángulo de apertura del concentrador ($\theta \leq \theta_{\max}$)

π_r : plano receptor: plano que contiene al receptor de radiación

(b): Ω, ξ : ángulos cenital y azimutal que definen al apartamiento de la normal a la superficie de un concentrador no perfecto, respecto de la que tendría si fuera perfecto.

$\hat{n}(p)$: versor normal a la superficie en el punto P si el concentrador es perfecto

$\hat{n}(np)$: versor normal a la superficie en el punto P si el concentrador es no perfecto

ción solar directa:

$$C(\vec{r}) = \frac{I_r(\vec{r})}{I_0} \quad . \quad (1)$$

b) Factor de concentración medio: es el promedio del factor de concentración puntual sobre el área del receptor

$$\begin{aligned} \bar{C}(r_R) &= \frac{1}{\pi r_R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_R} r C(\vec{r}) dr d\phi_r = \\ &= \frac{1}{I_0 \pi r_R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_R} I_r(\vec{r}) r dr d\phi_r \quad . \end{aligned} \quad (2)$$

donde r_R es el radio del receptor.

c) Eficiencia geométrica del receptor: es la fracción de energía incidente en el plano receptor, que incide en el receptor propiamente dicho.

$$\eta_g(r_R) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_R} I_r(\vec{r}) r dr d\phi_r}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} I_r(\vec{r}) r dr d\phi_r} \quad . \quad (3)$$

2.2. Cálculo del factor de concentración. Expresiones generales

Se calcula en esta sección el factor de concentración puntual en el plano receptor de un concentrador paraboloide de revolución.

En cada punto del concentrador inciden rayos prove

nientes de todo el disco solar, los cuales forman un cono con vértice en dicho punto y semiapertura angular β_0 ($\beta_0 \approx 16'$); los rayos reflejados forman también un cono cuya intersección con el plano receptor describe una elipse. De acuerdo a la hipótesis a) de la sección 1 y eliminando los casos de incidencia casi rasante sobre el plano receptor, se puede suponer que la elipse tiene una distribución de intensidad uniforme[†]. La energía que incide en un elemento de superficie del concentrador dS_C por unidad de tiempo, es:

$$d^2P_C = I_0 dS_C |\cos(\hat{n}, \hat{i})| \quad , \quad (4)$$

donde $\hat{n}$ es la normal a dS_C , e $\hat{i}$ un versor en la dirección del rayo incidente en dS_C , proveniente del centro del sol. La proyección de dS_C sobre el plano X-Y se puede expresar como:

$$dx dy = dS_C |\cos(\hat{n}, \hat{z})| \quad . \quad (5)$$

La transformación de las coordenadas cartesianas x y y a las coordenadas angulares θ y ψ , permite obtener la expresión para $dx dy$:

$$dx dy = R^2(\theta) \sin \theta d\theta d\psi \quad , \quad (6)$$

donde $R(\theta)$ es la distancia desde el foco a dS_C siendo su expresión:

[†] Se considera $\theta \leq 75^\circ$. Ver apéndice 2.a.

$$R(\theta) = \frac{2}{1 + \cos \theta} \quad . \quad (7)$$

De las ecuaciones (4) a (7) se obtiene:

$$d^2P_c = \frac{4 I_0 \sin \theta |\cos(\hat{n}, \hat{i})|}{(1 + \cos \theta)^2 |\cos(\hat{n}, \hat{z})|} d\theta d\psi \quad . \quad (8)$$

La intensidad uniforme de la elipse generada por los rayos reflejados de dS_c , es:

$$d^2I_e = \frac{\rho d^2P_c}{\text{area de la elipse}} \quad ; \quad (9)$$

denominado a y b los radios mayor y menor de la elipse respectivamente, resulta:

$$d^2I_e = \frac{\rho d^2P_c}{\pi a b} \quad , \quad (10)$$

donde ρ es la reflectividad de la superficie. De acuerdo a la hipótesis de incidencia normal al plano de apertura, $\hat{i}$ coincide con $-\hat{z}$, con lo cual:

$$|\cos(\hat{n}, \hat{i})| = |\cos(\hat{n}, \hat{z})| \quad . \quad (11)$$

Reemplazando (11) en (8) y luego en (10), se obtiene:

$$d^2I_e = \frac{4 \rho I_0 \sin \theta}{\pi (1 + \cos \theta)^2 a b} d\theta d\psi \quad . \quad (12)$$

Dada la geometría propuesta, la imagen que forman las elipses en el plano receptor tiene simetría de revolución con respecto al eje del concentrador, por lo que es suficiente calcular el factor de concentración puntual $C(\vec{r})$ en una línea contenida en dicho plano y determinada por todos los

puntos $\vec{r} = (r, \phi_r)$ donde ϕ_r es un valor fijo arbitrario que tomaremos, por comodidad, $\phi_r = 0$, denominando a $\vec{r} = (r, 0)$, simplemente r . Integrando la ecuación (12) sobre la superficie de todo el concentrador, y dividiendo ambos miembros por I_0 , se obtiene:

- a) El factor de concentración puntual $C(r)$, si el concentrador es perfecto.
- b) El factor de concentración puntual para cada valor de Ω y ξ , $C_{\Omega\xi}(r)$, si el concentrador es no perfecto, que debe verificar:

$$C(r) \text{ (conc. perfecto)} = C_{0\xi}(r) \quad , \quad (13)$$

o sea:

$$\left. \begin{array}{l} C(r) \text{ (conc. perfecto)} \\ C_{\Omega\xi}(r) \end{array} \right\} = \int_0^{\theta_{\max}} \frac{4 \rho \sin \theta \, d\theta}{\pi (1 + \cos \theta)^2} \int_{I_\psi} \frac{d\psi}{a \, b} \quad , \quad (14)$$

donde el intervalo I_ψ determina las zonas del concentrador en las cuales el haz de rayos reflejados contribuye al flujo de energía en el punto r . De esta manera la expresión para $C(r)$ para un concentrador no perfecto, se obtiene promediando $C_{\Omega\xi}(r)$ sobre la gaussiana en Ω y la uniforme en ξ :

$$C(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi} \, \sigma} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{(\Omega - \bar{\Omega})^2}{2\sigma^2} \right] C_{\Omega\xi}(r) \, d\Omega \quad . \quad (15)$$

La simetría de revolución permite, por un lado, asegurar que a y b no dependen del valor de ψ , y por el otro, que si ϕ es el ángulo que determina la inclinación de la elipse y que resulta ser igual al formado por la proyección del rayo reflejado proveniente del centro del sol sobre el plano receptor

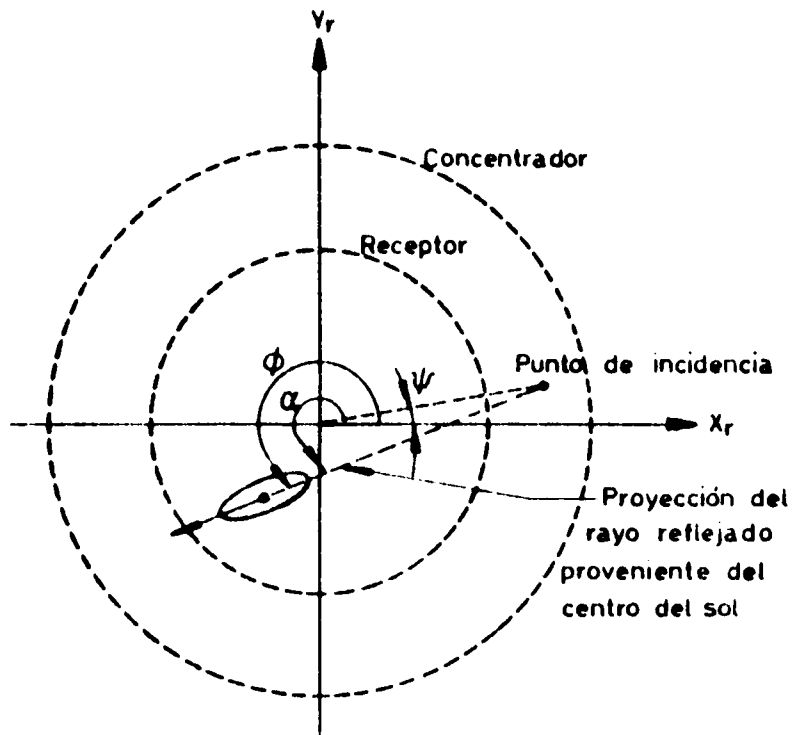


Fig.2: Vista superior del concentrador y del receptor.

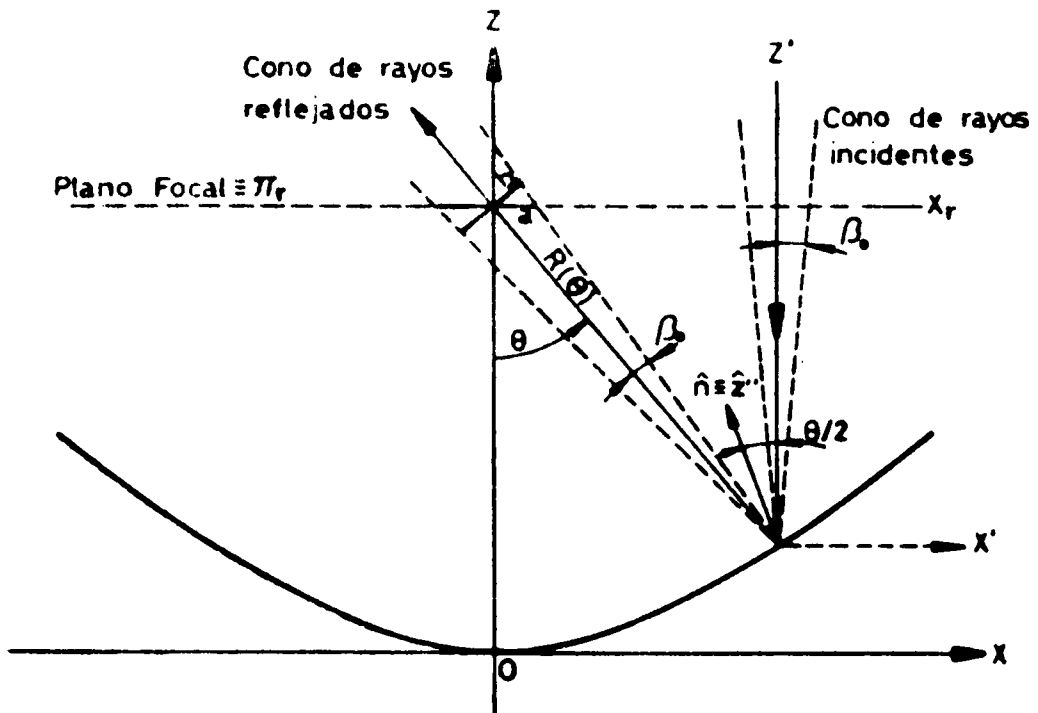


Fig.3: Concentrador paraboloide de revolución perfecto con el plano receptor π_r coincidente con el plano focal.

con el eje X_r (ver Fig.2), la relación entre ϕ y ψ se puede expresar como:

$$\phi = \psi + \alpha \quad , \quad (16)$$

donde α es una función independiente de ψ , lo que implica que $d\phi = d\psi$. Si I_ϕ indica el intervalo de ϕ en el cual las elipses contribuyen en el punto r , de acuerdo a lo anterior $I_\psi = I_\phi$. La expresión (14) se reduce entonces, a:

$$\left. \begin{array}{l} C(r) \text{ (conc. perfecto)} \\ C_{\Omega\xi}(r) \end{array} \right\} = \frac{4 \rho}{\pi} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{\sin \theta \, d\theta}{(1 + \cos \theta)^2 a b} \int_{I_\phi} d\psi \quad . \quad (17)$$

2.3. Concentrador perfecto

Como primer paso se analiza el caso en que el plano receptor contiene al foco del sistema y que el concentrador es perfecto, o sea, que un rayo que incide en forma paralela al eje, se refleja pasando por el foco.

Las expresiones para a y b se deducen facilmente de la Fig.3:

$$b = R(\theta) \operatorname{tg} \beta_0 = R(\theta) \beta_0 \quad (\beta_0 \ll 1)$$

$$a = \frac{b}{\cos \theta} \approx \frac{R(\theta) \beta_0}{\cos \theta} \quad . \quad (18)$$

El factor de concentración puntual se obtiene reemplazando

(18) en (17):

$$C(r) = \frac{\rho}{\pi \beta_0^2} \int_0^{\theta_{\max}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \int_{I_\phi} d\phi \quad . \quad (19)$$

Por comodidad denominaremos:

$$\phi_t(\theta, r) = \int_{I_\phi = I_\phi(\theta, r)} d\phi \quad . \quad (20)$$

Para calcular $\phi_t(\theta, r)$ es necesario determinar, para un dado valor de θ , las elipses que contribuyen al flujo de energía en el punto r , o sea, aquellas que contienen dicho punto en su interior. En la Fig.4 se muestra (en trazo discontinuo) la imagen de las elipses límites que cumplen esta condición, o sea, las que contienen a r en su perímetro, de modo que si su inclinación es la indicada en la Fig.4, contribuyen en r todas aquellas cuyo ϕ verifique:

$$|\phi| \leq \phi_0 \quad (21)$$

$$\text{ó} \quad |\phi - \pi| \leq \phi_0 \quad , \quad (22)$$

donde la relación (22) refleja el hecho que la elipse proveniente del punto del concentrador $(R(\theta), \theta, \psi)$ coincide con la que proviene del $(R(\theta), \theta, \psi + \pi)$. De (21) y (22) se puede expresar $\phi_t(\theta, r)$ como:

$$\phi_t(\theta, r) = 4 \phi_0 \quad . \quad (23)$$

La simetría de revolución permite asegurar que determinar

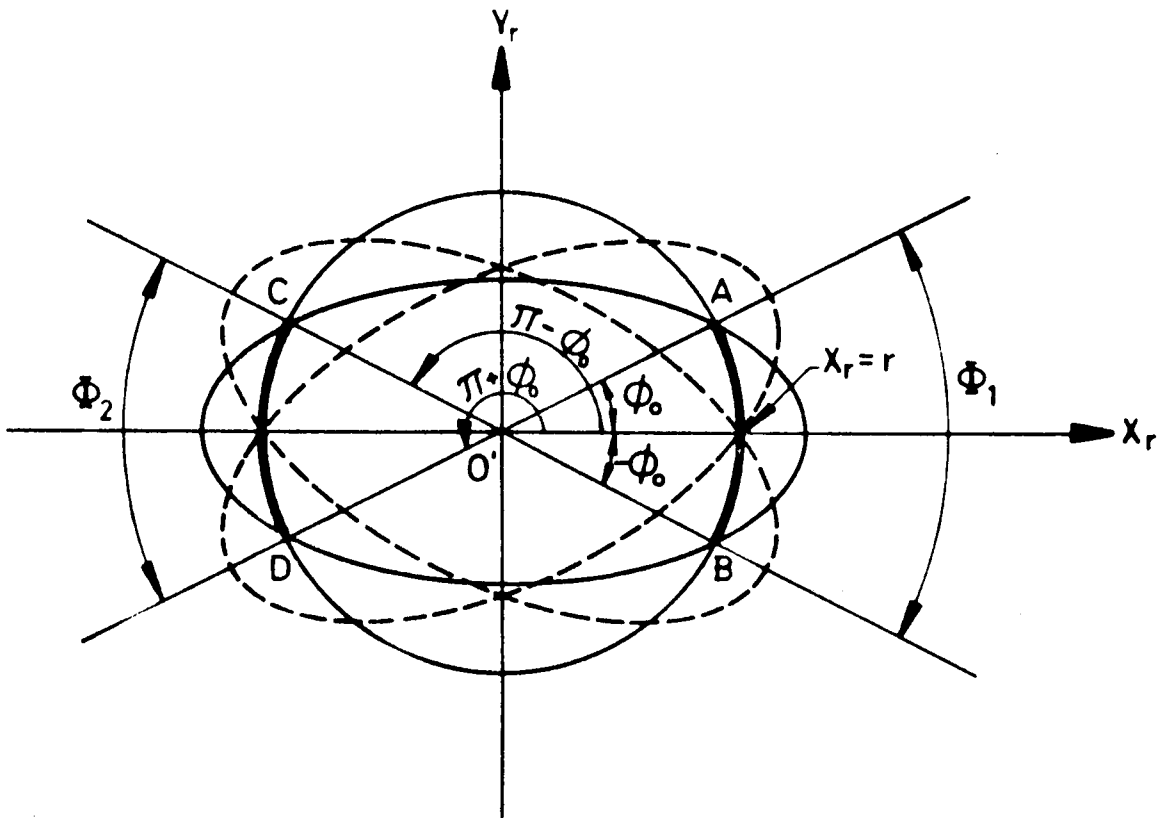


Fig.4: En trazo discontinuo se muestra la imagen de las últimas elipses que contribuyen al flujo de energía en el punto r .

En trazo continuo, la imagen de una circunferencia de radio r y una elipse de iguales radios que las anteriores. Las coordenadas angulares de los puntos de intersección entre ambas, coinciden con la inclinación de las elipses en trazo discontinuo.

Los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{CD}$ subtienden desde O' , los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 .

$\phi_t(\theta, r)$ de esta manera, o sea rotando las elipses hasta que corten el eje X_r en $x_r = r$, es equivalente a hacerlo considerando $\phi_t(\theta, r)$ como la sumatoria de los ángulos definidos por la longitud de arco, determinada por la intersección entre una circunferencia de radio r y la superficie de una elipse de radios a y b , ambos centrados en el origen, como se muestra en la Fig.4. Si ϕ_1 y ϕ_2 son los ángulos definidos en dicha figura, de acuerdo a lo anterior, se puede expresar $\phi_t(\theta, r)$, como:

$$\phi_t(\theta, r) = \phi_1 + \phi_2 \quad . \quad (24)$$

Por tratarse de un concentrador perfecto, ϕ_1 y ϕ_2 cumplen:

$$\phi_1 = \phi_2 = 2\phi_0 \quad . \quad (25)$$

Reemplazando (25) en (24) se obtiene nuevamente (23), lo que verifica la equivalencia de ambos métodos. Cabe acotar que en el último de éstos, la elección de la elipse con $\phi=0$ graficada en la Fig.4 es arbitraria; de hecho el arco determinado por la intersección entre la superficie de cualquiera de las elipses provenientes de un punto del concentrador $(R(\theta), \theta, \psi)$, donde ψ es algún valor entre 0 y 2π , subtiende dos ángulos cuya suma es $4\phi_0$. En lo sucesivo utilizaremos este último método que implica mayor claridad en el cálculo de $\phi_t(\theta, r)$.

Se estudia a continuación, generalizando lo anterior, la contribución de las elipses en los distintos puntos del plano receptor, para un valor de θ fijo (ver Fig. 5.a.):

i) Si $r < b$:

Como la circunferencia es interna a la elipse, resulta:

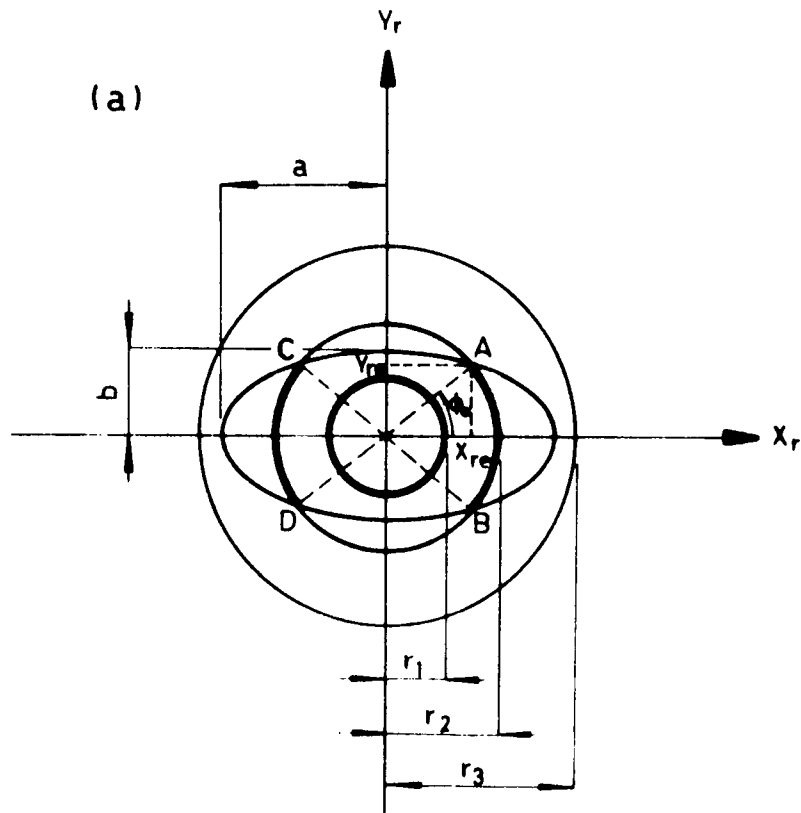


Fig.5.(a): Intersección entre la superficie de una elipse de radios a y b con circunferencias de radios r_1 , r_2 y r_3 , de modo que $r_1 < b$, $b < r_2 < a$ y $a < r_3$.

Si $r = r_1$: la circunferencia es interior a la elipse, con lo cual, los puntos de intersección son todos aquellos pertenecientes a la primera.

Si $r = r_2$: los puntos de intersección son los que pertenecen a los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{CD}$.

Si $r = r_3$: no existen puntos de intersección.

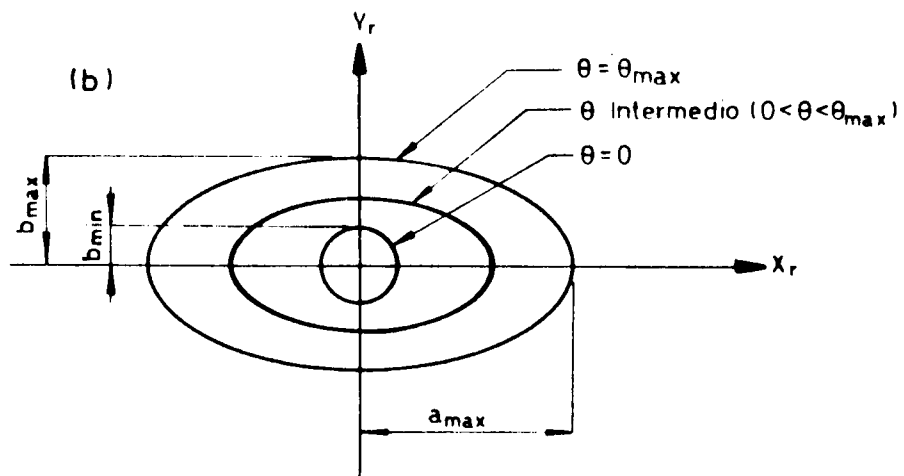


Fig.5.(b): Imagen de las elipses, en el plano receptor, para distintos valores de θ .

$$\phi_t(\theta, r) = 2\pi \quad . \quad (26)$$

ii) Si $b \leq r \leq a$:

La intersección entre la superficie de la elipse y la circunferencia son las cuerdas $\widehat{AB}$ y $\widehat{CD}$, luego:

$$\phi_t(\theta, r) = 4 \phi_0 \quad . \quad (27)$$

Si (x_e, y_e) son las coordenadas de los puntos de intersección entre la circunferencia y el perímetro de la elipse en el sistema $X_r Y_r$, la expresión para ϕ_0 es (ver Fig.5.a.):

$$\phi_0 = \arccos \frac{|x_e|}{r} \quad , \quad (28)$$

donde (x_e, y_e) debe verificar en forma simultánea:

$$\frac{x_e^2}{a^2} + \frac{y_e^2}{b^2} = 1 \quad (29)$$

$$x_e^2 + y_e^2 = r^2 \quad . \quad (30)$$

Reemplazando (30) en (29) y despejando se obtiene:

$$x_e^2 = \frac{a^2}{a^2 - b^2} (b^2 - r^2) \quad . \quad (31)$$

De las ecuaciones (31) y (28) se llega a:

$$\phi_0 = \arccos \left(\frac{1}{\sin \theta} \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}} \right), \quad (32)$$

expresión cuyo radicando es positivo pues $r \geq b$ y que verifica $\cos \phi_0 \leq 1$ pues $r \leq a$ y $\cos \phi_0 > 0$ debido a que $\theta \leq 75^\circ$.

iii) Si $r > a$:

Dado que la circunferencia es siempre exterior a la elipse, resulta:

$$\phi_t(\theta, r) = 0. \quad (33)$$

En base al análisis anterior, se puede obtener la expresión para todos los valores de θ tal que $0 \leq \theta \leq \theta_{\max}$, en los distintos puntos del plano receptor. Se utilizan para ello, las expresiones para a y b de la ecuación (18), y el hecho que la condición $\theta \leq 75^\circ$ asegura que los radios de las elipses son crecientes con θ . De acuerdo con la Fig.5.b, se pueden dar los siguientes casos:

1) Si $r < b_{\min} = b(\theta = 0) = \beta_0$, luego:

$$\phi_t(\theta, r) = 2\pi \quad (34)$$

para todo θ tal que $0 \leq \theta \leq \theta_{\max}$, con lo cual $C(r)$ es constante si $r \leq \beta_0$, y su expresión, reemplazando (34) en (20) y luego en (19), es:

$$C(r) = \frac{\rho}{\pi \beta_0^2} \int_0^{\theta_{\max}} 2\pi \sin \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{\rho \sin^2 \theta_{\max}}{\beta_0^2}. \quad (35)$$

2) Si $b_{\min} \leq r \leq b_{\max} = b(\theta_{\max}) = \frac{2\beta_0}{1 + \cos \theta_{\max}}$, pueden darse los tres casos ya mencionados:

Caso 2.i): Si $r < b = \frac{2\beta_0}{1 + \cos \theta}$, o sea:

$$\theta > \theta_1 = \arccos\left(\frac{2\beta_0}{r} - 1\right); \quad (36)$$

la ecuación (26) asegura que:

$$\phi_t(\theta, r) = 2\pi. \quad (37)$$

La relación (36) verifica $|\cos \theta| \leq 1$ pues $r \geq \beta_0$, y la condición $r \leq b_{\max}$, asegura que $\theta \leq \theta_{\max}$.

Caso 2.ii): $b \leq r \leq a$ implica que:

$$b \leq r \leq \frac{2\beta_0 \cos \theta}{1 + \cos \theta}, \quad (38)$$

o sea:

$$\cos \theta \geq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2\beta_0}{r}}. \quad (39)$$

Como $\theta \leq 75^\circ$, luego (39) se reduce a:

$$\theta \geq \theta_2 = \arccos\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2\beta_0}{r}}\right) \quad (40)$$

que verifica $\cos \theta_2 \leq 1$ pues $r \geq \beta_0$. De (40) y (36), la relación (38) es equivalente a:

$$\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1. \quad (41)$$

TABLA 1

r	θ	$\phi_t(\theta, r)$	C(r)
$0 \leq r < \beta_0$	$0 \leq \theta \leq \theta_{\max}$	2π	$\frac{\rho \operatorname{sen}^2 \theta_{\max}}{\beta_0^2}$
$\beta_0 \leq r \leq b_{\max}$	$\theta_1 < \theta \leq \theta_{\max}$	2π	$\frac{\rho}{\pi \beta_0^2} \frac{4}{\pi} \int_{\theta_2}^{\theta_1} d\theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta \phi_0 + (\operatorname{sen}^2 \theta_{\max} - \operatorname{sen}^2 \theta_1)$
	$\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$	$4\phi_0$	
	$0 \leq \theta < \theta_2$	0	
$b_{\max} < r \leq a_{\max}$	$\theta_2 \leq \theta \leq \theta_{\max}$	$4\phi_0$	$\frac{4\rho}{\pi \beta_0^2} \int_{\theta_2}^{\theta_{\max}} d\theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{arccos} \phi_0$
	$0 \leq \theta < \theta_2$	0	
$r > a_{\max}$	$0 < \theta < \theta_{\max}$	0	0
$b_{\max} = \frac{2\beta_0}{1 + \cos \theta_{\max}}$ $a_{\max} = \frac{2\beta_0 \cos \theta_{\max}}{1 + \cos \theta_{\max}}$	$\theta_1 = \operatorname{arccos} \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2\beta_0}{r}} \right)$ $\theta_2 = \operatorname{arccos} \left(\frac{2\beta_0}{r} - 1 \right)$	$\phi_0 = \operatorname{arccos} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \sqrt{1 - \frac{4\beta_0}{r^2 (1 + \cos \theta)^2}} \right)$	

2.4. Concentrador no perfecto

En ésta sección se analiza el caso general en que el plano receptor se encuentra desplazado en forma paralela al plano focal una distancia Δf , y que el concentrador en estudio es no perfecto. De acuerdo a lo desarrollado en el ítem 2.3. de este capítulo, la expresión para el factor de concentración puntual se obtiene reemplazando $C_{\Omega\xi}(r)$ de la ecuación (17) en la (15), o sea:

$$C(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi \frac{1}{2\pi \sigma} \int_0^\infty d\Omega \exp \left[-\frac{(\Omega - \bar{\Omega})^2}{2\sigma^2} \right] \cdot \frac{\rho}{\pi} \int_0^{\theta_{\max}} d\theta \frac{R^2(\theta) \sin\theta}{a b} \int_{\phi} I_{\phi} = I_{\phi}(\xi, \Omega, \theta, r) d\phi \quad (51)$$

ϕ_t es, en este caso, función de las variables ξ , Ω , θ y r , y su cálculo se efectúa en forma análoga al caso del concentrador perfecto, pero teniendo en cuenta que los centros de las elipses se encuentran desplazados de o' una distancia r_c y su eje mayor, forma un ángulo ω con la línea que une dicho centro con o' (ver Fig.6). En el apéndice 2.b se desarrolla el cálculo de a , b , r_c y ω , obteniéndose las ecuaciones (97), (98), (100) y (104) respectivamente.

Realizaremos el cálculo de $\phi_t(\xi, \Omega, \theta, r)$ tomando la elipse con centro en $\vec{r}_c = r_c \hat{x}_r$, de manera que las coordenadas (x_e, y_e) de los puntos de su perímetro en el sistema $X_r Y_r$, verifican:

$$(x_e - r_c)^2 \left(\frac{\cos^2 \omega}{a^2} + \frac{\sin^2 \omega}{b^2} \right) + y_e^2 \left(\frac{\sin^2 \omega}{a^2} + \frac{\cos^2 \omega}{b^2} \right) + 2 y_e (x_e - r_c) \sin \omega \cos \omega \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = 1 \quad (52)$$

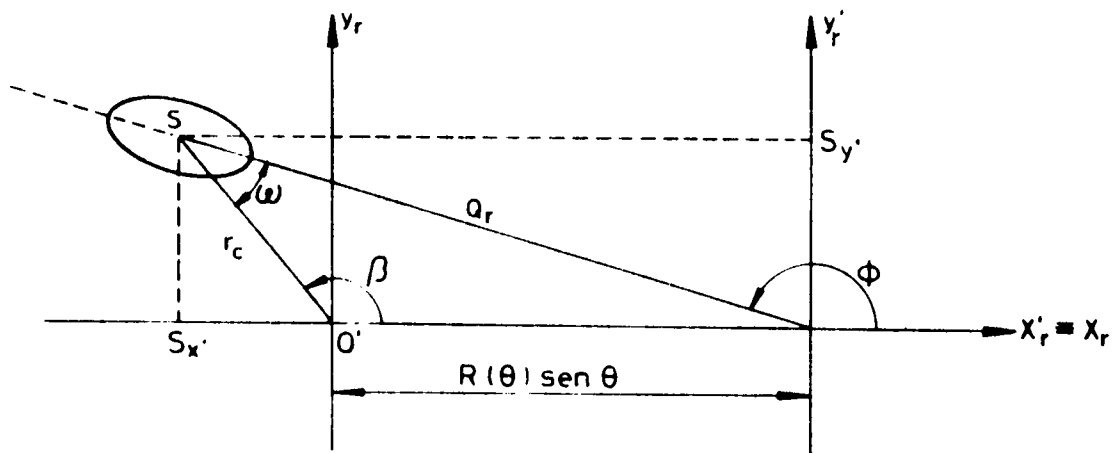


Fig.6: Imagen de la elipse en el plano receptor, formada por el haz de rayos reflejados en el punto P de la Fig.1.

X'_r, Y'_r : proyección de los ejes X', Y' sobre π_r

S : punto en el cual el rayo proveniente del centro del sol corta π_r

O_r : proyección de la distancia entre el punto de incidencia y el punto S , sobre π_r

ω : ángulo convexo formado por O_r y r_c

Para el cálculo de $\phi_t(\xi, \Omega, \theta, r)$ es necesario obtener las distancias mínima y máxima desde o' hasta un punto cualquiera sobre el perímetro de la elipse; su expresión se puede obtener minimizando y maximizando respectivamente, la distancia d definida por:

$$d^2 = x_e^2 + y_e^2 \quad (53)$$

de modo que $y_e = y_e(x_e)$ se obtiene a partir de la ecuación (52):

$$y_e^{\pm}(x_e) = \frac{1}{b^2 \sin^2 \omega + a^2 \cos^2 \omega} \left[-(x_e - r_c) \cos \omega \sin \omega (b^2 - a^2) \pm \right. \\ \left. \pm a b \sqrt{b^2 \sin^2 \omega + a^2 \cos^2 \omega - (x_e - r_c)^2} \right] , \quad (54)$$

donde el signo $+(-)$ corresponde a la parte superior (inferior) de la elipse. Si $\omega > 0$ ($\omega < 0$), las distancias mínima y máxima se obtienen reemplazando $y_e^-(x_e)$ ($y_e^+(x_e)$) en (54) y luego extremando respecto de x_e .

Se define además, d_{mo} como la distancia desde el centro de la elipse hasta el punto donde su perímetro corta el eje x_r (ver Fig.7), o sea:

$$d_{mo} = |x_e(y_e = 0) - r_c| , \quad (55)$$

donde $x_e(y_e=0)$ se obtiene a partir de (52), de manera que la expresión para d_{mo} es:

$$d_{mo} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{a^2} + \frac{\sin^2 \omega}{b^2}}} . \quad (56)$$

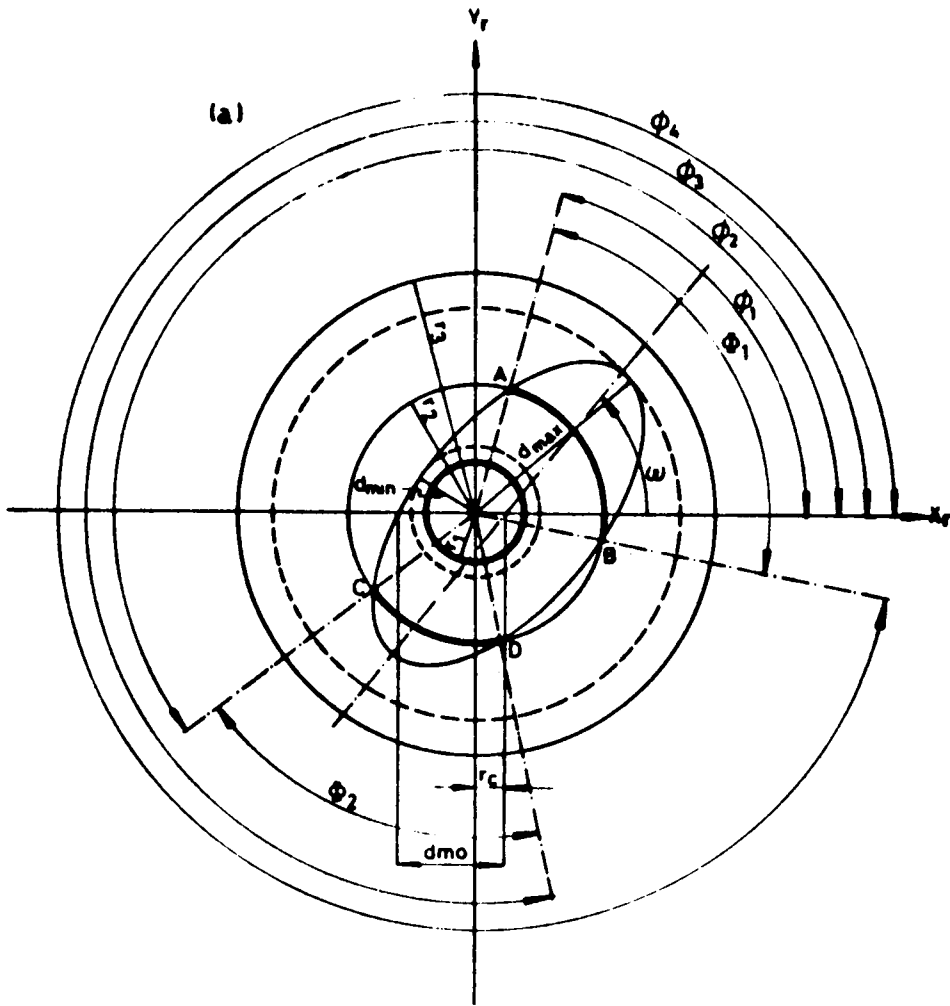


Fig.7: En trazo grueso se muestra la intersección entre la superficie de una elipse de radios a y b con centro en $\vec{r}_C = r_C \hat{x}_r$ e inclinada en ω respecto del eje x_r , con circunferencias de radios r_1 , r_2 y r_3 de modo que $r_1 < d_{min}$, $d_{min} < r_2 < d_{max}$, y $r_3 > d_{max}$, donde:

d_{min} y d_{max} : mínima y máxima distancia desde O' hasta un punto cualquiera sobre el perímetro de la elipse.

d_{mo} : distancia desde el centro de la elipse hasta el punto donde su perímetro corta el eje x_r .

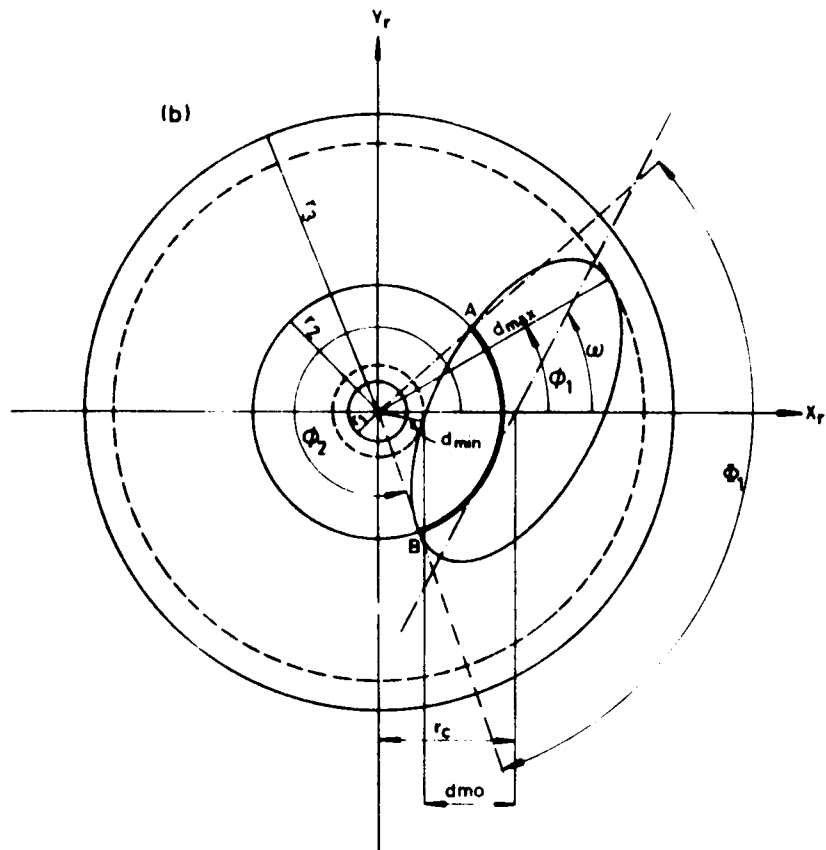


Fig.7(continuación)

r	Fig.7.a: caso $r_c < d_{mo}$	Fig.7.b: caso $r_c > d_{mo}$
$r = r_1$	Los puntos de intersección son todos los de la circunferencia.	No hay puntos de intersección
$r = r_2$	Los puntos de intersección forman los arcos:	
	$\widehat{AB}$ y $\widehat{CD}$	$\widehat{AB}$
$r = r_3$	No hay puntos de intersección	

A partir de éstos parámetros y de lo explicitado en la Fig.7, se puede calcular $\phi_t(\xi, \Omega, \theta, r)$ en los distintos puntos del plano receptor, para cada conjunto de valores ξ, Ω y θ :

i) Si $r < d_{\min}$:

De acuerdo a la Fig.7 (y a lo explicitado en la tabla al pie de la misma) es necesario distinguir dos casos:
Caso i.a) Si $r_c \leq d_{\min}$: la circunferencia es interior a la elipse, con lo cual:

$$\phi_t(\xi, \Omega, \theta, r) = 2\pi \quad . \quad (57)$$

Caso i.b) Si $r_c > d_{\min}$: no hay puntos de intersección, o sea:

$$\phi_t(\xi, \Omega, \theta, r) = 0 \quad . \quad (58)$$

ii) $d_{\min} \leq r \leq d_{\max}$: A partir de lo observado en la Fig.7, se puede expresar $\phi_t(\xi, \Omega, \theta, r)$ como:

$$\phi_t(\xi, \Omega, \theta, r) = \phi_1 + \phi_2 \quad , \quad (59)$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 se determinan como los ángulos subtendidos por los arcos determinados por la intersección entre la superficie de la elipse y la circunferencia de radio r . Para determinar estos arcos, es necesario, en primer lugar, hallar las coordenadas angulares ϕ_j descritas en la Fig.7, y en segundo lugar distinguir las porciones de la circunferencia que son internas a la elipse (para saber, por ejemplo, en la Fig.7.a, si es el arco $\widehat{AB}$ o el $\widehat{AC}$ el que subtiende ϕ_1 , para luego calcularlo como $\phi_1 = \phi_1 + (2\pi - \phi_4)$).

Hallaremos primero, entonces, los puntos de intersección entre la circunferencia y el perímetro de la elipse: éstos deben verificar en forma simultánea, la

ecuación:

$$x_e^2 + y_e^2 = r^2 \quad (60)$$

y la (53), o sea:

$$\begin{aligned} 1 - (x_e - r_c)^2 \left(\frac{\cos^2 \omega}{a^2} + \frac{\sin^2 \omega}{b^2} \right) - (r^2 - x_e^2) \left(\frac{\sin^2 \omega}{a^2} + \frac{\cos^2 \omega}{b^2} \right) = \\ = 2 y_e (x_e - r_c) \sin \omega \cos \omega \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) . \end{aligned} \quad (61)$$

A partir de (61) y utilizando nuevamente (60) y (52), se obtiene una ecuación de grado cuatro en x_e :

$$T_4 x_e^4 + T_3 x_e^3 + T_2 x_e^2 + T_1 x_e + T_0 = 0 \quad , \quad (62)$$

cuyos coeficientes T_k se calculan en el apéndice 2.c. La condición $d_{\min} \leq r \leq d_{\max}$, implica que la ecuación (62) debe tener al menos una raíz real, las cuales corresponden a las ordenadas de los puntos de intersección (puntos A, B, C y D de la Fig.7.a y A y B de la 7.b). A cada ϕ_j le corresponde una de estas raíces que denominaremos x_{ej} , de modo que si y_{ej} es la abcisa respectiva, la expresión para ϕ_j es:

$$\phi_j = \arctg \frac{y_{ej}}{x_{ej}} \quad , \quad (63)$$

donde j toma valores de 1 a n con $n \leq 4$.

Los y_{ej} se hallan a partir de la ecuación (53):

$$y_{ej} = \frac{1 - (x_{ej} - r_c) \left(\frac{\cos^2 \omega}{a^2} + \frac{\sin^2 \omega}{b^2} \right) - (r^2 - x_{ej}^2) \left(\frac{\sin^2 \omega}{a^2} + \frac{\cos^2 \omega}{b^2} \right)}{2 (x_{ej} - r_c) \sin \omega \cos \omega \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)}, \quad (64)$$

donde los casos que implicarían división por cero, se analizan en forma separada a continuación:

1- $x_{ej} = r_c$

Esto significaría que el punto de intersección coincide con el centro de la elipse, lo cual, en forma evidente, no es posible.

2- $a = b$

Esto sólo es posible cuando $\theta = 0$ y $\Omega = 0$, con lo cual la elipse se transforma en una circunferencia centrada en o' que contribuye con 2π si $r \leq a$ y con 0 si $r > a$, y no hay contribuciones intermedias ($d_{min} = d_{max} = a$).

3- $\omega = 0$ ó $\omega = \pi$

En éste caso las raíces reales de la ecuación (62) serán dobles, por lo cual y_{ej} se puede hallar a partir de (60), como:

$$y_{ej} = \pm \sqrt{r^2 - x_{ej}^2}. \quad (65)$$

De acuerdo a lo expresado con anterioridad, una vez hallados los ϕ_j , es posible distinguir los intervalos que componen ϕ_1 y ϕ_2 sabiendo que cualquier punto (x_e, y_e) de la circunferencia, pertenece al arco que los subtiende si está incluido en la superficie de la elipse, o sea, si verifica:

$$\begin{aligned} & (x_e - r_c)^2 \left(\frac{\cos^2 \omega}{a^2} + \frac{\sin^2 \omega}{b^2} \right) + y_e^2 \left(\frac{\sin^2 \omega}{a^2} + \frac{\cos^2 \omega}{b^2} \right) + \\ & + 2 y_e (x_e - r_c) \sin \omega \cos \omega \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \leq 1 \quad . \end{aligned} \quad (66)$$

iii) $r > d_{\max}$: La circunferencia es siempre exterior a la elipse, por lo que:

$$\phi_t(\xi, \Omega, \theta, r) = 0 \quad . \quad (67)$$

En resumen, el factor de concentración puntual para un concentrador no perfecto, se obtiene de la ecuación (51):

$$\begin{aligned} C(r) &= \frac{\rho}{2^{3/2} \pi^{5/2} \sigma \beta_0^2} \int_0^{2\pi} d\xi \int_0^\infty d\Omega \exp \left[- \frac{(\Omega - \bar{\Omega})^2}{2\sigma^2} \right] \\ & \int_0^{\theta_{\max}} d\theta \frac{R(\theta) \sin \theta t_z^3}{[R(\theta) + \Delta f + \cos \theta]^2} \phi_t(\xi, \Omega, \theta, r) \quad . \end{aligned} \quad (68)$$

donde la expresión para t_z , se obtiene a partir de la ecuación (86) del apéndice 2.b, y $\phi_t(\xi, \Omega, \theta, r)$ vale:

$$\phi_t(\xi, \Omega, \theta, r) = \begin{cases} 2\pi & \text{Si } r < d_{\min} \text{ y } r_c \leq d_{\max} \\ \phi_1 + \phi_2 & \text{Si } d_{\min} \leq r \leq d_{\max} \\ 0 & \text{Si } r < d_{\min} \text{ y } r_c > d_{\max} \\ & \text{ó } r > d_{\max} \end{cases}$$

APENDICE 2.a

Análisis de la uniformidad de la intensidad de la elipse:

Para ello, estudiaremos el caso $\xi = \pi$ y $\Delta f = 0$ que permite simplificar los cálculos y no implica restricción alguna.

Para calcular la intensidad incidente en cada elemento diferencial de la superficie de la elipse dSe , es necesario considerar la componente normal al plano receptor del rayo reflejado que incide en dSe . Tomaremos, entonces, como criterio para considerar la uniformidad de la intensidad de la elipse, que si α_+ y α_- son los ángulos indicados en la Fig.8, la diferencia de sus cosenos sea mucho menor que su semisuma, o sea, que:

$$\cos \alpha_+ - \cos \alpha_- \ll \frac{\cos \alpha_+ + \cos \alpha_-}{2} \quad (69)$$

donde las expresiones para α_+ y α_- son:

$$\alpha_+ = \theta + 2\Omega + \beta_0 \quad (70)$$

$$\alpha_- = \theta + 2\Omega - \beta_0 \quad (71)$$

Reemplazando (70) y (71) en (69) y desarrollando:

$$2 \sin(\theta + 2\Omega) \sin \beta_0 \ll \cos(\theta + 2\Omega) \cos \beta_0, \quad (72)$$

o sea:

$$2 \operatorname{tg}(\theta + 2\Omega) \ll \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_0} \quad (73)$$

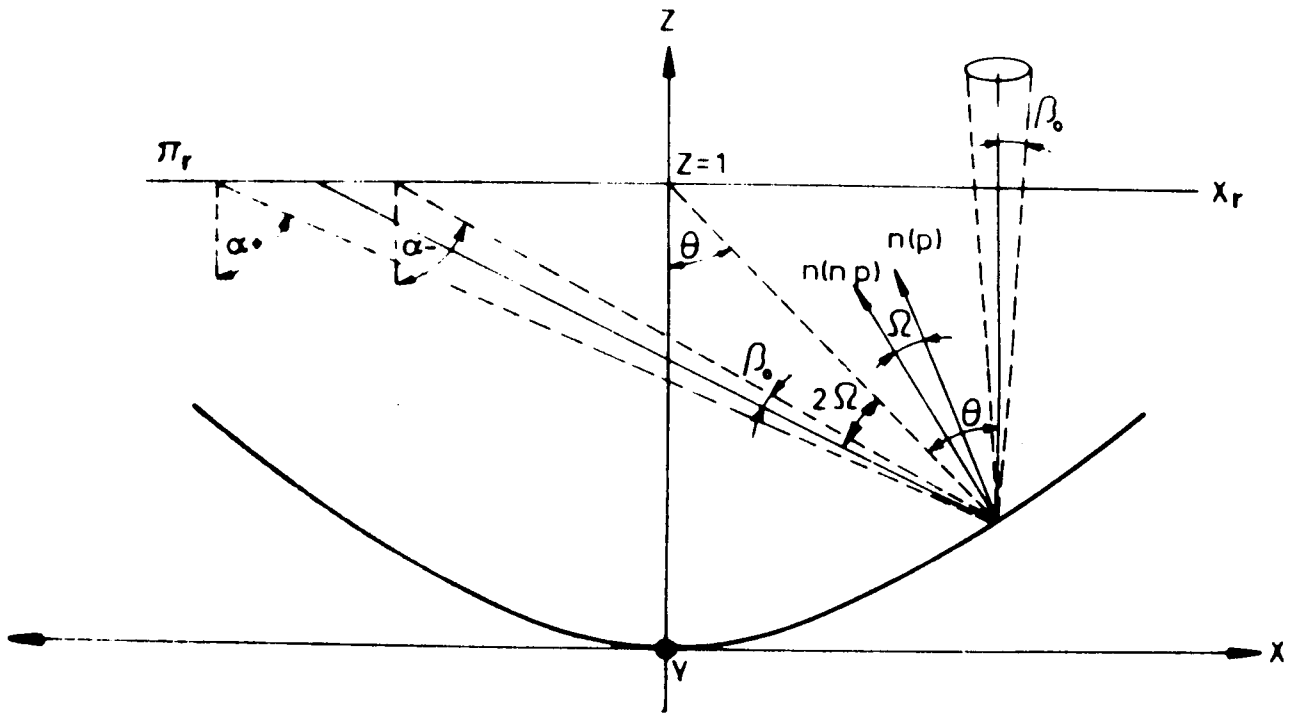


Fig.8: Marcha de rayos para un concentrador no perfecto, con $\xi = \pi$ y $\Delta f = 0$.

α_+ : ángulo formado por el rayo reflejado proveniente de un borde del disco solar y la normal a π_r en el punto donde este rayo lo corta.

α_- : Idem α_+ , pero tomando el rayo proveniente del punto del sol diametralmente opuesto.

Tomando valores de $\sigma < 10 \text{ mrad}$ y sabiendo que $\beta_0 = 4,65 \text{ mrad.}$, la condición (69) se verifica para valores de $\theta \leq 75^\circ$.

APENDICE 2.b

Cálculo de a, b, r_c y ω

En este apéndice se evalúan los parámetros característicos de las elipses formadas en el plano receptor, por el haz de rayos reflejados. Denominando $Q(\xi, \Omega, \theta)$ a la distancia entre el punto de incidencia y el punto S donde el rayo reflejado proveniente del centro del sol corta el plano receptor (ver Fig.9) y $\hat{t}$ al versor en la dirección de dicho rayo, las expresiones para a y b son:

$$b = Q(\xi, \Omega, \theta) \operatorname{tg} \beta_0 \approx Q(\xi, \Omega, \theta) \beta_0 \quad (74)$$

$$a = \frac{b}{\cos(\hat{t}, \hat{z}')} = \frac{Q(\xi, \Omega, \theta) \beta_0}{\cos(\hat{t}, \hat{z}')} \quad (75)$$

La ley de reflexión se puede expresar como:

$$\hat{t} = \hat{i} - 2 \hat{n} (\hat{i} \cdot \hat{n}) \quad (76)$$

donde, de acuerdo a la hipótesis c) de la Sección 2.1.:

$$\hat{i} = -\hat{z}' \quad ; \quad (77)$$

la expresión para la normal en el caso que el concentrador sea no perfecto, se obtiene a partir de la Fig.1.b:

$$\hat{n} = \operatorname{sen} \Omega \cos \xi \hat{x}'' + \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \xi \hat{y}'' + \cos \Omega \hat{z}'' \quad (78)$$

Las ecuaciones de transformación de los versores fundamenta-

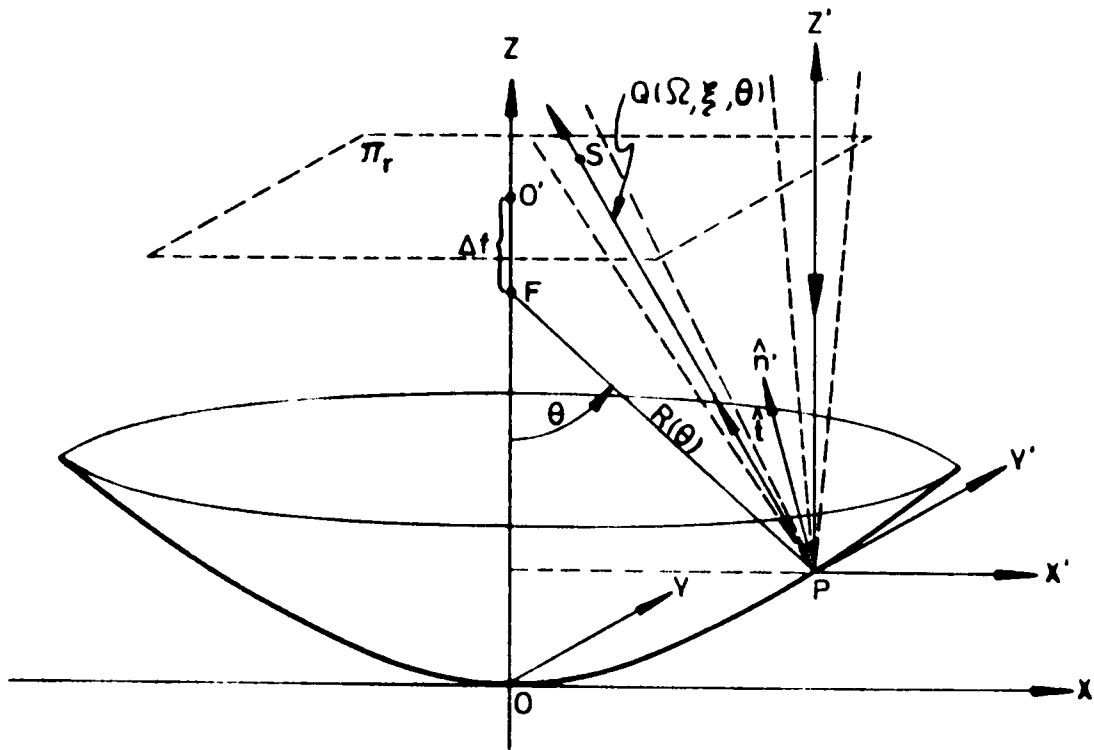


Fig.9: Concentrador paraboloide de revolución no perfecto con el plano receptor desplazado paralelamente respecto del plano focal una distancia Δf .

P : punto de incidencia; $P = (0,0,0)$ en el sistema $X'Y'Z'$

$Q(\Omega, \xi, \theta)$: distancia PS

$\hat{t}$: versor en la dirección del rayo reflejado proveniente del centro del sol

les del sistema $X''Y''Z''$ en sus componentes respecto de los del sistema $X'Y'Z'$ son:

$$\hat{x}'' = \cos(\theta/2) \hat{x}' + \sin(\theta/2) \hat{z}' \quad (79)$$

$$\hat{y}'' = \hat{y}' \quad (80)$$

$$\hat{z}'' = -\sin(\theta/2) \hat{x}' + \cos(\theta/2) \hat{z}' \quad (81)$$

Reemplazando (79), (80) y (81) en (78) se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{n} = & [-\cos \Omega \sin(\theta/2) + \cos(\theta/2) \sin \Omega \cos \xi] \hat{x}' + \\ & + \sin \Omega \sin \xi \hat{y}' + \\ & + [\cos \Omega \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \sin \Omega \cos \xi] \hat{z}' \quad (82) \end{aligned}$$

Descomponiendo el versor $\hat{t}$ como:

$$\hat{t} = t_{x'} \hat{x}' + t_{y'} \hat{y}' + t_{z'} \hat{z}' \quad (83)$$

y reemplazando (82) y (77) en (76) se llega a:

$$\begin{aligned} t_{x'} = & 2 [-\cos \Omega \sin(\theta/2) + \cos(\theta/2) \sin \Omega \cos \xi] [\cos \Omega \cos(\theta/2) + \\ & + \sin(\theta/2) \sin \Omega \cos \xi] \quad (84) \end{aligned}$$

$$t_{y'} = 2 \sin \Omega \sin \xi [\cos \Omega \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \sin \Omega \cos \xi] \quad (85)$$

$$t_{z'} = 2 [\cos \Omega \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \sin \Omega \cos \xi]^2 - 1 \quad (86)$$

con lo cual se obtiene la expresión para $\cos(\hat{t}, \hat{z}')$ pues:

$$\cos(\hat{t}, \hat{z}') = t_{z'} \quad (87)$$

Para hallar a y b a partir de (74) y (75), resta entonces calcular $\Omega(\xi, \Omega, \theta)$, para lo cual hallaremos las coordenadas $S_{x'}$, $S_{y'}$ y $S_{z'}$ del punto S en el sistema $X'Y'Z'$. La expresión para $S_{z'}$ se deduce fácilmente de la Fig.6:

$$S_{z'} = R(\theta) \cos \theta + \Delta f \quad . \quad (88)$$

Para calcular $S_{x'}$ y $S_{y'}$ expresemos la ecuación de la recta en forma paramétrica que pasa por P y por S :

$$x' = t_{x'} v \quad (89)$$

$$y' = t_{y'} v \quad (90)$$

$$z' = t_{z'} v \quad , \quad (91)$$

donde v es un parámetro. Reemplazando z' por $S_{z'}$ de (88), se obtiene de (92) el valor de v en el punto S , o sea:

$$v|_S = \frac{R(\theta) \cos \theta + \Delta f}{t_{z'}} \quad (92)$$

con lo cual, de (89) y (90):

$$S_{x'} = t_{x'} v|_S = \frac{t_{x'}}{t_{z'}} [R(\theta) \cos \theta + \Delta f] \quad (93)$$

$$S_{y'} = t_{y'} v|_S = \frac{t_{y'}}{t_{z'}} [R(\theta) \cos \theta + \Delta f] \quad . \quad (94)$$

A partir de estas expresiones es posible calcular Q como:

$$Q = \sqrt{S_{x'}^2 + S_{y'}^2 + S_{z'}^2} \quad , \quad (95)$$

y sabiendo que $t_{x'}^2 + t_{y'}^2 + t_{z'}^2 = 1$, resulta:

$$Q = \frac{R(\theta) \cos \theta + \Delta f}{t_{z'}} \quad . \quad (96)$$

Reemplazando (87) y (96) en (74) y (75), se llega a:

$$b = \frac{R(\theta) \cos \theta + \Delta f}{t_{z'}} \beta_0 \quad (97)$$

$$a = \frac{R(\theta) \cos \theta + \Delta f}{t_{z'}^2} \beta_0 \quad (98)$$

donde $t_{z'}$ se obtiene a partir de la ecuación (86).

La expresión para r_c se calcula mediante la relación:

$$r_c = \sqrt{[S_{x'} + R(\theta) \sin \theta]^2 + S_{y'}^2} \quad (99)$$

o sea,

$$r_c = [R(\theta) \cos \theta + \Delta f] \sqrt{\left[\frac{t_{x'}}{t_{z'}} + \frac{R(\theta) \sin \theta}{R(\theta) \cos \theta + \Delta f} \right]^2 + \frac{t_{y'}^2}{t_{z'}^2}} \quad . \quad (100)$$

De la Fig.6, se deduce la expresión de ω :

$$\omega = \phi - \beta \quad (101)$$

donde

$$\phi = \arctg\left(\frac{S_{y'}}{S_{x'}}\right) \quad (102)$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{S_{y'}}{S_{x'} + R(\theta) \operatorname{sen} \theta}\right) . \quad (103)$$

Reemplazando (93) y (94) en (102) y (103) y luego en la (101) se obtiene:

$$\omega = \arctg\left(\frac{t_{y'}}{t_{x'}}\right) - \arctg\left\{\frac{t_{y'} [R(\theta) \cos \theta + \Delta f]}{t_{x'} [R(\theta) \cos \theta + \Delta f] + t_{z'} R(\theta) \operatorname{sen} \theta}\right\} . \quad (104)$$

APENDICE 2.c

Cálculo de los coeficientes T_k

En este apéndice se calcula a partir de las ecuaciones (53), (61) y (62) de la sección 2.5., los coeficientes de la ecuación (63) que permite obtener las ordenadas de los puntos de intersección entre el perímetro de una elipse centrada en $\vec{r}_C = r_C \hat{x}_r$ e inclinada en ω respecto del eje X_r , y una circunferencia de radio r . Definiendo, por simplicidad, las siguientes constantes:

$$K_1 = \frac{\cos^2 \omega}{a^2} + \frac{\sin^2 \omega}{b^2} \quad (105)$$

$$K_2 = \frac{\sin^2 \omega}{a^2} + \frac{\cos^2 \omega}{b^2} \quad (106)$$

$$K_3 = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \quad (107)$$

y elevando miembro a miembro la ecuación (68) al cuadrado y reemplazando y_e^2 por $(r_C^2 - x_e^2)$ de la ecuación (67), se obtiene:

$$\begin{aligned} & (x_e - r_C)^4 K_1^2 + (r_C^2 - x_e^2) K_2^2 + 1 - 2 K_1 (x_e - r_C)^2 - \\ & - 2 K_2 (r_C^2 - x_e^2) + 2 K_1 K_2 (x_e - r_C)^2 (r_C^2 - x_e^2) = \\ & = 4 (r_C^2 - x_e^2) (x_e - r_C)^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega K_3^2, \end{aligned} \quad (108)$$

o sea:

$$\begin{aligned}
 & (x_e - r_c)^4 K_1^2 + (r_c^2 - x_e^2)^2 K_2^2 + 1 - 2 K_1 (x_e - r_c)^2 + \\
 & + (x_e - r_c)^2 (r_c^2 - x_e^2) (2 K_1 K_2 - 4 K_3^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega) + \\
 & + 2 K_2 (x_e^2 - r_c^2) = 0 \quad . \quad (109)
 \end{aligned}$$

Reordenando la ecuación (109) se obtienen los coeficientes T_k de la ecuación (69):

$$T_4 = K_3^2 \quad (110)$$

$$T_3 = -4 r_c \left(\frac{\cos^2 \omega}{a^4} + \frac{\sin^2 \omega}{b^4} - \frac{1}{a^2 b^2} \right) \quad (111)$$

$$\begin{aligned}
 T_2 = r_c^2 \left(6 K_1^2 - \frac{2}{a^2 b^2} + 2 K_3^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega \right) + 2 (K_2 - K_1) - \\
 - 2 r^2 \left(K_2^2 - \frac{1}{a^2 b^2} + K_3^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega \right) \quad (112)
 \end{aligned}$$

$$T_1 = 4 r_c \left(-r_c^2 - \frac{r^2}{a^2 b^2} + r^2 K_3^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega + K_1 \right) \quad (113)$$

$$\begin{aligned}
 T_0 = r_c^2 K_1 (r_c^2 K_1 - 2) + r^2 K_2 (r^2 K_2 - 2) + 1 + \\
 + r_c^2 r^2 \left(\frac{2}{a^2 b^2} - 2 K_3^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega \right) \quad . \quad (114)
 \end{aligned}$$

PROGRAMA DE SIMULACION DEL
COMPORTAMIENTO DEL CONCENTRADOR

CAPITULO 3

3. PROGRAMA DE SIMULACION DEL COMPORTAMIENTO DEL CONCENTRADOR

En este capítulo se presenta en detalle el programa de simulación del comportamiento óptico de un concentrador parabólico de revolución, de acuerdo con el análisis realizado en el capítulo precedente.

La rutina de cálculo consta de un programa principal, el CONPAR, y siete subrutinas: QB01A, FUNLIM, DIST, CALCFI, DPOLRT, LIMIT y MINMAX. El programa, escrito en lenguaje Fortran 77, calcula el factor de concentración puntual de un concentrador no perfecto (el caso del perfecto se obtiene imponiendo $\sigma = 0$ y $\Delta f = 0$) según lo expresado en (68), el factor de concentración medio y la eficiencia geométrica del receptor, según las fórmulas (2) y (3) respectivamente. En el cálculo de $C(r)$, para algunos valores de r , solo contribuyen al flujo de energía en ese punto las elipses provenientes de una franja angosta del concentrador, comparada con la abertura total. Esto genera funciones nulas en casi todo el rango de la variable θ , salvo en pequeñas zonas, cuya integral requiere alta precisión y, por consiguiente, mucho tiempo de ejecución. Para evitarlo, la subrutina DIST determina previamente al cálculo de la integral en θ , $\theta_{\min}$, $\theta_{\max}$ y θ_{mo} para valores discretos de θ que van desde 0 a $\theta_{\max}$; esto permite a la subrutina LIMIT establecer intervalos de θ donde exista la contribución de las elipses en el punto r , y así, limitar la integral en θ a esas regiones.

La subrutina de integración múltiple utilizada es la QB01A, tomada de la HARWELL SUBROUTINE LIBRARY [14] que tiene la opción de integrar por tres métodos: Gauss, Simpson y Chebichev. En este trabajo se efectuaron los cálculos utilizando el último de estos, ya que para la misma precisión, requiere menor tiempo de ejecución, y los resultados obtenidos con éste y los otros métodos difieren en menos de 1%. Esta subrutina requiere a su vez de otra (la FUNLIM) que le proporcione los límites y las funciones a integrar de la si-

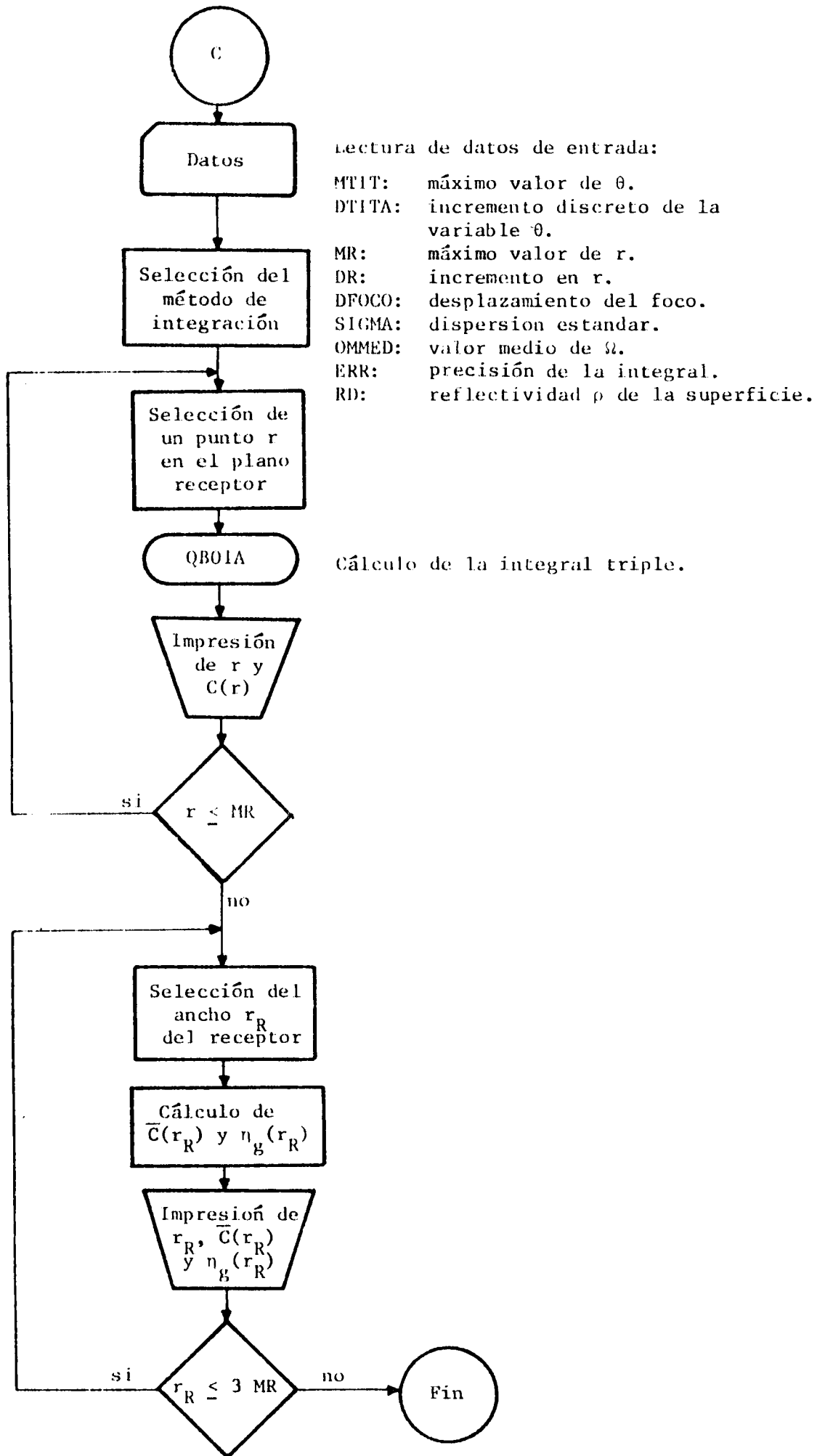
guiente manera: si se expresa en forma concisa la integral a calcular como:

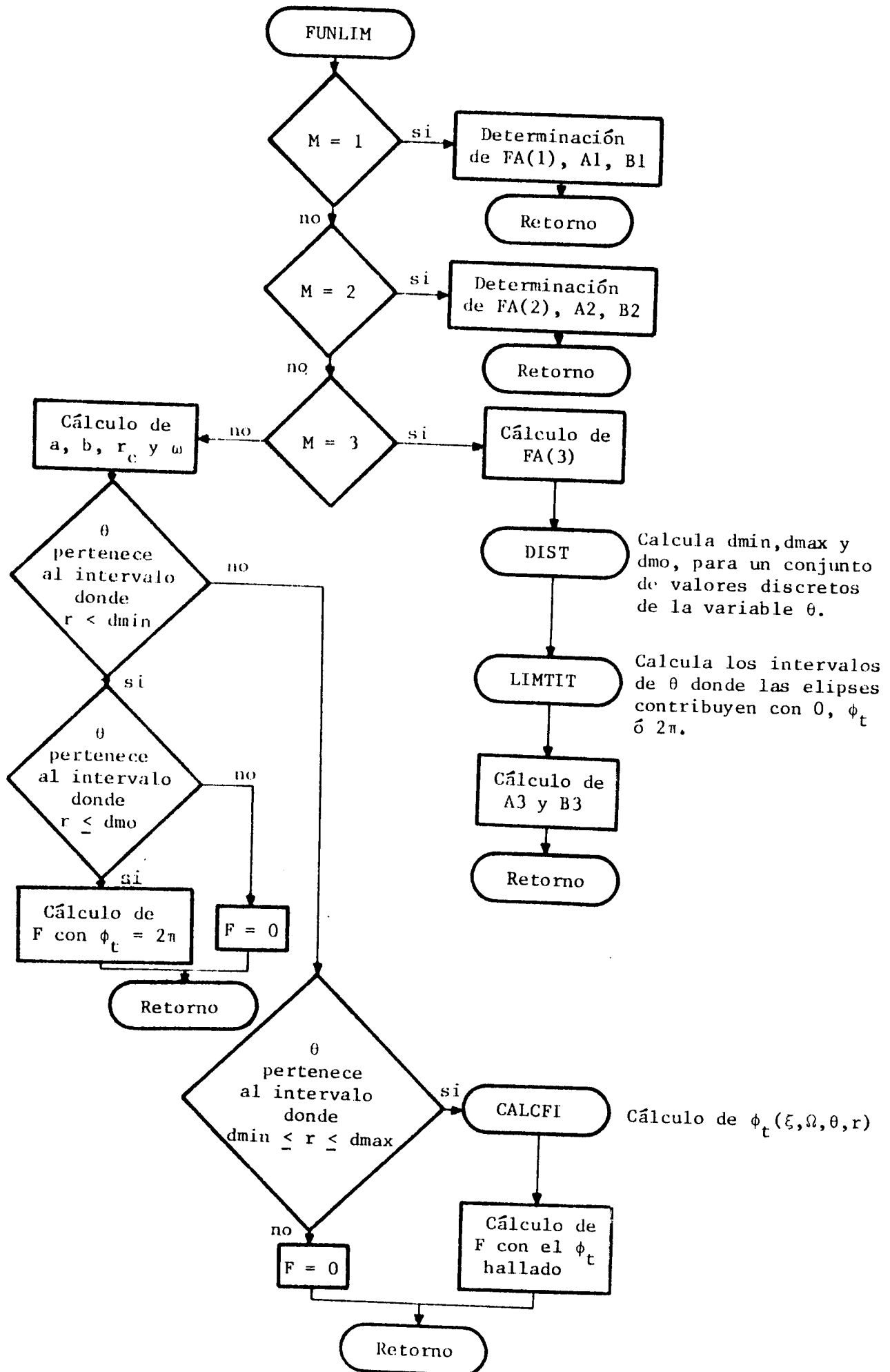
$$J(r) = FA_1 \int_{A_1}^{B_1} dX_1 FA_2(X_1) \int_{A_2}^{B_2} dX_2 FA_3(X_1, X_2) \int_{A_3}^{B_3} dX_3 F(X_1, X_2, X_3, r) \quad (115)$$

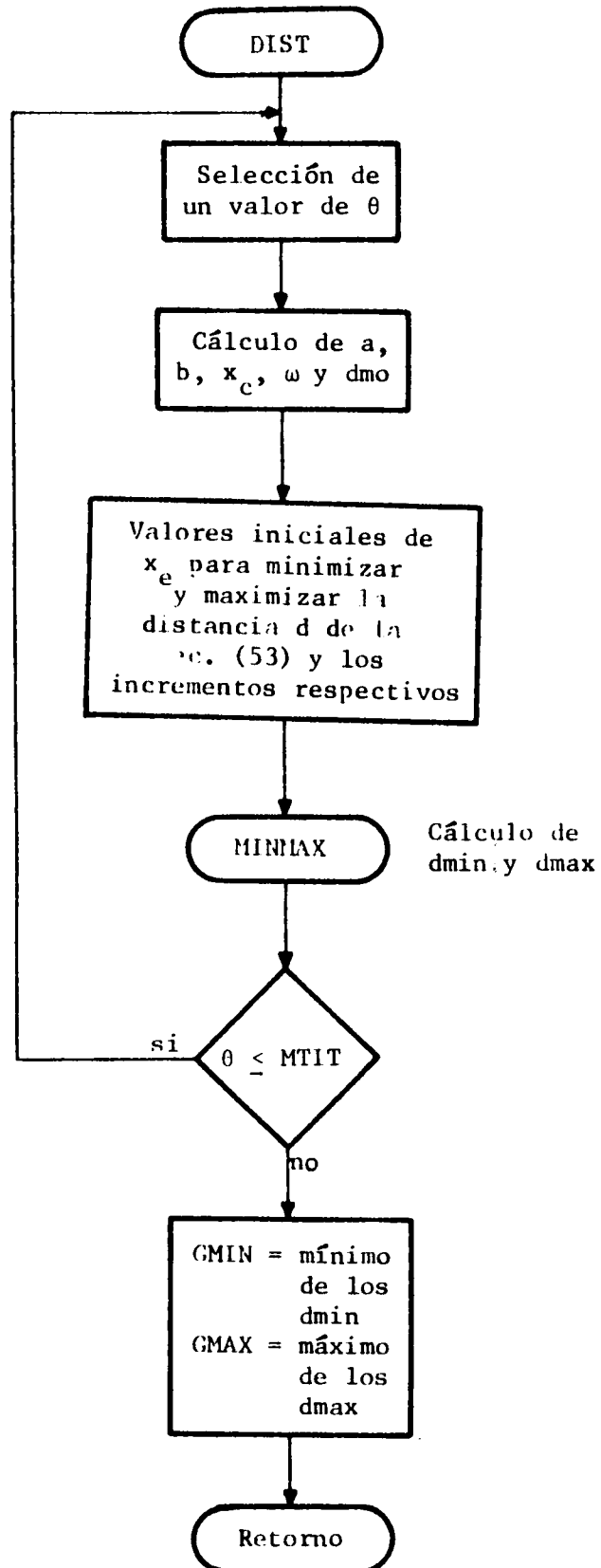
y m es un índice en común entre ambas subrutinas, si $m = i$ calcule FA_i , A_i y B_i ($i = 1-3$) y si $m = 4$ calcule F .

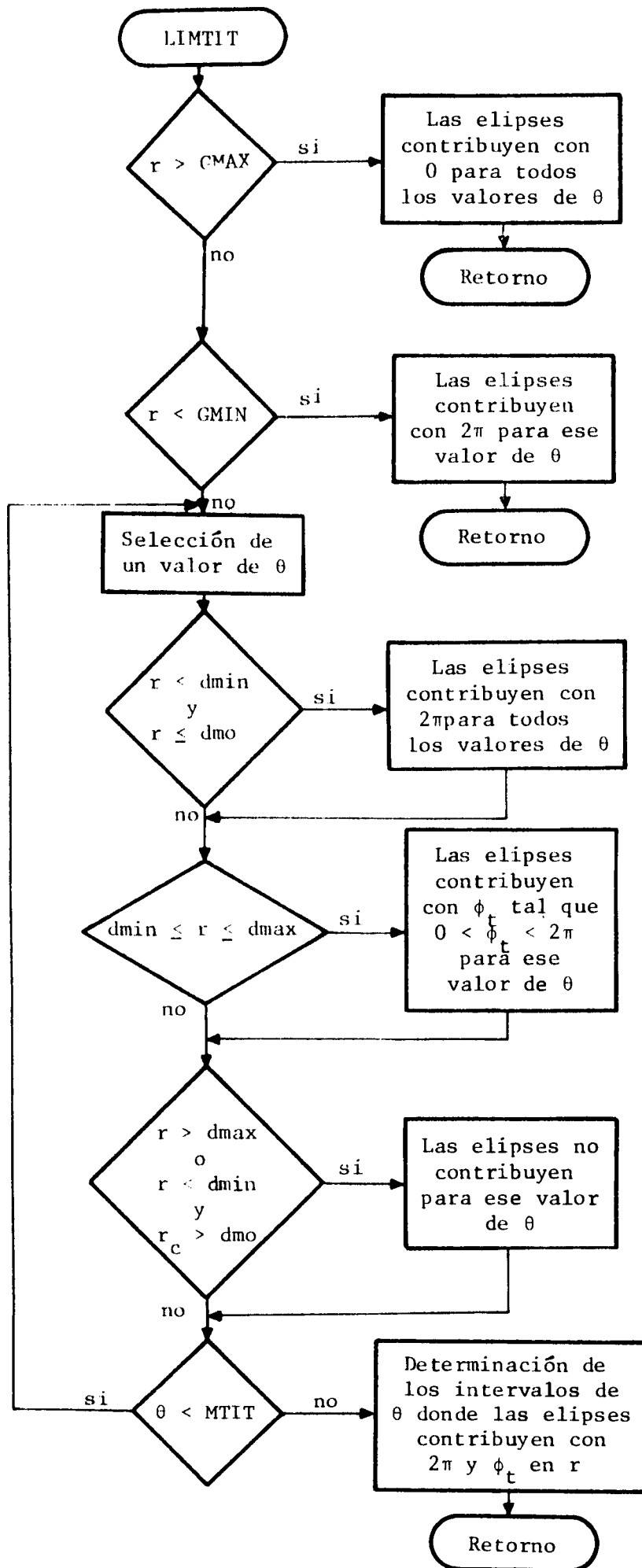
Para calcular $F(X_1, X_2, X_3, r)$ que incluye el cálculo de $\phi_t(\xi, \Omega, 0, r)$ es necesario resolver la ecuación (69) para lo cual se utilizó la subrutina DPOLRT de la SSPFORT IBM LIBRARY [15] que permite hallar raíces de polinomios de grado n con $n \leq 36$.

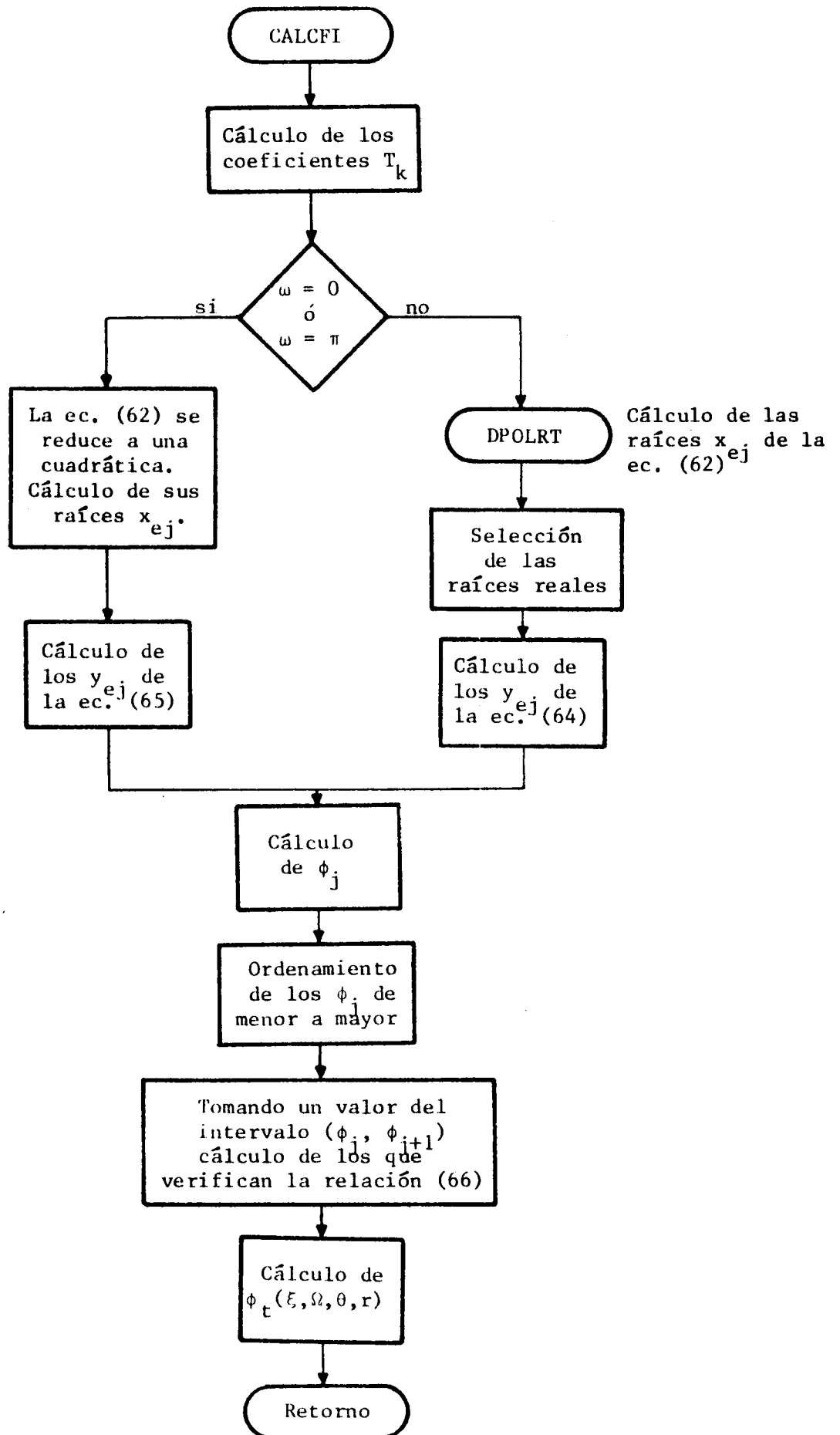
Se presenta a continuación el diagrama en bloque del programa desarrollado;

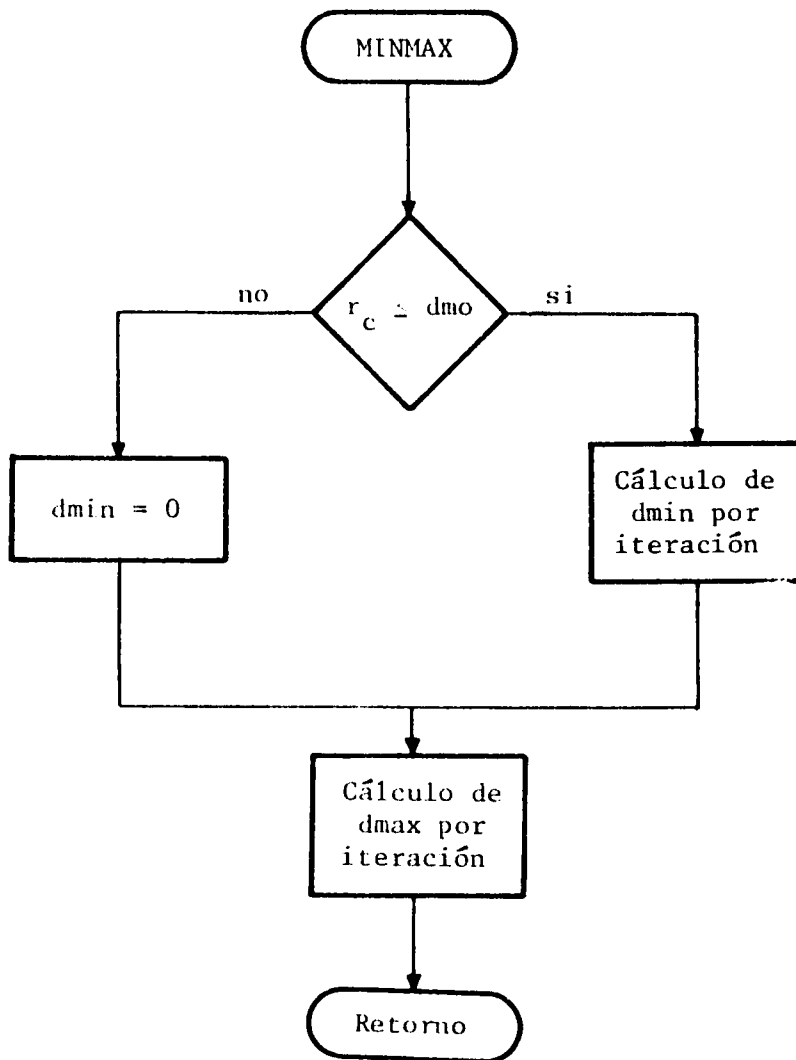












CAPITULO 4

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El análisis desde el punto de vista óptico de un concentrador se basa en los gráficos (a)-(d) descriptos a continuación:

- (a) Factor de concentración puntual $C(r)$ en función de r :
permite realizar un primer análisis cualitativo de comparación entre distintos valores de los parámetros característicos, o entre distintos concentradores.
- (b) Factor de concentración medio $\bar{C}(r_R)$ y eficiencia geométrica del receptor $\eta_g(r_R)$ en función del radio del receptor r_R : estos gráficos permiten hacer una comparación cuantitativa entre distintos tipos de concentradores y realizar una primera selección del ancho apropiado del receptor para un concentrador dado; cabe señalar que $\bar{C}(r_R)$ es el parámetro de mayor interés desde el punto de vista óptico en el cálculo de la eficiencia de conversión en el receptor [12]. La selección final dependerá de variables tales como la temperatura de operación, la absorbanza y emitancia de la superficie del receptor, y las pérdidas por conducción y convección en el receptor, que forman parte del análisis térmico del mismo.
- (c) Factor de concentración medio $\bar{C}(r_R)$ en función de σ para distintas eficiencias geométricas en el receptor: permiten evaluar la influencia del error en la posición angular de los espejos sobre el funcionamiento del concentrador.
- (d) Factor de concentración medio $\bar{C}(r_R)$ y pérdidas geométricas en el receptor $\eta_g(r_R)$ en función del desplazamiento Δf del plano receptor: estas curvas permiten estimar la precisión con la cual debe ser montado el receptor.

En la Fig.10 se ha graficado $C(r)$ para un concentrador perfecto, para distintos valores de $\theta_{\max}$. Como era de esperar, dado el modelo de disco solar utilizado, $C(r)$ es constante si $r < \beta_0 f$ independientemente del valor de

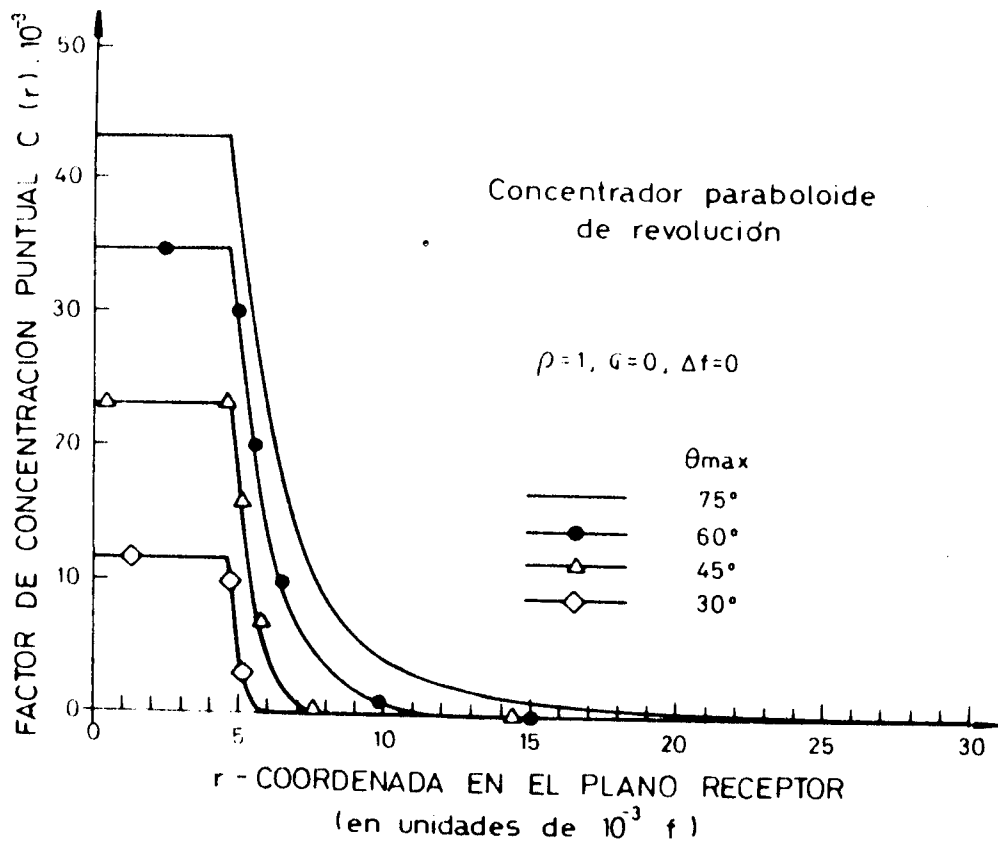


Fig. 10: Factor de concentración puntual $C(r)$ en función de la coordenada r en el plano receptor para un concentrador paraboloide de revolución perfecto con el plano receptor coincidente con el plano focal, para distintos valores de $\theta_{\max}$.

$\theta_{\max}$, y aumenta con este parámetro para todos los puntos del plano receptor; por ejemplo, el valor máximo de $C(r)$ disminuye ~20% si $\theta_{\max}$ pasa de 75° a 60° , porcentaje que aumenta para la misma diferencia de apertura entre los concentradores, a medida que $\theta_{\max}$ decrece.

En la Fig.11.a se muestra el factor de concentración puntual para el caso de $\theta_{\max} = 60^\circ$ para distintos valores de σ , donde se observa que el máximo valor de $C(r)$ disminuye a medida que σ aumenta. Como es lógico, disminuyendo el radio r_R del receptor aumenta el factor de concentración medio, mejorando, en consecuencia, la eficiencia de conversión de energía solar en térmica. Como contrapartida, si r_R es menor que el tamaño máximo de la imagen, aparecen pérdidas de radiación, disminuyendo, luego, la eficiencia geométrica del receptor. El radio del receptor resultará de una solución de compromiso que depende, como ya se ha comentado, de múltiples factores. Como ejemplo de esto, en la Fig.11.b se observa que si se admite $\eta_g(r_R) = 0.9$ para $\sigma = 2$ mrad, $\bar{C}(r_R)$ es 67% menor que su valor máximo, pero es ~70% mayor que el que resultaría de exigir $\eta_g(r_R) = 1$.

Para analizar como influye el error en la posición angular de los espejos sobre el factor de concentración medio $\bar{C}(r_R)$, se graficó a este último en función de σ para distintos valores de $\eta_g(r_R)$ (Fig.12). La disminución de $\bar{C}(r_R)$ con σ manteniendo $\eta_g(r_R)$ constante, se debe a que al crecer σ aumenta el ancho de la imagen en el receptor; comparando un concentrador con $\sigma = 4$ mrad con otro caracterizado por $\sigma = 0$ mrad, se observa que $\bar{C}(r_R)$ disminuye en ~85% para $\eta_g(r_R) = 1$ y ~84% para $\eta_g(r_R) = 0.8$. Estos resultados evidencian la importancia de σ en el diseño final del concentrador.

Para analizar los efectos que produce el desplazamiento del plano receptor respecto del plano focal, en la Fig. 13 se muestra $C(r)$ para distintos valores de Δf para un concentrador perfecto. Es de destacar, que al desplazar el plano receptor de su posición correcta ($\Delta f = 0$) se

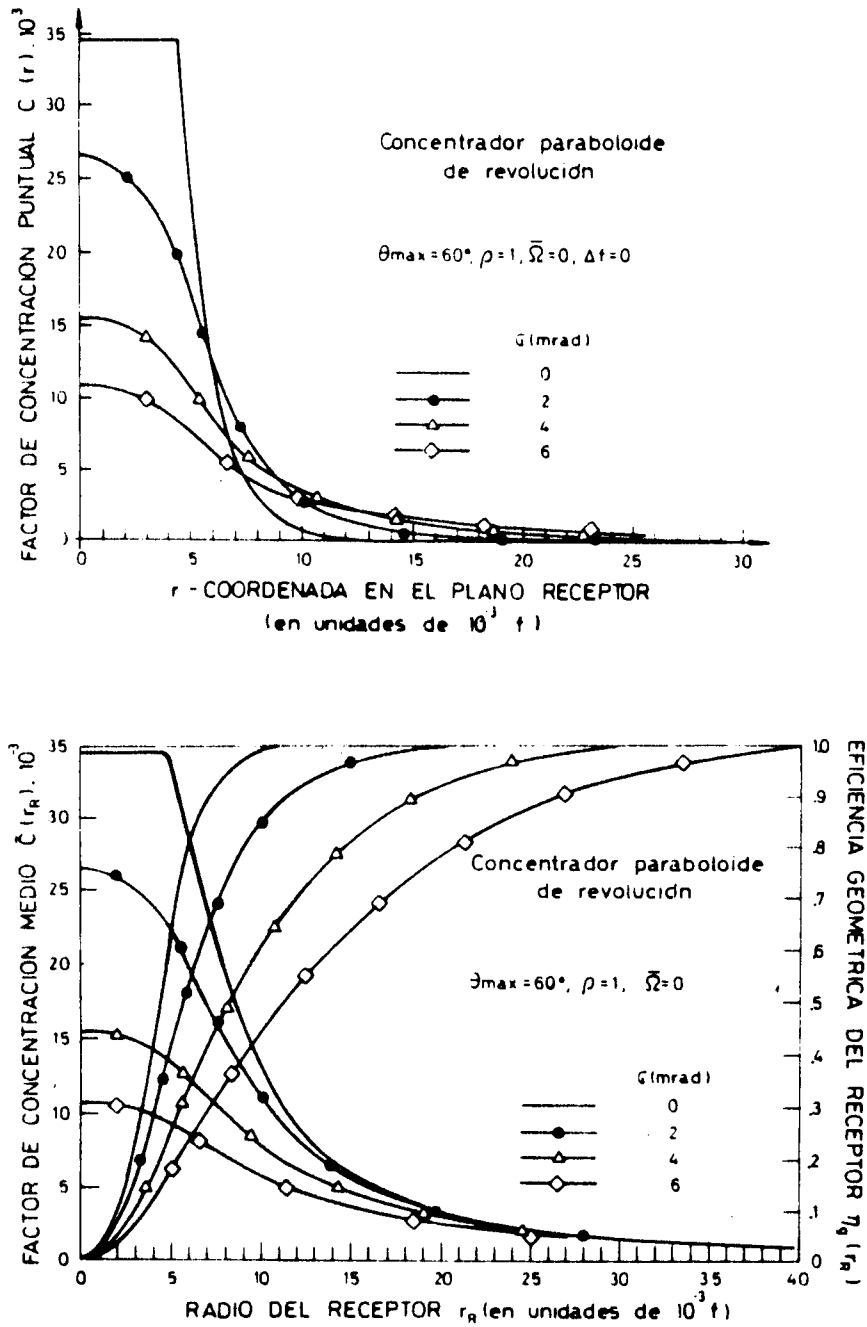


Fig. 11: Gr3ficos para un concentrador paraboloide de revoluci3n no perfecto con el plano receptor coincidente con el plano focal, para distintos valores de σ .

- Factor de concentraci3n puntual $C(r)$ en funci3n de la coordenada r en el plano receptor.
- Factor de concentraci3n medio $\bar{C}(r_R)$ y eficiencia geom3trica del receptor $\eta_g(r_R)$ en funci3n del radio del receptor r_R .

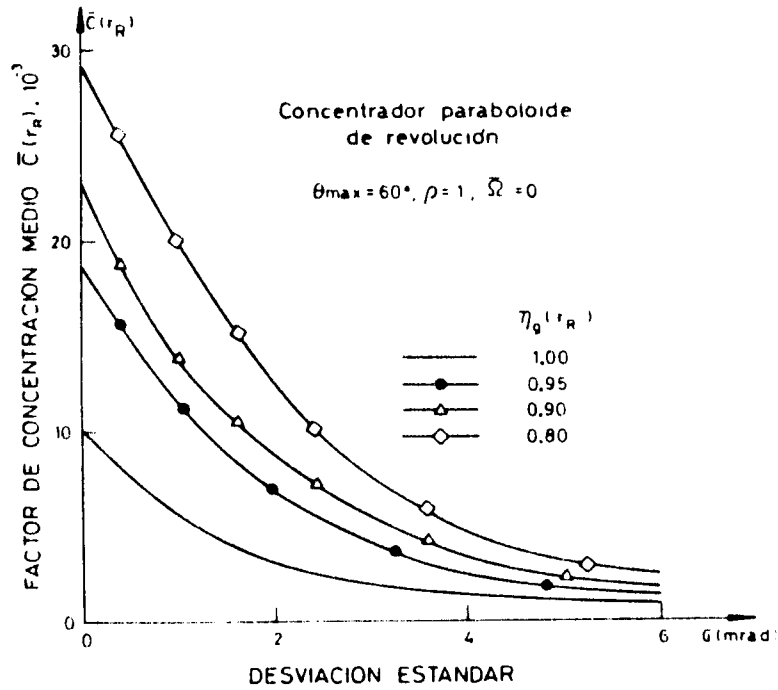


Fig.12: Factor de concentración medio $\bar{C}(r_R)$ en función de la dispersión estándar σ , para distintos valores de $\eta_g(r_R)$.

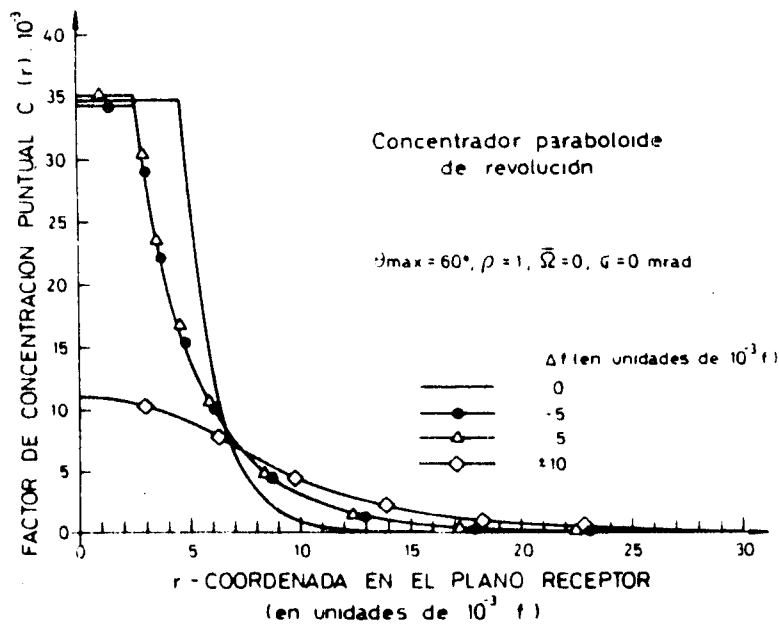


Fig. 13: Factor de concentración puntual $C(r)$ en función de la coordenada r en el plano receptor para un concentrador paraboloide de revolución perfecto ($\sigma=0$), para distintos valores del desplazamiento Δf del plano receptor respecto del focal.

presentan dos efectos: (a) para cada haz de rayos reflejados en cualquier punto del concentrador disminuye (aumenta) el tamaño de las elipses definidas por la intersección de aquel con el plano receptor al acercar (alejar) el mismo a los espejos, lo que tiende a aumentar (disminuir) el factor de concentración, y (b) se produce un desenfoque que tiende a disminuir el factor de concentración. Al acercar el plano receptor a los espejos ($\Delta f < 0$) dichos efectos se contraponen, mientras que si $\Delta f > 0$ ambos contribuyen a disminuir el factor de concentración. En la Fig.13 se observa que para pequeños valores de Δf el primer efecto es significativo sobre el segundo ya que las curvas obtenidas para $\Delta f = \pm 0.005 f$ difieren entre sí $\sim 3\%$, para valores de $r \lesssim \beta_0/2$. Sin embargo, si $\Delta f = \pm 0.01 f$ no se aprecia diferencia entre ambas curvas, lo que evidencia que para estos valores de Δf prevalece el efecto de desenfoque. En la Fig.14 se ha graficado $C(r)$ para distintos valores de Δf tomando un valor de σ típico de 4 mrad; comparando esta figura con la anterior, se ve que mientras el valor máximo de $C(r)$ disminuye en $\sim 70\%$ cuando Δf pasa de 0 a $0.01 f$ para el caso $\sigma = 0$, si $\sigma = 4$ mrad esta disminución se reduce al 48%, lo que refleja el hecho que los efectos de desenfoque se reducen por las aberraciones ópticas del concentrador.

La Fig.15 permite determinar el rango de variaciones de Δf que produce cambios significativos en el factor de concentración medio y en la eficiencia geométrica del receptor; los valores de r_R elegidos corresponden a $\eta_d(r_R) = 1.0, 0.9$ y 0.8 para el caso del concentrador perfecto con el plano receptor coincidente con el focal. De allí se puede ver, por ejemplo, que si las condiciones de operación son tales que una variación del 10% en $\bar{C}(r_R)$ no es significativa sobre la eficiencia total de conversión de energía solar en térmica, un concentrador con $\sigma = 4$ mrad y $r_R = 0.006 f$ admite Δf de $\sim \pm 0.004 f$, mientras su eficiencia geométrica se reduce en un 6%. Sin embargo, esta precisión en la ubicación del plano receptor aumenta al disminuir σ , ya que, si

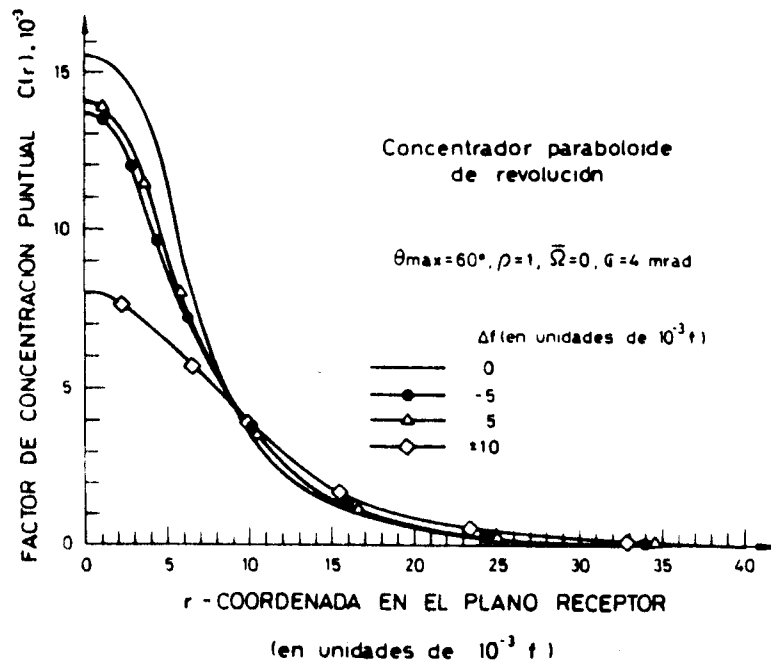


Fig. 14: Factor de concentración puntual $C(r)$ en función de la coordenada r en el plano receptor, para un concentrador paraboloide de revolución no perfecto con $\sigma=4 \text{ mrad}$, para distintos valores del desplazamiento Δf del plano receptor respecto del focal.

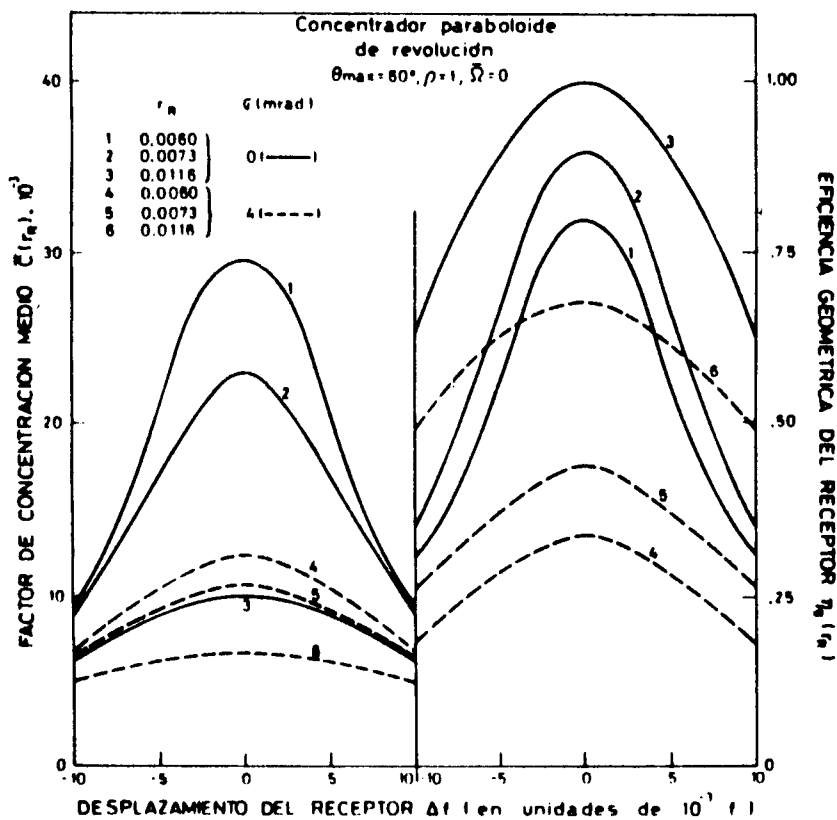


Fig. 15: Factor de concentración medio $\bar{C}(r_R)$ y eficiencia geométrica del receptor $\eta_g(r_R)$ en función del desplazamiento Δf del plano receptor respecto del focal, para un concentrador paraboloide de revolución no perfecto para varios valores del radio del receptor r_R y dos valores de σ .

$\sigma = 0 \text{ mrad}$, para el mismo error en $\bar{C}(r_R)$ e igual r_R , el valor absoluto de Δf no debe superar $0.003f$, mientras su eficiencia se reduce en $\sim 5\%$.

Dada la posibilidad de construcción de un concentrador con técnicas de revolución, resulta interesante proponer un nuevo modelo como aproximación al tratamiento de concentradores parabólicos de revolución reales, que consiste en considerar la normal a cada elemento de superficie apartado de su posición correcta un ángulo ϵ , de modo que la normal y el eje Z sean coplanares, y tal que ϵ siga una distribución gaussiana de valor medio $\bar{\epsilon}$ y desviación estandar σ . El análisis teórico desarrollado en el Capítulo 2, permite calcular $C(r)$ para este caso, pero con

$$\xi = 0 \text{ ó } \pi$$

$$\Omega = \epsilon$$

$$\bar{\Omega} = \bar{\epsilon}$$

y tal que $-\infty \leq \epsilon \leq \infty$. Ya que este nuevo modelo requiere mucho menor tiempo de ejecución que el concentrador no perfecto para el cálculo de $C(r)$, por no tener que realizar la integral en ξ , es de interés comparar los resultados obtenidos para ambos casos. De las Figs.11.b y 16.b se puede ver la importancia en la elección del modelo a considerar para elegir el ancho apropiado del receptor: por ejemplo, para $\eta_g = (r_R) = 0.9$ y $\sigma = 2 \text{ mrad}$, la diferencia entre el valor de $\bar{C}(r_R)$ para ambos modelos es de $\sim 29\%$.

De las Figs.10 a 15 se observa que el máximo valor obtenido para el factor de concentración puntual, que corresponde al caso $\theta_{\max} = 75^\circ$ para el concentrador perfecto, resulta menor que 46.165, que es el máximo valor teórico alcanzable según Ref.16 para concentradores con este tipo de simetría y con modelo de disco solar uniforme.

Como resumen, puede señalarse que para realizar un análisis económico de la utilización de concentradores para un uso específico, puede tomarse como punto de partida una evaluación detallada de gráficos del tipo de los dados en es

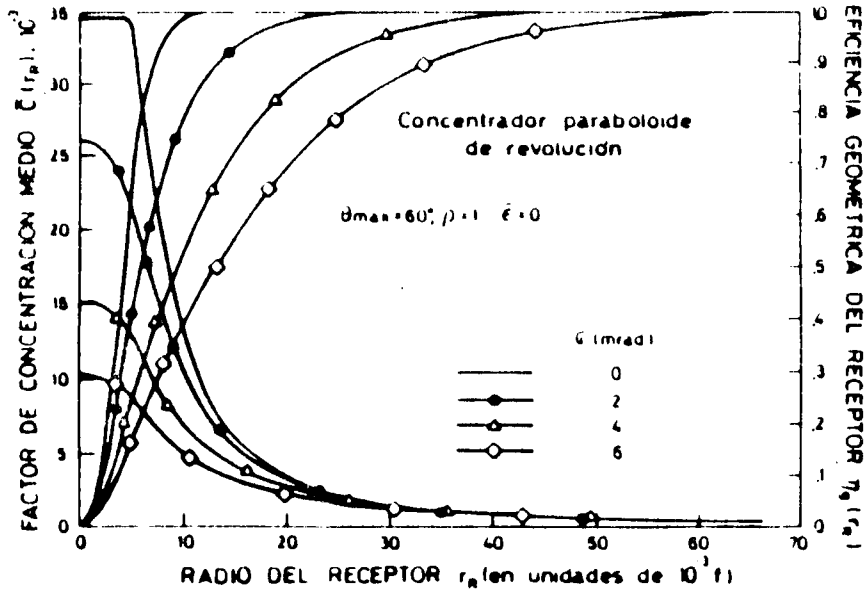
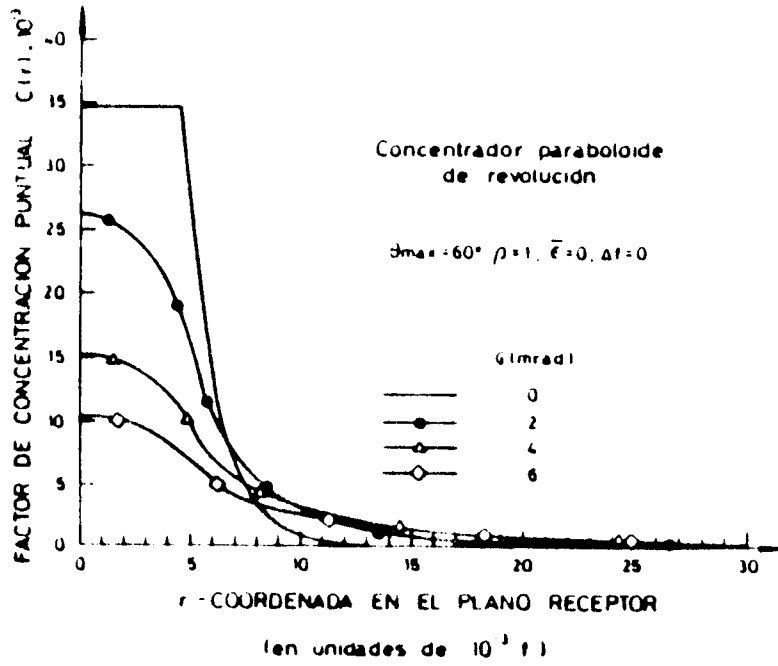


Fig. 16: Gráficos para un concentrador paraboloide de revolución no perfecto con $\xi = 0$ ó π , $\Omega = \epsilon$ y $\bar{\Omega} = \bar{\epsilon}$ (con $-\infty \leq \epsilon \leq \infty$) con el plano receptor coincidente con el plano focal, para distintos valores de σ .

- Factor de concentración puntual $C(r)$ en función de la coordenada r en el plano receptor.
- Factor de concentración medio $\bar{C}(r)$ y eficiencia geométrica del receptor $\eta_g(r_R)$ en función del radio receptor r_R .

te trabajo, lo cual facilita significativamente la elección del concentrador apropiado.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al Licenciado Julio C. Durán por la valiosa colaboración prestada en la etapa inicial del presente trabajo, a la Srta. Graciela Mastrogiascomo que mecanografió el original y al Sr. Luis Merino que realizó las figuras.

REFERENCIAS

- [1] "Progress Seen in Central Receiver, Distributed Solar Thermal", Solar Energy Intelligence Report, Vol. 11 N° 13, p. 104 (1985).
- [2] R.A.Haglund, "Dish Stirling System Integration and Test Progress Report". Proceedings of Parabolic Dish Solar Thermal Power. Annual Program Review. Atlanta, Georgia U.S.A. (1981).
- [3] H.M.Leibowitz, "400-kWe High-Efficiency Steam Turbine for Industrial Cogeneration". Proceedings of Parabolic Dish Solar Thermal Power. Annual Program Review. Atlanta, Georgia. U.S.A. (1981).
- [4] J.M. Heinbockel and A.S. Roberts, Jr., "A comparison of GaAs and Si Hibrid Solar Power Systems". Solar Energy 19,291 (1977).
- [5] D.E.Arvizu, "Development of the Sandia 200X Experimental Silicon Module". Seventeenth IEEE Photovoltaic Specialists Conference. Orlando, Florida, p. 805 (1984).
- [6] R.W.Bliss, "Notes on Performance Design of Parabolic Solar Furnaces". Solar Energy 1, 22 (1957).
- [7] O.Kamada, "Theoretical Concentration and Attainable Temperature in Solar Furnaces". Solar Energy 9,39 (1965).
- [8] D.I.Tepliakov, "Características energéticas de los helio-equipos especulares en condiciones de explotación". Conversores Semiconductores de Energía Solar. Ed Nauka Moscú, p. 160 (1968).
- [9] R.E.De La Rue et al, "Flux Distribution Near the Focal Plane". Solar Energy 1, 94 (1957).
- [10] F.Biggs and C.N.Vittitoe, "Mathematical Modeling of Solar Concentrators". Proc. Joint 1976. Conf. Am. Sec. ISES and Solar Energy Soc. Can. Inc.. Winnipeg, Canadá, Vol 2, p. 220 (1977).

- [11] N.Hukuo and H.Mii, "Design Problems of a Solar Furnace". Solar Energy 4,1,108 (1957).
- [12] J.C.Durán and R.O.Nicolás, "Generalization of Two-Dimensional Optical Analysis of Cylindrical Concentrators". Solar Energy 25, 21 (1980).
- [13] J.C.Durán and R.O.Nicolás, "Development and applications of a Two-Dimensional Optical Analysis of Non-Perfect Cylindrical Concentrators". Solar Energy 34, 257 (1985).
- [14] Biblioteca de Rutinas Científicas HARWELL: (HARWELL SUBROUTINE LIBRARY): Rutinas de Propósitos Generales cuyo Catálogo ha sido Compilado por M.J.Hopper, Computer Science and Systems Division, Atomic Energy Research Establishment, Harwell, Oxfordshire, England (1980).
- [15] Biblioteca de Rutinas Científicas SSPFORT: (SCIENTIFIC SUBROUTINE PACKAGE FROTRAN): Rutinas de Propósitos Generales cuya Documentación se halla en IBM Programmers's Manual-Program Number 360A-CM-03X GH20-0205-4.
- [16] R.O.Nicolás and J.C.Durán, "Theoretical Maximum Concentration Factors for Solar Concentrators". J.Opt. Soc. Am. A 1, 1110 (1984).

