

NO SE PRESTA

REPUBLICA ARGENTINA

PUBLICACIONES

DE LA

COMISION NACIONAL DE LA ENERGIA ATOMICA

Serie de Publicaciones Internas

Nº 7

EL REACTOR CILINDRICO FINITO RODEADO DE REFLECTOR

Carlos G. Bollini

BUENOS AIRES

1956

EL REACTOR CILINDRICO FINITO RODEADO DE REFLECTOR

Carlos G. Bollini

1.- Introducción.

El cálculo del reflector para un reactor puede ser esquematizado de la siguiente manera:

En la zona interior, y debido a la existencia de fuentes de neutrones que, en funcionamiento, compensan con creces a los sumideros producidos por las absorciones, el flujo de neutrones satisface a la ecuación (1):

$$\nabla^2 \Phi + B^2 \Phi = 0 \quad (1)$$

Donde B^2 es una cantidad esencialmente positiva. En cambio, en la zona del reflector, donde no existen fuentes de neutrones, se tiene (1)

$$\nabla^2 \Phi - K^2 \Phi = 0 \quad (2)$$

(De nuevo, K^2 es esencialmente positiva).

La distinta naturaleza de las ecuaciones (1) y (2) hace que la resolución completa de ambas en un caso práctico sea extremadamente difícil, salvo casos de excepción (reactor esférico, reactor cilíndrico infinito).

Cuando se encara el cálculo para un reactor cilíndrico finito, lo usual es encontrar los efectos del reflector lateral (suponiendo que el reactor es axialmente infinito) y superponer luego los efectos de las "tapas" del reactor. (Suponiéndolo ahora de radio infinito). Sobre el cálculo con estos procedimientos puede ser consultado p.ej. J. W. Webster (2).

Nosotros en cambio, aplicaremos a continuación un método anteriormente descrito (3), que permita atacar el problema conjunto. Este método ha sido, aplicado anteriormente a casos de geometría rectangular y su empleo en el caso que nos ocupa puede considerarse como una extensión del método a geometrías cilíndricas. Sin embargo, en lo que sigue a continuación será meta principal la investigación de la uti

lidad del método en lo que a cálculo de valores propios se refiere. Esto es, a la obtención de los valores B^2 de la (1) que hacen que existan soluciones del problema que cumplan las necesarias condiciones de contorno.

2) El Reactor Cilíndrico

En la fig. (1) mostramos la forma del reactor y en la fig. (2) el sistema de coordenadas elegido

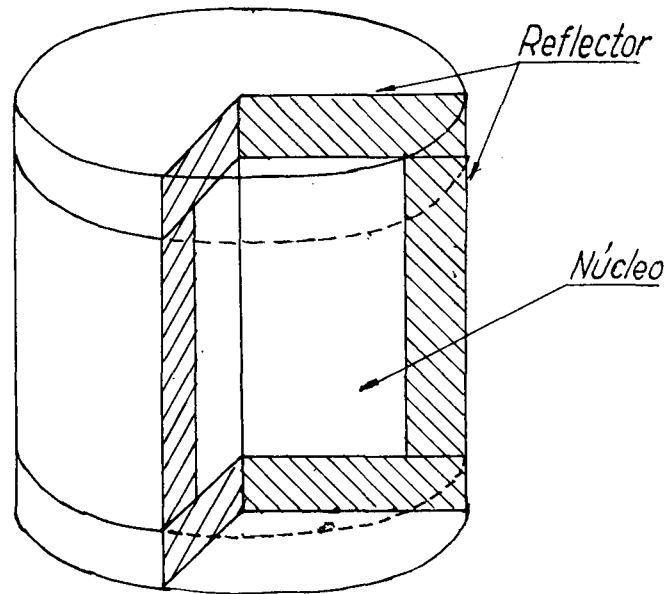


Fig. 1

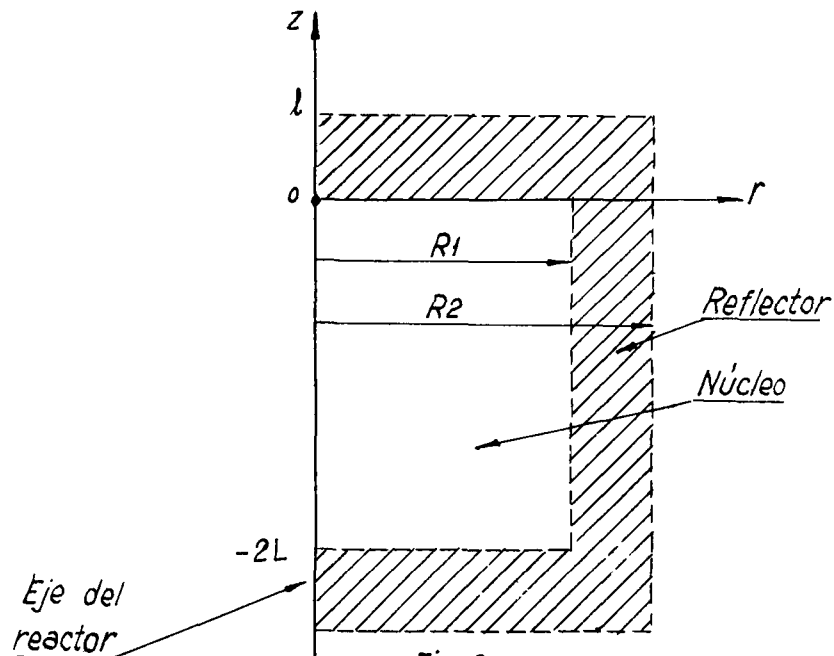


Fig. 2

El eje Z es eje de simetría y por ese motivo el problema es independiente de la coordenada angular.

La expresión del laplaciano en coordenadas cilíndricas (teniendo en cuenta la simetría) es:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3)$$

Se trata entonces de resolver las ecuaciones (1) y (2), con la forma (3) para el laplaciano y teniendo en cuenta las siguientes condiciones de contorno:

- a) Anulación del flujo en el límite exterior
- b) Continuidad del flujo y corriente en las interfases de zonas distintas.

Las zonas que consideraremos están marcadas en la fig. 3

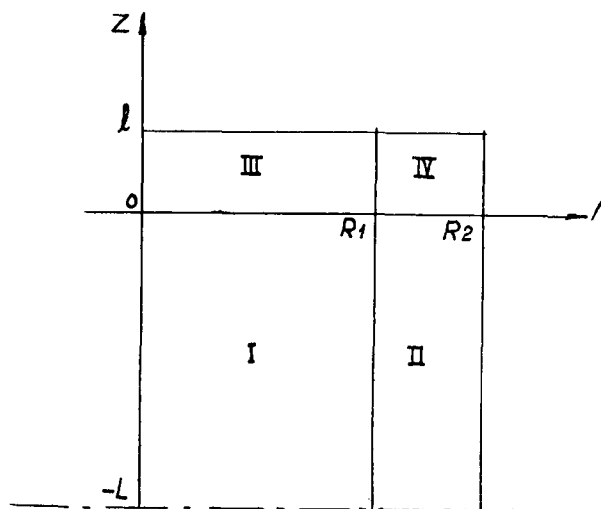


Fig 3

3) Sistemas ortogonales

Para afrontar la resolución del problema planteado, introducimos los siguientes sistemas de funciones ortogonales:

$$U_n(r) \quad \text{ortogonal en} \quad (0, R_1)$$

$V_n(r)$ ortogonal en (R_1, R_2)

$X_n(z)$ " " $(0, -L)$

$Y_n(z)$ " " $(0, \ell)$

Mediante estos sistemas, efectuamos el desarrollo del flujo Φ , solución del problema, en las cuatro zonas de la fig. 3.

$$\Phi_I(r, z) = \sum_{nm} A_{nm} \cdot U_n(r) \cdot X_m(z) \quad (4)$$

$$\Phi_{II}(r, z) = \sum_{nm} B_{nm} \cdot V_n(r) \cdot X_m(z) \quad (5)$$

$$\Phi_{III}(r, z) = \sum_{nm} C_{nm} \cdot U_n(r) \cdot Y_m(z) \quad (6)$$

$$\Phi_{IV}(r, z) = \sum_{nm} D_{nm} \cdot V_n(r) \cdot Y_m(z) \quad (7)$$

Para la resolución del problema es necesario encontrar los coeficientes del desarrollo.

4) Determinación de los coeficientes

Las condiciones de contorno se cumplen imponiendo sobre los desarrollos (4) a (7) las siguientes condiciones:

a) Anulación de la corriente neta en $r=0$ y $z=-L$

$$\left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial r} \right)_{r=0} = 0$$

$$\sum_{nm} A_{nm} \cdot \dot{U}_n(0) \cdot X_m(z) = 0$$

cualquiera sea z , por lo tanto:

$$\sum_n A_{nm} \cdot \dot{U}_n(0) = 0 \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial z} \right)_{z=0} = 0$$

$$\sum_m A_{nm} \cdot \dot{X}_m(-L) = 0 \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z} \right)_{z=0} = 0$$

$$\sum_m B_{nm} \cdot \dot{X}_m(-L) = 0 \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_{III}}{\partial r} \right)_{r=0} = 0$$

$$\sum_n C_{nm} \cdot \dot{U}_n(0) = 0 \quad (11)$$

b) Anulación del flujo en $r=R_z$ y $z=l$

$$\Phi_{II}(R_2, z) = 0 \quad ; \quad \Phi_{III}(r, l) = 0$$

$$\Phi_{IV}(R_2, z) = 0 \quad ; \quad \Phi_V(r, l) = 0$$

$$\sum_n B_{nm} V_n(0) = 0 \quad (12)$$

$$\sum_m C_{nm} Y_m(l) = 0 \quad (13)$$

$$\sum_n D_{nm} V_n(0) = 0 \quad (14)$$

$$\sum_m D_{nm} Y_m(l) = 0 \quad (15)$$

c) Continuidad de flujo y corriente en $r=R_1$ y $z=0$.

$$\text{En (I/II): } \Phi_I(R_1, z) = \Phi_{II}(R_1, z)$$

$$\sum_n A_{nm} \cdot U_n(R_1) = \sum_n B_{nm} \cdot V_n(R_1) \quad (16)$$

$$\left(D_c \frac{\partial \Phi_I}{\partial r} = D_r \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial r} \right)_{r=R_1}$$

D_c es el coeficiente de difusión en el núcleo y D_r
 " " " " " " reflector.

$$D_c \sum_n A_{nm} \cdot \dot{U}_n(R_1) = D_r \sum_n B_{nm} \cdot \dot{V}_n(R_1) \quad (17)$$

en (I/III).

$$\sum_m A_{nm} X_m(o) = \sum_m C_{nm} Y_m(o) \quad (18)$$

$$D_c \sum_m A_{nm} \dot{X}_m(o) = D_r \sum_m C_{nm} \dot{Y}_m(o) \quad (19)$$

en (II/IV)

$$\sum_m B_{nm} X_m(o) = \sum_m D_{nm} Y_m(o) \quad (20)$$

$$\sum_m B_{nm} \dot{X}_m(o) = \sum_m D_{nm} \dot{Y}_m(o) \quad (21)$$

en (III/IV)

$$\sum_n C_{nm} U_n(R_1) = \sum_n D_{nm} V_n(R_1) \quad (22)$$

$$\sum_n C_{nm} \dot{U}_n(R_1) = \sum_n D_{nm} \dot{V}_n(R_1) \quad (23)$$

d) Cumplimiento de las ecuaciones diferenciales.

Para que Φ_I satisfaga la (1), deberá ser:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_I &= \sum_{nm} A_{nm} \left\{ \left(\ddot{U}_n(r) + \frac{1}{r} \dot{U}_n(r) \right) \cdot X_m(z) + U_n(r) \cdot \ddot{X}_m(z) \right\} = \\ &= -B^2 \Phi_I = -B^2 \cdot \sum_{nm} A_{nm} U_n(r) \cdot X_m(z) \end{aligned}$$

$$\sum_{nm} A_{nm} \left\{ \left[\ddot{U}_n(r) + \frac{1}{r} \dot{U}_n(r) + B^2 U_n(r) \right] \cdot X_m(z) + U_n(r) \ddot{X}_m(z) \right\} = 0$$

y efectuando el producto escalar con $U_i(r) \cdot X_j(z)$

$$\begin{aligned} &\sum_n A_{nj} N_j \left\{ \left[\ddot{U}_n + \frac{1}{r} \dot{U}_n + B^2 U_n \right], U_i \right\} + \\ &+ \sum_m A_{im} M_i \left\{ \ddot{X}_m, X_j \right\} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Donde hemos puesto

$$M_i = (U_i, U_i) \quad ; \quad N_j = (X_j, X_j)$$

Del mismo modo deducimos:

$$\begin{aligned} \sum_n B_{nj} J_j \left(\left[\ddot{V}_n + \frac{1}{r} \dot{V}_n - K^2 V_n \right], \dot{V}_i \right) + \\ + \sum_m B_{im} P_i \cdot (\ddot{X}_m, X_j) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sum_n C_{nj} Q_j \cdot \left(\left[\ddot{U}_n + \frac{1}{r} \dot{U}_n - K^2 U_n \right], U_i \right) + \\ + \sum_m C_{im} M_i \cdot (\ddot{Y}_m, Y_j) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \sum_n D_{nj} Q_j \cdot \left(\left[\ddot{V}_n + \frac{1}{r} \dot{V}_n - K^2 V_n \right], \dot{V}_i \right) + \\ + \sum_m D_{im} P_i \cdot (\ddot{Y}_m, Y_j) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Con

$$P_i = (V_i, V_i) \quad y \quad Q_j = (Y_j, Y_j)$$

5) Resolución de las ecuaciones.

Las ecuaciones (8) a (27) permiten la determinación de los coeficientes de los desarrollos, una vez que han sido fijadas las funciones ortogonales.

El problema primitivo se ha transformado entonces en la resolución del sistema lineal y numérico de las (infinitas) ecuaciones (8) a (24).

Para la resolución del sistema es entonces necesario un tratamiento de aproximaciones.

Según lo que ya hemos expuesto (3), las aproximaciones consistirán en conservar solamente las p primeras funciones del sistema U_n y del mismo modo las q primeras del V_n , las r primeras del X_n y las s primeras del Y_n . De esta manera el sistema se hace finito. El número de incógnitas es $p \cdot r$ incógnitas A_{nm} , $p \cdot r$ incógnitas B_{nm} , etc.

$$\text{Total: } p \cdot r + p \cdot s + q \cdot r + q \cdot s = (p+q)(r+s)$$

Tomamos entonces todas las ecuaciones (8) a (23) y le agregamos tantas de (24) a (27) como sean necesarias para completar un número $(p+q)(r+s)$ de ecuaciones compatibles y excluyentes. El sistema así obtenido es, por supuesto, homogeneo, pues todas las ecuaciones lo son. Ello significa que para que exista solución, el determinante del sistema debe ser nulo. Esta condición es la que da los valores posibles de B^2 , es decir los valores propios en la aproximación considerada.

El determinante del sistema tiene $(p+q)(r+s)$ filas y otras tantas columnas; de manera que, para aproximaciones no muy groseras, el orden es elevado.

Sin embargo, la estructura de la matriz del sistema es tal que la mayoría de sus elementos son nulos y eso facilita el cálculo del determinante para aproximaciones mejores.

6) Elección particular de los sistemas ortogonales.

La elección físicamente más apropiada para las $U_n(r)$ consiste, sin duda, en tomar las funciones de Bessel de orden cero (4).

$$U_n(r) = J_0(R_n r) \text{ donde } J_0(B_n R_1) = 0$$

No obstante, es necesario proceder con cautela porque el sistema $J_0(B_n r)$ sólo es apto para representar funciones que se anulan en R_1 y éste no es el caso con Φ . El inconveniente puede ser salvado si ponemos

$$\Phi(r, z) = \Phi(R_1, z) + \Phi'(r, z)$$

$\Phi'(r, z)$ tiene entonces la propiedad $\Phi'(R_1, z) = 0$, y por lo tanto puede ser desarrollado en serie de funciones $J_0(B_n r)$. Se tendrá así

$$\Phi_I(r, z) = \sum_m A_m X_m(z) + \sum_{nm} A_{nm} J_0(B_n r) X_m(z) \quad (4')$$

$$\Phi_{III}(r, z) = \sum_m C_m Y_m(z) + \sum_{nm} C_{nm} J_0(B_n r) Y_m(z) \quad (6')$$

Las ecuaciones (8) a (15) no sufren modificación alguna. Para las de más tenemos.

$$A_m = \sum_n B_{nm} V_n(R_1) \quad (16')$$

$$(17') = (17)$$

$$\begin{aligned}
 \sum_m A_{nm} X_m(o) + \bar{J}_n \cdot \sum_m A_m X_m(o) &= \\
 = \sum_m C_{nm} Y_m(o) + \bar{J}_n \cdot \sum_m C_m Y_m(o) & \quad (18') \\
 \bar{J}_n &= \frac{(1, J_o(B_n r))}{(J_o(B_n r), J_o(B_n r))}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_c \sum_m A_{nm} \dot{X}_m(o) + D_c \bar{J}_n \sum_m A_m \dot{X}_m(o) &= \\
 = D_r \sum_m C_{nm} \dot{Y}_m(o) + D_r \bar{J}_n \sum_m C_m \dot{Y}_m(o) & \quad (19')
 \end{aligned}$$

$$(20') = (20)$$

$$(21') = (21)$$

$$C_m = \sum_n D_{nm} V_n(R_1) \quad (22')$$

$$(23') = (23)$$

$$\begin{aligned}
 A_{ij} (B^2 - B_i^2) N_j + \sum_m A_{im} (\ddot{X}_m, X_j) + \\
 A_j \bar{J}_i B^2 N_j + \sum_m A_m \bar{J}_i (\ddot{X}_m, X_j) = 0 & \quad (24')
 \end{aligned}$$

$$(25') = (25)$$

$$\begin{aligned}
 - C_{ij} (K^2 + B_i^2) Q_j + \sum_m C_{im} (\ddot{Y}_m, Y_j) + \\
 - C_j \bar{J}_i K^2 Q_j + \sum_m C_m \bar{J}_i (\ddot{Y}_m, Y_j) = 0 & \quad (26')
 \end{aligned}$$

$$(27') = (27)$$

Es de notar que en el caso de ausencia de reflector y longitud infinita del reactor, la única ecuación significativa es la (24') transformada en

$$B^2 - B_i^2 = 0$$

que, como era de esperar, de los valores propios $B^2 = B_i^2$.

Las fórmulas (16') y (22') permiten eliminar las constantes A y C_m , pues aparecen directamente despejadas. Por otra parte las fórmulas (24') y (26') aparecen substancialmente simplificadas con relación a las (24) y (26). En ellas ha desaparecido la necesidad del cálculo de los productos escalares.

$$\left(\left(U_n + \frac{1}{r} U_n + B^2 U_n \right), U_i \right)$$

que en general puede ser complicado. Además no aparece la suma sobre el índice n ya que ella se reduce a un sólo término (el $n=i$).

En lo que antecede hemos dejado abierta la posibilidad de elección, en lo que a los sistemas V_n, X_n y Y_n se refiere. Para ellos pueden elegirse p. ej., tal como lo hemos hecho en otras oportunidades (3), polinomios de Legendre.

7) Resumen

Mediante la aplicación del método del desarrollo ortogonal por zonas, hemos estudiado el reactor cilíndrico finito, rodeado enteramente por reflector. El objetivo principal fué la determinación del Buckling (constante B de la (1)) en forma directa. El problema se ha reducido a la resolución de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales. Si se limita el número de incógnitas de la manera explicada en el punto 6), la matriz del sistema es finita y el determinante de la misma debe anularse para que la solución exista. La anulación de dicho determinante proporciona entonces la ecuación de valores propios.

Si bien el orden de la matriz, depende de la aproximación que se desea, la labor se facilita por la estructura de la matriz pues la mayoría de sus elementos son nulos. Además solo se desea conocer, en la práctica, la más pequeña de las raíces, lo que permite la aplicación de métodos especiales. Por último, cuando se tiene un valor aproximado encontrado por otros métodos, el cálculo se simplifica aún más reduciéndose el número de operaciones necesarias.

BIBLIOGRAFIA

- 1) GLASSTONE, S., EDLOUD, M.C.: "The Elements of Nuclear Reactor Theory".
- 2) WEBSTER, J.W.: "Practical Reactor Theory" (A.E.C.D. 4083)
- 3) BOLLINI, C.G. Método del Desarrollo Ortogonal Por Zonas. Publ. Interna N° 3.
- 4) McLACHLAN, N.W.: Bessel Functions.