

02.73.07

C. N. E. A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
NO 1	AÑO 1973

II SIMPOSIO ARGENTINO DE FÍSICA TEÓRICA  
DE PARTÍCULAS Y CAMPOS

BARILOCHE - ENERO 1973

II Simposio Argentino de Física Teórica de  
Partículas y Campos.  
Bariloche - Enero 1973

Realizado en el Centro Atómico Bariloche (C.A.B.) desde el 3 al 27  
de Enero de 1973 con el auspicio de las siguientes Instituciones:

Comisión Nacional de Energía Atómica (CNEA).

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

Organización Europea de Investigación Nuclear (CERN).

Universidad de Buenos Aires (UBA).

Universidad Nacional de Córdoba (UNCo).

Universidad Nacional de Cuyo (UNCu).

Universidad Nacional de La Plata (UNLP).

Universidad Nacional de Rosario (UNR).

Subsidiado parcialmente por el Consejo Nacional de Investigaciones  
Científicas y Técnicas y por la Comisión Nacional de Energía Atómica.

PRESIDENTE DEL SIMPOSIO: Carlos G. Bollini (UNLP)  
COORDINADOR CIENTIFICO: Daniele Amati (CERN)  
COMITE ORGANIZADOR : J. Agudín, A. García y L. Másperi (CAB)

P A R T I C I P A N T E S

J. Agudín (CAB)	M. Ghidella (UBA)
V. Alessandrini (UNLP)	J. Giambiagi (UNLP)
D. Amati (CERN)	H. Girotti (UNLP)
D. Avalos (UNLP)	F. Grinstein (CAB)
G. Beck (CAB)	T. Huber (CAB)
C. Bollini (UNLP)	L. Másperi (CAB)
H. Bondio (UNCo)	J. Mignaco (UNR)
L. Brown <sup>(*)</sup>	J. Navaza (UNLP)
M. Castagnino (UNR)	M. Nussenzweig <sup>(**)</sup>
O. Corbella (UNR)	R. Page (CAB)
H. Fanchiotti (UNLP)	N. Parga (CAB)
A. Fasulo (UNCu)	A. Pignotti (UBA)
J. Gallardo (UNCo)	P. Ripa (UBA)
A. Galli (UBA)	R. Suaya (UBA)
A. García (CAB)	M. Virasoro (UBA)
C. García Canal (UNLP)	H. Vucetich (UNLP)
Z. Garraffo (UBA)	G. Zgrablich (UNCu)

(\*) Universidad de San Pablo (Brasil)

(\*\*) Universidad de Rochester (EE.UU)

INDICE GENERAL

V. ALESSANDRINI:	Modelos Duales . . . . .	pág.	1
C.G. BOLLINI:	Teoría General de Campos de Medida . . . . .	"	43
J.J. GIAMBIAGI:	Teoría Unificada de Interacciones Débiles y Electromagnéticas . . . . .	"	73
A. PIGNOTTI:	Modelos Multiperiféricos . . . . .	"	98
M.A. VIRASORO:	Aproximación Eikonal y Producción Múltiple	"	133
	Seminarios y Coloquios . . . . .	"	134
	Agradecimientos . . . . .	"	135

II Simposio Argentino de Física Teórica de  
Partículas y Campos.

Bariloche - Enero 1973

MODELOS DUALES\*

V. Alessandrini

Universidad Nacional de La Plata

CONTENIDO

I	-	Introducción . . . . .	Pág.	2
II	-	La fórmula de Koba-Nielsen . . . . .	"	6
III	-	El formalismo operatorial. . . . .	"	8
IV	-	La invariancia proyectiva en el formalismo operatorial .	"	12
V	-	Factorización de la fórmula de Koba-Nielsen. . . . .	"	21
VI	-	Identidades de Ward . . . . .	"	26
VII	-	Correcciones radiativas . . . . .	"	30
VIII	-	Formulación de los modelos duales como una teoría de campos . . . . .	"	33

\* Notas realizadas por F. Grinstein y N. Parga

I - INTRODUCCION.-

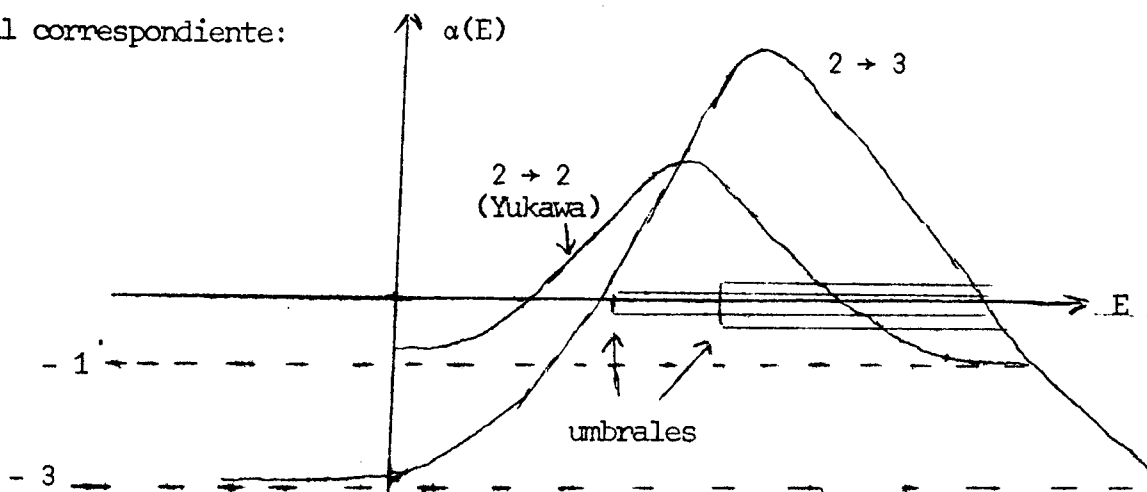
Los postulados básicos que se exigen en una teoría de interacciones fuertes (IF) son:

- 1) Invariancia de Lorentz.
- 2) Unitariedad.
- 3) Simetría de cruce.
- 4) Analiticidad.
- 5) Comportamiento asintótico tipo Regge.

postulados que evidentemente no son independientes. Por ejemplo, simetría de cruce y analiticidad deben estar necesariamente relacionadas.

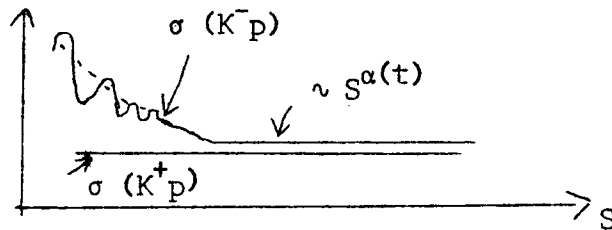
Ninguno de los actuales modelos contiene los cinco postulados. En particular, los modelos duales ponen más énfasis en (3) que en (2), mientras que el multiperiférico si bien es unitario en un canal, no tiene simetría de cruce.

Al construir una teoría de IF la analogía con la Electrodinámica Cuántica y en general con la teoría de Campos perturbativa, no se puede tomar en forma completa. Ello se debe fundamentalmente a que en IF se observan muchas resonancias angostas hasta spines altos, sobre trayectorias de Regge que crecen linealmente, lo cual indica que en este caso los procesos inelásticos resultan ser dominantes a altas energías. En el límite no relativista se observa que las trayectorias de Regge tienden a ser polos fijos asintóticamente, y crecen linealmente en intervalos de energía que aumentan con el número de partículas finales, bajando más allá del umbral correspondiente:



Se puede pensar, por lo tanto, que el número de partículas finales no está, en principio, acotado, para explicar el hecho de que las trayectorias de Regge que se encuentran, hasta ahora crecen linealmente.

Fenomenológicamente<sup>(1)</sup>, las secciones eficaces totales a altas energías, o bien son esencialmente "chatas" como en  $K^+p$  o presentan picos resonantes tendiendo asintóticamente a un valor constante, como en  $K^-p$  :



Las del primer tipo, corresponden a los llamados canales exóticos (no pertenecientes ni a  $\underline{8}$ , ni a  $\underline{10}$  de  $SU(3)$ ). El límite asintótico se debe a efectos de tipo difractivo y se atribuye al polo de Pomeranchuk o Pomeron. Se observa además, que eliminando el fondo asintótico, las resonancias quedan aún "montadas" sobre la parte asintótica ( $s^{\alpha(t)}$ ) extrapolada a baja energía, que además las interpola con muy buena aproximación.

Un modelo que intente explicar estos hechos experimentales es el llamado modelo de interferencia. Este describe las reacciones hadrónicas mediante una amplitud que es suma de dos términos: uno de ellos contiene resonancias de tipo Breit-Wigner, mientras que el otro da el comportamiento asintótico tipo Regge:

$$\begin{array}{c} s \\ \diagdown \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagup \\ t \end{array} \sim \begin{array}{c} t \\ \diagup \\ s \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{Res} \end{array} + \begin{array}{c} t \\ \diagup \\ s \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \\ s^{\alpha(t)} \end{array} \quad (I.1)$$

Es de notar que las FESR (Reglas de suma de energía finita) indican que este tipo de modelo lleva a un doble conteo a bajas energías<sup>(1)</sup>.

Los modelos duales conservan solo el primer término y obtienen el comportamiento asintótico (no se tiene en cuenta la parte difractiva) sumando las infinitas resonancias en un solo canal, suponiendo, además, anchos nulos para las mismas. Esta suma hecha en un canal (el  $s$ , por ejemplo) reproduce las resonancias en el canal cruzado ( $t$ ), dando polos en los valores de  $t$  para los cuales la suma diverge, o sea:

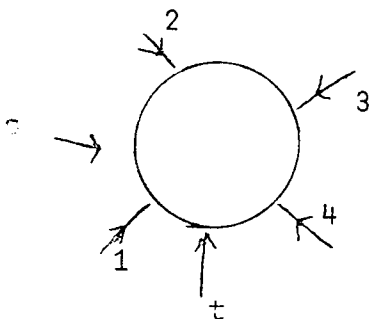
$$\sum \text{Diagrama 1} = \sum \text{Diagrama 2} \quad (I.2)$$

El número de resonancias es infinito y se suponen sobre una trayectoria de Regge. Estas propiedades constituyen la realización de un "bootstrap" ya que los polos del canal  $S$  producen los mismos polos en el canal  $t$ . La unitariedad se pierde al considerar anchos nulos para las resonancias, pero se verá más adelante que los residuos de los polos son factorizables, siendo esta propiedad un primer requisito para aquella.

Consideraremos modelos con dualidad planar, diferenciándolos de aquellos en los que es no-planar, como por ejemplo el modelo de Virasoro en el cual dado un canal exótico todos los demás deben también serlo. Escribiremos la amplitud de dispersión en la forma:

$$A(s, t, u) = A(s, t) + A(s, u) + A(t, u) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} s = (K_1 + K_2)^2 \\ t = (K_2 + K_3)^2 \\ u = (K_1 + K_3)^2 \end{cases}$$

con, por ejemplo,  $A(s, t)$  describiendo el proceso: (I.3)

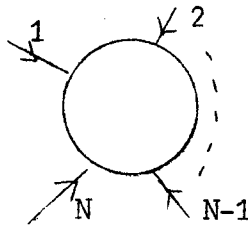


Se suponen todas las partículas escalares e idénticas.

$$A(s, t) = A_4(K_1, K_2, K_3, K_4) \quad (I.4)$$

Obviamente, conocida  $A(s,t)$  como función de los  $K_i$  (cuadri-impulso de la partícula  $i$ -ésima) en un dado orden, los otros términos que hay que sumar para tener simetría de cruce, se obtienen de ella haciendo todas las permutaciones no cíclicas de los  $K_i$ . Es trivial verificar que las permutaciones cíclicas dejan invariante a cada amplitud tal cual ocurre con los diagramas de Feynman planares.

La generalización a  $N$  partículas es inmediata. La amplitud se obtiene en forma análoga a partir de  $A_N(K_1, \dots, K_N)$ , que está asociada a:



y que es invariante ante la transformación:  $\{ K_i \rightarrow K_{i+1}; K_{N+1} = K_1 \}$

sumando sobre todas las permutaciones no cíclicas de las patas externas.

En el caso de cuatro patas se tiene la fórmula original de Veneziano:

$$A(s, t) = \int_0^1 dx \, x^{-\alpha(s)-1} (1-x)^{-\alpha(t)-1} = \beta(-\alpha(s), -\alpha(t)) \quad (I.5)$$

$$\text{con} \quad \alpha(s) = \alpha(0) + \alpha' s \quad (I.6)$$

En particular, es fácil verificar, mediante el cambio de variable  $x \rightarrow 1-x$  que:

$$A(s, t) = A(t, s) \quad (I.7)$$

En general la integral converge para  $\alpha(s) < 0$  y diverge toda vez que  $\alpha(s)$  ( ó  $\alpha(t)$  ) se anula ó es igual a un entero positivo. Estos polos se pueden explicitar desarrollando en serie el factor  $(1-x)^{-\alpha(t)-1}$  ( ó  $x^{-\alpha(s)-1}$  )

e integrando:

$$A(s, t) = \sum_n \frac{C_n(t)}{\alpha(s) - n} = \sum_n \frac{C_n(s)}{\alpha(t) - n} \quad (I.8)$$

Se puede ver también, usando la fórmula de Stirling, que para  $s \rightarrow \infty$  :

$$A(s, t) = \frac{\Gamma(-\alpha(s)) \Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))} \approx (-\alpha(s))^{\alpha(t)} \Gamma(-\alpha(t)) \quad (\text{I.9})$$

y resulta el comportamiento asintótico tipo Regge a partir de la linealidad de las trayectorias  $\alpha(s)$  (para  $\alpha(t) < 0$ ).

Este comportamiento asintótico también se puede deducir teniendo en cuenta que  $A(s, t)$  se puede escribir como una transformada de Laplace:

$$A(s, t) = \int_0^1 dx \exp \left[ (-\alpha(s) - 1) \log x \right] + (1-x)^{-\alpha(t) - 1} \quad (\text{I.10})$$

y estudiando las propiedades asintóticas de la misma.

Finalmente, notamos otra propiedad interesante de la fórmula de Veneziano. El residuo de cada polo en el canal  $s$  (ó  $t$ ) es un polinomio en  $\alpha(t)$   $\left[ \alpha(s) \right]$  y por lo tanto un polinomio en  $\cos \theta_s$  ( $\cos \theta_t$ ). En general no se trata de un polinomio de Legendre. Por lo tanto, un polo en el canal  $s$  ( $t$ ) describe una combinación de resonancia con distintos valores de  $j$  ( $j \leq \alpha(s_n) = n$ , para el polo en  $s = s_n$ , por ejemplo).

Esto da lugar a la existencia de trayectorias "hijas".

## II. LA FORMULA DE KOBA-NIELSEN

Construimos la amplitud de dispersión para  $N$  partículas escalares de masa  $\mu$ , que supondremos son los estados fundamentales de la teoría, o sea,

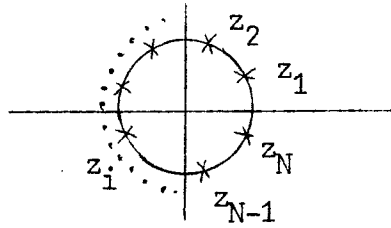
$$\alpha(\mu^2) = 0, \quad \text{siendo} \quad \alpha(s) = \alpha(0) + \alpha' s$$

definiendo una amplitud básica  $A_N(K_1, \dots, K_N)$  que corresponde a un dado orden cíclico de las partes externas. La amplitud de dispersión vendrá dada por:

$$T_N(K_1, \dots, K_N) = \sum_{\substack{\text{\{permutaciones} \\ \text{\{no cíclicas\}}}} A_N(K_1, \dots, K_N) \quad (\text{II.1})$$

Generalizamos el concepto de dualidad planar introducido en la clase pasada y exigimos que  $A_N$  sea invariante ante la transformación

{  $K_i \rightarrow K_{i+1}$ ,  $K_{N+1} = K_1$ . Tomamos  $N$  variables de integración  $z_i$  sobre el círculo unidad:



y entonces, según Koba-Nielsen<sup>(2)</sup>, resulta:

$$A_N(K_1, K_2, \dots, K_N) = \int \frac{1}{dV_{abc}} \prod_{i=1}^N dz_i \left| z_{i+1} - z_i \right|^{\alpha(0) - 1} \prod_{i < j} \left| z_i - z_j \right|^{-2 K_i \cdot K_j} \quad (\text{II.2})$$

realizándose las integraciones conservando el orden de los  $z_i$ . Nos olvidamos por el momento de  $dV_{abc}$ . Notamos que

- 1) La fórmula es invariante ante permutaciones cíclicas  $K_i \rightarrow K_{i+1}$  (Basta con hacer el cambio de variable de integración  $z_i \rightarrow z_{i+1}$ ).
- 2) La fórmula es invariante ante transformaciones proyectivas:

$$z_i \rightarrow z'_i = \frac{a z_i + b}{c z_i + d}; \quad ad - bc = 1 \quad (\text{II.3})$$

que se pueden considerar compuestas por las tres transformaciones más simples:

$$\begin{cases} z' = \lambda z & \rightarrow \text{dilataciones} \\ z' = z + a & \rightarrow \text{traslaciones} \\ z' = 1/z & \rightarrow \text{inversiones} \end{cases}$$

Por ejemplo, ante dilataciones  $z' = \lambda z$ , se tiene para el integrando un factor del tipo:

$$\begin{aligned} & \lambda^N \lambda^{N\alpha(0) - N} \prod_{i < j} \lambda^{-2 K_i \cdot K_j} = \lambda^{N\alpha(0)} \prod_{i < j} \lambda^{-K_i \cdot K_j} = \\ & = \lambda^{N\alpha(0)} \lambda^{-\sum_{i \neq j} K_i \cdot K_j} = \lambda^{N\alpha(0)} \lambda^{+\sum_i K_i^2} = \lambda^{N\alpha(0) - N\alpha(0)} = 1 \end{aligned}$$

Hemos usado el hecho de que  $\alpha(\mu^2) = \alpha(0) + \mu^2 = 0 \rightarrow \alpha(0) = -\mu^2$   
 y que por conservación de energía-impulso se tiene  $\sum_1^4 K_i = 0$ .

La invariancia del integrando de  $A_N$  ante transformaciones proyectivas generales (dependientes de 6 parámetros reales), y las propiedades de ellas, nos permiten elegir un conjunto de variables  $\{z_i\}$  sobre el eje real ordenados de la manera siguiente:

$$\begin{array}{c} \text{---} x \text{---} x \text{---} x \text{---} x \text{---} x \text{---} \rightarrow \\ z_N \quad z_{N-1} \quad \dots \quad z_i \quad \dots \quad z_2 \quad z_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Región de} \\ \text{integración: } \{ \infty \geq z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_{N-1} \geq z_N \geq -\infty \} \end{array} \quad (\text{II.4})$$

y restringirnos a un subgrupo del grupo general que dependerá de sólo tres parámetros reales. Esta invariancia mencionada, implicará además que la integral sobre las  $N$  variables es trivialmente divergente (en ausencia del factor  $dV_{abc}$ ) ya que dados tres puntos  $z_a, z_b, z_c$ , siempre existe alguna transformación proyectiva que transforma tres  $z_i$  arbitrarios en ellos. El problema se resuelve definiendo un  $dV_{abc}$  invariante proyectivo tal que nos reduzca la integración a  $N - 3$  variables. Ello se consigue con

$$dV_{abc} = \frac{dz_a dz_b dz_c}{|z_a - z_b| |z_b - z_c| |z_a - z_c|} \quad (\text{II.5})$$

donde  $z_a, z_b, z_c$  son los puntos que definen el conjunto particular de variables de integración que se usan, siendo ellos los que se dejan fijos.

### III - EL FORMALISMO OPERATORIAL.

Supongamos que nos interesa factorizar  $e^{cb_i b_j}$  donde  $b_i, b_j$  son escalares y  $c$  es un número clásico. Introducimos un par de operadores de creación y destrucción con reglas de conmutación:

$$\left[ a, a^+ \right] = 1$$

y el estado del vacío, tal que  $a|0\rangle = 0$ , entonces usando:

$$e^A e^B = e^B e^A e^{\left[ \begin{array}{c} A, B \\ \hline \end{array} \right]} \quad \text{si} \quad \left[ \begin{array}{c} A, \left[ \begin{array}{c} A, B \\ \hline \end{array} \right] \\ \hline \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} B, \left[ \begin{array}{c} A, B \\ \hline \end{array} \right] \\ \hline \end{array} \right] = 0$$

se tiene:

$$\langle 0 \left| e^{\sqrt{c} b_i a} e^{\sqrt{c} b_j a^+} \right| 0 \rangle = e^{c b_i b_j} \langle 0 \left| e^{\sqrt{c} b_j a^+} e^{\sqrt{c} b_i a} \right| 0 \rangle = e^{c b_i b_j}$$

Luego:

$$e^{c b_i b_j} = \langle 0 \left| e^{\sqrt{c} b_i a} e^{\sqrt{c} b_j a^+} \right| 0 \rangle \quad (\text{III.1})$$

Si  $b_i b_j$  es el producto escalar de dos cuadvectores se generaliza lo hecho introduciendo  $a_\mu, a_\mu^+$  tales que:

$$\left[ \begin{array}{c} a_\mu, a_\nu^+ \\ \hline \end{array} \right] = -g_{\mu\nu}$$

y la misma fórmula es válida.

Queremos ahora factorizar

$$\prod_{i < j} \left| z_i - z_j \right|^{-2 K_i \cdot K_j} = e^{-\sum_{i \neq j} K_i \cdot K_j \log |z_i - z_j|}$$

y esto resulta un poco más complicado. Primero hacemos la descomposición:

$$\prod_{i < j} \left| z_i - z_j \right|^{-2 K_i \cdot K_j} = \prod_{i < j} |z_i|^{-2 K_i \cdot K_j} \prod_{i < j} \left| 1 - \frac{z_j}{z_i} \right|^{-2 K_i \cdot K_j} \quad (\text{III.2})$$

Definimos dos operadores  $Q_\mu^{(+)}(z), Q_\mu^{(-)}(z)$  tales que

$$\left[ \begin{array}{c} Q_\mu^{(-)}(z), Q_\nu^{(-)}(z') \\ \hline \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} Q_\mu^+(z), Q_\nu^+(z') \\ \hline \end{array} \right] = 0 \quad (\text{III.3})$$

$$\left[ \begin{array}{c} Q_\mu^{(-)}(z), Q_\nu^{(+)}(z') \\ \hline \end{array} \right] = g_{\mu\nu} \log \left( 1 - \frac{z'}{z} \right) \quad (\text{III.4})$$

$$Q_\mu^{(-)}(z) \left| 0 \right\rangle = 0 \quad \text{para todo } z.$$

Se sigue entonces, que:

$$e^{i\sqrt{2} K_i \cdot Q^{(-)}(z_i)} e^{i\sqrt{2} K_j \cdot Q^{(+)}(z_j)} = e^{i\sqrt{2} K_j \cdot Q^{(+)}(z_j)} e^{i\sqrt{2} K_i \cdot Q^{(-)}(z_i)} e^{-\left[ \begin{array}{c} 2 K_i \cdot K_j \log \left( 1 - \frac{z_j}{z_i} \right) \\ \hline \end{array} \right]}$$

y entonces hallamos fácilmente que: (notar que según (II.4) para  $i < j$ ,  $\left| \frac{z_j}{z_i} \right| < 1$ )

$$\begin{aligned} & \langle 0 | e^{i\sqrt{2} K_1 \cdot Q^{(+)}(z_1)} e^{i\sqrt{2} K_1 \cdot Q^{(-)}(z_1)} \dots e^{i\sqrt{2} K_N \cdot Q^{(+)}(z_N)} e^{i\sqrt{2} K_N \cdot Q^{(-)}(z_N)} | 0 \rangle = \\ & = \prod_{i < j}^N e^{-2 K_i \cdot K_j \log \left( 1 - \frac{z_j}{z_i} \right)} = \prod_{i < j}^N \left| 1 - \frac{z_j}{z_i} \right|^{-2 K_i \cdot K_j} \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Una representación concreta de  $Q_\mu^{(+)}(z)$  y  $Q_\mu^{(-)}(z)$  puede hallarse introduciendo operadores  $a_{n,\mu}$ ,  $a_{n,\mu}^+$  que satisfacen las reglas de conmutación:

$$\left[ a_{n,\mu}, a_{m,\nu} \right] = \left[ a_{n,\mu}^+, a_{m,\nu}^+ \right] = 0 \quad (\text{III.7})$$

$$\left[ a_{n,\mu}, a_{m,\nu}^+ \right] = -g_{\mu\nu} \delta_{n,m} \quad (\text{III.8})$$

$$a_{n,\mu} | 0 \rangle = 0 \quad (\text{III.9})$$

en término de los cuales:

$$Q_\mu^{(-)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\mu} \frac{z^{-n}}{\sqrt{n}} ; Q_\mu^{+}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\mu}^+ \frac{z^n}{\sqrt{n}} \quad (\text{III.10})$$

Nos falta todavía factorizar el término  $\prod_{i < j} z_i^{-2 K_i \cdot K_j}$ . Introducimos entonces operadores  $q_\mu$ ,  $p_\mu$  con las reglas de conmutación:

$$\left[ q_\mu, p_\nu \right] = i g_{\mu\nu} \quad (\text{III.11})$$

$$Q_\mu^0(z) = q_\mu + i p_\mu \log z \quad (\text{III.12})$$

que pueden pensarse como coordenada e impulso del hadrón como un todo (la cuerda vibrante como un todo) mientras que los  $a$  y  $a^+$  describen la excitación interna del hadrón (excitación u oscilación de la cuerda).

Usando la igualdad:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2} \left[ A, B \right]} \quad \text{si} \quad \left[ A, \left[ A, B \right] \right] = \left[ B, \left[ A, B \right] \right] = 0 \quad (\text{III.13})$$

se verifica:

$$e^{i\sqrt{2} K \cdot Q^0(z)} = e^{i\sqrt{2} K \cdot q - \sqrt{2} K \cdot p \log z} = e^{i\sqrt{2} K \cdot q - \sqrt{2} K \cdot p \log z - K^2 \log z}$$

o sea:

$$e^{i\sqrt{2} K \cdot Q^0(z)} = e^{i\sqrt{2} K \cdot q - i\sqrt{2} K \cdot p \log z - \mu^2} \quad (\text{III.14})$$

ahora calculemos:

$$e^{i\sqrt{2} K_1 \cdot Q^0(z_1)} e^{i\sqrt{2} K_2 \cdot Q^0(z_2)} = e^{i\sqrt{2} (K_1+K_2) \cdot q - \sqrt{2} p \cdot (K_1 \log z_1 + K_2 \log z_2)} * \\ * z_1^{-K_1^2} z_2^{-K_2^2} z_1^{-2 K_1 \cdot K_2}$$

y definiendo el estado vacío como aquél para el cual:

$$P_\mu \left| 0 \right\rangle = 0 \quad a_{n,\mu} \left| 0 \right\rangle = 0$$

se tiene finalmente:

$$\langle 0 \left| \prod_{i=1}^N e^{i\sqrt{2} K_i \cdot Q^0(z_i)} \right| 0 \rangle = \prod_{i=1}^N z_i^{-\mu^2} \prod_{i<j} z_i^{-2 K_i \cdot K_j} \quad (\text{III.15})$$

Conclusión: Definimos una función de vértice  $V(K,z)$  dada por:

$$V(K, z) = e^{i\sqrt{2} K \cdot Q^{(+)}(z)} e^{i\sqrt{2} K \cdot Q^0(z)} e^{i\sqrt{2} K \cdot Q^{(-)}(z)} = e^{i\sqrt{2} K \cdot Q(z)} \quad (\text{III.16})$$

donde:

$$Q_\mu(z) = Q_\mu^{(+)}(z) + Q_\mu^0(z) + Q_\mu^{(-)}(z) \quad (\text{III.17})$$

y resulta:

$$A_N(K_1, \dots, K_N) = \int \frac{1}{dV_{abc}} \prod_{i=1}^N d z_i z_i^{-\alpha_0} |z_{i+1} - z_i|^{\alpha_0 - 1} \langle 0 | V(K_1, z_1) \dots V(K_N, z_N) | 0 \rangle \quad (\text{III.18})$$

IV - LA INVARIANCIA PROYECTIVA EN EL FORMALISMO OPERATORIAL.

En esta sección estudiaremos la relación que existe entre la invariancia proyectiva del integrando de Koba-Nielsen y el formalismo operatorial que hemos desarrollado hasta el presente. Demostraremos que:

a) Los operadores  $Q_{\mu}(z)$  y por lo tanto los vértices  $V(K, z)$  tienen propiedades simples de transformación bajo las transformaciones proyectivas (T.P.).

b) El estado del vacío es invariante ante T.P.

Las T.P.:

$$z' = \frac{a z + b}{c z + d} \quad \text{con} \quad ad - bc = 1$$

se pueden representar por matrices  $2 \times 2$  unimodulares

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\text{IV.1})$$

y forman el grupo  $O(2, 1)$ . Definimos tres generadores infinitesimales que corresponden a: ( $\epsilon \ll 1$ )

i) transformaciones de escala:  $z' = \frac{\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) z}{\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)} \approx (1 + \epsilon) z$

generadas por la matriz:

$$L_0 = \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

ii) traslaciones infinitesimales:  $T(z) = z + \epsilon$

generadas por:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

iii) inversiones:  $T(z) = \frac{z}{-\epsilon z + 1}$

generadas por:

$$L_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

Con estas matrices se verifican de inmediato las reglas de conmutación siguientes:

$$\left[ L_0, L_{\pm 1} \right] = \pm L_{\pm 1} \quad (\text{IV.5})$$

$$\left[ L_1, L_{-1} \right] = -2 L_0 \quad (\text{IV.6})$$

Vamos a demostrar ahora que los operadores  $Q(z)$  (suprimimos por ahora el índice  $\mu$  por ser irrelevante en lo que sigue) se transforman como operadores escalares bajo transformaciones proyectivas. Esto quiere decir que, en el espacio de Fock donde los  $Q(z)$  están definidos, para cada T.P.  $\Omega$  deberíamos encontrar un operador  $U(\Omega)$  tal que:

$$U(\Omega) Q(z) U^{-1}(\Omega) = Q(\Omega z) \quad (\text{IV.7})$$

La demostración se hará construyendo explícitamente los operadores  $U(\Omega)$  o, lo que es lo mismo, obteniendo una representación del álgebra de Lie (IV.5,6) en términos de operadores definidos en el espacio de Fock de los osciladores  $a_{n,\mu}^+$ .

Veamos primero el contenido de (IV.7), en términos de transformaciones infinitesimales, es decir calculemos los conmutadores de  $Q(z)$  con  $L_0, L_{\pm 1}$ .

i) Sea  $\Omega z = (1 + \epsilon) z$ . Luego:

$$\begin{aligned} e^{\epsilon L_0} Q(z) e^{-\epsilon L_0} &= Q(z) + \epsilon \left[ L_0, Q(z) \right] = Q(z + \epsilon z) = \\ &= Q(z) + \epsilon z \frac{d Q(z)}{d z} \end{aligned}$$

Luego

$$\left[ L_0, Q(z) \right] = z \frac{d Q(z)}{d z} \quad (\text{IV.8})$$

ii) Sea  $\Omega z = z + \epsilon$

$$e^{\epsilon L_1} Q(z) e^{-\epsilon L_1} = Q(z) + \epsilon \left[ \bar{L}_1, Q(z) \right] = Q(z + \epsilon) = Q(z) + \epsilon \frac{dQ(z)}{dz}$$

$$\left[ \bar{L}_1, Q(z) \right] = \frac{dQ(z)}{dz} \quad (\text{IV.9})$$

iii) Sea  $\Omega z = \frac{z}{1 - \epsilon z} = z(1 + \epsilon z) = z + \epsilon z^2$

$$e^{\epsilon L_{-1}} Q(z) e^{-\epsilon L_{-1}} = Q(z) + \epsilon \left[ \bar{L}_{-1}, Q(z) \right] = Q(z + \epsilon z^2) = Q(z) + \epsilon z^2 \frac{dQ(z)}{dz}$$

$$\left[ \bar{L}_{-1}, Q(z) \right] = z^2 \frac{dQ(z)}{dz} \quad (\text{IV.10})$$

El problema es ahora demostrar que existen operadores que satisfacen reglas de conmutación dadas por el álgebra de Lie que consideramos, y tales que conmutados con  $Q(z)$  dan (IV.8, 9, 10). Esto garantiza (IV.7). Para demostrar que existen, los construimos explícitamente.

Sabemos que:

$$Q(z) = q + i p \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n^+}{\sqrt{n}} z^n + \frac{a_n}{\sqrt{n}} z^{-n} \right\}$$

Definimos entonces un operador:

$$p(z) = z \frac{dQ(z)}{dz} = i p + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \{ a_n^+ z^n - a_n z^{-n} \} \quad (\text{IV.11})$$

y notemos que es posible resumir (IV.8, 9, 10) en la siguiente:

$$\left[ \bar{L}_n, Q(z) \right] = z^{-n+1} \frac{dQ}{dz} \quad (\text{IV.12})$$

notamos que se tiene:

$$\left[ \bar{P}_\mu(z), Q_\nu(z') \right] = g_{\mu\nu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{z}{z'} \right)^n$$

cosa que se demuestra usando las relaciones de conmutación de los  $a$ ,  $a^+$ ,  $q$  y  $p$ .

De la anterior para  $|z| = |z'|$  ("tiempos iguales") se tendrá:

$$\left[ \bar{P}_\mu(z), Q_\nu(z) \right]_{|z|=|z'|} = 2\pi g_{\mu\nu} \delta(\varphi - \varphi') \quad (\text{IV.13})$$

Entonces, definimos:

$$L_n = \frac{1}{4\pi i} \oint : P^2(z) : \frac{dz}{z^{1+n}} \quad (\text{IV.14})$$

donde la integral se realiza sobre un circuito en el plano complejo  $z$  que contiene al origen. Observamos que al tomar la ordenación normal debemos cambiar  $a_n a_m^+$  por  $a_m^+ a_n = a_n a_m^+ - \delta_{nm}$ , por lo que vemos que:

$$P^2(z) = : P^2(z) : - \sum_{n=1}^{\infty} n = : P(z) : - (\text{cantidad clásica infinita}). \quad (\text{IV.15})$$

Usando (IV.14) e integrando, en particular, sobre un círculo con centro en el origen y radio igual a  $|z|$  se obtiene (IV.12):

$$\begin{aligned} \left[ \bar{L}_n, Q(z) \right] &= \frac{1}{4\pi i} \oint \frac{dz'}{z'^{1+n}} \left[ : P^2(z) :, Q(z) \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz'}{z'^{1+n}} P(z') \left[ \bar{P}(z'), Q(z) \right]_{|z|=|z'|} = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi z^{-n} P(z') \delta(\varphi - \varphi') = z^{-n} P(z) = z^{-n+1} \frac{dQ(z)}{dz} \end{aligned}$$

Consideremos primero el caso  $n = 0$ . En este caso la integral es directamente el residuo de  $\frac{1}{2} : P^2(z) : / z$ . Calculemos  $P^2(z)$ :

$$\begin{aligned} P^2(z) &= -P^2 + 2ip \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left[ \bar{a}_n^+ z^n - a_n z^{-n} \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{n} \sqrt{m} \left[ \bar{a}_n^+ a_m^+ z^{n+m} - a_n^+ a_m z^{n-m} - a_n a_m^+ z^{m-n} + \right. \\ &\left. + a_n a_m^+ z^{-n-m} \right] \quad (\text{IV.16}) \end{aligned}$$

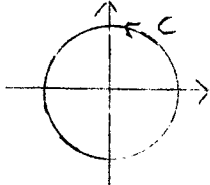
Resulta:

$$L_0 = -\frac{p^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^+ \cdot a_n \quad (\text{IV.17})$$

Para  $N \geq 1$  obtenemos en la integral contribuciones de:

- 1)  $2 i \sqrt{N} p \cdot a_N^+$
- 2)  $n + m = N$  en  $a_m^+ a_n^+$
- 3)  $n - m = N$  en  $a_n^+ a_m$
- 4)  $m - n = N$  en  $a_m^+ a_n$

para lo que hemos usado (IV.14), (IV.16) y la propiedad

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C z^n dz = \delta_{n,-1}$$


Resulta finalmente:

$$2 L_N = 2 i p \cdot a_N^+ \sqrt{N} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n(n+N)} a_{n+N}^+ \cdot a_n + \sum_{\substack{n,m \\ n+m=N}} \sqrt{n m} a_m^+ \cdot a_n$$

$$L_N = i \sqrt{N} p \cdot a_N^+ - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n(n+N)} a_{n+N}^+ \cdot a_n + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{N-1} \sqrt{r(N-r)} a_{N-r}^+ \cdot a_r \quad (\text{IV.18})$$

para  $N \geq 1$ .

Además es fácil ver de (IV.13) y (IV.15) que se tiene:

$$\boxed{L_{-n} = L_n^+} \quad n \geq 0$$

Queremos ahora conocer el álgebra de los  $L_n$  y verificar que en particular para  $n = 0, \pm 1$  satisfacen la correspondiente a los conmutadores (IV.5), (IV.6). Usamos la identidad de Jacobi con los operadores  $L_n, L_m$  y  $Q_\mu(z)$ :

$$\left[ \left[ \underline{L_n}, \underline{L_m} \right], \underline{Q_\mu(z)} \right] + \left[ \left[ \underline{L_m}, \underline{Q_\mu(z)} \right], \underline{L_n} \right] + \left[ \left[ \underline{Q_\mu(z)}, \underline{L_n} \right], \underline{L_m} \right] = 0 \quad (\text{IV.19})$$

$$\left[ L_n, \frac{dQ}{dz} \right] = \frac{d}{dz} \left[ L_n, Q(z) \right] = \frac{d}{dz} \left[ z^{-n+1} \frac{dQ(z)}{dz} \right] = \frac{d}{dz} \left[ z^{-n} p(z) \right] \quad (\text{IV.20})$$

Volvemos a (IV.19):

$$\left[ \left[ L_n, L_m \right], Q_\mu(z) \right] + z^{-m+1} \left[ \frac{dQ_\mu(z)}{dz}, L_n \right] - z^{-n+1} \left[ \frac{dQ_\mu(z)}{dz}, L_m \right] = 0$$

o sea:

$$\left[ \left[ L_n, L_m \right], Q_\mu(z) \right] = z^{-m+1} \left[ L_n, \frac{dQ_\mu(z)}{dz} \right] - z^{-n+1} \left[ L_m, \frac{dQ_\mu(z)}{dz} \right]$$

$$= z^{-m+1} \frac{d}{dz} \left( z^{-n+1} \frac{dQ_\mu(z)}{dz} \right) - z^{-n+1} \frac{d}{dz} \left( z^{-m+1} \frac{dQ_\mu(z)}{dz} \right) =$$

$$= \left\{ (-n+1) z^{-m-n+1} - (-m+1) z^{-n-m+1} \right\} \frac{dQ_\mu(z)}{dz} =$$

$$= (m-n) z^{-m-n+1} \frac{dQ_\mu(z)}{dz} \quad (\text{usando (IV.12)})$$

$$\left[ L_n, L_m \right] = (m-n) L_{n+m} + C_{n,m} \quad (\text{IV.21})$$

En (IV.21)  $C_{n,m}$  es un número clásico en el espacio de Fock que consideramos:

$$\left[ C_{n,m}, Q_\mu(z) \right] = 0 \quad \text{para todo } z.$$

La identidad de Jacobi aplicada a los operadores  $L_n, L_m$  y  $L_p$  fija  $C_{n,m}$  unívocamente (ver apéndice Ref. (3)) de la manera siguiente:

$$C_{n,m} = \delta_{n+m,0} (n^3 - n) \frac{D}{12} \quad \text{con } D = \text{constante arbitraria.} \quad (\text{IV.22})$$

Un cálculo directo demuestra que  $D =$  número de componentes de Lorentz de  $Q_\mu(z)$ . Notamos que para  $m, n = 0, \pm 1$ ,  $C_{n,m} = 0$ , y se verifican (IV.5) y (IV.6).

Conocemos ya las propiedades de transformación del campo  $Q_\mu(z)$  bajo transformaciones proyectivas. Si el vértice fuera simplemente  $e^{i\sqrt{2}K \cdot Q(z)}$  se ve trivialmente que tendría las mismas propiedades de transformación que  $Q_\mu(z)$ , es decir las ecuaciones (IV.7, 8, 9, 10) serán válidas cuando se reemplaza  $Q_\mu(z)$  por  $\exp \left[ i\sqrt{2}K \cdot Q_\mu(z) \right]$ . Sin embargo, el vértice  $V(K, z)$  es la forma normal del operador  $\exp \left( i\sqrt{2}K \cdot Q(z) \right)$ , y veremos entonces que hay un factor infinito de por medio que afecta las propiedades de transformación.

Calculemos la forma normal del operador en cuestión. Escribimos:

$$\begin{aligned} e^{i\sqrt{2}K \cdot Q(z)} &= \lim_{z' \rightarrow z} e^{i\sqrt{2}K \cdot Q^+(z') + i\sqrt{2}K \cdot Q^0(z) + i\sqrt{2}K \cdot Q^-(z)} \\ &= e^{i\sqrt{2}K \cdot Q^0(z)} \lim_{z' \rightarrow z} e^{i\sqrt{2}K \cdot Q^+(z') + i\sqrt{2}K \cdot Q^-(z)} \\ &= e^{i\sqrt{2}K \cdot Q^0(z)} \frac{e^{i\sqrt{2}K \cdot Q^+(z)} e^{i\sqrt{2}K \cdot Q^-(z)}}{e^{i\sqrt{2}K \cdot Q^+(z)} e^{i\sqrt{2}K \cdot Q^-(z)}} \lim_{z' \rightarrow z} \left[ e^{K^\mu K^\nu \left[ Q_\mu^+(z'), Q_\nu^-(z) \right]} \right] \\ &= e^{i\sqrt{2}K \cdot Q^0(z)} \frac{e^{i\sqrt{2}K \cdot Q^+(z)} e^{i\sqrt{2}K \cdot Q^-(z)}}{e^{i\sqrt{2}K \cdot Q^+(z)} e^{i\sqrt{2}K \cdot Q^-(z)}} \lim_{z' \rightarrow z} e^{-K^2 \log \left( 1 - \frac{z'}{z} \right)} \end{aligned}$$

o sea finalmente:

$$\exp \left[ i\sqrt{2}K \cdot Q(z) \right] = ; \exp \left[ i\sqrt{2}K \cdot Q(z) \right] ; \lim_{z' \rightarrow z} \left( 1 - \frac{z'}{z} \right)^{-K^2} \quad (\text{IV.23})$$

y obtenemos un factor infinito! Lo que ocurre es que el operador

$$\exp \left[ i\sqrt{2}K \cdot Q(z) \right]$$

no está definido en nuestro espacio de Hilbert. Notamos que cuando la masa de la partícula emitida es cero ( $K^2 = 0$ ), dicho operador coincide con su forma normal. Esto lo ~~usaremos~~ usaremos a menudo en el futuro, al examinar el espectro de estados de los modelos duales.

El hecho de tomar el orden normal introduce términos adicionales en los conmutadores. Podemos calcular estos últimos de varias maneras. La más directa es "a fuerza bruta", vale decir conmutando directamente  $L_N$  con

$$: \exp \left[ i \sqrt{2} K \cdot Q(z) \right] :$$

El resultado es:

$$\left[ L_N, V(K, z) \right] = z^n \left( z \frac{d}{dz} - n K^2 \right) V(K, z) \quad n = 0, \pm 1, \text{ etc. (IV.24)}$$

Usaremos siempre  $K^2 = \mu^2$ . El término anómalo en el conmutador con los generadores hace que la ley de transformación del vértice  $V(K, z)$  no sea exactamente la ecuación (IV.7), sino<sup>(4)</sup>

$$z^{\mu^2} U(\Omega) V(K, z) U^{-1}(\Omega) = z'^{\mu^2} (c z + d)^2 K^2 V(K, z') \quad \text{(IV.25)}$$

donde

$$z' = \Omega z = \frac{a z + b}{c z + d}$$

Finalmente, veamos la invariancia proyectiva del integrando de  $A_N$ :

$$A_N(K_1, K_2, \dots, K_N) = \int \frac{1}{dV_{abc}} \prod_{i=1}^N d z_i z_i^{-\alpha_0} \left| z_{i+1} - z_i \right|^{\alpha_0 - 1} \cdot \langle 0 | V(K_1, z_1) \dots V(K_N, z_N) | 0 \rangle \quad \text{(III.18)}$$

Si transformamos  $z' = \Omega z$ :

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^N d z'_i z'_i^{-\alpha_0} \left| z'_{i+1} - z'_i \right|^{\alpha_0 - 1} \langle 0 | \prod_{i=1}^N V(K_i, z'_i) | 0 \rangle = \\ & = \prod_{i=1}^N d z_i \left| z_{i+1} - z_i \right|^{\alpha_0 - 1} \langle 0 | \prod_{i=1}^N z_i^{\mu^2} (c z_i + d)^{2K^2} V(K_i, z'_i) | 0 \rangle \end{aligned}$$

(donde se ha usado

$$\prod_{i=1}^N d z'_i \left| z'_{i+1} - z'_i \right|^{\alpha_0 - 1} = \prod_{i=1}^N \frac{d z_i \left| z_{i+1} - z_i \right|^{\alpha_0 - 1}}{(c z_i + d)^{2\alpha_0}} )$$

$$(\alpha_0 = -\mu^2 = -K^2)$$

$$= \prod_{i=1}^N d z_i \left| z_{i+1} - z_i \right|^{\alpha_0 - 1} < 0 \left| \prod_{i=1}^N z_i^{-\alpha_0} U(\Omega) V(K_i, z_i) U^{-1}(\Omega) \right| 0 > =$$

$$= \prod_{i=1}^N d z_i \left| z_{i+1} - z_i \right|^{\alpha_0 - 1} z_i^{-\alpha_0} < 0 \left| \prod_{i=1}^N V(K_i, z_i) \right| 0 >$$

con lo que la invariancia proyectiva del integrando queda demostrada. Hemos usado (IV.25) y la invariancia proyectiva del vacío. Vemos que los términos "anómalos" en la ley de transformación (IV.25) son necesarios para compensar la transformación de la medida de integración.

Analizamos finalmente con más detalle (IV.25) para el caso particular de una transformación de escala (lo necesitaremos en la sección siguiente).

Hacemos:

$$z' = \lambda z$$

lo que corresponde a  $b = c = 0$ ,  $a = \sqrt{\lambda}$ ,  $d = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ .

Luego (IV.25) toma la forma:

$$z^{\mu^2} U(\Omega) V(K, z) U^{-1}(\Omega) = (\lambda z)^{\mu^2} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right)^{2\mu^2} V(K, \lambda z)$$

y vemos que los términos anómalos se cancelan. Además,

$$U(\Omega) = \exp \left[ L_0 \log \lambda \right] = \lambda^{L_0}$$

y se tiene:

$$\lambda^{L_0} V(K, z) \lambda^{-L_0} = V(K, \lambda z) \tag{IV.26}$$

En particular haciendo  $z = 1$  llegamos a:

$$z^{L_0} V(K, 1) z^{-L_0} = V(K, z) \tag{IV.27}$$

V - FACTORIZACION DE LA FORMULA DE KOBA-NIELSEN.

Partimos de la fórmula (III.18), que escribimos nuevamente:

$$A_N(K_1, \dots, K_N) = \int \frac{1}{dV_{abc}} \prod_{i=1}^N dz_i z_i^{-\alpha_0} \left| z_{i+1} - z_i \right|^{\alpha_0 - 1} \times \\ \times \langle 0 \left| V(K_1, z_1) \dots V(K_N, z_N) \right| 0 \rangle \quad (V.1)$$

que describe la amplitud de dispersión de  $N$  partículas con un orden de las patas externas bien definido.

Estudiaremos los polos y los residuos de esta amplitud para obtener información acerca del espectro de niveles del modelo dual. Veremos también como la dualidad está garantizada por la invariancia proyectiva del integrando de (V.1). El objetivo que nos fijamos es generar explícitamente los polos haciendo las integrales sobre las variables  $z_i$ . El primer paso es usar la (IV.27) para escribir:

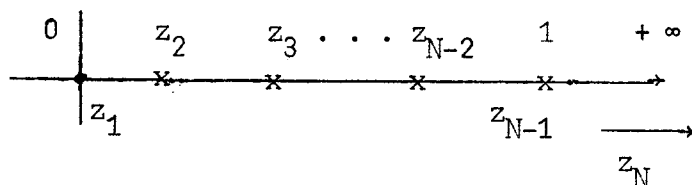
$$V(K, z) = z^{L_0} V(K, 1) z^{-L_0} \quad (V.2)$$

exhibiendo explícitamente la dependencia en  $z$  del operador  $V(K, z)$ . Para estar de acuerdo con el tratamiento usual del problema, hacemos primero una permutación anticíclica (esto no cambia nada) de las patas externas y escribimos:

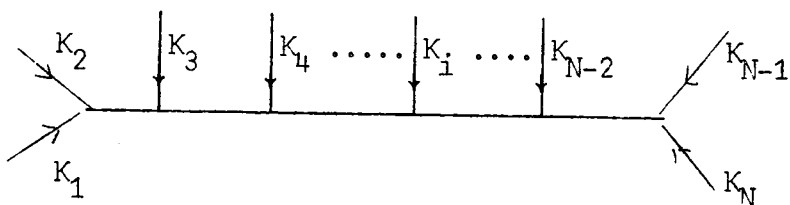
$$A_N(K_1, \dots, K_N) = \int \frac{1}{dV_{abc}} \prod_{i=1}^N dz_i z_i^{-\alpha_0} \left| z_{i+1} - z_i \right|^{\alpha_0 - 1} \langle 0 \left| V(K_N, z_N) \dots V(K_1, z_1) \right| 0 \rangle \quad (V.3)$$

y ahora elegiremos (esto es arbitrario)  $z_1, z_{N-1}, z_N$  como variables fijas.

Integramos sobre el eje real y fijamos  $z_i = 0, z_{N-1} = 1$  y  $z_N = +\infty$  de manera que  $z_2, z_3, \dots, z_{N-2}$  estén ordenadas sobre el eje real en el intervalo  $(0, 1)$ .



Veremos que esto equivale a escribir los siguientes polos simultáneos de  $A_N$  (con figuración multiperiférica):



Los límites  $z_1 \rightarrow 0$  y  $z_N \rightarrow \infty$  deben tomarse con cuidado. Veamos primero  $z_1 \rightarrow 0$ .

$$\lim_{z \rightarrow 0} V(K, z) |0\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} e^{i\sqrt{2} K \cdot Q^+(z)} e^{i\sqrt{2} K \cdot Q^0(z)} e^{i\sqrt{2} K \cdot Q^-(z)} |0\rangle$$

pero  $\exp \left[ i\sqrt{2} K \cdot Q^-(z) \right] |0\rangle \equiv |0\rangle$  para todo  $z$  ya que  $Q^-(z)$  contiene solo operadores de destrucción. Por otro lado el operador  $Q^+(z)$  contiene solo potencias positivas de  $z$ , así que tiende a cero cuando  $z \rightarrow 0$ . Queda solo la exponencial de  $Q^0(z)$ . La escribimos (ver ecuación (III.13))

$$\lim_{z \rightarrow 0} V(K, z) |0\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} e^{i\sqrt{2} K \cdot Q^0(z)} |0\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} z^{\alpha_0} e^{i\sqrt{2} K \cdot q} e^{-\sqrt{2} K \cdot p} |0\rangle$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} z^{\alpha_0} e^{i\sqrt{2} K \cdot q} |0\rangle \text{ ya que } p|0\rangle = |0\rangle$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} V(K, z) |0\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \sqrt{2} K_\mu \right\rangle z^{\alpha_0} \tag{V.4}$$

donde  $\left| \sqrt{2} K_\mu \right\rangle$  es el vacío de todos los modos  $a_n^\mu$  ( $n \neq 0$ ), pero tiene un impulso  $\sqrt{2} K_\mu$  correspondiendo al modo cero. Un argumento similar demuestra que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \langle 0 | V(K, z) = z^{-\alpha_0} \langle -\sqrt{2} K_\mu | \tag{V.5}$$

Vamos a escribir entonces con cuidado el resultado que se obtiene para la amplitud, usando (V.2) para extraer la variable  $z$  del vértice  $V(K, z)$ . El elemento de volumen  $dV_{abc}$  es:

$$dV_{abc} = \frac{dz_1 dz_{N-1} dz_N}{|z_1 - z_{N-1}| |z_N - z_{N-1}| |z_1 - z_N|} = \frac{dz_1 dz_{N-1} dz_N}{|z_N| |1 - z_N|}$$

y la amplitud:

$$\begin{aligned}
 A_N = & \int d z_2 \dots d z_{N-2} \underbrace{|z_N|}_{\alpha_0^{-1}} \underbrace{|z_{N-1}|}_{\alpha_0^{-1}} \underbrace{z_1^{-\alpha_0}}_{\alpha_0^{-1}} z_2^{-\alpha_0} \dots z_{N-2}^{-\alpha_0} \underbrace{z_{N-1}^{-\alpha_0}}_{\alpha_0^{-1}} z_N^{-\alpha_0} \times \\
 & \times |z_1 - z_2|^{\alpha_0^{-1}} |z_2 - z_3|^{\alpha_0^{-1}} \dots |z_{N-2} - z_{N-1}|^{\alpha_0^{-1}} |z_{N-1} - z_N|^{\alpha_0^{-1}} |z_N - z_1|^{\alpha_0^{-1}} \times \\
 & \times \underbrace{z_N^{-\alpha_0}}_{\alpha_0^{-1}} < -\sqrt{2} K_{N\mu} \left| \underbrace{z_{N-1}^{L_0}}_{\alpha_0^{-1}} \right. V(K_{N-1}, 1) \left( \frac{z_{N-2}}{z_{N-1}} \right)^{L_0} V(K_{N-2}, 1) \left( \frac{z_{N-2}}{z_{N-3}} \right)^{L_0} \dots \times \\
 & \times \left( \frac{z_3}{z_4} \right)^{L_0} V(K_3, 1) \left( \frac{z_2}{z_3} \right)^{L_0} V(K_2, 1) z_2^{-L_0} \left| \sqrt{2} K_{1\mu} > \frac{\alpha_0}{z_1} \quad (V.6)
 \end{aligned}$$

Notemos la compensación de todos los factores subrayados que contienen  $z_N$ :

$$\begin{aligned}
 \lim_{z_N \rightarrow \infty} & |1 - z_N| |z_N| z_N^{-2\alpha_0} |z_{N-1} - z_N|^{\alpha_0^{-1}} |z_N - z_1|^{\alpha_0^{-1}} = \\
 & = \lim_{z_N \rightarrow \infty} |1 - z_N| |z_N| z_N^{-2\alpha_0} |1 - z_N|^{\alpha_0^{-1}} |z_N|^{\alpha_0^{-1}} \equiv 1
 \end{aligned}$$

Además se tiene:

$$L_0 \left| \sqrt{2} K_{1\mu} > = \left( -\frac{p^2}{2} - \sum_n a_n^+ \cdot a_n \right) \left| \sqrt{2} K_{1\mu} > = -K_1^2 \left| \sqrt{2} K_{1\mu} >$$

De donde:

$$z_2^{-L_0} \left| \sqrt{2} K_{1\mu} > = z_2^{-\alpha_0} \left| \sqrt{2} K_{1\mu} > .$$

Introducimos las variables:

$$x_i = \frac{z_i}{z_{i+1}} \quad i = 2, \dots, N-2 \quad (V.7)$$

y con ellas la integral se reduce a:

$$\begin{aligned}
 A_N(K_1 \dots K_N) = & \int \prod_{i=2}^{N-2} d x_i x_i^{-\alpha_0^{-1}} (1 - x_i)^{\alpha_0^{-1}} < -\sqrt{2} K_{N\mu} \left| V(K_{N-1}, 1) x_{N-2}^{L_0} V(K_{N-2}, 1) \dots \right. \\
 & \left. \dots x_2^{L_0} V(K_2, 1) \left| \sqrt{2} K_{1\mu} > \quad (V.8)
 \end{aligned}$$

Introducimos el operador  $D(p^2)$  (Llamado "propagador") mediante la expresión:

$$D(p^2) = \int_0^1 dx x^{L_0 - \alpha_0 - 1} (1-x)^{\alpha_0 - 1} \quad (V.9)$$

Ahora escribimos:

$$s_i = \left( \sum_{j=1}^i K_j \right)^2$$

que corresponden a la "masa invariante" del  $i$ -ésimo estado intermedio de la configuración multiperiférica ya indicada, y la función de vértice:

$$\tilde{V}(K_i) = V(K_i, 1) = e^{i\sqrt{2} K_i \cdot q} e^{i\sqrt{2} K_i \cdot \sum_n \frac{a_n^+}{\sqrt{n}}} e^{i\sqrt{2} K_i \cdot \sum_n \frac{a_n}{\sqrt{n}}}$$

El término  $e^{i\sqrt{2} K_i \cdot q}$  simplemente inyecta un impulso  $\sqrt{2} K_i$  en cada vértice y transforma un estado con impulso  $\sqrt{2} (K_1 + \dots + K_{i-1})$  en un estado con impulso  $\sqrt{2} (K_1 + K_2 + \dots + K_i)$ . Podemos olvidarnos de dicho factor si mantenemos la conservación del impulso en cada vértice. Además,  $L_0 = -\frac{p^2}{2} - \sum_n a_n^+ \cdot a_n$ , actuando sobre un estado con impulso  $\sqrt{2} (K_1 + \dots + K_i)$  da

$$-s_i - \sum_n a_n^+ \cdot a_n$$

Definimos un nuevo propagador:

$$D(s_i) = \int_0^1 dx (1-x)^{\alpha_0 - 1} x^{H - 1 - \alpha(s_i)} \quad (V.10)$$

donde

$$\alpha(s_i) = s_i + \alpha_0$$

y el vértice

$$V(K_i) = e^{i\sqrt{2} K_i \cdot \sum_n \frac{a_n^+}{\sqrt{n}}} e^{i\sqrt{2} K_i \cdot \sum_n \frac{a_n}{\sqrt{n}}} \quad (V.11)$$

En base a lo dicho, usando (V.10) y (V.11), (V.8) se transforma en:

$$A_N(K_1, \dots, K_N) = \langle -\sqrt{2} K_N | V(K_{N-1}) D(s_{N-2}) V(K_{N-2}) \dots V(K_3) D(s_2) V(K_2) | \sqrt{2} K_1 \rangle \quad (V.12)$$

Hemos puesto:

$$H = - \sum n a_n^+ \cdot a_n \quad (V.13)$$

El signo menos en (V.13) dá lugar a que la energía sea positiva para las componentes espaciales (nuestra métrica es  $\begin{bmatrix} + & - & - & - \end{bmatrix}$ ) y negativa para las temporales, que son las que generan los estados con norma negativa.

La energía total del estado intermedio está dada por  $L_0$ . Al separar  $\frac{p^2}{2}$ , hemos separado la energía del centro de masa (el factor 2 no es relevante). El hamiltoniano dado por (V.13) va a describir la energía de excitación interna de la superpartícula con propagador  $D(s)$ . Notamos que si  $\alpha_0 = 1$ :

$$D(s) = \frac{1}{H - \alpha(s)}$$

y habrán polos (o sea partículas) cada vez que  $\alpha(s)$  coincida con un autovalor de  $H$ . En el caso más general ( $\alpha_0 \neq 1$ ), desarrollamos  $(1-x)^{\alpha_0-1}$  en serie de potencias de  $x$  e integramos obteniéndose para  $D(s)$ :

$$D(s) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{\ell - \alpha_0}{\ell} \frac{1}{H' - \alpha(s)} \quad (V.15)$$

donde:

$$H' = \ell + \sum n a_n^+ \cdot a_n = \ell - H, \quad \ell : \text{entero} \quad (V.16)$$

Introduciendo ahora un sistema completo de estados de Fock  $|\{\lambda\}\rangle$  que cumplen

$$\sum_{\{\lambda\}} |\{\lambda\}\rangle \langle \{\lambda\}| = 1 \quad (V.17)$$

y se vé que ellos factorizan la amplitud y diagonalizan el propagador  $D(s)$ .

Cada uno de los estados de la teoría resulta así caracterizado por un entero  $\ell$  y un conjunto de enteros  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) que representan los números de ocupación de los modos "i". Claramente:

$$H' \left| \{\lambda\}, \ell \right\rangle = \left( M_{\{\lambda\}, \ell}^2 + \alpha_0 \right) \left| \{\lambda\}, \ell \right\rangle \quad (V.18)$$

donde

$$M_{\{\lambda\}}^2, \ell = \ell + \sum_{n=1}^{\infty} n \lambda_n - \alpha_0 \quad (V.19)$$

es el cuadrado de la masa de la partícula asociada al estado considerado. El contenido de spin de cada uno de estos estados puede ser analizado fácilmente. Resulta que contienen una superposición de "spins" que van desde cero hasta  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ . La degeneración de los niveles es muy alta. Crece como el número de particiones de enteros que satisfacen (V.19). Se puede ver que para un  $M$  dado el número de estados  $N_M$  como función de  $M$  es de la forma<sup>(5)</sup> :

$$N_M \sim e^{2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}M} \quad (V.20)$$

para  $M \rightarrow \infty$ .

## VI - IDENTIDADES DE WARD

Los estados que factorizan la amplitud dual  $A_N$  no pueden ser en su totalidad identificados con estados físicos, ya que muchos de ellos son estados "fantasmas": estados con norma negativa, o, en otras palabras, estados que se acoplan con constantes de acoplamiento imaginarias a partículas estables. Estos fantasmas son generados por las componentes temporales de los operadores  $a_{n,\mu}^+$ , proveniente esta dificultad del signo menos en las reglas de conmutación:

$$\left[ a_{n,\mu}, a_{m,\nu}^+ \right] = - \delta_{nm} g_{\mu\nu} \quad (VI.1)$$

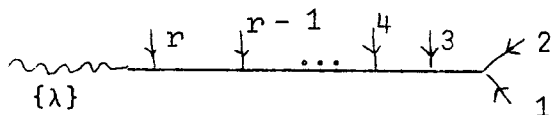
Este tipo de problemas es análogo al que surge en electrodinámica cuántica, donde el fotón tiene una componente fantasma que es eliminada en virtud de condiciones de medida del tipo:

$$K_{\mu} T^{\mu} = 0 \quad (VI.2)$$

siendo  $T_{\mu} \epsilon^{\mu}$  la amplitud para la producción de un fotón con ~~cuadrivector~~ cuadrivector  $K^{\mu}$  y polarización  $\epsilon$ . Debido a (VI.2) la componente temporal  $T_0$  aparece en una proporción definida junto con las componentes "buenas"  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) que siempre cancelan la contribución del fantasma.

Ante la analogía mencionada, se buscan condiciones de medida como mecanismos que permitan eliminar los estados fantasmas que aparecen en la teoría dual.

Consideremos la amplitud que describe el decaimiento del estado  $|\{\lambda\}\rangle$  en  $r$  partículas físicas, que se asocia al diagrama:



y que está dada por:

$$A(\lambda) = \langle \{\lambda\} | V(K_r) D \dots V(K_2) | \sqrt{2} K_1 \rangle = g_{\{\lambda\}}(K_1, K_2, \dots, K_r) \quad (VI.3)$$

Se demuestra fácilmente que el operador  $W_1$  definido por:

$$W_1 = L_0 - L_{-1} - \alpha_0 \quad (VI.4)$$

es tal que actuando sobre los estados de un número arbitrario  $r$  de partículas escalares

$$|K_1, K_2, \dots, K_r\rangle \equiv V(K_r) D \dots D V(K_2) | \sqrt{2} K_1 \rangle \quad (VI.5)$$

dá (4)

$$W_1 |K_1, K_2, \dots, K_r\rangle = 0 \quad (VI.6)$$

Entonces, en particular:

$$\langle \{\lambda\} | W_1 |K_1 \dots K_r\rangle = 0 \quad (VI.7)$$

o sea:

$$\sum_{\{\lambda'\}} c_{\lambda\lambda'} \langle \{\lambda'\} | K_1 \dots K_r \rangle = 0 \quad \dots$$

y se tienen relaciones lineales ("identidades de Ward") entre las amplitudes de desintegración:

$$\sum_{\{\lambda'\}} c_{\lambda\lambda'} g_{\{\lambda'\}}(K_1, K_2, \dots, K_r) = 0 \quad (VI.8)$$

Además es obvio de (VI.7) que todo estado del tipo:

$$|s\rangle = W_1^\dagger | \{\lambda\} \rangle, \quad (VI.9)$$

llamado estado espúreo, no se acopla a los estados (VI.5) de un número arbitrario de partículas.

En particular, usando la definición de  $L_n$ , (IV.18)

$$\begin{aligned} W_1^+ |\sqrt{2} K \rangle &= (L_0 - L_1 - \alpha_0) |\sqrt{2} K \rangle = -L_1 |\sqrt{2} K \rangle = \\ &= -i p \cdot a_1^+ |\sqrt{2} K \rangle \end{aligned}$$

es un estado espúreo. La existencia de este estado garantiza justamente que el fantasma asociado a la componente temporal de

$$a_\mu^+ |\sqrt{2} K \rangle$$

en el primer nivel excitado se desacopla. Es fácil ver que esta identidad de Ward elimina solamente los fantasmas sobre la primer trayectoria hija.

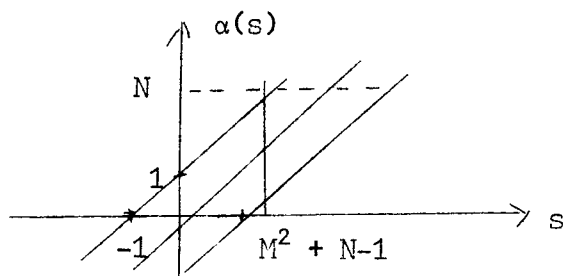
En el caso  $\alpha_0 = 1$  (en él, la simetría de  $A_N$  aumenta como se puede ver fácilmente de la expresión (III.18)), aparece un número infinito de operadores  $W_n$ <sup>(6)</sup>;

$$W_n = L_0 - L_{-n} - 1 \quad (\text{VI.10})$$

que aniquilan todos los estados del tipo (VI.5) y consiguientemente generan infinitas nuevas identidades de Ward que en principio permitirían eliminar todos los fantasmas de la teoría. Sin embargo aparece otro inconveniente: el nivel fundamental tiene  $\mu^2 < 0$  (es un taquión). Este problema se elimina en el modelo de Neveu y Schwarz<sup>(7)</sup>.

El espectro de niveles en este caso ( $\alpha_0 = 1$ ) lo obtenemos de la manera siguiente:  $(\alpha(s) = 1 + s)$

$$\alpha(M^2) = N = 1 + M^2 \rightarrow M^2 = N - 1 \quad N = 0, 1, 2, \dots$$



Como se tiene:

$$L_0 | \alpha \rangle = \left( -\frac{P^2}{2} + H \right) | \alpha \rangle = (-M^2 + N) | \alpha \rangle = | \alpha \rangle$$

debe ser:

$$(L_0 - 1) | \alpha \rangle = 0 \tag{VI.11}$$

para todo estado físico  $| \alpha \rangle$  en la "capa de masa"  $\alpha (M^2) = N$ .

La (VI.11) es algo así como una ecuación de Klein-Gordon con estructura ya que en ausencia del  $H$  se reduce a

$$\left( \frac{P^2}{2} - 1 \right) | \alpha \rangle = 0$$

que sería la ecuación de Klein-Gordon convencional para una partícula de masa al cuadrado igual a  $-1$ . Además se debe tener:

$$L_{-n} | \alpha \rangle = 0 \tag{VI.12}$$

para todo estado físico  $| \alpha \rangle$ , condición subsidiaria análoga a la condición de Lorentz en electrodinámica<sup>(8)</sup>.

Se puede demostrar que el conjunto de estados que satisfacen (VI.11, 12) tienen norma positiva si la dimensión del espacio-tiempo es menor o igual que 26. Notar que basta con exigir  $L_1 | \alpha \rangle = L_2 | \alpha \rangle = 0$  ya que se cumple:

$$\left[ \overline{L}_n, \overline{L}_m \right] = (m - n) \overline{L}_{n+m} + c \frac{D}{12}$$

Los resultados que se obtienen en función de la dimensión del espacio  $D$  son:

- 1) si  $D > 26$ , hay estados fantasmas.
- 2) si  $D = 26$ , hay  $D - 2$  componentes de Lorentz que describen estados físicos.
- 3) si  $D < 26$  hay  $D - 1$  componentes de Lorentz que describen estados físicos.

VII - CORRECCIONES RADIATIVAS.-

El modelo dual de resonancias que se ha discutido hasta ahora, satisface todos los requerimientos básicos que se deben exigir en una teoría de IF detallados en el parágrafo I, excepto la condición de unitariedad. En la base de esta dificultad está el hecho de que las resonancias del modelo son de ancho nulo, o dicho de otra forma las trayectorias de Regge y la amplitud misma son funciones reales de la energía.

La condición de unitariedad se puede implementar en principio pensando al modelo dual como la aproximación de orden más bajo o aproximación de Born de la teoría y agregarle entonces correcciones radiativas<sup>(1)</sup>

$$\begin{array}{c} \text{Sun} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Y} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Box} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Loop} \end{array} + \dots \quad (\text{VII.1})$$

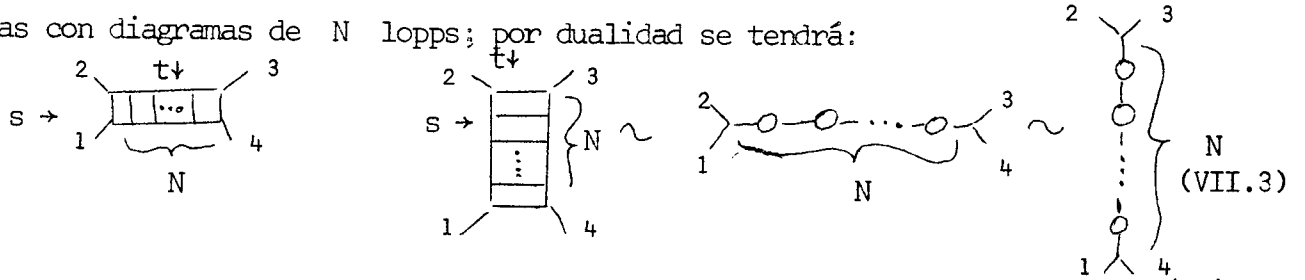
Se sabe que de esta forma la condición de unitariedad se satisface orden por orden. El diagrama con un "loop" o diagrama caja, se obtiene "cosiendo" apropiadamente la amplitud de 2 estados excitados o reggeones y 4 partículas externas que se obtiene por doble factorización de la amplitud de 8 patas<sup>(9)</sup>. En forma análoga las amplitudes de más de un loop pueden construirse "cosiendo" vértices de n-reggeones.

Veremos que este programa de unitarización conduce no solamente a una corrección o renormalización de los parámetros de entrada (trayectorias de Regge) sino que aparecen también otros efectos nuevos que tienden a corregir otra diferencia del modelo - la anulación de la amplitud en el límite difractivo - al dar lugar a contribuciones del tipo del polo de Pomeranchuk.

Notemos que debido a que una suma de infinitas resonancias en el canal s es equivalente a una suma de infinitas resonancias en el canal t, (cf. (I.2) ) el diagrama caja es equivalente también a los siguientes:

$$\begin{array}{c} \text{Box} \end{array} \sim \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{O} \\ \text{Y} \end{array} \sim \begin{array}{c} \text{Y} \text{---} \text{O} \text{---} \text{Y} \end{array} \sim \begin{array}{c} \text{Y} \text{---} \text{O} \end{array} \quad (\text{VII.2})$$

En particular el segundo y tercero de estos diagramas contribuyen a dar anchos a las resonancias, y como es evidente esto ocurre en forma simétrica en los canales  $s$  y  $t$ . Esto puede verse en general al considerar correcciones radiativas con diagramas de  $N$  loops; por dualidad se tendrá:



El comportamiento asintótico de un tal diagrama de  $N$  loops está dado por <sup>(10)</sup> :

$$\begin{array}{c} \text{Diagram} \end{array} \sim_{s \rightarrow \infty} \beta(t) s^{\alpha(t)} \frac{(\Sigma(t) \log s)^N}{N!} + O(\log s)^{N-1} \quad (\text{VII.4})$$

siendo  $\Sigma(t)$  una función con un punto de ramificación en  $4\mu^2$ . Si sumamos en  $N$  obtenemos la siguiente corrección a la amplitud de Veneziano:

$$\beta(t) \sum_{N=0}^{\infty} s^{\alpha(t)} \frac{(\Sigma(t) \log s)^N}{N!} = \beta(t) s^{\alpha(t) + \Sigma(t)} \quad (\text{VII.5})$$

de modo que se obtiene una renormalización de la trayectoria madre, mientras que los términos de menor orden en  $\log s$  renormalizan el residuo.

Este tipo de diagramas caja, planares, renormalizan únicamente los parámetros de entrada. Puede verse que aparecen también otros diagramas que tienen en cuenta otros efectos relacionados con el límite difractivo donde hay amplitud aunque no haya resonancias. En efecto, como ya hemos visto la amplitud de Veneziano para cuatro patas se escribe como una suma de tres términos

$$s \rightarrow \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} + s \rightarrow \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} + u \rightarrow \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} \quad (\text{VII.6})$$

Tanto el primero como el segundo tienen polos en el canal  $s$ , sin embargo son distintos ya que el primero está dado por  $B(-\alpha(s), -\alpha(t))$  mientras que

el segundo por  $B(-\alpha(s), -\alpha(u))$ . La diferencia entre ellos es que en el primero los polos en el canal  $s$  son duales a los polos en el canal  $t$  mientras que en el segundo lo son a los polos en el canal  $u$ , ésto se manifiesta en que las partículas 3 y 4 están intercambiadas. Desde el punto de vista del formalismo operatorial decimos que el propagador distingue su derecha de su izquierda y así mientras que el primer diagrama implica una sucesión de operadores vértice-propagador-vértice del tipo

$$\begin{array}{c}
 2 \\
 \diagup \\
 \text{---} V \text{---} D \text{---} V \text{---} \\
 \diagdown \\
 1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 3 \\
 \diagdown \\
 \text{---} V \text{---} D \text{---} V \text{---} \\
 \diagup \\
 4
 \end{array}
 \tag{VII.7}$$

en el segundo debemos modificar el propagador por medio de un operador de twist  $\Omega$ , obteniendo así un propagador "twistado" que indicamos con una cruz:

$$\begin{array}{c}
 2 \\
 \diagup \\
 \text{---} V \text{---} D\Omega \text{---} V \text{---} \\
 \diagdown \\
 1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 3 \\
 \diagdown \\
 \text{---} V \text{---} D \text{---} V \text{---} \\
 \diagup \\
 4
 \end{array}
 \tag{VII.8}$$

y las partículas 2 y 3 no resuenan.

La existencia de estos diagramas implica la aparición de loops en los que hay líneas internas que representan propagadores con twist. Así, por ejemplo, aparece el loop no planar:

$$\begin{array}{c}
 2 \\
 \diagup \\
 \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \\
 \diagdown \\
 1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 3 \\
 \diagdown \\
 \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \\
 \diagup \\
 4
 \end{array}
 \tag{VII.9}$$

Como en el caso anterior las partículas 1 y 2 no resuenan y lo mismo ocurre con las 3 y 4 de modo que no aparecen resonancias en el canal  $s$ . Este diagrama ya no da un ancho a las resonancias sino que contribuye al fondo no resonante. Asintóticamente resulta <sup>(11)</sup>:

$$\begin{array}{c}
 \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \\
 \diagdown \\
 1
 \end{array}
 \underset{s \rightarrow \infty}{\sim}
 \begin{array}{c}
 \alpha_P(t) \\
 s
 \end{array}
 \tag{VII.10}$$

donde  $\alpha_p(t) \approx -1/6 + 1/2 t$  que es diferente de la trayectoria de entrada; de modo que en el canal  $t$  aparece una nueva singularidad que puede asociarse con el pomerón, aunque su intersección es obviamente incorrecta. Por otra parte esta singularidad es un corte para dimensión espacio-temporal  $D < 26$  y un polo para la dimensión crítica  $D = 26$ , es decir que la teoría sería unitaria solo en esta dimensión pues para  $D < 26$  el corte no tiene nada que ver con unitariedad en el sentido de que no depende de las masas externas ni es prolongación analítica en  $J$  de los cortes dictados por esa condición.

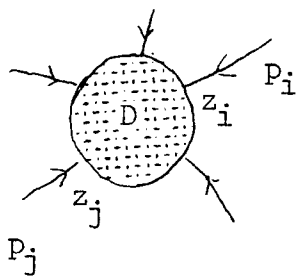
VIII - FORMULACION DE LOS MODELOS DUALES COMO UNA TEORIA DE CAMPOS.

Trataremos ahora de reformular el modelo desde el punto de vista de una teoría de campos. Tomaremos  $\alpha(0) = 1$ , en este caso la fórmula de Koba-Nielsen se escribe

$$A(K_1, \dots, K_N) = \int \frac{1}{dV_{abc}} \prod_{i=1}^N dz_i e^{-\sum_{i \neq j} p_i \cdot p_j \log |z_i - z_j|} \quad \text{(VIII.1)}$$

con 
$$p_i = \sqrt{2} K_i .$$

La exponencial tiene una interpretación clásica y también cuántica. Clásicamente<sup>(12)</sup> se puede interpretar como la energía total disipada por un disco de radio 1 y resistividad constante donde se inyectan corrientes  $p_i$  en los puntos  $z_i$ . El problema a resolver es un problema de Neumann, ya que se dan las



corrientes que entran (es decir el gradiente del potencial  $\phi(x, y)$ ) que son cero en todos los puntos de la frontera salvo en los  $z_i$ . La energía total es entonces:

$$E = \int dx dy (\text{grad } \phi)^2 \quad \text{(VIII.2)}$$

y calculando el potencial se obtiene para E:

$$E = \sum_{i,j} p_i p_j \log |z_i - z_j| \quad (\text{VIII.3})$$

Hay que tener en cuenta que los  $p_i$  son cuadvectores, de modo que E resulta una suma en los índices de Lorentz.

Veamos ahora una interpretación cuántica. Supongamos primero un campo escalar  $\phi(x, y)$  y una fuente clásica  $\rho(x, y)$ . El lagrangeano del campo escalar es:

$$L = \nabla \phi \cdot \nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \quad (\text{VIII.4})$$

y la acción

$$S = \int_D dx dy L \quad (\text{VIII.5})$$

y como las  $z$  son invariantes bajo transformaciones conformes, el dominio D debe ser simplemente conexo y siempre se lo puede llevar a un disco.

Consideremos la integral funcional:

$$\iint_D \mathcal{D} \phi(x, y) e^{-S + \int dx dx \phi(x, y) \rho(x, y)} \quad (\text{VIII.6})$$

para calcularla debemos considerar la función  $\phi(x, y)$  desarrollada en una base  $\{\psi_n\}$

$$\phi = \sum_n c_n \psi_n$$

e integrar en las componentes  $c_n$ . Para ello definimos el producto de Dirichlet de dos funciones  $\phi$  y  $\psi$ :

$$D(\phi, \psi) = \int_D dx dy \text{grad } \phi \cdot \text{grad } \psi \quad (\text{VIII.7})$$

con el que se escribe:

$$S = D(\phi, \phi) \quad (\text{VIII.8})$$

y consideramos una base tal que:

$$D(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm} \quad (\text{VIII.9})$$

Entonces:

$$\iint \mathcal{D} \phi(x, y) e^{-S + \int dx dy \phi(x, y) \rho(x, y)} = \int \prod_{n=1}^{\infty} d c_n e^{-\sum_n c_n^2 + c_n d_n} \quad (\text{VIII.10})$$

con

$$d_n = \int dx dy \psi_n \rho(x, y) . \quad (\text{VIII.11})$$

Las integrales que nos quedan son gaussianas, de modo que dividiendo por el valor de la integral funcional a fuente cero obtenemos:

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} e^{-d_n^2} &= e^{-\sum_n d_n^2} \\ &= e^{-\sum_n \int dx dy \int dx' dy' \rho(x, y) \psi_n(x, y) \psi_n(x', y') \rho(x', y')} \\ &= e^{-\int dx dy \int dx' dy' \rho(x, y) \log |z - z'| \rho(x', y')} \end{aligned} \quad (\text{VIII.12})$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\sum_n \psi_n(x, y) \psi_n(x', y') = \log |z - z'| .$$

Si ahora tomamos:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^N p_i \delta^{(2)}(z - z_i) \quad (\text{VIII.13})$$

entonces reemplazando en (VIII.12) resulta:

$$\iint \mathcal{D} \phi(x, y) e^{-S + \int dx dy \phi(x, y) \rho(x, y)} \approx e^{-\sum_{i,j} p_i p_j \log |z_i - z_j|} \quad (\text{VIII.14})$$

≈ menos de un factor constante que nos da la integral funcional a fuente cero.

En realidad los  $p_i$  son cuadvectores, y esto obliga a introducir cuatro campos  $\phi_\mu(x, y)$ , con lo que se tiene

$$\iint \mathcal{D} \phi_\mu(x, y) e^{-S + \int dx dy \phi_\mu(x, y) \rho_\mu(x, y)} = e^{-\sum_{i,j} p_i \cdot p_j \log |z_i - z_j|} \quad (\text{VIII.15})$$

donde

$$S = \int_D dx dy \left\{ \left( \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_\mu}{\partial y} \right)^2 \right\} . \quad (\text{VIII.16})$$

Si interpretamos a  $S$  como la acción, el Lagrangeano será:

$$L = \left( \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_\mu}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{VIII.17})$$

con el que se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange:

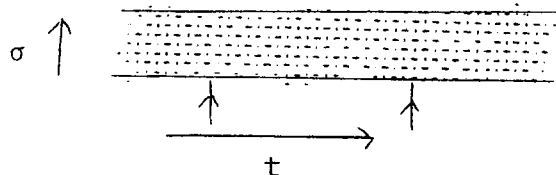
$$\frac{\partial^2 \phi_\mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_\mu}{\partial y^2} = 0 . \quad (\text{VIII.18})$$

Nielsen y Susskind<sup>(13)</sup> trataron de relacionar esto con la cuerda vibrante. Para describir una cuerda en un instante dado se necesita un vector de componentes  $x^i$  función de un parámetro  $\sigma$  que parametriza los puntos de la cuerda y otro parámetro  $t$  que describa la evolución temporal:

$$x_\mu (\sigma, t) \begin{cases} x_0 = ct \\ x_i = x_i (\sigma, t) \end{cases} \quad (\text{VIII.19})$$

La idea es que las excitaciones de la cuerda describen las partículas de la teoría.

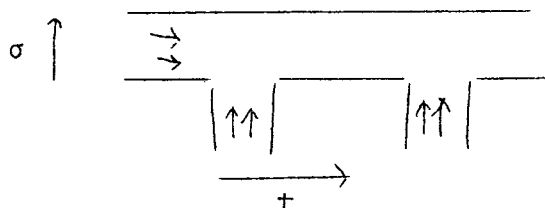
Es más fácil comprender esta interpretación si se tiene en cuenta la invariancia conforme de la teoría; debido a ésta siempre podemos transformar el disco en una franja e interpretarla como una superficie generada por el movimiento de la cuerda en la que para valores dados de  $t$  se inyectan perturbaciones



Además, del mismo modo en que la amplitud de  $N$  partículas escalares se puede relacionar con un disco al que llegan  $N$  corrientes con una fuente dada por  $\rho(x, y) = \sum K_i \delta^{(2)}(z - z_i)$ , podemos interpretar el vértice de  $N$  reggeones como un disco al que llegan distribuciones de corrientes más o menos continuas, de modo que en este caso aparecen multipolos



Nuevamente, debido a la invariancia conforme del modelo, podemos interpretar esto como una franja a la que llegan distribuciones de corriente



Sin embargo la ecuación que satisfacen las componentes es la ecuación de onda:

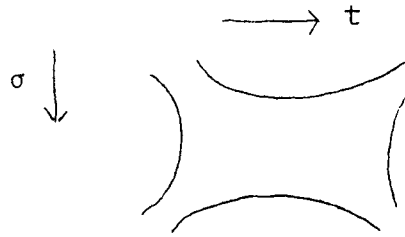
$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = 0$$

en lugar de la ecuación de Laplace a la que se había llegado por medio de integrales funcionales.

Si se quiere identificar los  $x_\mu$  con las componentes  $\phi_\mu$  debemos hacer  $t \rightarrow i t$  con lo que obtenemos una ecuación elíptica.

Son precisamente estas ecuaciones elípticas las que garantizan dualidad, esto hace que los parámetros  $\sigma$  y  $t$  entren en forma más simétrica en las ecuaciones.

Instintivamente se ve que, debido a la invariancia conforme el gráfico anterior siempre se puede escribir:



y este gráfico se puede mirar en cualquiera de los dos sentidos, es decir viendo polos en  $s$  o polos en  $t$ .

Además tampoco está claro el significado de una componente temporal  $x_0$  vibrante.

Para aclarar estos problemas estudiemos una cuerda libre relativista<sup>(14)</sup>, primero clásicamente y luego veremos como cuantizarla.

Esta cuerda estará descrita por un cuadrivector, función de dos parámetros  $\sigma$  y  $\tau$ , y una forma particular de elegir éstos es:

$$x_0 = c \tau \tag{VIII.20}$$

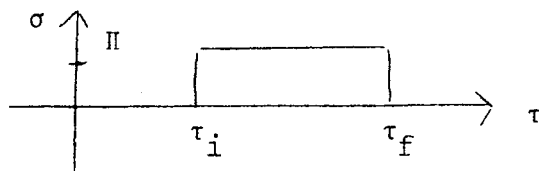
$$x_i = x_i(\sigma, \tau)$$

aunque luego veremos que el sistema es invariante ante una reparametrización.

Si ahora recordamos que la mecánica relativista de una partícula se describe por medio de una acción que está dada por la longitud de la línea de universo de la partícula, esto nos lleva a plantear para una cuerda relativista una acción dada por el área descrita por la cuerda:

$$S = \text{Area} \tag{VIII.21}$$

Además podemos elegir a  $\sigma$  en el intervalo  $[0, \Pi]$  y  $\tau$  en  $[\tau_i, \tau_f]$  y asociar a cada punto del espacio de Minkowski un punto del plano  $(\sigma, \tau)$



Si en base a este isomorfismo calculamos el área resulta:

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\Pi} d\sigma L \quad (\text{VIII.22})$$

siendo  $L$  un lagrangeano no polinómico:

$$L = \left\{ - \left( \frac{\partial x_\mu}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial \sigma} \right)^2 \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{VIII.23})$$

Se puede verificar que esta área es independiente del isomorfismo particular elegido, es decir de las coordenadas intrínsecas (VIII.20) de la cuerda que se hayan elegido. Para verificar ésto nos basta con considerar el cambio de parametrización:

$$\sigma' = \sigma'(\sigma, \tau) \quad (\text{VIII.24})$$

$$\tau' = \tau'(\sigma, \tau)$$

bajo el cual:

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = a \frac{\partial x}{\partial \sigma'} + b \frac{\partial x}{\partial \tau'} \quad (\text{VIII.25})$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = c \frac{\partial x}{\partial \sigma'} + d \frac{\partial x}{\partial \tau'}$$

Puesto que  $s$  no cambia por una reparametrización de la superficie, carece de sentido preguntarse por una interpretación de las variables que la parametrizan.

Pasemos ahora a estudiar la métrica de la superficie; se puede demostrar que el elemento de arco está dado por:

$$ds^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \sigma} \right)^2 d\sigma^2 + 2 \left( \frac{\partial x}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) d\sigma d\tau + \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right)^2 d\tau^2 \quad (\text{VIII.26})$$

puesto que existe arbitrariedad en los parámetros  $\sigma$  y  $\tau$  podemos aprovechar ésto para diagonalizar la forma cuadrática, es decir que elegimos la parametrización de modo tal que se cumpla:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} = 0 \\ \left( \frac{\partial x}{\partial \sigma} \right)^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right)^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(VIII.27a)} \\ \text{(VIII.27b)} \end{array}$$

Con esto el lagrangeano se escribe:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial x_\mu}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial x_\mu}{\partial \sigma} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial x_\mu}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial x_\mu}{\partial \sigma} + \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau} \right\}. \end{aligned} \quad \text{(VIII.28)}$$

De modo que por medio de la parametrización elegida se logró que las componentes  $x_\mu$  satisfagan las ecuaciones de Laplace en vez de ecuaciones de ondas; entonces podemos escribir:

$$x_\mu = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \cos n\sigma e^{-i n \tau} \quad \text{(VIII.29)}$$

y las restricciones (VIII.27) implican:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} L_n \cos n\sigma e^{-i n \tau} = 0 \quad \text{(VIII.30)}$$

o sea

$$L_n = 0 \quad n = -\infty, \dots, +\infty \quad \text{(VIII.31)}$$

Siendo

$$L_n = i \sqrt{|n|} p \cdot a_n - \frac{1}{2} \sum_{j \neq 0} \sqrt{|j|} (j+n) : a_{j+n}^+ \cdot a_j : \quad \text{(VIII.32)}$$

o sea los mismos que aparecen en el modelo dual estudiado si los  $a_n$  se interpretan como operadores de creación y destrucción con  $a_{-n} = a_n^+$ .

Vemos entonces que los  $x_\mu$  están dados como solución de la ecuación de Laplace, pero que además deben ser tales que cumplan con  $L_n = 0$ .

Nos queda aún una invariancia residual; en efecto las (VIII.27) son invariantes ante transformaciones conformes de modo que aún podemos efectuar reparametrizaciones conformes. Esto es análogo a lo que ocurre en electrodinámica; en este caso tenemos invariancia ante  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$  y siempre se puede elegir  $\partial_\mu A^\mu = 0$  pero aún nos queda una invariancia residual ya que  $\Lambda$  se puede elegir de modo que cumpla  $\square \Lambda = 0$ .

Cuando se cuantifica la electrodinámica la condición  $\partial^\mu A_\mu = 0$  no puede ser cierta en forma operatorial ya que se contradicen las reglas de conmutación; en realidad solo puede exigirse para la parte de destrucción actuando sobre los estados físicos:

$$\partial^\mu A_\mu^{(-)} | \chi \rangle = 0 \quad .$$

En forma análoga al cuantizarse la cuerda estableciendo reglas de conmutación sobre los  $a_n$  la condición  $L_n = 0$  resulta ~~inconsistente~~ con tales reglas. Lo que debe ser cero es:

$$L_n | \chi \rangle = 0 \quad \text{(VIII.33)}$$

siendo  $| \chi \rangle$  un estado físico. Además tal condición hay que imponerla sólo para  $n$  positivo.

REFERENCIAS

- 1 - D. Amati: Clases en la Escuela Latinoamericana de Física, La Plata, 1971, CERN-TH-1231.
- 2 - Z. Koba y H.B. Nielsen: Nuclear Phys. B10, 633 (1969).
- 3 - P. Di Vecchia y S. Fubini: Recent Progress in Dual Models, CERN-TH-1542.
- 4 - V. Alessandrini y D. Amati: Dual Models: Their Group Theoretic Structure, CERN-TH-1425.
- 5 - S. Fubini y G. Veneziano: Nuovo Cimento 64A, 811 (1969).  
K. Bardakci y S. Mandelstam: Phys. Rev. 184, 1640 (1969).
- 6 - M.A. Virasoro: Phys. Rev. 1D, 2933 (1970).
- 7 - A. Neveu y J. Schwarz: Nuclear Phys. B31, 86 (1971).
- 8 - E. Del Giudice y P. Di Vecchia: Nuovo Cimento 70A, 579 (1970).
- 9 - V. Alessandrini, D. Amati, M. Le Bellac y D. Olive: Physics Reports Vol. 1C, Sec. 6 (1971).
- 10 - V. Alessandrini y D. Amati: no publicado.
- 11 - K. Kikkawa: Phys. Rev. 187, 2269 (1969).  
C. Lovelace: Phys. Letters 32B, 703 (1970)
- 12 - D.B. Fairlie y H.B. Nielsen: Nuclear Phys. B20, 637 (1970).
- 13 - L. Susskind: Phys. Rev. 1D, 1182 (1969).
- 14 - P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi y C.B. Thorn: Quantum Dynamics of a Massless Relativistic String, CERN - TH - 1578.

II Simposio Argentino de Física Teórica de  
Partículas y Campos.  
Bariloche - Enero 1973

TEORIA GENERAL DE CAMPOS DE MEDIDA.

C.G. Bollini

Universidad Nacional de La Plata

CONTENIDO:

I	- Introducción . . . . .	pág.	44
II	- Invariancia de fase . . . . .	"	45
III	- Invariancia isotópica . . . . .	"	48
IV	- Tensor de las intensidades de campo . . . . .	"	50
V	- Generalización a grupos continuos de Lie . . . . .	"	52
VI	- Campos de medida . . . . .	"	55
VII	- Transformaciones de los campos de medida . . . . .	"	58
VIII	- Tensor de las intensidades de campo de medida . . . . .	"	59
IX	- Lagrangeano libre de los campos de medida. . . . .	"	63
X	- Casos particulares . . . . .	"	66
XI	- El campo gravitatorio. . . . .	"	69

I - INTRODUCCION.

En el procedimiento canónico, cuando se estudian las ecuaciones de movimiento de los campos, se advierte la importancia de las simetrías o invariencias que presenta la función de Lagrange. En efecto, dado un lagrangiano  $L(\psi, \partial_\mu \psi)$ , función de un conjunto de campos  $\psi$  y de sus derivadas  $\partial_\mu \psi$ , las ecuaciones euléricas son<sup>(1)</sup>:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi} = 0 \quad (I.1)$$

Si se provoca una variación en el lagrangeano, mediante una variación infinitésima  $\delta\psi$  de los campos, será:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi} \delta \partial_\mu \psi$$

y, a consecuencia de (I.1) (con  $\delta \partial_\mu \psi = \partial_\mu \delta \psi$ ) se tiene:

$$\delta L = \left( \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi} \right) \delta \psi + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi} \partial_\mu \delta \psi$$

es decir:

$$\delta L = \partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi} \delta \psi \right) \quad (I.2)$$

Se advierte así que cuando  $L$  es invariante ante la transformación considerada ( $\delta L = 0$ ), la (I.2) da la ley de conservación (Teorema de Noether<sup>(1)</sup>):

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi} \delta \psi \right) = 0 \quad (I.3)$$

Así, por ejemplo, la invariancia de  $L$  ante traslaciones (cuando  $L$  no depende explícitamente de las coordenadas), lleva a la conservación del impulso y la energía, mientras que la invariancia ante rotaciones implica la conservación del impulso angular. En el primer caso tenemos un grupo continuo cuyos elementos están caracterizados por cuatro parámetros  $\delta x^\alpha$  (los desplazamientos) y en el segundo caso, el grupo de las rotaciones tiene tres parámetros (tres ángulos). Se com-

prende entonces que en el caso general, estamos en presencia de un grupo continuo de simetrías de  $L$ , que depende de  $n$  parámetros  $\alpha^k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Sin embargo, para ejemplificar los procedimientos, comenzaremos por el caso más simple, en el que las transformaciones sólo dependen de un parámetro.

## II. - INVARIANCIA DE FASE.-

Tomemos el lagrangeano correspondiente a un campo escalar complejo:

$$L(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi. \quad (\text{II.1})$$

Esta función resulta invariante ante la transformación de fase  $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$  que en su forma infinitésima es  $\phi \rightarrow (1 + i\alpha) \phi$ , es decir:

$$\delta \phi = i\alpha \phi; \quad \delta \phi^* = -i\alpha \phi^*. \quad (\text{II.2})$$

Este grupo de transformaciones depende de un sólo parámetro; la fase  $\alpha$ . La fórmula (I.3) aplicada al presente caso, nos da la conservación de la corriente

$$j_\mu = i(\partial_\mu \phi^* \phi - \phi^* \partial_\mu \phi). \quad (\text{II.3})$$

El significado de la invariancia de fase puede quizás verse más claramente si introducimos campos reales mediante el cambio de variables:

$$\sqrt{2} \cdot \phi_1 = \phi + \phi^*; \quad i\sqrt{2} \phi_2 = \phi - \phi^*.$$

El lagrangeano (II.1) toma ahora la forma

$$L = L_1 + L_2 \quad (\text{II.4})$$

con

$$L_a = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial_\mu \phi_a - \frac{1}{2} m^2 \phi_a^2 \quad (a = 1, 2). \quad (\text{II.5})$$

$L_a$  es el lagrangeano de un campo escalar real y  $L$  es la suma de dos de estos lagrangeanos con masas iguales. Por otra parte, la invariancia de (II.1) ante (II.2) se traduce ahora en la invariancia de (II.4) ante:

$$\begin{aligned}\phi_1 \rightarrow \phi_1' &= \frac{e^{i\alpha} \phi + e^{-i\alpha} \phi^*}{\sqrt{2}} = \cos \alpha \phi_1 - \sin \alpha \phi_2 \\ \phi_2 \rightarrow \phi_2' &= \frac{e^{i\alpha} \phi - e^{-i\alpha} \phi^*}{\sqrt{2}} = \cos \alpha \phi_2 + \sin \alpha \phi_1.\end{aligned}\tag{II.6}$$

La (II.6) indica que el grupo de transformaciones de fase es, para el lagrangeano (II.4), el grupo de las rotaciones en el plano en que  $\phi_1$  y  $\phi_2$  individualizan a dos ejes ortogonales. La invariancia correspondiente implica que para  $L$ , los campos  $\phi_a$  no son distinguibles por atributo físico alguno (solo el nombre los distingue) y daría lo mismo llamar  $\phi_1$  y  $\phi_2$  a cualquier par de combinaciones ortogonales de los campos originales.

Tal como lo señalaron Yang y Mills<sup>(2)</sup>, podemos razonar del siguiente modo: el concepto de campos e interacciones locales está asociado con una propagación hacia puntos vecinos y no con influencia alguna "a distancia". Esto está contenido en el hecho de que en el lagrangeano sólo existen términos con productos de campos y sus derivadas, en el mismo punto. Sin embargo, al estudiar la invariancia de fase, vemos que la transformación correspondiente (II.2) ó (II.6) es la misma en todos los puntos. Esto parece contrario al concepto de localidad y es plausible tratar de investigar la posibilidad de considerar la invariancia ante rotaciones independientes en puntos diferentes. En otras palabras, merece estudio la consideración de posibles invariancias ante transformaciones mediante factores  $e^{i\alpha(x)}$ , donde la fase es función arbitraria de posición,  $\alpha \equiv \alpha(x)$ . (Esto constituye el pasaje de transformaciones de medida de primera especie a las de segunda especie). Ni bien se considera la posibilidad de invariancia señalada, se advierte que en (II.1) el término  $\phi^* \phi$  no presenta dificultad alguna (es invariante), pero no ocurre lo mismo con el término que contiene derivadas. Esto es así porque ante

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha(x)} \phi\tag{II.7}$$

la derivada correspondiente se transforma en

$$\partial_{\mu} \phi \rightarrow \partial_{\mu} (e^{i \alpha(x)} \phi) = e^{i \alpha(x)} (\partial_{\mu} + i \alpha_{\mu}) \phi$$

(con  $\alpha_{\mu} = \partial_{\mu} \alpha$ ). De modo que:

$$\partial_{\mu} \phi^* \partial_{\mu} \phi \rightarrow (\partial_{\mu} - i \alpha_{\mu}) \phi^* (\partial_{\mu} + i \alpha_{\mu}) \phi$$

La aparición del gradiente de  $\alpha$  impide la invariancia del lagrangeano ante la transformación de fase de segunda especie. No obstante, si recordamos que precisamente el campo electromagnético  $A_{\mu}$  está definido a menos de un gradiente, comprenderemos que la invariancia puede ser restituida si se agrega el campo electromagnético como "compensador" en el término de la derivada

$$\partial_{\mu} \phi \rightarrow (\partial_{\mu} - i e A_{\mu}) \phi \equiv D_{\mu} \phi \quad (II.8)$$

Exigimos ahora que ante la transformación (II.7) cambie simultáneamente  $A_{\mu}$  a

$$A'_{\mu} = A_{\mu} + \frac{1}{e} \alpha_{\mu} \quad (II.9)$$

De este modo, el lagrangeano

$$L = (\partial_{\mu} + i e A_{\mu}) \phi^* (\partial_{\mu} - i e A_{\mu}) \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (II.10)$$

resulta invariante ante la transformación de medida definida por la (II.7) y la (II.9), donde  $\alpha(x)$  es función arbitraria de posición. Obsérvese que al introducir el campo  $A_{\mu}$ , la corriente (II.3) (modificada según (II.8)), queda individualizada como corriente electromagnética, ya que ella se acopla al campo  $A_{\mu}$  actuando como fuente del mismo. En efecto:

$$j_{\mu}^{(el\ mg)} = \frac{\partial L}{\partial A_{\mu}} = \frac{\partial L}{\partial D_{\mu} \phi} (-i e) \phi = -i e \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu} \phi} \phi \quad (+ c\ c)$$

Por otra parte y además de campo "compensador", el campo electromagnético sirve como "comparador" ya que permite separar (físicamente) las partículas de diferentes cargas. Es decir que  $A_{\mu}$  da sentido a un atributo físico (la carga eléctrica) que diferencia a las partículas implicadas.

### III - INVARIANCIA ISOTOPICA.

Algo similar al caso de invariancia de fase ocurre cuando unimos el spinor del protón ( $\psi_P$ ) y el del neutrón ( $\psi_N$ ), en un espinor doble (de ocho componentes)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_P \\ \psi_N \end{pmatrix}$$

El lagrangeano libre de los nucleones (tomando  $m_P = m_N = m$ ) adquiere la forma:

$$L = \bar{\psi} (-i \gamma \cdot \partial + m) \psi \quad (III.1)$$

y resulta invariante ante transformaciones "isotópicas":

$$\psi \rightarrow e^{i \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}} \psi \quad ; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}} \quad (III.2)$$

( $\tau^k$ ;  $k = 1, 2, 3$ ; son las matrices de Pauli) .

Para transformaciones infinitésimas:

$$\delta \psi = i \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} \psi \quad \delta \bar{\psi} = -i \bar{\psi} \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} \quad (III.3)$$

Por lo tanto, la magnitud conservada dada por la (I.3) para  $\alpha$  arbitrario, es la corriente "isotópica"

$$j_{\mu}^k = \bar{\psi} \gamma_{\mu} \tau^k \psi \quad (III.4)$$

Las transformaciones (III.2) forman un grupo (el  $S U_2$ ) de tres parámetros ( $\alpha^k$ ) que es isomorfo al grupo de rotaciones en un espacio de tres dimensiones. La invariancia de (III.1) ante el grupo de transformaciones (III.2) indica que nada hay en el lagrangiano que permita la distinción física de los estados llamados protón y neutrón. Podemos ahora, como ya lo hicimos para la invariancia de fase, considerar que ella debe valer localmente, es decir aunque se efectúen diferentes transformaciones isotópicas en diferentes puntos. En otras palabras, pediremos la invariancia del lagrangeano ante la transformación (III.2) con  $\alpha^k = \alpha^k(x)$  función arbitraria de posición. En la forma infinitésima (III.3), la transformación

implica para la derivada

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi &\rightarrow \partial_\mu \psi + i \vec{\alpha}_\mu \cdot \vec{\tau} \psi + i \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} \partial_\mu \psi \approx \\ &\approx e^{i \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}} \left( \partial_\mu + i \vec{\alpha}_\mu \cdot \vec{\tau} \right) \psi \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

( $\vec{\alpha}$  infinitésimo). Para compensar el término en el gradiente de  $\vec{\alpha}$ , debemos nuevamente introducir un campo "compensador"  $\vec{b}_\mu$  ( $b_\mu^k$ ;  $k = 1, 2, 3$ ) que se agregue a las derivadas, en el lagrangeano, formando la combinación

$$\partial_\mu - i g \vec{b}_\mu \cdot \vec{\tau} . \quad (\text{III.6})$$

Es decir, en lugar de (III.1) tendremos:

$$L = - i \bar{\psi} \gamma^\mu \left( \partial_\mu - i g \vec{b}_\mu \cdot \vec{\tau} \right) \psi + m \bar{\psi} \psi . \quad (\text{III.7})$$

Para mantener la invariancia de (III.7) ante la transformación de medida de segunda especie, los campos  $b_\mu^k$  deben transformarse de un modo algo más complicado que (II.9), debido a que las matrices de Pauli no conmutan entre sí.

De hecho, ante una transformación de medida, y por la supuesta invariancia

$$\begin{aligned} L &= \bar{\psi}' \left[ - i \gamma \cdot \left( \partial - i g \vec{b}' \cdot \vec{\tau} \right) + m \right] \psi' \\ &= \bar{\psi} e^{-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}} \left[ - i \gamma \cdot \left( \partial - i g \vec{b}' \cdot \vec{\tau} \right) + m \right] e^{i \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}} \psi \\ &= \bar{\psi} \left[ - i \gamma \cdot \left( \partial - i g \vec{b} \cdot \vec{\tau} \right) + m \right] \psi . \end{aligned}$$

Esto nos lleva a la identificación

$$\partial_\mu - i g \vec{b}'_\mu \cdot \vec{\tau} = e^{i \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}} \left( \partial_\mu - i g \vec{b}_\mu \cdot \vec{\tau} \right) e^{-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}} \quad (\text{III.8})$$

y para transformaciones infinitésimas (por (III.5) )

$$\begin{aligned} \partial_\mu - i g \vec{b}'_\mu \cdot \vec{\tau} &= \partial_\mu + i \vec{\alpha}_\mu \cdot \vec{\tau} - i g (1 + i \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}) \vec{b}_\mu \cdot \vec{\tau} (1 - i \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}) \\ - i g \vec{b}'_\mu \cdot \vec{\tau} &= i \vec{\alpha}_\mu \cdot \vec{\tau} - i g \vec{b}_\mu \cdot \vec{\tau} + g \left[ \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}, \vec{b}_\mu \cdot \vec{\tau} \right] . \end{aligned}$$

Por las relaciones de conmutación  $\left[ \tau_i, \tau_j \right] = 2 i \epsilon_{ijk} \tau_k$

$$\delta b_\mu^\ell = - \frac{1}{g} \alpha_\mu^\ell - 2 \alpha^i b_\mu^j \epsilon_{ij\ell} \quad (\text{III.9})$$

(siempre para  $\alpha^k$  infinitésimo) .

#### IV - TENSOR DE LAS INTENSIDADES DE CAMPO.

Para complet\*ar la descripción canónica de los campos de medida, es necesario dar también el lagrangeano libre de los mismos, además de la interacción. En el caso de invariancia de fase el problema quedó prácticamente resuelto cuando se identificó al campo compensador con el campo electromagnético  $A_\mu$  . En efecto, el lagrangeano de Maxwell se construye con el tensor de las intensidades del campo electromagnético:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{IV.1})$$

formando el escalar

$$L_O = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{IV.2})$$

que es invariante de medida ya que la transformación (II.9) no afecta a (IV.1).

Para la construcción del lagrangeano libre correspondiente a los campos de Yang y Mills, introducidos por la (III.6), impondremos como condición previa que éste sea también invariante de medida, es decir que no cambie ante la transformación de  $\vec{b}_\mu$  definida por la (III.8)<sup>(3)</sup>.

El lagrangeano buscado deberá ser función del campo y de sus derivadas:

$$L_O = L_O (b_\mu^k, b_{\mu,\nu}^k); ( b_{\mu,\nu}^k \equiv \partial_\nu b_\mu^k ) .$$

Ante una variación infinitésima de  $b_\mu^k$ , tendremos:

$$\delta L_O = \frac{\partial L_O}{\partial b_\mu^j} \delta b_\mu^j + \frac{\partial L_O}{\partial b_{\mu,\nu}^j} \delta b_{\mu,\nu}^j .$$

Pero, por la ecuación (III.9) y por la postulada invariancia:

$$0 = \delta L_O = \frac{\partial L_O}{\partial b_\mu^j} \left[ -\frac{\alpha_\mu^j}{g} - 2 \alpha^i b_\mu^\ell \epsilon_{i\ell j} \right] + \frac{\partial L_O}{\partial b_{\mu,\nu}^j} \left[ -\frac{1}{g} \alpha_\mu^j - 2 \alpha^i b_\mu^\ell \epsilon_{i\ell j} \right].$$

Ahora bien, la arbitrariedad de  $\vec{\alpha}(x)$  implica que podemos tomar primeramente  $\vec{\alpha} = \text{cte}$ , lo que entonces da:

$$\frac{\partial L_O}{\partial b_\mu^j} b_\mu^\ell \epsilon_{i\ell j} + \frac{\partial L_O}{\partial b_{\mu,\nu}^j} b_{\mu,\nu}^\ell \epsilon_{i\ell j} = 0. \quad (\text{IV.3})$$

Elegimos luego  $\partial_\mu \alpha^j = \text{cte}$  y entonces

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial L_O}{\partial b_\mu^j} - 2 \frac{\partial L_O}{\partial b_{\nu,\mu}^\ell} b_\nu^k \epsilon_{jkl} = 0. \quad (\text{IV.4})$$

Por último resta la ecuación

$$\frac{\partial L_O}{\partial b_{\mu,\nu}^j} \alpha_{\mu\nu}^j = 0 \quad (\text{con } \alpha_{\mu\nu}^j = \partial_\mu \partial_\nu \alpha^j). \quad (\text{IV.5})$$

Puesto que la (IV.5) debe cumplirse para  $\vec{\alpha}$  arbitrario ( $\alpha_{\mu\nu}^j$  simétrico), deberá cumplirse:

$$\frac{\partial L_O}{\partial b_{\mu,\nu}^j} + \frac{\partial L_O}{\partial b_{\nu,\mu}^j} = 0$$

y esto significa que  $L_O$  contiene a  $b_{\mu,\nu}^k$  sólo formando el rotor del campo  $b_{\mu,\nu}^k - b_{\nu,\mu}^k$ . Para satisfacer ahora la ecuación (IV.4) veremos que el campo de medida sólo puede estar contenido en  $L_O$  en la combinación:

$$f_{\mu\nu}^j = b_{\mu,\nu}^j - b_{\nu,\mu}^j + 2g \epsilon_{jkl} b_\mu^k b_\nu^\ell. \quad (\text{IV.6})$$

En efecto, consideremos las nuevas variables de campo  $\vec{b}_\mu^j = b_\mu^j$  y  $f_{\mu\nu}^j$ , en lugar de  $b_\mu^j$  y  $b_{\mu,\nu}^j$ . Es fácil ver que

$$\frac{\partial L_O}{\partial b_\mu^j} = \frac{\partial L_O}{\partial \vec{b}_\mu^j} + 4g \frac{\partial L_O}{\partial f_{\mu\alpha}^\ell} b_\alpha^k \epsilon_{jkl}$$

y

$$\frac{\partial L_O}{\partial b_{\nu,\mu}^j} = 2 \frac{\partial L_O}{\partial f_{\nu\mu}^j}.$$

Reemplazando en (IV.4) se obtiene de inmediato:

$$\frac{\partial L_0}{\partial \vec{B}_\mu^j} = 0 \quad (\text{IV.7})$$

lo que implica que el lagrangeano libre es sólo función del tensor de las intensidades de campo definido por (IV.6).

El lagrangeano libre más simple que contiene a  $f_{\mu\nu}^j$  es el análogo a (IV.2):

$$L_0 = - \frac{1}{4} \vec{f}_{\mu\nu} \cdot \vec{f}^{\mu\nu} \quad (\text{IV.8})$$

y puede comprobarse fácilmente que satisface (IV.3).

#### V - GENERALIZACION A GRUPOS CONTINUOS DE LIE<sup>(4)</sup>.

Vamos ahora a plantear de manera general los puntos que fueron examinados en los ejemplos específicos de invariancia de fase y de invariancia isotópica.

Tenemos en primer lugar un lagrangeano  $L(\psi, \partial_\mu \psi)$  y por otra parte un grupo continuo de transformaciones cuyos elementos dependen de un conjunto de  $n$  parámetros reales  $\alpha^k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Las distintas componentes del campo "básico" que denotaremos con  $\psi^A$  constituyen una base para la representación matricial del grupo. Esto significa que las transformaciones del grupo pueden ser expresadas en la forma:

$$\psi^A \rightarrow U_B^A(\alpha) \psi^B \quad (\text{V.1})$$

donde las matrices  $U_B^A$  satisfacen todas las relaciones del grupo. En particular al elemento identidad le corresponde la matriz  $\delta_B^A$ . Los parámetros siempre pueden ser elegidos de modo que  $\alpha^k = 0$  corresponda a la unidad.

$U_B^A(0) = \delta_B^A$  y entonces, para  $\alpha$  infinitésimo:

$$U_B^A(\alpha) \approx \delta_B^A + \alpha^k G_{kB}^A \quad .$$

Esta relación la simbolizaremos simplemente con

$$U(\alpha) \approx 1 + \alpha^k G_k \quad (\text{V.2})$$

donde

$$G_k = \left. \frac{\partial U}{\partial \alpha^k} \right|_{\alpha=0} \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, n;$$

son denominados generadores infinitesimales del grupo. Ellos tienen la propiedad de formar un álgebra<sup>(5)</sup> (de Lie)

$$\left[ G_k, G_l \right] = C_{kl}^m G_m \quad (V.3)$$

y  $C_{kl}^m = -C_{lk}^m$  son las constantes de estructura del grupo.

Para las transformaciones de fase ( $e^{i\alpha}$ ) el grupo implicado es el  $U_1$  y el generador correspondiente es la unidad imaginaria. Naturalmente, en este caso podemos decir que las constantes de estructura son nulas y todos los elementos del grupo conmutan entre sí (se trata de un grupo abeliano).

En las transformaciones isotópicas  $e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}}$ , los generadores son las tres matrices de Pauli ( $G_k = i \tau_k$ ), que satisfacen

$$\left[ \tau_i, \tau_j \right] = 2 i \epsilon_{ijk} \tau_k \quad (V.4)$$

Las constantes de estructura son  $C_{ij}^k = \pm 2 \epsilon_{ijk}$ .

Obsérvese que puede cambiarse el conjunto de parámetros mediante el cambio de "variables"

$$\alpha^k = a_{\ell}^k \alpha^{\ell'}$$

y entonces

$$\alpha^k G_k = \alpha^{\ell'} a_{\ell}^k G_k = \alpha^{\ell'} G_{\ell}'$$

donde  $G_{\ell}' = a_{\ell}^k G_k$  son los "nuevos" generadores infinitesimales. Las nuevas constantes de estructura pueden ser determinadas fácilmente:

$$\left[ G_k', G_l' \right] = C_{kl}^m G_m'$$

$$\left[ a_k^p G_p, a_l^q G_q \right] = C_{kl}^m a_m^r G_r$$

es decir

$$a_k^p a_l^q C_{pq}^r G_r = C_{kl}^m a_m^r G_r$$

y por lo tanto

$$C_{kl}^m a_m^r = a_k^p a_l^q C_{pq}^r \quad . \quad (V.5)$$

Esto significa que las constantes de estructura se comportan como tensores ante el cambio de parámetros.

En particular, para las transformaciones isotópicas podemos usar los parámetros definidos por  $\vec{\alpha} = -\frac{1}{2} \vec{\alpha}'$  y entonces tendremos

$$C_{kl}^m = -\frac{1}{2} C_{kl}^m = \epsilon_{klm} \quad .$$

Volviendo ahora a la transformación (V.1), vemos que en su forma infinitésima (cf. (V.2) ) es

$$\delta \psi = \alpha^k G_k \psi \quad (V.6)$$

y si las transformaciones del grupo dejan invariante al lagrangeano, entonces la ley de conservación (I.3) junto con (V.6) implica

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi} \alpha^k G_k \psi \right) = 0$$

y como los parámetros pueden ser cualesquiera, resulta:

$$\partial_\mu j_k^\mu = 0 \quad ; \quad j_k^\mu = \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi} G_k \psi \quad . \quad (V.7)$$

Si las transformaciones del grupo dejan invariante al lagrangeano que contiene a  $\psi$  es porque existe una forma invariante que simbolizaremos con

$$\bar{\psi} \cdot \psi = \bar{\psi}_A \psi^A \quad . \quad (V.8)$$

Por esa invariancia tendremos, ante la transformación infinitésima (V.2):

$$\begin{aligned} \delta (\bar{\psi} \cdot \psi) &= 0 \\ \delta \bar{\psi} \cdot \psi + \bar{\psi} \cdot \delta \psi &= 0 \\ \delta \bar{\psi} \cdot \psi &= -\bar{\psi} \alpha^k G_k \cdot \psi \\ \delta \bar{\psi} &= -\bar{\psi} \alpha^k G_k \end{aligned} \quad (V.9)$$

que es la transformación correspondiente al elemento "adjunto"  $\bar{\psi}$ . Por supuesto, si (V.8) es invariante es porque cuando  $\psi \rightarrow U \psi$ ;  $\bar{\psi}$  sufre la transformación inversa  $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} U^{-1}$ , y para los cambios infinitésimos, según (V.2),

$$\begin{aligned} U &\approx 1 + \alpha^k G_k \\ U^{-1} &\approx 1 - \alpha^k G_k \end{aligned} \tag{V.10}$$

de modo que naturalmente

$$\delta \bar{\psi} = \bar{\psi} U^{-1} - \bar{\psi} = - \bar{\psi} \alpha^k G_k .$$

## VI - CAMPOS DE MEDIDA.

Pondremos ahora en práctica, de manera general, la idea básica de Yang y Mills<sup>(2)</sup>. Ella consiste esencialmente en postular que la invariancia considerada puede ser localmente conseguida en la vecindad de un punto, independientemente de lo que suceda fuera de ese entorno. Esta posición está por completo de acuerdo con las ideas de campos e interacciones locales y lleva de manera natural a postular la invariancia ante transformaciones  $U(\alpha)$  donde ahora los parámetros del grupo son funciones arbitrarias de posición.

Se comprende fácilmente que la parte del lagrangeano básico que contiene productos de funciones seguirá siendo invariante ante  $U(\alpha(x))$  si ya lo era ante  $U(\alpha)$ . Ello es así porque una vez fijado el punto  $x$ ,  $U(\alpha(x))$  es un valor particular  $U(\alpha)$ , de modo que nada puede alterar la invariancia correspondiente. Algo diferente ocurre sin embargo, para los términos que contienen derivadas de los campos. Estas derivadas se construyen a partir de diferencias entre valores del campo en puntos vecinos

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} (\psi(x + \Delta x) - \psi(x)) .$$

Tal diferencia sin embargo, carece totalmente de sentido físico cuando se admiten transformaciones diferentes en puntos diferentes. En otras palabras, aunque se haya fijado el valor del campo  $\psi$  en un punto  $x$ , el valor en un punto vecino

no está determinado ya que

$$\psi'(x + dx) = U \psi(x + dx)$$

es físicamente equivalente a  $\psi(x + dx)$  por la invariancia supuesta. Este es el motivo de la indeterminación física de la derivada. No debe entonces compararse  $\psi(x + dx)$  con  $\psi(x)$  porque esta comparación no tiene sentido, debido a las diferentes transformaciones en  $x$  y en  $x + dx$ . Antes de efectuar una comparación (para el cálculo de la derivada) debe decidirse previamente cual es el ente  $\overset{\circ}{\psi}$  que en  $x + dx$ , puede considerarse como el "paralelo" a  $\psi$  en  $x$ . Es decir que antes de determinar el cambio al pasar de  $x$  a  $x + dx$ , debe seleccionarse aquel  $\overset{\circ}{\psi}$  en  $x + dx$  que se considera "sin cambio" con respecto al  $\psi$  en  $x$ . Está claro que si elegimos a  $\overset{\circ}{\psi}(x_0 + dx) = \psi(x_0)$  entonces esta igualdad dejará de ser cierta cuando se efectúa una transformación de medida  $U(\alpha(x))$  que no altere a  $\psi(x_0)$ . En efecto, para que esto último ocurra basta con elegir  $\alpha(x_0) = 0$ , y entonces

$$\alpha(x_0 + dx) = \alpha(x_0) + \alpha_\mu(x_0) dx^\mu = \alpha_\mu(x_0) dx^\mu \quad (\text{infinitésimo}) .$$

Por lo tanto  $U(\alpha(x_0)) = U(0) = 1$ ; y

$$U \left[ \alpha(x_0 + dx) \right] = U(\alpha_\mu dx^\mu) = 1 + \alpha_\mu^k dx^\mu G_k .$$

Es decir que las transformaciones de medida que no alteran  $\psi(x_0)$  cambian a  $\psi(x_0 + dx)$  en la cantidad

$$\delta \psi = \alpha_\mu^k dx^\mu G_k \psi .$$

Para compensar esa variación y para poder definir un "paralelismo" independiente de las transformaciones de medida, debemos introducir un campo "compensador"  $b_\mu^k$ , llamado campo de medida. Diremos entonces que  $\overset{\circ}{\psi}(x + dx)$  es "paralelo" a  $\psi(x)$  cuando la diferencia

$$\overset{\circ}{\delta} \psi = \overset{\circ}{\psi}(x + dx) - \psi(x) \tag{VI.1}$$

es tal que

$$\overset{\circ}{\delta} \psi = g b_\mu^k dx^\mu G_k \psi \tag{VI.2}$$

o, introduciendo la definición de "conexión de medida"

$$B_{\mu} = g b_{\mu}^k G_k \quad (\text{VI.3})$$

$$\overset{\circ}{\delta} \psi = B_{\mu} d x^{\mu} \psi \quad (\text{VI.4})$$

De este modo, el paralelo a  $\psi$  en  $x$ , será

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\psi}(x + d x) &= \psi(x) + \overset{\circ}{\delta} \psi \\ &= \psi(x) + B_{\mu} d x^{\mu} \psi \\ &= (1 + B_{\mu} d x^{\mu}) \psi \\ \overset{\circ}{\psi}(x + d x) &\approx e^{B_{\mu} d x^{\mu}} \psi \quad (\text{VI.5})^{(6)} \end{aligned}$$

Estamos ahora en condiciones de calcular la "verdadera" derivada del campo  $\psi$ . Para ello debemos partir de la "verdadera" variación de  $\psi$  y ésta se determina comparando a  $\psi(x + d x)$  no con  $\psi(x)$ , sino con el paralelo a  $\psi(x)$  en el punto  $x + d x$ . Calculamos entonces

$$\begin{aligned} \psi(x + d x) - \overset{\circ}{\psi}(x + d x) &= \psi(x + d x) - \left[ \psi(x) + \overset{\circ}{\delta} \psi \right] \\ &= \psi(x + d x) - \psi(x) - B_{\mu} d x^{\mu} \psi \\ &= \partial_{\mu} \psi d x^{\mu} - B_{\mu} d x^{\mu} \psi \\ &= (\partial_{\mu} - B_{\mu}) \psi d x^{\mu} \end{aligned}$$

Por consiguiente, la verdadera derivada de  $\psi$  es

$$D_{\mu} \psi = (\partial_{\mu} - B_{\mu}) \psi \quad (\text{VI.6})$$

que se denomina derivada covariante de medida y puede representarse simplemente por:

$$\psi|_{\mu} = D_{\mu} \psi \quad .$$

El lagrangeano de partida  $L(\psi, \partial_{\mu} \psi)$  deberá ahora reescribirse usando las verdaderas derivadas. De modo que entonces

$$L = L(\psi, D_{\mu} \psi) = L(\psi, (\partial_{\mu} - B_{\mu}) \psi) \quad (\text{VI.7})$$

Esto implica que el campo de medida queda acoplado a la corriente conservada (V.7) (modificado por la aparición de  $D_{\mu} \psi$  en lugar de  $\partial_{\mu} \psi$ ). En efecto, la "fuente"

del campo de medida es:

$$\begin{aligned}
 j_k^\mu (b) &= \frac{\partial L}{\partial b_\mu^k} = \frac{\partial L}{\partial D_\nu \psi} \frac{\partial D_\nu \psi}{\partial b_\mu^k} = \frac{\partial L}{\partial D_\mu \psi} (-g G_k \psi) \\
 &= -g \frac{\partial L}{\partial D_\mu \psi} G_k \psi = -g j_k^\mu \quad . \quad (\text{cf. (V.7)})
 \end{aligned}$$

### VII - TRANSFORMACIONES DE LOS CAMPOS DE MEDIDA.

De acuerdo con (VI.1) y (VI.4), cuando se efectúa una transformación de medida  $\psi' = U \psi$ , tendremos

$$\delta \psi' = \overset{\circ}{\psi}'(x + dx) - \psi'(x) = B_\mu' dx^\mu \overset{\circ}{\psi}' ,$$

es decir:

$$\begin{aligned}
 B_\mu' U \psi dx^\mu &= U(x + dx) \overset{\circ}{\psi}(x + dx) - U(x) \psi(x) \\
 &= (U(x) + \partial_\mu U dx^\mu) \overset{\circ}{\psi}(x + dx) - U(x) \psi(x) \\
 &= U(x) \left[ \overset{\circ}{\psi}(x + dx) - \psi(x) \right] + \partial_\mu U \overset{\circ}{\psi}(x + dx) dx^\mu \\
 &= U(x) \delta \overset{\circ}{\psi} + \partial_\mu U \psi(x) dx^\mu ,
 \end{aligned}$$

(En el último término se sustituyó  $\overset{\circ}{\psi}$  por  $\psi$  ya que la diferencia es de orden superior),

$$B_\mu' U \psi dx^\mu = U B_\mu \psi dx^\mu + \partial_\mu U \psi dx^\mu .$$

Debiendo esta igualdad ser válida para cualquier  $\psi$  y  $dx^\mu$  arbitrario, tendremos:

$$\begin{aligned}
 B_\mu' U &= U B_\mu + \partial_\mu U , \\
 B_\mu' &= U B_\mu U^{-1} + \partial_\mu U \cdot U^{-1} . \quad (\text{VII.1})
 \end{aligned}$$

Esta relación define la transformación de medida de la conexión  $B_\mu$ , e indirectamente la transformación del campo de medida  $b_\mu^k$ . Para transformaciones infinitésimas la (VII.1) nos da:

$$\begin{aligned}
 B_\mu' &= (1 + \alpha^k G_k) B_\mu (1 - \alpha^k G_k) + \alpha_\mu^k G_k \\
 B_\mu' &= B_\mu + \alpha^k G_k B_\mu - B_\mu \alpha^k G_k + \alpha_\mu^k G_k
 \end{aligned}$$

y por (VI.3)

$$g b_{\mu}^{\prime k} G_k = g b_{\mu}^k G_k + \alpha^{\ell} G_{\ell} g b_{\mu}^m G_m - g b_{\mu}^m G_m \alpha^{\ell} G_{\ell} + \alpha_{\mu}^k G_k ,$$

$$b_{\mu}^{\prime k} G_k = b_{\mu}^k G_k + \alpha^{\ell} b_{\mu}^m \left[ G_{\ell} , G_m \right] + \frac{1}{g} \alpha_{\mu}^k G_k .$$

Teniendo en cuenta (V.3), deducimos:

$$b_{\mu}^{\prime k} = b_{\mu}^k + \alpha^{\ell} b_{\mu}^m C_{\ell m}^k + \frac{1}{g} \alpha_{\mu}^k \quad (\text{VII.2})$$

o también:

$$\delta b_{\mu}^k = \alpha^{\ell} b_{\mu}^m C_{\ell m}^k + \frac{1}{g} \alpha_{\mu}^k , \quad (\text{VII.3})$$

que es la transformación infinitésima de los campos de medida.

Puede comprobarse que la derivada covariante se transforma del mismo modo que los vectores  $\psi$ . En efecto:

$$\psi'_{|\mu} = (\partial_{\mu} - B_{\mu}^i) \psi^i$$

$$\psi'_{|\mu} = (\partial_{\mu} - U B_{\mu} U^{-1} - \partial_{\mu} U \cdot U^{-1}) U \psi \quad (\text{por (VII.1)})$$

$$\psi'_{|\mu} = \partial_{\mu} (U \psi) - U B_{\mu} \psi - \partial_{\mu} U \cdot \psi = U \partial_{\mu} \psi - U B_{\mu} \psi$$

$$\psi'_{|\mu} = U \psi_{|\mu} \quad (\text{VII.4})$$

que es la ley de transformación de los vectores  $\psi$ .

### VIII - TENSOR DE LAS INTENSIDADES DE LOS CAMPOS DE MEDIDA.

A pesar del nombre dado al operador de derivación covariante de medida

$$D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} - B$$

no debe pensarse que posee todas las propiedades de la derivación ordinaria.

En particular:

$$D_{\nu} D_{\mu} - D_{\mu} D_{\nu} = (\partial_{\nu} - B_{\nu})(\partial_{\mu} - B_{\mu}) - (\partial_{\mu} - B_{\mu})(\partial_{\nu} - B_{\nu})$$

$$= \partial_{\mu} B_{\nu} - \partial_{\nu} B_{\mu} - B_{\mu} B_{\nu} + B_{\nu} B_{\mu} ,$$

$$\left[ D_{\nu} , D_{\mu} \right] = F_{\mu\nu} \quad (\text{VIII.1})$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} B_{\nu} - \partial_{\nu} B_{\mu} - \left[ B_{\mu} , B_{\nu} \right] , \quad (\text{VIII.2})$$

o también

$$F_{\mu\nu} = (D_\mu B_\nu) - (D_\nu B_\mu) \quad . \quad (\text{VIII.3})$$

Debido a (VII.4), ante una transformación de medida

$$\begin{aligned} D'_\mu \psi' &= U D_\mu \psi \quad , \\ D'_\mu U \psi &= U D_\mu \psi \end{aligned}$$

es decir

$$D'_\mu = U D_\mu U^{-1} \quad . \quad (\text{VIII.4})$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \left[ D'_\nu, D'_\mu \right] = U \left[ D_\nu, D_\mu \right] U^{-1} \quad , \\ F'_{\mu\nu} &= U F_{\mu\nu} U^{-1} \quad . \end{aligned} \quad (\text{VIII.5})$$

En particular, para una transformación infinitésima

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= (1 + \alpha^k G_k) F_{\mu\nu} (1 - \alpha^\ell G_\ell) \\ &= F_{\mu\nu} + \alpha^k \left[ G_k, F_{\mu\nu} \right] \quad , \\ \delta F_{\mu\nu} &= \alpha^k \left[ G_k, F_{\mu\nu} \right] \quad . \end{aligned} \quad (\text{VIII.6})$$

Así como la conexión  $B_\mu$  se expresa en función de los campos de medida  $b_\mu^k$  usando la (VI.3), ésta misma nos permite dar a  $F_{\mu\nu}$  de una manera análoga en función del campo  $b_\mu^k$ . Reemplazando (VI.3) en (VIII.2) tenemos:

$$F_{\mu\nu} = g \left( \partial_\mu b_\nu^k - \partial_\nu b_\mu^k \right) G_k - g^2 b_\mu^\ell b_\nu^m \left[ G_\ell, G_m \right]$$

y por la (V.3):

$$F_{\mu\nu} = g \left[ \partial_\mu b_\nu^k - \partial_\nu b_\mu^k - g C_{\ell m}^k b_\mu^\ell b_\nu^m \right] G_k \quad ,$$

lo que nos permite poner, en analogía con (VI.3):

$$F_{\mu\nu} = g f_{\mu\nu}^k G_k \quad (\text{VIII.7})$$

donde

$$f_{\mu\nu}^k = \partial_\mu b_\nu^k - \partial_\nu b_\mu^k - g C_{\ell m}^k b_\mu^\ell b_\nu^m \quad (\text{VIII.8})$$

define al tensor de las intensidades del campo de medida. Aquí hemos introducido el tensor (VIII.8) de manera algo artificial a través de (VIII.1) y (VIII.7). Sin embargo es posible dar a  $f_{\mu\nu}^k$  (ó  $F_{\mu\nu}$ ) un significado más geométrico.

Si tomamos la ley del transporte paralelo (VI.4) y la aplicamos dos veces, primero para trasladar  $\psi$  a  $x + dx$  y luego para trasladar  $\overset{\circ}{\psi}$  así obtenido a  $x + dx + \delta x$ , tendremos:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\psi} &= (1 + B_{\mu} (x) dx^{\mu}) \psi \\ \overset{\circ\circ}{\psi} &= (1 + B_{\nu} (x + dx) \delta x^{\nu}) \overset{\circ}{\psi} \\ &= (1 + B_{\nu} (x) \delta x^{\nu} + \partial_{\ell} B_{\nu} (x) dx^{\ell} \delta x^{\nu}) \overset{\circ}{\psi} \\ &= (1 + B_{\nu} \delta x^{\nu} + \partial_{\ell} B_{\nu} dx^{\ell} \delta x^{\nu}) (1 + B_{\mu} dx^{\mu}) \psi \\ &= \left[ 1 + B_{\mu} (dx^{\mu} + \delta x^{\mu}) + (\partial_{\mu} B_{\nu} + B_{\nu} B_{\mu}) dx^{\mu} \delta x^{\nu} \right] \psi. \end{aligned} \quad \text{(VIII.9)}$$

En cambio, si elegimos trasladar primero según  $\delta x$  y después según  $dx$ , el resultado que obtenemos  $\overset{\circ\circ'}{\psi}$  se deduce de (VIII.9) con sólo cambiar  $\delta x$  por  $dx$  y viceversa:

$$\overset{\circ\circ'}{\psi} = \left[ 1 + B_{\mu} (\delta x^{\mu} + dx^{\mu}) + (\partial_{\mu} B_{\nu} + B_{\nu} B_{\mu}) \delta x^{\mu} dx^{\nu} \right] \psi. \quad \text{(VIII.10)}$$

La diferencia entre (VIII.9) y (VIII.10) es:

$$\Delta \overset{\circ\circ}{\psi} = \overset{\circ\circ}{\psi} - \overset{\circ\circ'}{\psi} = F_{\mu\nu} \psi dx^{\mu} \delta x^{\nu} \quad \text{(VIII.11)}$$

donde  $F_{\mu\nu}$  está dado por la (VIII.2).

La (VIII.11) significa que el traslado por paralelismo depende del camino. La presencia del tensor de las intensidades de campo hace que el espacio presente "curvatura de medida" donde  $F_{\mu\nu}$  hace las veces de tensor de curvatura análogo al de Riemann de geometría diferencial. Podemos dar a la (VIII.11) una forma equivalente

$$\overset{\circ\circ}{\psi} = \overset{\circ\circ'}{\psi} + F_{\mu\nu} dx^{\mu} \delta x^{\nu} \overset{\circ\circ'}{\psi}$$

donde hemos substituído  $\psi$  por  $\psi^{\circ\circ'}$ , ya que la diferencia es de orden superior.

Tenemos así

$$\begin{aligned}\psi^{\circ\circ} &= \left( 1 + g f_{\mu\nu}^k d x^\mu \delta x^\nu G_k \right) \psi^{\circ\circ'}, \\ \psi^{\circ\circ} &= \left( 1 + \bar{\alpha}^k G_k \right) \psi^{\circ\circ'}\end{aligned}\quad (\text{VIII.12})$$

lo que indica que la  $\psi^{\circ\circ}$  y  $\psi^{\circ\circ'}$  están relacionadas por una transformación infinitésima del grupo. Equivalentemente

$$\psi^{\circ\circ} = e^{\bar{\alpha}^k G_k} \psi^{\circ\circ'} \quad (\text{VIII.13})$$

es decir que  $\psi^{\circ\circ}$  difiere en una "fase"  $(\bar{\alpha}^k G_k)$  de  $\psi^{\circ\circ'}$ ; el parámetro correspondiente es:

$$\bar{\alpha}^k = g f_{\mu\nu}^k d x^\mu \delta x^\nu \quad (\text{VIII.14})$$

que es el "flujo" del tensor de las intensidades de campo a través de la "superficie" subtendida por los vectores  $d x^\mu$  y  $\delta x^\nu$ .

La ley de transformación infinitésima de  $f_{\mu\nu}^k$  se obtiene fácilmente de (VIII.6) usando (VIII.7). El resultado es:

$$\delta f_{\mu\nu}^k = \alpha^l C_{lm}^k f_{\mu\nu}^m. \quad (\text{VIII.15})$$

Obsérvese que (VIII.15) tiene la forma de (V.6) donde  $C_{lm}^k$  hace las veces de matriz del generador. Debido a las identidades de Jacobi, puede verificarse que las constantes de estructura consideradas como matrices  $C_k (= C_{kl}^m)$  satisfacen (V.3):

$$\left[ C_k, C_l \right] = C_{kl}^m C_m \quad (\text{VIII.16})$$

Las matrices  $C_k$  forman la representación "adjunta" del grupo, y por la (VIII.15) las intensidades  $f_{\mu\nu}^k$  constituyen una base para la representación adjunta.

IX - LAGRANGEANO LIBRE DE LOS CAMPOS DE MEDIDA.

El lagrangeano libre  $L_0$  del campo de medida puede ser determinado como en el parágrafo IV, imponiendo invariancia de medida de segunda especie. Es entonces fácil ver que las derivadas  $b_{\mu,\nu}^k$  sólo pueden estar contenida en la combinación antisimétrica  $b_{\mu,\nu}^k - b_{\nu,\mu}^k$ . Introduciendo a  $f_{\mu\nu}^k$  (ver (VIII.8) ) como variable en lugar de esa combinación, tendremos:

$$L_0 = L_0 ( b_{\mu}^k , f_{\mu\nu}^k ) .$$

La invariancia buscada nos dice que:

$$0 = \delta L_0 = \frac{\partial L_0}{\partial b_{\mu}^k} \delta b_{\mu}^k + \frac{\partial L_0}{\partial f_{\mu\nu}^k} \delta f_{\mu\nu}^k$$

y por la (VII.3) y la (VIII.15):

$$0 = \frac{\partial L_0}{\partial b_{\mu}^k} \left[ \alpha^{\ell} b_{\mu}^m C_{\ell m}^k + \frac{1}{g} \alpha_{\mu}^k \right] + \frac{\partial L_0}{\partial f_{\mu\nu}^k} \alpha^{\ell} C_{\ell m}^k f_{\mu\nu}^m . \quad (IX.1)$$

Pero el coeficiente de  $\alpha_{\mu}^k$  debe anularse (ya que  $\alpha^{\ell}$  es arbitrario), y eso determina que

$$\frac{\partial L_0}{\partial b_{\mu}^k} = 0 . \quad (IX.2)$$

Es decir que  $L_0$  es sólo función del tensor de las intensidades de campo.

Teniendo presente (IX.2) la condición de invariancia (IX.1) se reduce a:

$$\frac{\partial L_0}{\partial f_{\mu\nu}^k} C_{\ell m}^k f_{\mu\nu}^m = 0 . \quad (IX.3)$$

Esto significa que  $L_0$  debe ser un invariante construido a partir de un vector  $f_{\mu\nu}^k$  de la representación adjunta. Tal invariante puede construirse con el tensor "métrico"  $g_{ab}$  definido por<sup>(7)</sup>:

$$g_{ab} = C_{am}^{\ell} C_{bl}^m = \text{Tr} \{ C_a C_b \} . \quad (IX.4)$$

En efecto, dada una base  $\varphi^a$ ; el producto

$$\varphi^a \varphi_a = \varphi^a g_{ab} \varphi^b \quad (IX.5)$$

resulta invariante ya que:

$$\begin{aligned} \delta (\varphi^a \varphi_a) &= 2 \varphi^a g_{ab} \delta \varphi^b \\ &= 2 \varphi^a g_{ab} (\alpha^\ell C_{\ell m}^b \varphi^m) , \end{aligned}$$

y por la (VIII.15):

$$\delta (\varphi^a \varphi_a) = 2 \alpha^\ell \varphi^a C_{\ell m a} \varphi^m \quad (\text{IX.6})$$

donde

$$C_{\ell m a} = C_{\ell m}^b g_{ab} . \quad (\text{IX.7})$$

Mostraremos ahora que  $C_{\ell m a}$  es totalmente antisimétrico<sup>(5)</sup>. Usando (IX.4) en (IX.7) y luego (VIII.16)

$$\begin{aligned} C_{\ell m a} &= \text{Tr} \{ C_a C_b \} C_{\ell m}^b = \text{Tr} \{ C_a C_{\ell m}^b C_b \} \\ &= \text{Tr} \{ C_a \left[ \begin{array}{c} C_\ell \\ C_m \end{array} \right] \} = \text{Tr} \{ C_a C_\ell C_m - C_a C_m C_\ell \} . \end{aligned} \quad (\text{IX.8})$$

La antisimetría en  $\ell, m$  está contenida en la definición (IX.7). Cambiando ahora  $m$  por  $a$  obtenemos de (IX.8):

$$C_{\ell a m} = \text{Tr} \{ C_m C_\ell C_a - C_m C_a C_\ell \}$$

y por la propiedad cíclica de la traza

$$C_{\ell a m} = \text{Tr} \{ C_a C_m C_\ell - C_a C_\ell C_m \} = - C_{\ell m a} .$$

Esto basta para demostrar (por (IX.6) ), que

$$\delta (\varphi^a \varphi_a) = 0$$

y por lo tanto que el producto (IX.5) es invariante.

Construyendo entonces el tensor de las intensidades de campo en su versión covariante de medida, tenemos:

$$f_{k, \mu\nu} = g_{k\ell} f_{\mu\nu}^\ell \quad (\text{IX.9})$$

y entonces podemos construir  $L_0$  mediante:

$$L_0 = - \frac{1}{4} f_{\mu\nu}^k f_k^{\mu\nu} . \quad (\text{IX.10})$$

Obsérvese que, por la (IX.2),  $L_0$  no puede contener términos de masa de la forma  $m^2 b_\mu^k b_k^\mu$  ya que éste destruiría la invariancia de medida de  $L_0$ .

De la (IX.10) puede deducirse la ecuación de movimiento del campo de medida. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{\partial L_0}{\partial b_\mu^k} - \partial_\nu \frac{\partial L_0}{\partial b_{\mu,\nu}^k} = 0$$

y teniendo en cuenta que tanto  $b_\mu^k$  como  $b_{\mu,\nu}^k$  están contenidas en la combinación  $f_{\mu\nu}^k$  (VIII.8), encontramos  $g_{km}^l b_\nu^m f_k^{\mu\nu} + \partial_\nu f_k^{\mu\nu} = 0$  es decir, por ser  $C_{km}^l$  los generadores en la representación adjunta (Cf. (VIII.16) )

$$f_{k|\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{IX.11})$$

como ecuación de movimiento. La divergencia covariante de medida se construye como en (VI.6) (y (VI.3) ), teniendo presente que  $f_k^{\mu\nu}$  es base de la representación adjunta covariante.

Además de la ecuación (IX.11), el tensor de las intensidades de campo satisface las identidades "de Bianchi"

$$f_{\mu\nu|\lambda}^k + f_{\ell\mu|\nu}^k + f_{\nu\ell|\mu}^k = 0 \quad (\text{IX.12})$$

que puede ser deducida fácilmente de la definición de derivada covariante de medida usando las identidades de Jacobi para las constantes de estructura.

Cuando se adiciona el lagrangeano  $L_0$  al lagrangeano  $L$  original (VI.7), la ecuación de movimiento completa es

$$\frac{\partial L_0}{\partial b_\mu^k} - \partial_\nu \frac{\partial L_0}{\partial b_{\mu,\nu}^k} = f_{k|\nu}^{\mu\nu} = - \frac{\partial L}{\partial b_\mu^k}$$

y por lo visto en el párrafo VI:

$$f_{k|\nu}^{\mu\nu} = g j_k^\mu . \quad (\text{IX.13})$$

X - CASOS PARTICULARES.

Está claro que las transformaciones de fase y las isotópicas constituyen casos especiales de los cambios generales estudiados. En particular, para el campo electromagnético las constantes de estructura son nulas y las ecuaciones (IV.12), (IV.13), son las ecuaciones de Maxwell.

Nos interesa ahora presentar brevemente otros casos particulares ligados con la invariancia de  $SU_3$ . Supongamos que hay tres partículas fundamentales, los quarks, que pueden agruparse en un spinor triple  $\psi_q$  con 12 componentes que tienen por lagrangeano:

$$L_q = \bar{\psi}_q (-\gamma \cdot \partial + m_q) \psi_q \quad (X.1)$$

(compárese con (III.1)). Este lagrangeano es invariante ante transformaciones

$$\psi'_q = U \psi_q$$

donde  $U$  es cualquier matriz unitaria unimodular de tres por tres (8 parámetros).

Las transformaciones infinitésimas correspondientes son de la forma (V.2)

$$U \approx 1 + \alpha^k \lambda_k \quad (X.2)$$

Los generadores  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, 8$ ) están dados por:

$$\lambda_i = i \begin{pmatrix} \tau_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3$$

$$\lambda_4 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_5 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_8 = \frac{i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (X.3)$$

que satisfacen

$$[\lambda_k, \lambda_\ell] = C_{k\ell}^m \lambda_m = -f_{k\ell}^m \lambda_m \quad (X.4)$$

donde las constantes de estructura pueden ser determinadas de (X.3)<sup>(8)</sup>.

El octete de campos de medida correspondiente se introduce por (VI.2) y la derivada covariante correspondiente por (VI.3) y (VI.6) que debe ser utilizada en (X.1) en lugar de la derivada común, para obtener un nuevo **lagrangeano** invariante de medida de segunda especie. Las intensidades del campo correspondiente están dadas por (VIII.8).

Si en el lagrangeano (X.1) se supone que el término de masa es nulo ( $m_q = 0$ ), entonces el grupo de invariancia puede ser agrandado. En efecto, si en la (X.2) se multiplica a  $\lambda_k$  por  $\gamma_5$ , la transformación resultante deja invariable a (X.1) (con  $m_q = 0$ ). Estas transformaciones "axiales" con ocho generadores  $\gamma_5 \lambda_k$ , pueden unirse a (X.2, 3) para formar un grupo de 16 parámetros:

$$U = 1 + \alpha^k G_k \quad (k = 1, \dots, 16)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} G_k &= \lambda_k \\ G_{k+8} &= \gamma_5 \lambda_k \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, \dots, 8)$$

Las relaciones (X.4) implican

$$\left. \begin{aligned} [G_k, G_l] &= f_{kl}^m \lambda_m \\ [G_{k+8}, G_{l+8}] &= f_{kl}^m \lambda_m \\ [G_k, G_{l+8}] &= f_{kl}^m \gamma_5 \lambda_m \end{aligned} \right\} \quad k, l, m \leq 8. \quad (X.5)$$

La corriente "conservada" (Cf. (V.7) ), tiene 16 componentes que se dividen naturalmente en dos partes: la corriente vectorial (correspondiente a los 8 primeros generadores)

$$j_\mu^{k(V)} = \bar{\psi} \gamma_\mu \lambda^k \psi \quad (X.6)$$

y la corriente axial (correspondiente a las transformaciones axiales)

$$j_\mu^{k(A)} = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \lambda^k \psi \quad (X.7)$$

Del mismo modo, los campos de medida introducidos por la (VI.2) se dividen naturalmente en dos octetes: uno vectorial

$$V_{\mu}^k = b_{\mu}^k \quad (k = 1 \dots 8) \quad (X.8)$$

y otro axial

$$A_{\mu}^k = b_{\mu}^{k+8} \quad (X.9)$$

que se acoplan respectivamente a las corrientes (X.6) y (X.7). La invariancia de Lorentz exige entonces que los campos de medida (X.8, 9) se transformen (ante transformaciones del espacio-tiempo) como sus nombres lo sugieren.

Las intensidades de campo se deducen de (VIII.8) teniendo en cuenta (X.5). Separando la parte "axial" tendremos

$$f_{\mu\nu}^{k(V)} = \partial_{\mu} V_{\nu}^k - \partial_{\nu} V_{\mu}^k + g f_{\ell m}^k (V_{\mu}^{\ell} V_{\nu}^m + A_{\mu}^{\ell} A_{\nu}^m) \quad , \quad (X.10)$$

$$f_{\mu\nu}^{k(A)} = \partial_{\mu} A_{\nu}^k - \partial_{\nu} A_{\mu}^k + g f_{\ell m}^k (V_{\mu}^{\ell} A_{\nu}^m + A_{\mu}^{\ell} V_{\nu}^m) \quad . \quad (X.11)$$

Nótese que por la (X.5), las transformaciones axiales no forman grupo por sí mismas. Sin embargo podemos separar las transformaciones en dos grupos introduciendo los generadores "levógiros"

$$G_k^{(L)} = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \lambda_k \quad (X.12)$$

y los "dextrógiros"

$$G_k^{(R)} = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \lambda_k \quad (X.13)$$

que satisfacen

$$\begin{aligned} \left[ G_k^{(L)}, G_{\ell}^{(L)} \right] &= f_{k\ell}^m G_m^{(L)} \\ \left[ G_k^{(R)}, G_{\ell}^{(R)} \right] &= f_{k\ell}^m G_m^{(R)} \\ \left[ G_m^{(L)}, G_{\ell}^{(R)} \right] &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (X.14)$$

Los grupos correspondientes son  $S U_3^{(L)}$  y  $S U_3^{(R)}$  y las intensidades de campo se separan en dos tensores que pueden obtenerse por suma y resta de (X.10) y (X.11) y quedan expresados en función de las combinaciones

$$b_{\mu}^{k \pm} = V_{\mu}^k \pm A_{\mu}^k \quad . \quad (X.15)$$

XI - EL CAMPO GRAVITATORIO.

Es posible considerar el campo gravitatorio como un campo de medida <sup>(3)(4)</sup>.

Cualquier lagrangeano debe ser relativisticamente invariante y formado por productos escalares de tensores (o spinores). Para fijar las ideas tomaremos vectores. Los productos escalares pueden representarse en la forma:

$$A^\mu B_\mu \quad (XI.1)$$

donde  $A^\mu$  es un vector contravariante y  $B_\mu$  otro covariante. Estos productos escalares son invariantes ante transformaciones representadas por matrices no-singulares de  $4 \times 4$ ,  $X^\mu_\nu$  y su inversa  $\tilde{X}^\mu_\nu$

$$X^\mu_\nu \tilde{X}^\rho_\mu = \delta^\rho_\nu \quad (XI.2)$$

Los vectores se transforman mediante las leyes

$$\begin{aligned} A'^\mu &= X^\mu_\nu A^\nu \\ B'_\mu &= \tilde{X}^\nu_\mu B_\nu \end{aligned} \quad (XI.3)$$

y por lo tanto el producto escalar

$$A'^\mu B'_\mu = X^\mu_\nu A^\nu \tilde{X}^\rho_\mu B_\rho = \delta^\rho_\nu A^\nu B_\rho = A^\nu B_\nu$$

es invariante.

El grupo general de matrices (no singulares) de  $4 \times 4$  constituye el llamado grupo  $GL_4$ , a 16 parámetros, cuyas transformaciones infinitésimas representaremos por

$$X^\mu_\nu \approx \delta^\mu_\nu + \alpha^\mu_\nu \quad (XI.4)$$

donde  $\alpha^\mu_\nu$  es un conjunto de 16 parámetros infinitésimos. Aplicando la transformación infinitésima a un vector, tendremos

$$\begin{aligned} \delta A^\mu &= \alpha^\mu_\nu A^\nu \\ &= \alpha^\rho_\sigma \delta^\mu_\rho \delta^\sigma_\nu A^\nu \end{aligned}$$

que es de la forma (V.6) donde los generadores son

$$G^\sigma_\rho{}^\mu_\nu = \delta^\mu_\rho \delta^\sigma_\nu \quad (XI.5)$$

Obsérvese que el par  $\rho$  y  $\sigma$  toma el lugar del índice simple  $k$  de la (V.6), mientras que  $\mu$  y  $\nu$  son índices "matriciales".

Podemos ahora pasar a transformaciones de medida de segunda especie, exigiendo la invariancia aún cuando los parámetros sean funciones arbitrarias de posición. Debe entonces introducirse la ley de transporte paralelo (VI.4) que se traduce ahora en

$$\delta A^\mu = B_{\alpha \nu}^\mu dx^\alpha A^\nu \quad (XI.6)$$

donde los "índices matriciales" de  $B_{\alpha \nu}^\mu$  figuran explícitamente. La comparación con el transporte paralelo de la geometría de Riemann nos permite identificar a  $B_{\alpha \nu}^\mu$  con la conexión afín  $\Gamma_{\alpha \nu}^\mu$ . Por otra parte la (VI.3) y la (XI.5) dan por resultado

$$B_{\alpha \nu}^\mu = \Gamma_{\alpha \nu}^\mu = g b_{\alpha \nu}^\mu . \quad (XI.7)$$

Por lo tanto el campo de medida correspondiente coincide con la conexión  $\Gamma_{\mu \beta}^\alpha$ , salvo por el factor  $g$ .

Para construir el tensor de las intensidades de campo son necesarias las constantes de estructura y éstas se obtienen por la (V.3):

$$G_{\gamma \rho}^{\delta \nu} G_{\alpha \nu}^{\beta \mu} - G_{\alpha \rho}^{\delta \nu} G_{\gamma \nu}^{\delta \mu} = C_{\alpha \gamma, \kappa}^{\beta \delta, \eta} G_{\eta \rho}^{\kappa \mu}$$

de donde, reemplazando la (XI.5) obtenemos:

$$C_{\alpha \gamma, \rho}^{\beta \delta, \mu} = \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\gamma}^{\beta} \delta_{\rho}^{\delta} - \delta_{\gamma}^{\mu} \delta_{\alpha}^{\delta} \delta_{\rho}^{\beta} . \quad (XI.8)$$

La (VIII.8) toma así la forma:

$$\begin{aligned} f_{\mu \nu, \beta}^{\alpha} &= \frac{1}{g} \partial_{\mu} \Gamma_{\nu \beta}^{\alpha} - \frac{1}{g} \partial_{\nu} \Gamma_{\mu \beta}^{\alpha} + \frac{1}{2} C_{\rho \tau, \beta}^{\sigma \epsilon, \alpha} \Gamma_{\mu \sigma}^{\rho} \Gamma_{\nu \epsilon}^{\tau} \\ &= \frac{1}{g} \left[ \partial_{\mu} \Gamma_{\nu \beta}^{\alpha} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu \beta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu \sigma}^{\alpha} \Gamma_{\nu \beta}^{\sigma} - \Gamma_{\nu \sigma}^{\alpha} \Gamma_{\mu \beta}^{\sigma} \right] \end{aligned} \quad (XI.9)$$

que coincide con el tensor de curvatura de Riemann-Christoffel:

$$g f_{\mu \nu, \beta}^{\alpha} = R_{\mu \nu \beta}^{\alpha} . \quad (XI.10)$$

Es interesante señalar que el lagrangeano libre (IX.10) que siempre puede formarse con los campos de medida, no es el más simple para la gravitación si es que se dispone de una métrica  $g_{\mu\nu}$ . En este caso el lagrangeano más simple es:

$$L_0 = \int f_{\alpha}^{\nu, \beta} g^{\nu \beta} = R_{\alpha \beta} g^{\alpha \beta} \quad (\text{XI.11})$$

es decir el lagrangeano de Einstein.

REFERENCIAS Y NOTAS

- 1 - Ver por ej.: J.D. Bjorken y S.D. Drell, Relativistic Quantum Fields, Mc. Graw Hill, 1965.
- 2 - C.N. Yang y R.I. Mills: Phys. Rev. 96, 191 (1954).
- 3 - R. Utiyama: Phys. Rev. 101, 1597 (1956).
- 4 - C.N. Yang: Curso sobre campos de medida, Stony Brook (1971) (Notas de H. Girotti).
- 5 - G. Racah: Group Theory and Spectroscopy, CERN 61-8-1961.
- 6 - La (VI.5) define el paralelismo como un factor de fase que es un elemento del grupo (Ver loc. cit. (4)).
- 7 - Nótese que por cambio de parámetros puede conseguirse que  $g_{ab} = \delta_{ab}$ .
- 8 - Ver por ej.: S.L. Adler y R.F. Dashen, Current Algebras, Benjamin, 1968  
ó L. Fonda y G.C. Ghirardi, Symmetry Principles, M. Dekker, 1970.-

II Simposio Argentino de Física Teórica de  
Partículas y Campos.  
Bariloche - Enero 1973

TEORIA UNIFICADA DE INTERACCIONES DEBILES  
Y ELECTROMAGNETICAS

J. J. Giambiagi

Universidad Nacional de La Plata

CONTENIDO

I	- Introducción . . . . .	pág.	74
II	- Modelo de Goldstone . . . . .	"	75
III	- Modelo de Higgs . . . . .	"	78
IV	- Introducción a la teoría de Salam-Weinberg . . . . .	"	82
V	- Regularización dimensional . . . . .	"	89

## I - INTRODUCCION.

El campo electromagnético, generado como un campo de medida, debe tener masa cero para satisfacer la invariancia de medida de la teoría original. Parece así que no es posible generar partículas con masa - como campos de medida - dentro de este enfoque. Para ver como se puede salvar la dificultad, vamos a estudiar y discutir un poco algunas ideas debidas a Goldstone y usadas después dentro del contexto que nos interesa por Higgs y Kibble. La idea de usar campos de medida surge de lo siguiente: sería deseable tener una teoría renormalizable de las interacciones débiles, pero la **renormalizabilidad** de la electrodinámica cuántica depende en gran parte de la invariancia de medida de la teoría. Por otra parte, las interacciones electromagnéticas y débiles son ambas universales. Esto sugiere la idea de una teoría unificada de ambas interacciones, en la cual la invariancia se extiende a una clase de invariancia tipo Yang y Mills que - se espera - tenga el efecto de reducir el grado de divergencia y hacer la teoría renormalizable. Una dificultad que durante mucho tiempo retardó el desarrollo de una teoría unificada fue que, mientras la teoría de un campo de Yang y Mills es renormalizable (para partículas sin masa), la teoría de Yang y Mills para partículas con masa es no renormalizable.

La teoría de Salam y Weinberg es un intento para salvar estas dificultades a costa de pagar como precio la introducción de nuevas partículas; además del fotón y de un mesón pesado intermedio cargado, aparecen uno neutro y uno escalar.

Vamos a discutir primero las ideas de Goldstone y Higgs para ver como se puede soslayar la dificultad de la masa.

II - MODELO DE GOLDSTONE.

Como un ejemplo típico de una simetría rota espontáneamente describimos el modelo de Goldstone<sup>(1)</sup>. Escribamos el lagrangeano

$$L = -\partial_\nu \varphi^* \partial^\nu \varphi - \mu^2 \varphi^* \varphi - h (\varphi^* \varphi)^2 . \quad (\text{II.1})$$

Vemos que es invariante frente a la transformación

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi e^{i\alpha} \\ \varphi^* &\rightarrow \varphi^* e^{-i\alpha} \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

con  $\alpha$  : constante. La ecuación de movimiento correspondiente es

$$(\square - \mu^2) \varphi - 2h \varphi^* \varphi \varphi = 0 . \quad (\text{II.3})$$

Se ve que estas ecuaciones tienen una solución independiente de las coordenadas, si se satisface

$$(\mu^2 + 2h \varphi^* \varphi) \varphi = 0 . \quad (\text{II.4})$$

Vamos a suponer que  $h > 0$  a fin de que el espectro de energía libre esté acotado por abajo. Esto puede verse si interpretamos los términos correspondientes del lagrangeano como una energía potencial

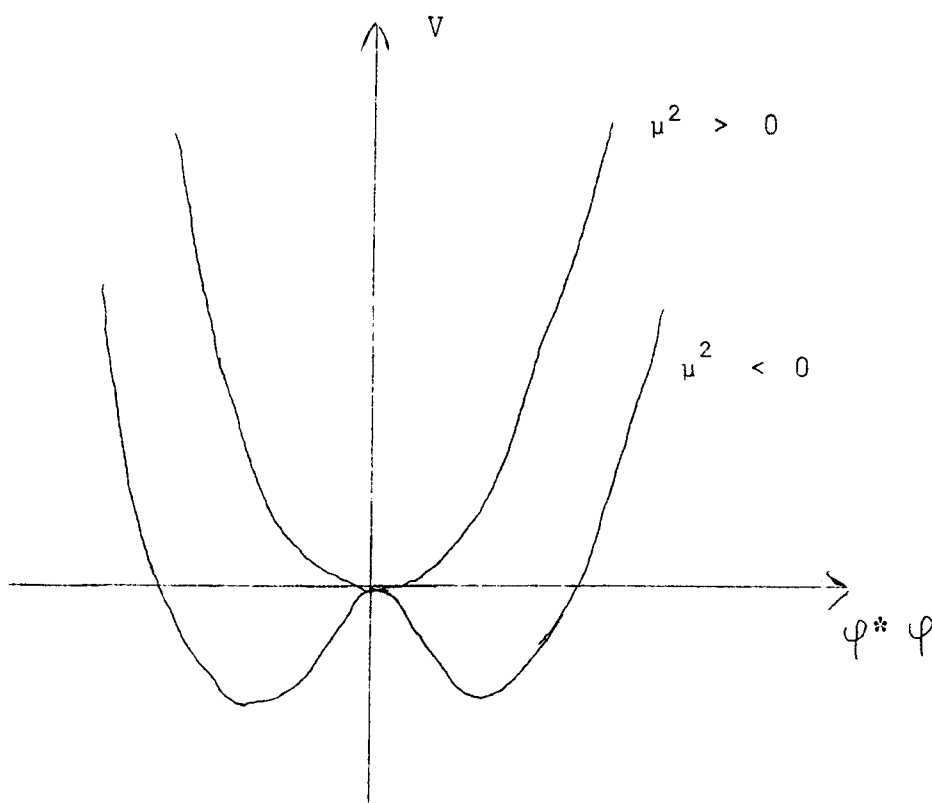
$$V = \mu^2 \varphi^* \varphi + h (\varphi^* \varphi)^2 , \quad h > 0 . \quad (\text{II.5})$$

Si  $\mu^2 > 0$  la única solución independiente de las coordenadas es  $\varphi = 0$ . Si, en cambio,  $\mu^2 < 0$ , obtenemos la figura (ver fig. pág. 76) y vemos que hay más soluciones que corresponden al mínimo (vacío). Ellas son:

$$|\varphi| = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \quad (\text{II.6})$$

con

$$\lambda = \sqrt{-\frac{\mu^2}{h}}$$



con una fase arbitraria. Estas soluciones no son invariantes frente al grupo de transformaciones de fase frente al cual el lagrangeano y las ecuaciones de movimiento son invariantes. Mas bien, se transforman unas en otras frente a las operaciones del grupo. Es conveniente, por razones de comodidad, elegir la fase cero y  $\varphi$  igual a una constante real  $\lambda / \sqrt{2}$ . El hamiltoniano resulta idéntico al potencial

$$V(\varphi) = \mu^2 \varphi^2 + h |\varphi|^4 \quad (\text{II.7})$$

y las soluciones discutidas corresponden a valores de  $\varphi$  para los cuales el potencial es estacionario. Se ve que para  $\mu^2 < 0$ , la solución  $\varphi = 0$  no corresponde a un mínimo del potencial. El mínimo corresponde sólo a  $\varphi = \lambda / \sqrt{2}$ . Toda esta discusión es meramente clásica, pero se traduce, "mutatis mutandis", a la cuántica. Una solución no nula independiente de las coordenadas correspon-

de a un valor medio de vacío diferente de cero. Cuando el valor medio del vacío del campo  $\varphi$  no se anula, es conveniente introducir un nuevo campo. Habiendo elegido una solución que tiene  $\langle \varphi \rangle_0 \neq 0$  introducimos dos campos reales  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda + \varphi_1 + i \varphi_2) \quad (\text{II.8})$$

tales que

$$\langle \varphi_1 \rangle_0 = 0 \quad (\text{II.9a})$$

$$\langle \varphi_2 \rangle_0 = 0 \quad (\text{II.9b})$$

Ahora expresamos el lagrangeano original en términos de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  obteniendo:

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{2} (\partial_\nu \varphi_1)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\nu \varphi_2)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \lambda^2 - \frac{1}{4} h \lambda^4 - \\ & - \varphi_1 \lambda (\mu^2 + h \lambda^2) - \frac{1}{2} \varphi_1^2 (\mu^2 + 3 h \lambda^2) - \\ & - \frac{1}{2} \varphi_2^2 (\mu^2 + h \lambda^2) - h \lambda \varphi_1 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{1}{4} h (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2. \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Los términos constantes no tienen ninguna consecuencia física y pueden ser suprimidos. El coeficiente del término lineal en  $\varphi_1$  debe anularse para asegurar (II.9a) para cualquier tiempo. En efecto:

$$\langle \varphi_1(t) \rangle = \langle \varphi_1(0) \rangle + i \langle \left[ \varphi_1, H \right] \rangle + \dots$$

y se ve que si  $H$  tiene un término lineal en  $\varphi_1$  su valor medio no será nulo. El coeficiente de  $\varphi_1$  se anula si  $\lambda = 0$ , pero también si  $\mu^2 + h \lambda^2 = 0$  para  $\mu^2 < 0$ , que es la relación que ya teníamos. Vemos que si esta relación se satisface, es nulo el coeficiente de  $\varphi_2^2$  y el campo  $\varphi_2$  resulta sin masa. La masa del campo  $\varphi_1$  es

$$\mu^2 + 3 h \lambda^2 = -2 \mu^2 > 0 \quad (\text{II.11})$$

pues supusimos  $\mu^2 < 0$ . El cuanto del campo  $\varphi_2$ , con masa nula, es el bosón de Goldstone que aparece si hay una ruptura espontánea de la simetría. Para  $\mu^2 < 0$  la simetría está espontáneamente rota (esto es: las soluciones no exhiben la simetría del lagrangeano) y en este caso aparece un campo escalar sin masa.

En general, si uno tiene una simetría interna correspondiente a un grupo de  $n$  parámetros y las soluciones exhiben sólo la simetría asociada con un subgrupo que tiene  $m < n$  parámetros, el teorema de Goldstone dice que habrá  $n - m$  partículas escalares sin masa.

En presencia de campos de medida, la situación es diferente. Vamos a usar como ejemplo el modelo de Higgs, íntimamente ligado al modelo de Goldstone y a la teoría de Salam-Weinberg de las interacciones débiles y electromagnéticas. En el caso de Goldstone, si  $\mu^2 > 0$ , el lagrangeano da origen a una teoría renormalizable. Se puede demostrar que esto también sucede si la simetría es rota espontáneamente, y la renormalización en este caso se reduce al anterior en que  $\mu^2 > 0$ . La idea que una teoría de campos renormalizable con una simetría da origen a una teoría también renormalizable si esta simetría está espontáneamente rota, está en la base de los intentos de Salam y Weinberg de construir una teoría renormalizable de las interacciones débiles y electromagnéticas.

### III - MODELO DE HIGGS.

El lagrangeano del modelo de Higgs<sup>(2)</sup> es:

$$L = - \frac{1}{4} F_{\sigma\nu}^2 - \left| (\partial_\nu - i e A_\nu) \varphi \right|^2 - \mu^2 |\varphi|^2 - h |\varphi|^4. \quad (\text{III.1})$$

Es decir es el lagrangeano de Goldstone (II.1) adicionado con un campo de medida.

Es invariante frente a la transformación

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi e^{i e \Lambda} \\ A_\nu &\rightarrow A_\nu + \partial_\nu \Lambda \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

y, para  $\mu^2 > 0$ , corresponde a un campo escalar complejo masivo y un campo vectorial sin masa. Hagamos ahora al igual que antes  $\mu^2 < 0$  y  $h > 0$ . El potencial que resulta ahora es

$$V = \mu^2 |\varphi|^2 + h |\varphi|^4 \quad (\text{III.3})$$

que tendrá, igual que antes, su mínimo para

$$|\varphi| = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \quad (\text{III.4})$$

con

$$\lambda = \sqrt{-\frac{\mu^2}{h}} .$$

Esto indica que, en la cuantización, el campo va a tener un valor medio <sup>del vacío</sup> que, en la aproximación más baja está dado por  $\lambda / \sqrt{2}$ . Usando la invariancia del lagrangeano siempre se puede imponer que sea real. Escribimos, pues, como en (II.8, 9)

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda + \varphi_1 + i \varphi_2) \quad (\text{III.5})$$

donde

$$\langle \varphi_1 \rangle_0 = \langle \varphi_2 \rangle_0 = 0 . \quad (\text{III.6})$$

Pasamos ahora a dos nuevos campos reales

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda + \chi) e^{i \frac{\theta}{\lambda}} \quad (\text{III.7})$$

donde  $\chi$  y  $\theta$  se pueden obtener en función de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ .

Cuando hacemos la transformación de medida (III.2)  $\chi$  no se modifica, ya que el módulo se mantiene invariante, mientras que

$$\theta \rightarrow \theta + e \lambda \Lambda . \quad (\text{III.8})$$

Se ve claro que si uno elige

$$\Lambda = -\frac{1}{e \lambda} \theta , \quad (\text{III.9})$$

la nueva  $\theta$  será cero. Por lo tanto, eligiendo

$$A_{\nu} = B_{\nu} + \frac{1}{e \lambda} \partial_{\nu} \theta \quad (\text{III.10})$$

el lagrangeano se hace independiente de  $\theta$  y contiene sólo los campos  $\chi$  y  $B_{\nu}$ . Expresado en función de estos campos, el lagrangeano toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{4} F_{\sigma\nu}^2 - \frac{1}{2} (\partial_{\nu} \chi)^2 - \frac{1}{2} e^2 \lambda^2 B_{\nu}^2 - \frac{1}{2} e^2 B_{\nu}^2 (2 \lambda \chi + \chi^2) - \\ & - \frac{1}{2} (\mu^2 + 3 h \lambda^2) \chi^2 - \frac{1}{4} h (4 \lambda \chi^3 + \chi^4) - \\ & - (\mu^2 + h \lambda^2) \lambda \chi - \frac{1}{2} \mu^2 \lambda^2 - \frac{1}{4} h \lambda^4. \quad (\text{III.11}) \end{aligned}$$

Como antes, el coeficiente  $\mu^2 + h \lambda^2$  del término lineal debe anularse y los dos últimos términos, constantes, pueden dejarse de lado. Este lagrangeano describe la interacción de un campo vectorial  $B_{\nu}$  de masa  $e \lambda$  con un campo escalar real  $\chi$  de masa

$$\mu^2 + 3 h \lambda^2 = -2 \mu^2 > 0. \quad (\text{III.12})$$

Obsérvese que la posibilidad de eliminar completamente la fase  $\theta$  depende críticamente de la no-anulación de  $\lambda$ . Si  $\lambda$  es cero esta transformación no se puede hacer y  $\theta$  no puede ser eliminado.

El modelo de Higgs muestra que en vez de tener un campo escalar sin masa, tenemos que una partícula vectorial que no tenía masa, en ausencia de interacción, adquiere masa. El campo escalar de Goldstone es absorbido en la componente longitudinal.

El modelo de Higgs da un ejemplo de no cumplimiento del teorema de Goldstone. En vez de tener un escalar sin masa, tenemos que el bosón vectorial de mediana adquiere masa. El campo escalar que correspondería al bosón de Goldstone da el grado extra de libertad que tiene un bosón vectorial masivo, respecto de uno sin masa.

Una observación interesante: el lagrangeano de Higgs es renormalizable para el caso normal  $\mu^2 > 0$ , ya que  $|\varphi|^4$  no destruye la renormalizabilidad de la electrodinámica escalar. Se puede pensar que también es renormalizable en el caso  $\mu^2 < 0$ . Sin embargo si uno usa el lagrangeano (III.1), y cuenta las potencias, no resulta renormalizable debido al término  $k_\mu k_\nu$  del propagador

$$\left( \delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{(e\lambda)^2} \right) \frac{1}{k^2 + (e\lambda)^2} . \quad (\text{III.13})$$

En cambio, se puede cuantizar el  $L$  en su forma invariante de medida, sin eliminar el grado extra de libertad, es decir tomando

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{4} F_{\sigma\nu}^2 - \frac{1}{2} (e\lambda)^2 A_\nu^2 - \frac{1}{2} (\partial_\nu \varphi_1 + e A_\nu \varphi_2)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\nu \varphi_2 - e A_\nu \varphi_1)^2 + \\ & + e\lambda A_\nu (\partial_\nu \varphi_2 - e A_\nu \varphi_1) - \frac{1}{2} \mu^2 \lambda^2 - \frac{1}{2} h \lambda^4 - \varphi_1 \lambda (\mu^2 + h \lambda^2) - \\ & - \frac{1}{2} \varphi_1^2 (\mu^2 + 3 h \lambda^2) - \frac{1}{2} \varphi_2^2 (\mu^2 + h \lambda) - h \lambda (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \\ & - \frac{1}{4} h (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

donde aparece explícitamente el bosón de Goldstone. Esta medida sí es renormalizable, pero aparecen fantasmas que compensan al bosón de Goldstone y restituyen el resultado anterior.

En definitiva, si uno tiene el modelo de Goldstone con simetría rota el teorema de Goldstone impone la existencia de un bosón escalar con masa nula, ya que al escribir (III.5) el lagrangeano da una masa al campo  $\varphi_1$  y ninguna al  $\varphi_2$ , que pasa a ser el bosón de Goldstone. Uno se pregunta entonces si cuando se introduce el campo de medida se viola el teorema de Goldstone. La respuesta es no porque un campo de medida implica fuerzas de largo alcance y en este caso el teorema de Goldstone no es más aplicable.

IV -- INTRODUCCION A LA TEORIA DE SALAM-WEINBERG.

Queremos asociar al neutrino y al electrón en un doblete de spin isotópico<sup>(3)</sup>. Como el neutrino tiene helicidad negativa, introducimos el campo

$$L = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} . \quad (IV.1)$$

Sin embargo esto no agota la descripción del electrón ya que éste tiene una componente de helicidad positiva. Por lo tanto es necesario introducir un campo singulete de spin isotópico

$$R = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) e . \quad (IV.2)$$

Con esto podemos escribir el lagrangeano

$$L = i \{ \bar{L} \gamma^\mu \partial_\mu L + \bar{R} \gamma^\mu \partial_\mu R \} \quad (IV.3)$$

que describe partículas sin masa. Queremos generar masa para el electrón y no para el neutrino, por un mecanismo análogo al de Higgs. Precisamos para eso introducir un campo  $\varphi$  que deberá ser un doblete de spin isotópico y cuya finalidad es generar masa para uno de los componentes del doblete (e,  $\nu$ ).

Partimos, pues, de un lagrangeano

$$L = i \bar{R} \gamma^\mu \partial_\mu R + i \bar{L} \gamma^\mu \partial_\mu L + G_e (\bar{L} \varphi R + \bar{R} \varphi^\dagger L) - \\ - M_1^2 \varphi^\dagger \varphi - h (\varphi^\dagger \varphi)^2 + \partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi . \quad (IV.4)$$

Vemos que este lagrangeano es invariante ante las transformaciones

$$\begin{aligned} R &\rightarrow e^{i\alpha} R \\ L &\rightarrow e^{i\frac{\alpha}{2}} L \\ \varphi &\rightarrow e^{-i\frac{\alpha}{2}} \varphi . \end{aligned} \quad (IV.5)$$

Este es un grupo  $U(1)$  de simetría, que genera la corriente conservada de hipercarga.

Pero el lagrangeano también es invariante frente a las transformaciones

$$\begin{aligned}
 L &\rightarrow e^{i \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}}{2}} L \\
 \varphi &\rightarrow e^{i \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}}{2}} \varphi
 \end{aligned}
 \tag{IV.6}$$

es decir ante el grupo SU (2) de rotaciones en el espacio de isospin. Tenemos, por lo tanto, invariancia ante el producto directo SU(2)  $\otimes$  U (1) con lo cual hay cuatro corrientes conservadas: las tres del spin isotópico y la de hipercarga.

Ahora extendemos los grupos de simetría a la Yang y Mills, lo que implica la introducción de cuatro mesones vectoriales: tres correspondientes a un iso-vector  $\vec{A}_\mu$  y uno  $B_\mu$ , iso-escalar, asociado a la hipercarga. El lagrangeano total se obtendrá (fuera de la parte libre correspondiente a los  $\vec{A}_\mu$  y  $B_\mu$ ) mediante el reemplazo impuesto por la invariancia de medida

$$\begin{aligned}
 i \partial_\mu R &\rightarrow (i \partial_\mu - g' B_\mu) R \\
 i \partial_\mu L &\rightarrow (i \partial_\mu - g \vec{t} \cdot \vec{A}_\mu - \frac{1}{2} g' B_\mu) L \\
 i \partial_\mu \varphi &\rightarrow (i \partial_\mu - g \vec{t} \cdot \vec{A}_\mu + \frac{1}{2} g' B_\mu) \varphi .
 \end{aligned}
 \tag{IV.7}$$

Con esto el lagrangeano total queda de la forma

$$\begin{aligned}
 L = & - \frac{1}{4} (\partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + g \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu)^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 + \\
 & + \bar{R} \gamma^\mu (i \partial_\mu - g' B_\mu) R + \bar{L} \gamma^\mu (i \partial_\mu - g \vec{t} \cdot \vec{A}_\mu - \frac{1}{2} g' B_\mu) L + \\
 & + \frac{1}{2} \left| (i \partial_\mu - g \vec{t} \cdot \vec{A}_\mu - \frac{1}{2} g' B_\mu) \varphi \right|^2 - G_e (\bar{L} \varphi R + R \varphi^\dagger L) - \\
 & - M_1^2 \varphi_1^\dagger \varphi_1 - h (\varphi^\dagger \varphi)^2 .
 \end{aligned}
 \tag{IV.8}$$

En este lagrangeano están incluidas las ideas de Higgs y Goldstone, extendidas a grupos no abelianos por Kibble<sup>(4)</sup>. La simetría es rota espontáneamente imponiendo

$$\langle \varphi \rangle_0 = \lambda \neq 0 \quad (\text{IV.9})$$

y es esta ruptura espontánea que genera, via el mecanismo de Higgs, la masa del electrón. Si escribimos

$$\varphi \equiv \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.10})$$

y como antes, ponemos

$$\varphi_0 = \lambda + \varphi_1 + i \varphi_2 \quad (\text{IV.11})$$

$$\varphi_0^+ = \lambda + \varphi_1 - i \varphi_2$$

los dos términos finales de  $L$ , nos quedan

$$\begin{aligned} -M_1^2 \varphi^+ \varphi - h (\varphi^+ \varphi)^2 &= -M_1^2 (\varphi_1 \varphi_1 + \varphi_2 \varphi_2 + 2 \lambda \varphi_1 + \lambda^2 + \varphi_+^+ \varphi_+) \\ &\quad - h (\varphi_1 \varphi_1 + \varphi_2 \varphi_2 + 2 \lambda \varphi_1 + \varphi_+^+ \varphi_+ + \lambda^2)^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

A fin de que se mantenga

$$\langle \varphi_1 \rangle_0 = 0 \quad (\text{IV.13})$$

debe anularse el término lineal en  $\varphi_1$ , es decir debe cumplirse

$$2 h \lambda^2 + M_1^2 = 0$$

o sea

$$\lambda^2 = -\frac{M_1^2}{2 h}. \quad (\text{IV.14})$$

Con esta relación, los términos en  $\varphi_1$  de  $L$  son

$$-M_1^2 \varphi_1 \varphi_1 - 2 h \lambda^2 \varphi_1 \varphi_1 - 4 h \lambda^2 \varphi_1 \varphi_1 = -2 |M_1|^2 \varphi_1 \varphi_1$$

pues  $M_1^2 < 0$ , que corresponde a una partícula de masa positiva. Por el contrario, usando la relación (IV.14), es inmediato verificar que los términos en  $\varphi_2^2$  se eliminan. Lo mismo sucede con los términos en  $\varphi_+^2$ . Ambos corresponden, pues, a masa cero.

Por un razonamiento análogo al hecho en el parágrafo anterior, se puede mostrar que  $\varphi_2$  y  $\varphi_+$  se van en la componente longitudinal de los campos de medida (que ahora adquieren masa!). En lugar de (IV.10) queda entonces

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.15})$$

pero esto significa que hemos elegido una medida particular. Para ver como se genera la masa del electrón, veamos que pasa al término  $-G_e (\bar{L} \varphi_R + \text{c. h.})$  cuando elegimos esta medida particular (IV.15)

$$\begin{aligned} -G_e (\bar{L} \varphi_R + \text{c. h.}) &= -G_e \overbrace{\left( \frac{1 + \gamma_5}{2} \right)}^{\bar{v} e} \frac{(1 + \gamma_5)}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \varphi_1 \end{pmatrix} e + \text{c. h.} \\ &= -G_e \overbrace{\left( \frac{1 + \gamma_5}{2} \right)}^{\bar{v} e} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \varphi_1 \end{pmatrix} e + \text{c. h.} \end{aligned}$$

Se ve que el  $v$  está combinado con cero y no se genera el término correspondiente a su masa, en cambio, no pasa lo mismo con el electrón, lo que se ve explícitamente reescribiendo la anterior

$$-G_e (\bar{L} \varphi_R + \text{c. h.}) = -G_e \bar{e} e (\varphi + \lambda) \quad (\text{IV.16})$$

y el término en  $\lambda$  genera una masa para el electrón igual a

$$m = \lambda G_e. \quad (\text{IV.17})$$

También se genera un acoplamiento  $\bar{e} e \varphi$ .

¿Como se generan las masas de los mesones vectoriales? Hay que hacer el reemplazo de la forma elegida (IV.15) para el iso-spinor  $\varphi$ , en todos los términos en que aparece en el lagrangeano. Queda entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| i \partial_\mu \varphi - g \vec{t} \cdot \vec{A}_\mu \varphi + \frac{1}{2} g' B_\mu \varphi \right|^2 &= \\ = \left| i \partial_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \varphi_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} g A_\mu^3 \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \varphi_1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} g (A_\mu^1 - i A_\mu^2) \begin{pmatrix} \lambda + \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 &+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} g' B_\mu \left( \begin{array}{c} 0 \\ \lambda + \varphi_1 \end{array} \right) \Big|^2 \\
 = & \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi_1 \partial_\mu \varphi_1 + \frac{1}{8} (g A_\mu^3 + g' B_\mu)^2 (\lambda + \varphi_1) + \\
 & + \frac{1}{8} g^2 \left| A_\mu^1 + i A_\mu^2 \right|^2 (\lambda + \varphi_1)^2 . \quad (IV.18)
 \end{aligned}$$

y observamos que podemos definir nuevos campos vectoriales que simplifican la escritura. Definimos, pues,

$$\begin{aligned}
 W_\mu & = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 + i A_\mu^2) , \\
 Z_\mu & = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g A_\mu^3 + g' B_\mu) , \\
 A_\mu & = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (-g' A_\mu^3 + g B_\mu) .
 \end{aligned} \quad (IV.19)$$

En función de estos campos los únicos términos cuadráticos en el lagrangeano son

$$\frac{1}{4} g^2 \lambda^2 W_\mu^+ W^\mu + \frac{1}{8} \lambda^2 (g^2 + g'^2) Z^\mu Z_\mu \quad (IV.20)$$

lo cual indica que las masas asociadas a los mesones vectoriales W y Z son

$$M_W = \frac{\lambda g}{2} \quad (IV.21)$$

$$M_Z = \frac{\lambda}{2} \sqrt{g^2 + g'^2}$$

mientras que la no existencia de términos cuadráticos asociados al campo  $A_\mu$  significa que la masa correspondiente es nula. Que el cuanto de este campo debe identificarse con el fotón de la electrodinámica puede comprenderse mejor de los términos de interacción del lagrangeano :

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2\sqrt{2}} g \left[ \bar{W}_\mu \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e + \text{c. h.} \right] - \frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A_\mu \bar{e} \gamma^\mu e - \\
 & - \frac{1}{4} \sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu \left[ \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) + \bar{e} \gamma^\mu \gamma_5 e + \frac{(3g'^2 - g^2)}{g^2 + g'^2} \bar{e} \gamma^\mu e \right].
 \end{aligned}
 \tag{IV.22}$$

Estos además indican que la constante de acoplamiento eléctrica es:

$$e = \frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{\frac{g'}{g} g}{\sqrt{1 + \left(\frac{g'}{g}\right)^2}} \leq g
 \tag{IV.23}$$

y que el  $W$  es un bosón cargado mientras que  $Z$  es neutro. Se ve también que la constante usual de las interacciones débiles satisface

$$\frac{G_W}{\sqrt{2}} = \frac{g}{8 M_W^2} = \frac{1}{2 \lambda^2},
 \tag{IV.25}$$

donde se ha usado (IV.21), o sea entonces que

$$M_W^2 = \frac{\sqrt{2} g^2}{8 G_W} \geq \frac{\sqrt{2} e^2}{8 \times 10^{-5}} m_P^2 \approx 1.600 m_P^2$$

con  $m_P$  : masa del protón. Con esto una cota inferior para la masa del bosón intermedio  $W$  es

$$M_W \geq 40 m_P \approx 37,3 \text{ GeV} .
 \tag{IV.26}$$

También, usando (IV.21) y (IV.25) obtenemos:

$$M_Z^2 = \frac{g^2 + g'^2}{g^2} M_W^2 = \frac{\sqrt{2} (g^2 + g'^2)}{8 G_W}
 \tag{IV.26}$$

y para dar una cota inferior al valor de  $M_Z$ , debemos encontrar el mínimo de  $(g^2 + g'^2)$ , con la condición (IV.23). Este mínimo se encuentra muy fácilmente y resulta ser

$$g = g' = \sqrt{2} e$$

lo que da para  $M_Z$ :

$$M_Z^2 > \frac{4\sqrt{2}}{8 G_W} e^2 = 2 M_W^2$$

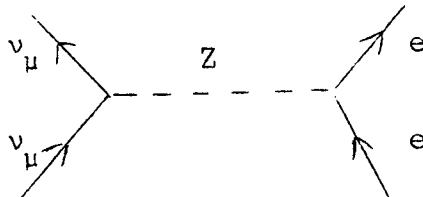
o sea

$$M_Z > \sqrt{2} (M_W)_{\text{mínimo}} \approx 52,7 \text{ GeV} . \quad (\text{IV.27})$$

Si observamos la interacción de Z con el electrón, vemos que no es del tipo (V - A), por lo tanto, esta teoría es esencialmente diferente de la usual de Feynman y Gell-Mann para la cual la interacción es siempre (V - A). Esto quiere decir que hay algunos procesos que aquí son permitidos y no lo son en la teoría de Feynman y Gell-Mann. Por ejemplo el proceso

$$\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$$

está prohibido en la teoría usual, mientras que aquí puede realizarse mediado por el mesón Z



Finalmente, es fácil ver de la expresión explícita del lagrangeano total que las diferentes constantes de acoplamiento resultan

$$g_{Z\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2}$$

$$g_{Ze} = \frac{1}{2} \frac{g'^2 - g^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

$$g_{ZW} = - \frac{g^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

$$\begin{aligned}
 g_{\psi W} &= \frac{\lambda}{2} g^2 = g M_W \\
 g_{\psi Z} &= \frac{\lambda}{2} (g^2 + g'^2) = \frac{(g^2 + g'^2)}{g} M_W \quad (\text{IV.28}) \\
 g_{\psi e} &= -\frac{m}{\lambda} = -\frac{m}{2 M_W} g \\
 g_{W e} &= \frac{g}{\sqrt{2}} \\
 e &= \frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\
 \bar{g}_{Z e} &= \frac{g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\
 g_{Z \nu} &= \bar{g}_{Z e} - g_{Z e}
 \end{aligned}$$

que suelen escribirse en función del ángulo de Weinberg, definido por la relación

$$\cotg \theta_W = g/g' \quad (\text{IV.29})$$

#### V - REGULARIZACION DIMENSIONAL.

La ecuación de las ondas fue una fuente de ideas para la física. Allí es donde aparecieron por primera vez integrales divergentes con un claro significado físico. Hadamard fue el primero en encontrar una forma rigurosa de darles significado matemático riguroso definiendo partes finitas de integrales divergentes.

Si uno observa las soluciones de la ecuación de las ondas cuando el número de dimensiones es par, o cuando es impar se ve que tienen propiedades físicas muy diferentes. Por ejemplo: una propiedad física muy importante que de-

pende de la paridad del espacio es la validez o no del principio de Huyghens. Es sabido que el principio de Huyghens no vale cuando el número de dimensiones espacio temporales es impar. A título de información, podemos ver porqué sucede esto. Si resolvemos la ecuación de las ondas por el método de Marcel Riesz

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_{v-1}^2} = f(x_1 \dots x_{v-1}, t), \quad (V.1)$$

la solución, con condiciones iniciales nulas, es

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2} I^\alpha f(x_1^0, x_2^0 \dots t) = \int \frac{1}{H_v(\alpha)} f(x_1, \dots, t) R^{\frac{\alpha-v}{2}} d x_1 \dots d t, \quad (V.2)$$

donde

$$R = (t - t_0)^2 - \sum_{i=1}^{v-1} (x_i - x_i^0)^2, \quad (V.3)$$

$$H_v(\alpha) = \pi^{\frac{v-2}{2}} \frac{\alpha-1}{2} \Gamma\left(1 + \frac{\alpha-v}{2}\right), \quad (V.4)$$

y

$$u = \lim_{\alpha \rightarrow 2} I^\alpha f. \quad (V.5)$$

Se ve - heurísticamente - que  $\Gamma\left(2 - \frac{v}{2}\right)$  tiene polos para  $v = \text{par}$ , y ese polo barre con toda la contribución interna del cono, quedando sólo la contribución de la superficie del cono, debido al factor  $R^{-2}$  que allí compensa al polo de la función  $\Gamma$ .

Consecuencia: el principio de Huyghens no vale si el número de dimensiones es impar y sí vale si el número de dimensiones es par.

Nos preguntamos entonces si también no habrá algunas propiedades de la teoría cuántica de campos que dependen del número de dimensiones o del hecho que sea par o impar.

Con esto "in mente" nos planteamos tomar la teoría más simple de interacción de dos campos escalares, uno de los cuales es masivo y el otro no.

Tomemos

$$L \Delta(x) = \delta(x) \quad , \quad (V.6)$$

donde

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{\nu-q}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{\nu-q+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2} - m^2 = \\ &= \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta - m^2 \quad . \end{aligned} \quad (V.7)$$

La solución causal de la ecuación propuesta es

$$\begin{aligned} \Delta(R) &= \frac{-i^q m^{\frac{\nu}{2}-1} K_{\frac{\nu}{2}-1}(m\sqrt{R+i0})}{2^{\frac{\nu}{2}} \pi^{\frac{\nu}{2}} (\sqrt{R+i0})^{\frac{\nu}{2}-1}} = \\ &= -F^{-1} \left\{ \frac{1}{P+m^2+i0} \right\} \quad . \end{aligned} \quad (V.8)$$

Para  $m \rightarrow 0$  (V.8) se reduce a

$$D(R) = \frac{-i^q \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-1\right)}{4 \pi^{\nu/2} R^{\frac{\nu}{2}-1}} \quad , \quad (V.9)$$

Designamos:

$$R = \eta^{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \quad ; \quad P = \eta^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \quad (V.10)$$

De ahora en adelante, llamaremos  $R = R + i0$  y  $P = P + i0$  para simplificar la notación.

Para calcular las transformadas de Fourier que aparecen en las reglas de Feynman, tenemos en cuenta que la prescripción que satisface la causalidad cuántica se obtiene calculando en la métrica euclidiana y haciendo la prolongación analítica apropiada. Para ver esto un poco mejor, suponemos que partimos de una distribución que está bien definida y que es una función de una forma cuadrática positiva

$$\langle f(r^2 + t^2), \varphi(x, y, z, t) \rangle = \psi(\varphi) \quad . \quad (V.11)$$

Hacemos ahora una dilatación positiva en la variable  $t$  (o, equivalentemente, pasamos a la métrica  $(1, 1, 1, a^2)$ ), obteniendo

$$\begin{aligned} \langle f(r^2 + a^2 t^2), \varphi(x, y, z, t) \rangle &= \langle f(r^2 + t'^2), \varphi(x, y, z, \frac{t'}{a}) \rangle = \\ &= \psi(\varphi, a) \end{aligned} \tag{V.12}$$

que, para un  $\varphi$  fijo, es una función analítica de  $a$ . Si hacemos ahora la prolongación analítica

$$a = i - \epsilon, \quad a^2 = -1 - 2i\epsilon,$$

esta prolongación analítica define la distribución causal  $f(r^2 - t^2 - i0)$  que es la que interesa en la teoría cuántica de campos. Se ve que podemos trabajar siempre en métrica euclidiana. La prolongación analítica trae como resultado agregar un  $i^q$  en la expresión final. Se observa que éste no es un resultado trivial. Por ejemplo si tenemos que calcular la transformada de Fourier de una función  $f(R)$  esta filosofía nos conduce al teorema generalizado de

Bochner

$$F \left[ \begin{array}{c} \overline{f(R)} \\ \underline{\quad} \end{array} \right] = \frac{2^{\frac{\nu}{2}} \pi^{\frac{\nu}{2}}}{i^q (\sqrt{P})^{\frac{\nu}{2} - 1}} \int_0^\infty f(x^2) J_{\frac{\nu}{2} - 1} (x \sqrt{P}) x^{\frac{\nu}{2}} dx, \tag{V.13}$$

y se ve que sólo la parte de afuera del cono contribuye a la transformada de Fourier de una distribución causal, al contrario de lo que uno podría suponer a priori, que todo el espacio aparece.

Con esta introducción, vamos al cálculo de la energía propia y la polarización del vacío.

Antes de ello especificamos que para el cálculo de las integrales utilizamos las reglas siguientes:

$$\int d^{\nu} p f(p^2) = \frac{2 \pi^{\nu/2}}{i \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\infty} dp p^{\nu-1} f(p^2) =$$

$$= \frac{\pi^{\nu/2}}{i \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\infty} dp^2 (p^2)^{\frac{\nu}{2}-1} f(p^2) , \quad (V.14)$$

$$\int d^{\nu} p p_{\nu} f(p^2) = 0 , \quad (V.15)$$

$$\int d^{\nu} p p_{\alpha} p_{\beta} f(p^2) = \eta_{\alpha\beta} \frac{1}{\nu} \int d^{\nu} p p^2 f(p^2) , \quad (V.16)$$

donde  $\frac{2 \pi^{\nu/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$  es la superficie de la esfera unidad de dimensión  $\nu$ .

Las integrales de los diagramas que se consideran son de la forma siguiente:

$$I = \int d^{\nu} q \frac{(q^2)^n}{(q^2 + A)^m} = \frac{\pi^{\nu/2}}{i \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} A^{\frac{\nu}{2} + n - m} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + n\right) \Gamma\left(m - n - \frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma(m)} , \quad (V.17)$$

cuyo valor cerca del polo en  $\nu = 4$  es

$$I \approx \frac{(-)^{n-m} \pi^2 A^{2+n-m} \Gamma(n+2)}{i \left(2 - \frac{\nu}{2}\right) \Gamma(m) \Gamma(3+n-m)} . \quad (V.18)$$

a) Energía propia y polarización del vacío.

Comenzando por la energía propia

$$\Sigma(p) = \int \frac{d^4 k}{k^2 [(p-k)^2 + m^2]} , \quad (V.19)$$

y usando la fórmula de Feynman se lleva a

$$\Sigma(p) = \int d^4 k \int_0^1 dx \frac{1}{[(k - px)^2 + a^2]^2} , \quad a^2 = (p^2 + m^2) x (1 - x). \quad (V.20)$$

Estas integrales se calculan sin ningún problema con la ayuda de (V.17) y se obtiene

$$\zeta(p) = - (i)^q \pi^{v/2} m^{v-4} \Gamma\left(1 - \frac{v}{2}\right) F\left(1, 2 - \frac{v}{2}, \frac{v}{2}; -\frac{P}{m^2}\right). \quad (V.21)$$

Análogamente, el resultado para la polarización del vacío es:

$$\pi(p) = i^q m^{v-4} \pi^{v/2} \Gamma\left(2 - \frac{v}{2}\right) F\left(2 - \frac{v}{2}, 1, \frac{3}{2}; -\frac{P}{m^2}\right). \quad (V.22)$$

Se observa entonces un resultado curioso. Consideremos la energía propia. Aparece explícitamente el factor  $\Gamma\left(1 - \frac{v}{2}\right)$  que diverge para  $v = 2, 4, 6$  etc. pero que es convergente para  $v$  impar. O sea que el diagrama de orden más bajo resulta convergente si el número de dimensiones es impar. Lo mismo sucede con la polarización del vacío.

Ahora bien, mirando a  $\zeta(p)$ , ec. (V.21), uno tiende a considerar a  $v$  como variables compleja, ya que tenemos una función analítica en esa variable con polos para los valores pares de  $v$ . El número de dimensiones aparece así como un parámetro regularizador<sup>(5)</sup> y tenemos un nuevo método de regularización analítica que llamaremos, para diferenciarlo del anterior, dimensional.

Podemos aplicar ahora las prescripciones de Guelfand para definir una parte finita justo en la singularidad. La prescripción es

$$P_f \zeta(v, p) = \frac{d}{dv} (v - 4) \zeta(v, p) \Big|_{v=4}. \quad (V.23)$$

Debe, además, tenerse presente que la parte finita está definida a menos de un término arbitrario que es proporcional al residuo en el polo. Es fácil recordar porqué es así. Si tenemos

$$f(z) = \frac{A}{z-a} + B(z), \quad (V.24)$$

se define como parte finita

$$P_f f(a) = B(a) \quad (V.25)$$

o, lo que es equivalente, cuando la singularidad no viene separada tan explíci-

tamente

$$\frac{d}{dz} (z - a) f(z) \Big|_{z=a} = B(a) = P_f f(z) \Big|_{z=a}, \quad (V.26)$$

como se puede verificar directamente por derivación. Ahora bien, la física nos da una expresión explícita para el valor del parámetro coincidente con el polo. Cuando se hace la extensión analítica, siempre se puede multiplicar por una función arbitraria que tome el valor uno en el polo. Volviendo a la expresión (V.26), se puede multiplicar por una función  $\varphi(z)$  tal que  $\varphi(a) = 1$  obteniendo

$$\begin{aligned} P_f f(z) \varphi(z) \Big|_{z=a} &= \frac{d}{dz} (z - a) f(z) \varphi(z) \Big|_{z=a} = \\ &= B(a) + \varphi'(a) A, \end{aligned} \quad (V.27)$$

y como  $\varphi'(z)$  es arbitraria, se tiene un término que es proporcional al residuo. Por lo tanto las partes finitas son indeterminadas y la arbitrariedad de su definición es proporcional al residuo. Estas son precisamente las constantes de renormalización.

b) Energía propia y polarización del vacío en electrodinámica cuántica.

Las consideraciones anteriores pueden extenderse al caso de la electrodinámica cuántica en forma más o menos obvia. Damos los resultados para el caso de la energía propia y de la polarización del vacío.

Para el caso de la energía propia se tiene

$$\Sigma(p, \nu) = \frac{i e^2}{(2\pi)^\nu} \int d^\nu k \gamma_\mu \frac{[i \gamma \cdot (p - k) - m]}{[(p-k)^2 + m^2] k^2} \gamma^\mu, \quad (V.28)$$

siendo el resultado

$$\Sigma(p, \nu) = A + B (i \gamma \cdot p + m) + \Sigma_f(p, \nu) (i \gamma \cdot p + m)^2, \quad (V.29)$$

donde

$$A = - \frac{e^2}{(4\pi)^{\nu/2}} m^{\nu-3} \Gamma\left(2 - \frac{\nu}{2}\right) \frac{\nu-1}{\nu-3}, \quad (V.30a)$$

$$B = - \frac{e^2}{(4\pi)^{\nu/2}} m^{\nu-4} \Gamma\left(2 - \frac{\nu}{2}\right) \frac{\nu-1}{\nu-3}. \quad (V.30b)$$

En cuanto a la polarización del vacío

$$\Pi_{\lambda\mu}(k, \nu) = \frac{i e^2}{(2\pi)^\nu} \text{Tr} \int d^{\nu} p \gamma_{\lambda} \frac{i \gamma \cdot p - m}{p^2 + m^2} \gamma_{\mu} \frac{i \gamma \cdot (p - k) - m}{(p - k)^2 + m^2}, \quad (\text{V.31})$$

donde acordamos que se cumple  $\text{Tr} \gamma_{\lambda} \gamma_{\mu} = d(\nu) \eta_{\lambda\mu}$ , etc. con  $d(\nu) =$  número de componentes de un spinor en un espacio de  $\nu$ -dimensiones. Se obtiene

$$\begin{aligned} \Pi_{\lambda\mu}(k, \nu) = & \frac{e^2}{(4\pi)^{\nu/2}} \frac{d(\nu)}{3} \Gamma\left(2 - \frac{\nu}{2}\right) m^{\nu-4} \\ & \cdot (k_{\lambda} k_{\mu} - k^2 \eta_{\lambda\mu}) F\left(2 - \frac{\nu}{2}, 2, \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4m^2}\right), \quad (\text{V.32}) \end{aligned}$$

donde se observa que para cualquier valor de  $\nu$  la polarización del vacío contiene la expresión invariante de medida  $k_{\lambda} k_{\mu} - k^2 \eta_{\lambda\mu}$ , al contrario de lo que sucede con el método de regularización analítica donde esto ocurre sólo para el valor límite del parámetro.

Estos métodos son muy apropiados para su aplicación en las teorías de medida, del tipo Salam-Weinberg (ver Ref. (5) y (6)).

REFERENCIAS

- 1 - B. Zumino: Unified Theories of Weak and Electromagnetic Interactions, TH-1550 CERN (1972);  
J. Goldstone: Nuovo Cimento 19, 154 (1961).
- 2 - P.W. Higgs: Phys. Lett. 12, 132 (1964); Phys. Rev. Lett. 13, 508 (1964);  
Phys. Rev. 145, 1156 (1966).
- 3 - A. Salam y J. Ward: Phys. Lett. 13, (168 (1964));  
S. Weinberg: Phys. Rev. Lett. 19, 1264 (1967), y 27, 1688 (1971);  
A. Salam: Proceeding of the eighth Nobel Symposium, John Wiley, New York (1968);  
G. 't Hooft: Phys. Lett. 37 B, 195 (1971);  
A. Sirlin: Notas de curso (no publicadas). Universidad de La Plata (1972).
- 4 - T.W. Kibble: Phys. Rev. 155, 1554 (1967).
- 5 - C.G. Bollini y J.J. Giambiagi: Phys. Lett. 40 B, 566 (1972);  
G. t' Hooft y M. Veltman: Regularization and Renormalization of Gauge Fields,  
Preprint Institute for Theor. Phys., Univ. of Utrecht (1972);  
C.G. Bollini y J.J. Giambiagi: Nuovo Cimento (a ser publicado).
- 6 - C.G. Bollini, J.J. Giambiagi y A. Sirlin: Preprint New York Univ. (1972).

II Simposio Argentino de Física Teórica de  
Partículas y Campos.  
Bariloche - Enero 1973

MODELOS MULTIPERIFERICOS

A. Pignotti

Universidad de Buenos Aires

CONTENIDO

I	- Introducción . . . . .	pág.	99
II	- Desarrollo en ondas parciales generalizadas . . . . .	"	102
III	- Desarrollo $O(2, 1)$ . . . . .	"	105
IV	- Desarrollo $O(2, 1)$ múltiple . . . . .	"	109
V	- Propiedades cinemáticas . . . . .	"	112
VI	- Hipótesis dinámicas . . . . .	"	116
VII	- Modelo simplificado . . . . .	"	118
VIII	- Ecuación integral . . . . .	"	122
IX	- Generalizaciones . . . . .	"	124
X	- Procesos inclusivos . . . . .	"	126

## I - INTRODUCCION.

En esta serie de clases trataremos las interacciones fuertes a altas energías, es decir energías mucho mayores que las masas hadrónicas características que son del orden de 1 GeV. Debido a la fuerza de la interacción y a la conservación de la probabilidad, todos los procesos hadrónicos están fuertemente acoplados, y no podemos lograr una descripción detallada de un proceso individual sin tener una teoría completa. Estamos lejos de tener una teoría de ese tipo por lo que nuestro propósito es menos ambicioso.

Vamos a desarrollar un modelo - el modelo multiperiférico originariamente propuesto por Anati, Bertocchi, Fubini, Stanghellini y Tonin<sup>(1)</sup> - para explorar las propiedades de los procesos de producción a altas energías, y esperamos alcanzar conclusiones y encontrar algunas propiedades que sean más generales que el modelo que les dió origen.

Para motivar y guiar nuestra elección del modelo, vamos a discutir brevemente las características básicas de los procesos hadrónicos a alta energía.

### 1) Colisiones elásticas:

Son del tipo  $ab \rightarrow a' b'$ , donde el mismo par de partículas se encuentra en los estados inicial y final. Estos procesos se describen por dos variables que elegimos ser  $s = (p_a + p_b)^2$ ,  $t = (p_a - p_a')^2$ , y son principalmente difractivos, es decir que la sección eficaz diferencial muestra un pico hacia adelante casi independiente de la energía con un ancho en  $t$  del orden de  $1/R^2$ , donde  $R$  es un radio hadrónico característico:

$$\frac{d\sigma^{el}}{dt} = f(t) \quad \sigma^{el} \approx \text{constante} \quad . \quad (I.1)$$

Para colisiones protón-protón, por ej.,  $\sigma^{el} \approx 9 \text{ mb}$  a altas energías.

### 2) Colisiones inelásticas de dos cuerpos.

Estos procesos están caracterizados por el intercambio de números cuánticos

y el comportamiento a alta energía de la sección eficaz es del tipo:

$$\sigma^{2-c \text{ inel}}(s) \sim s^{2\alpha - 2}, \quad (\text{I.2})$$

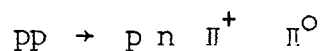
donde  $\alpha$  es la intersección de la más alta trayectoria de Regge que lleva los números cuánticos intercambiados; valores típicos son  $\alpha \approx 0.5$  para el intercambio de una carga;  $\alpha \approx 0$  para el intercambio de un número bariónico, etc. Debido al número finito de canales de dos cuerpos (donde denominamos "cuerpo" un hadrón que es estable frente a las interacciones fuertes) y puesto que  $\alpha < 1$  para intercambios diferentes del vacío, la contribución de los canales de dos cuerpos se hace despreciable a altas energías.

### 3) Procesos inelásticos de muchos cuerpos.

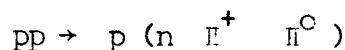
Discutiremos varias características de estos procesos.

a) Secciones eficaces parciales: El comportamiento con la energía muestra un comportamiento como potencia en el umbral, un crecimiento hasta un máximo y un decrecimiento a altas energías. Asintóticamente podemos distinguir dos casos:

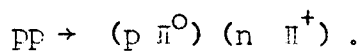
i) Cuando el intercambio del vacío es posible, se alcanza un pequeño valor constante (ver Fig. 1(a)). En este caso podemos agrupar las partículas finales en dos conjuntos, cada uno de los cuales lleva los números cuánticos de una de las partículas incidentes. Como ejemplo, podemos mencionar la reacción



donde son posibles dos agrupamientos de este tipo



y



ii) Cuando el intercambio del vacío no está permitido, la sección eficaz parcial tiende a cero a alta energía (ver Fig. 1(b)).

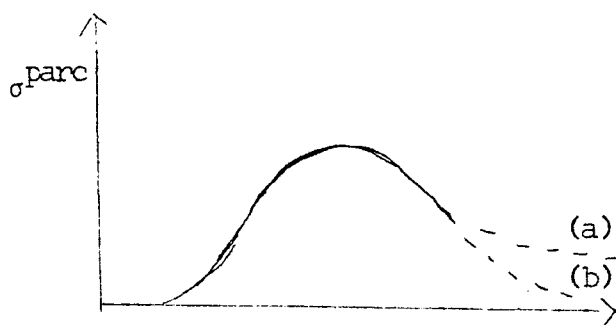


Fig. 1

Ejemplos típicos son los procesos de aniquilación, tales como los de aniquilación de bariones

(como en  $p\bar{p} \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \pi^0$ )

o aniquilación de hipercarga

(como en  $K^- p \rightarrow \Lambda \pi^+ \pi^0 \pi^-$ ).

b) Sección eficaz total inelástica: Se obtiene sumando todas las secciones eficaces parciales inelásticas. Encontramos que la adición de secciones eficaces que dependen de la energía de la manera descrita antes, lleva a un comportamiento mucho más plano para la sección eficaz total inelástica. Se observa que la tendencia de la sección eficaz total a su valor asintótico se produce a energía mucho más baja en el caso de canales exóticos, es decir para procesos en los cuales no se conocen resonancias o estados ligados.

c) Momento transversal promedio  $\langle p_{\perp} \rangle_{ab}^c$ : Es el valor promedio de la componente del momento de las partículas finales de tipo  $c$  perpendicular a la dirección del momento incidente. Este promedio podría aumentar para energías crecientes si se tienen en cuenta razones puramente cinemáticas, pero en cambio se observa que es aproximadamente independiente de la energía. Esto muestra que el espacio de las fases no está igualmente poblado, sino que a alta energía se puebla una fracción cada vez menor del mismo. Se ha observado también que  $\langle p_{\perp} \rangle_{ab}^c$  no depende apreciablemente de la naturaleza de las partículas incidentes,  $a$  y  $b$ , y depende sólo débilmente de la partícula observada  $c$ . El valor de  $\langle p_{\perp} \rangle$  es aproximadamente 350 MeV.

d) Inelasticidad  $\eta_{ab}^c$  : Se define como la fracción de la energía incidente llevadas por partículas de tipo  $c$  en el estado final, en el sistema de centro de masa. Se ha observado que es también independiente de la energía, pero sí depende de la naturaleza de las partículas incidente y observada. En particular el efecto de partícula dominante es bien conocido: la presencia de partículas veloces hacia adelante con los números cuánticos de la partícula incidente resulta favorecida. Así, por ejemplo,  $\eta_{Kp}^K > \eta_{pp}^K$ .

e) Multiplicidad promedio  $\bar{n}_{ab}^c$  : El número promedio de partículas de tipo  $c$  en la colisión de las partículas  $a$  y  $b$  crece con la energía de un modo mucho más lento de lo que sería posible cinemáticamente, esto es  $\sqrt{s}$ , y es compatible con un crecimiento logarítmico del tipo

$$\bar{n}_{ab}^c(s) = A^c \ln s + B_{ab}^c, \quad (I.3)$$

donde  $A^c$  no depende de las partículas incidentes.

Hemos puesto énfasis en los procesos de producción de una o más partículas debido a que la correspondiente sección eficaz es aproximadamente  $3/4$  de la sección eficaz total a alta energía y por consiguiente juegan un papel fundamental. Además estos procesos son importantes para el estudio de la dispersión elástica, precisamente porque a alta energía esta última es principalmente absorptiva, es decir está íntimamente relacionada a la inelástica a través del efecto sombra.

Nuestro objetivo es ahora construir un modelo para los procesos de muchas partículas que exhiba las características que acabamos de describir.

## II - DESARROLLO EN ONDAS PARCIALES GENERALIZADAS.

La amplitud conectada correspondiente a  $N$  partículas escalares depende de  $3N - 10$  variables independientes, donde  $3N$  es el número de componentes de los cuadríimpulsos después de haber tenido en cuenta los vínculos de capa de masa, y  $10$  es el número de generadores del grupo de Lorentz inhomogéneo:

4 corresponden a las traslaciones espacio-temporales, y llevan a los vínculos de conservación de energía-impulso, y las 6 restantes permiten elegir un sistema especial en el cual 6 componentes de los impulsos se anulan. Por ejemplo, podemos ir al sistema de reposo de la partícula 1 en el cual

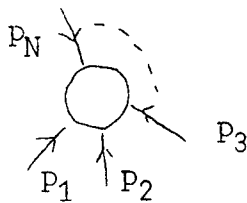
$$p_1 = (m_1, 0, 0, 0) , \quad (II.1)$$

en el cual  $\vec{p}_2$  apunta hacia la dirección positiva de  $z$

$$p_2 = (m_2 \cos h \alpha, 0, 0, m_2 \sin h \alpha > 0), \quad (II.2)$$

y en el cual  $\vec{p}_3$  define el plano  $y - z$

$$p_3 = (m_3 \cos h \beta, 0, m_3 \sin h \beta \sin \gamma > 0, m_3 \sin h \beta \cos \gamma) (II.3)$$

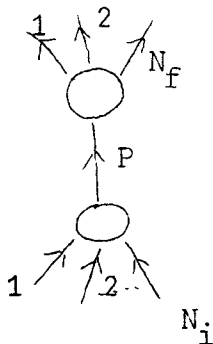


Denotaremos un sistema de referencia de ese tipo en el símbolo  $S(p_1, p_2, p_3)$ .

Fig. 2

Un procedimiento usual consiste en agrupar las partículas iniciales y finales según el diagrama de la Fig. 3 que tiene sólo un significado cinemático y define el cuadrivector de energía-impulso total

$$P = \sum_{j=1}^{N_i} p_j^i = \sum_{j=1}^{N_f} p_j^f . \quad (II.4)$$



Podemos describir los impulsos incidentes en el sistema  $S(P, p_1^i, p_2^i)$  en el cual

$$P = (\sqrt{s}, 0, 0, 0) \quad (II.5)$$

Fig. 3

y para este propósito necesitamos  $3(N_i + 1) - 10$  variables "iniciales", y correspondientemente los impulsos finales en el sistema  $S(P, p_1^f, p_2^f)$  introduciendo  $3(N_f + 1) - 10$  variables "finales". El número total de variables

es hasta el momento  $3(N_f + N_i) - 13$ , donde hemos contado las variables iniciales y finales y el cuadrado de la energía total de c.m. s. Están faltando todavía tres variables, las cuales pueden ser elegidas como los tres ángulos de Euler que parametrizan la rotación que describe la orientación relativa de los sistemas inicial y final. En efecto, en ambos sistemas  $P$  está dado por la ec. (II.5) y, por consiguiente, dichos sistemas sólo pueden diferir en una transformación de Lorentz que deja  $P$  invariante, es decir por una rotación.

Ahora podemos definir una amplitud de onda parcial generalizada<sup>(2)</sup>

$$A^{J \lambda_f \lambda_i}(v_f, s, v_i) = \int dg D^{J \lambda_f \lambda_i}(g) A(v_f, s, g, v_i), \quad (\text{II.6})$$

donde  $g$  designa colectivamente los tres parámetros del grupo y  $D^{J \lambda_f \lambda_i}$  son las representaciones irreducibles unitarias del grupo de rotaciones. Podemos invertir la ec. (II.6) y escribir el desarrollo en ondas parciales generalizadas

$$A(v_f, s, g, v_i) = \sum_{J \lambda_f \lambda_i} \frac{2J+1}{8\pi^2} A^{J \lambda_f \lambda_i}(v_f, s, v_i) D^{J \lambda_i \lambda_f^*}(g) \quad (\text{II.7})$$

El índice  $\lambda_f$  está asociado a la rotación de Euler final, y puede ser interpretado por lo tanto como una helicidad, es decir como la componente del impulso angular del estado final sobre la dirección del eje de rotación, que coincide con el impulso  $\vec{p}_1^f$  de la partícula  $1_f$ .

En el caso particular de dos partículas en el estado final,  $\vec{p}_1^f$  y  $\vec{p}_2^f$  son colineales por lo que no definen el plano  $y-z$ . Por consiguiente este sistema está definido a menos de una rotación alrededor del eje  $z$ , y la amplitud no depende del ángulo de Euler final; correspondientemente  $\lambda_f = 0$ . Naturalmente, un razonamiento análogo se aplica al estado inicial de dos partículas. El número de variables se verifica nuevamente si interpretamos que el número  $3(N_f + 1) - 10 = -1$  indica que no se necesita ninguna variable para el estado final de dos cuerpos y, además, que la dependencia de una de las va-

riables "geométricas" desaparece. Cuando  $N_f = N_i = 2$ , el desarrollo en ondas parciales de la ec. (II.7) se convierte en el desarrollo en ondas parciales usual para dos cuerpos.

### III - DESARROLLO $0(2, 1)$ .

Si ahora en cambio consideramos un proceso de producción de partículas a momento transferido fijo (en vez que a energía fija) podemos dibujar el diagrama de la fig. 4 y utilizar las siguientes variables: (3)

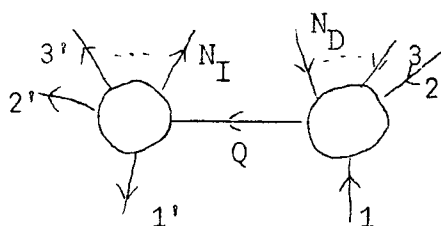


Fig. 4

- $3(N_D + 1) - 10$  variables  $v_D$  que describen los cuadvectores  $p_1, \dots, p_{N_D}$  en el sistema de referencia  $S(0, p_1, p_2) \equiv S_D$ .
- $3(N_I + 1) - 10$  variables  $v_I$ , análogas a las anteriores, para describir los cuadvectores  $p_1', \dots, p_{N_I}'$  en el sistema izquierdo  $S_I = S(Q, p_1', p_2')$ .
- el momento transferido invariante  $t = Q^2$

- 3 variables, denotadas colectivamente por  $g$ , que describen la orientación relativa de  $S_D$  y  $S_I$ . Estos sistemas tienen en común el cuadvector  $Q$ .

En casos normales en que las partículas 1 y 1' son incidentes y las demás salientes, con  $p_1^2 = m_D^2 \leq M_D^2 = (p_2 + \dots + p_{N_D})^2$  y  $p_1'^2 = m_I^2 \leq M_I^2 = (p_2' + \dots + p_{N_I}')^2$  el cuadvector  $Q$  es de tipo espacio ( $Q^2 < 0$ ), de manera que en  $S_D$  y  $S_I$  sus componentes son  $Q = (0, 0, 0, \sqrt{-t})$ . Por lo tanto,  $S_D$  y  $S_I$  pueden diferir a lo sumo en una transformación  $0(2, 1)$ , es decir, del subgrupo del grupo de Lorentz que deja invariante el eje  $z$ . Parametrizamos una transformación de  $0(2, 1)$  de la forma:

$$R_z(\mu) B_x(\xi) R_z(\nu), \quad (\text{III.1})$$

donde  $R_z(\alpha)$  es una rotación en un ángulo  $\alpha$  alrededor del eje  $z$ , y  $B_x(\xi)$

es una transformación de velocidad de parámetro  $\xi$  tal que su efecto sobre un cuadvivector es multiplicarlo por la matriz

$$\begin{pmatrix} \cos h \xi & \operatorname{sen} h \xi & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} h \xi & \cos h \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{III.2})$$

La proyección de onda parcial es ahora

$$A^{J \lambda_I \lambda_D} (v_I, t, v_D) = \int dg A (v_I, t, g, v_D) D^{J \lambda_I \lambda_D} (g), \quad (\text{III.3})$$

donde  $D^{J \lambda_I \lambda_D} (g)$  con  $\operatorname{Re} (J) = -\frac{1}{2}$  son ahora las representaciones unitarias de  $0(2, 1)$ , y la integración se realiza sobre el espacio de los parámetros del grupo. En el caso de  $d(\cos h \xi)$  los extremos de integración son 1 e  $\infty$  y la integral converge si

$$A (v_I, t, g, v_D) \prec (\cos h \xi)^{-\frac{1}{2} - \delta} \quad \text{con } \delta > 0 \quad . \quad (\text{III.4})$$

$v_I, v_D, t, \mu, \nu$  fijos  
 $\cos h \xi \rightarrow \infty$

El desarrollo análogo a II.7 es

$$A (v_I, t, g, v_D) = \sum_{\lambda_I \lambda_D} \int_{-\frac{1}{2} - i\infty}^{-\frac{1}{2} + i\infty} \frac{dJ}{\operatorname{tg} \pi J} D^{J \lambda_D \lambda_I^*} (g) A^{J \lambda_I \lambda_D} (v_I, t, v_D) \quad (\text{III.5})$$

Si suponemos entonces que para un cierto valor de  $t$  la proyección converge y suponemos además  $A^{J \lambda_I \lambda_D} (v_I, t, v_D)$  meromorfa en el plano  $J$ , al variar  $t$  los polos de esta función en  $J$  pueden moverse y cruzar la línea  $\operatorname{Re} (J) = -\frac{1}{2}$ . En tal caso hay que distorsionar el contorno y la amplitud total puede reexpresarse como una integral a lo largo de  $\operatorname{Re} J = -\frac{1}{2}$  más contribuciones del o de los polos. En el límite  $\cosh h \xi \rightarrow \infty$  el comportamiento está dominado por el polo

en  $J = \alpha(t)$  cuya parte real de  $\alpha$  sea máxima:

$$A(v_I, t, g, v_D) \sim (\cos h \xi)^{\alpha(t)} \beta(v_I, v_D, \mu, \nu, t) \quad (III.6)$$

$$v_I, v_D, \mu, \nu, t = \text{cte}$$

$$\cos h \xi \rightarrow \infty$$

¿Qué es ese límite que acabamos de escribir? Vamos a ver que es el límite de Regge. Para ello calcularemos:

$$s = (p_1 - p_{1'})^2 = m_D^2 + m_I^2 - 2 p_1 \cdot p_{1'} \quad (III.7)$$

y con el objeto de efectuar el producto  $p_1 \cdot p_{1'}$  expresaremos ambos vectores en un mismo sistema, por ejemplo,  $S_I$ . Por definición, en este sistema  $p_{1'}$  es del tipo:

$$p_{1'} \Big|_{S_I} = m_I (-\cos h q_I, 0, 0, \text{sen } h q_I) \quad (III.8)$$

(donde el signo - proviene de la convención indicada en la fig. 4) y  $q_I$  es función de las variables  $v_I$  y de  $t$ . Esto último puede verificarse si calculamos

$$M_I^2 \equiv (p_{2'} + \dots + p_{N_I'})^2 = (Q - p_{1'})^2 =$$

$$= m_I^2 + t + 2 m_I \sqrt{-t} \text{sen } h q_I \quad (III.9)$$

de donde resulta

$$\text{sen } h q_I = \frac{M_I^2 - m_I^2 - t}{2 m_I \sqrt{-t}} \quad (III.10)$$

Debemos ahora calcular  $p_1$  en el sistema  $S_I$ . Para ello sabemos que en  $S_D$  la expresión de  $p_1$  es análoga a la de la ec. (III.8), es decir

$$p_1 \Big|_{S_D} = m_D (\cos h q_D, 0, 0, \text{sen } h q_D) \quad (III.8')$$

con

$$\text{sen } h q_D = \frac{M_D^2 - m_D^2 - t}{2 m_D \sqrt{-t}} \quad (III.10')$$

Para pasar a  $S_I$  debemos aplicar la transformación de  $O(2, 1)$  de parámetro  $\mu, \xi$  y  $\nu$ , es decir

$$\begin{aligned} P_1 \Big|_{S_I} &= R_Z(\mu) B_X(\xi) R_Z(\nu) P_1 \Big|_{S_D} & (III.11) \\ &= m_D (\cos h q_D \cos h \xi, \cos h q_D \operatorname{sen} h \xi \cos \mu, \\ &\quad \cos h q_D \operatorname{sen} h \xi \operatorname{sen} \mu, \operatorname{sen} h q_D) . \end{aligned}$$

De (III.7)(III.8) y (III.11) obtenemos:

$$\begin{aligned} s &= m_D^2 + m_I^2 + 2 m_D m_I \left( \cos h q_I \cos h \xi \cos h q_D + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sen} h q_I \operatorname{sen} h q_D \right) . & (III.12) \end{aligned}$$

Vemos que el límite de la ec. (III.6) es, efectivamente, el límite de alta energía o de Regge.

Si ahora definimos la rapidez total  $Y$  como el parámetro de una transformación de Lorentz que lleva con una sola transformación de velocidad del sistema de laboratorio a un sistema en que el proyectil está en reposo, tenemos:

$$s = (P_1 - P_1')^2 = m_D^2 + m_I^2 + 2 m_D m_I \cos h Y , \quad (III.13)$$

de manera que

$$\cos h Y = \cos h q_I \cos h \xi \cos h q_D + \operatorname{sen} h q_I \operatorname{sen} h q_D . \quad (III.14)$$

En el límite de alta energía

$$\xi \approx Y \approx \ln \frac{s}{m_D m_I} . \quad (III.15)$$

IV - DESARROLLO 0 (2, 1) MULTIPLE<sup>(4)</sup> -

Pasemos ahora a describir un proceso de producción en el que mantenemos fijos dos o más momentos transferidos. Discutiremos el caso de dos pues es suficientemente general.

Las variables elegidas son ahora:

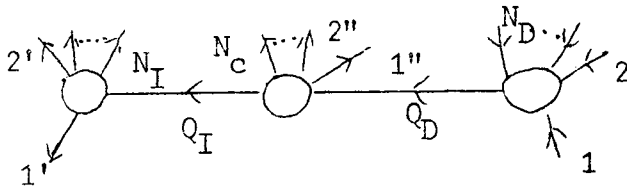


Fig. 5

- 3 ( $N_D + 1$ ) - 10 variables "derechas"
- 3 ( $N_I + 1$ ) - 10 variables "izquierdas"
- 3 ( $N_C + 2$ ) - 10 variables "centrales"
- 1  $t_D = Q_D^2$
- 1  $t_I = Q_I^2$
- 3  $g_D = (\mu_D \quad \xi_D \quad \nu_D)$
- 3  $g_I = (\mu_I \quad \xi_I \quad \nu_I)$

(IV.1)

Aquí observamos que hay dos momentos transferidos conectados al vértice central, y por lo tanto dos sistemas asociados a este vértice: uno, el  $S(Q_D, Q_I, p_{1''}) = S_C$  en que

$$Q_D = (0, 0, 0, \sqrt{-t_D}) \tag{IV.2}$$

y otro, el  $S(Q_I, Q_D, p_{1'}) = S'_C$  en que

$$\left. \begin{aligned} Q_D &= \sqrt{-t_D} (\sin h q_c, 0, 0, \cos h q_c) \\ Q_I &= (0, 0, 0, \sqrt{-t_I}) \end{aligned} \right\} \tag{IV.3}$$

Obviamente, se pasa de una a otra por una transformación de velocidad en la dirección z de parámetro  $q_c$  tal que

$$M_C^2 = (Q_D - Q_I)^2 = t_D + t_I + 2\sqrt{-t_D} \sqrt{-t_I} \cos h q_c, \tag{IV.4}$$

es decir

$$\cos h q_c = \frac{M_C^2 - t_D - t_I}{2\sqrt{-t_D} \sqrt{-t_I}} \tag{IV.5}$$

Finalmente,  $g_D$  y  $g_I$  denotan, respectivamente, los parámetros de las transformaciones del grupo  $O(2, 1)$  que dejan invariantes a  $Q_D$  y  $Q_I$ , respectivamente.

Por lo tanto el procedimiento para calcular cualquier cuadrivector en un sistema de referencia elegido es conceptualmente simple. Se expresa el cuadrivector en un sistema particular en términos de los momentos transferidos invariantes y de las variables internas que lo definen en ese sistema (por ej., en el caso considerado,  $v_D$ ,  $v_I$  o  $v_C$ ) y se efectúan luego las transformaciones de Lorentz correspondientes. Por ejemplo busquemos nuevamente  $p_1$  en el sistema  $S_I$ . Ahora tendremos:

$$p_1)_{S_I} = R_Z(\mu_I) B_X(\xi_I) R_Z(v_I) B_Z(q_C) R_Z(\mu_D) B_X(\xi_D) R_Z(v_D) p_1)_{S_D} \quad (IV.6)$$

Observamos aquí que  $p_1)_{S_I}$  depende de la suma  $(v_I + \mu_D)$  y no de  $v_I$  y  $\mu_D$  separadamente. En cambio:

$$p_1'')_{S_I} = R_Z(\mu_I) B_X(\xi_I) R_Z(v_I) p_1'')_{S_C} \quad (IV.7)$$

depende sólo de  $v_I$ . Esta dependencia, sin embargo, desaparece cuando en el vértice central es emitida sólo una partícula, pues en ese caso por conservación de energía-impulso

$$p_1'' = Q_D - Q_I \quad (IV.8)$$

y por (IV.3)  $p_1''$  es invariante ante rotaciones alrededor del eje  $z$ . Este es un nuevo ejemplo en el que desaparece la dependencia de una variable geométrica en el caso de un vértice al que sólo concurren tres líneas. En este caso la amplitud, en lugar de depender separadamente de los ángulos  $\mu_I$  y  $v_D$ , depende de la suma  $\omega = v_I + \mu_D$ . En el caso de la fig. 6 en que sólo concurren tres

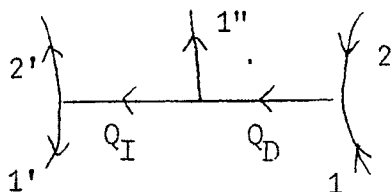


Fig. 6

líneas a vértices externos, también se pierde la dependencia en las variables  $v_D$  y  $\mu_I$ , y solo quedan para describir el proceso

$$\xi_I, \xi_D, t_I, t_D \text{ y } \omega.$$

En el límite de esta energía  $\xi_I, \xi_D \rightarrow \infty$ ,  $t_I, t_D, \omega$  fijos tenemos, si definimos

$$S_D = (P_1 - Q_I)^2, \quad S_I = (Q_D - P_1')^2, \quad (\text{IV.9})$$

$$\frac{S_D}{2 m_D \sqrt{-t_I}} \sim \cos h q_D \operatorname{sen} h q_C \cos h \xi_D, \quad (\text{IV.10a})$$

$$\frac{S_I}{2 m_I \sqrt{-t_D}} \sim \cos h q_I \operatorname{sen} h q_C \cos h \xi_I, \quad (\text{IV.10b})$$

$$\frac{S}{2 m_D m_I} \sim \cos h q_I (\cos h q_C + \cos \omega) \cos h q_D \cos h \xi_D \cos h \xi_I, \quad (\text{IV.10c})$$

de donde, usando (IV.9) y (IV.5), se deduce fácilmente

$$\frac{S}{S_D S_I} \sim \frac{m_C^2 - t_I - t_D + 2\sqrt{-t_I} \sqrt{-t_D} \cos \omega}{\lambda(t_I, t_D, m_C^2)}. \quad (\text{IV.11})$$

Si la partícula  $c$  es un pión, frecuentemente se puede despreciar su masa ( $m_C \approx .02 \text{ Gev}^2$ ). Para los casos extremos  $\cos \omega = \pm 1$  podemos escribir en el límite de alta energía

$$\frac{S}{S_D S_I} \approx \frac{1}{(\sqrt{-t_I} \mp \sqrt{-t_D})^2}. \quad (\text{IV.12})$$

Si el elemento de matriz en un experimento a  $s$  fijo crece con  $S_D$  y  $S_I$ , el valor de  $\cos \omega$  tratará de acomodarse de tal forma que  $S_D$  y  $S_I$  tomen los valores máximos compatibles con el vínculo (IV.11), es decir, prevalecerá el valor  $\cos \omega \approx -1$  con lo cual, reemplazando en (IV.12)  $-t_I$  y  $-t_D$  por un valor típico  $\tau$ , tenemos

$$\frac{S}{4\tau} \approx \frac{S_D}{4\tau} \frac{S_I}{4\tau}. \quad (\text{IV.13})$$

Esta relación se puede generalizar al caso del diagrama de la fig. 7 en que en el límite  $\cos h \xi_i \rightarrow \infty$

$$-t_i \approx \tau, \quad \omega_i \approx \Pi,$$

se cumple

$$\frac{s}{4\tau} \approx \prod_i \left( \frac{s_i}{4\tau} \right) \quad (IV.14)$$

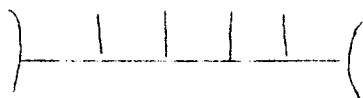


Fig. 7

V - PROPIEDADES CINEMATICAS.

En el caso de una amplitud para un proceso con 2 cuerpos en el estado inicial y N en el final, podemos elegir las variables que corresponden al diagrama de la fig. 8, es decir

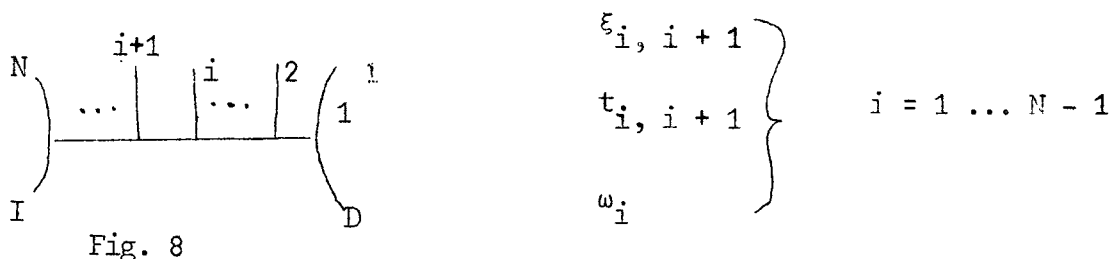


Fig. 8

A las transformaciones de Lorentz ya introducidas, podemos añadir la que nos lleva de un sistema en que la partícula D. está en reposo, es decir  $S (P_D, Q_{12}, P_1)$ , al sistema  $S (Q_{12}, P_D, P_1)$ , que es claramente una transformación de velocidad en la dirección z de parámetros  $q_1$  tal que

$$\text{senh } q_1 = \frac{m_1^2 - m_D^2 - t_{12}}{2 m_D \sqrt{-t_{12}}} \quad (V.1)$$

Análogamente, la transformación  $B_Z(q_N)$  con

$$\text{sen h } q_N = \frac{m_N^2 - m_I^2 - t_{N-1,N}}{2 m_I \sqrt{-t_{N-1,N}}}, \quad (\text{V.2})$$

nos llevará del sistema  $S(Q_{N-1,N}, P_I, P_N)$  al  $S(P_I, Q_{N-1,N}, P_N)$  en el cual la partícula inicial  $I$  está en reposo. Por lo tanto, la sucesión de transformaciones

$$B_Z(q_N) B_X(\xi_{N-1,N}) \dots B_X(\xi_{23}) B_Z(q_2) R_Z(\omega_2) B_X(\xi_{12}) B_Z(q_1) \quad (\text{V.3})$$

nos lleva del sistema que podemos llamar del proyectil al sistema de laboratorio (entendemos aquí que  $D$  es el proyectil e  $I$  el blanco).

En el límite multi-Regge (MR) tenemos  $t_{i, i+1}, \omega_i$  fijos y  $\text{cos h } \xi_{i, i+1} \rightarrow \infty$ , y en forma análoga a las expresiones (IV.10) podemos ver que

$$s_{i, i+1} = (P_i + P_{i+1})^2 \sim \text{cos h } \xi_{i, i+1}, \quad (\text{V.4a})$$

$$s_{i, i+1, i+2} = (P_i + P_{i+1} + P_{i+2})^2 \sim \text{cos h } \xi_{i, i+1} \text{cos h } \xi_{i+1, i+2}, \quad (\text{V.4b})$$

$$s = (P_1 + \dots + P_N)^2 \sim \text{cos h } \xi_{12} \text{cos h } \xi_{23} \dots \text{cos h } \xi_{N-1,N}. \quad (\text{V.4c})$$

Vamos a ver que en este límite se cumplen las siguientes propiedades:

- a) los momentos longitudinales de las partículas producidas  $p_{i\parallel}$  están ordenados;
- b) los momentos transversales  $p_{i\perp}$  se mantienen acotados.

Vamos a estudiar estas propiedades en el sistema centro de masa, y para ello proyectamos las componentes temporal y longitudinal de  $p_i$  (por simplicidad consideramos el caso  $m_D = m_I = m$ )

$$E_i^{c.m.} = P_i \cdot \frac{(P_D + P_I)}{\sqrt{s}}, \quad (\text{V.5})$$

$$P_{i\parallel}^{c.m.} = -P_i \cdot \frac{P_D - P_I}{2 P_{inc}^{c.m.}} = -\frac{P_i \cdot (P_D - P_I)}{\lambda^{1/2} (s, m^2, m^2) / \sqrt{s}}, \quad (\text{V.6})$$

$$\begin{aligned}
 p_{i\perp}^2 &= E_i^{\text{cm}2} - p_{i\parallel}^{\text{cm}2} - m_i^2 \\
 &= \left[ (p_i \cdot p_D)^2 + (p_i \cdot p_I)^2 \right] \frac{4m^2}{s} + \frac{4(p_i \cdot p_D)(p_i \cdot p_I)}{s} - m_i^2. \quad (\text{V.7})
 \end{aligned}$$

Los últimos miembros de las ecuaciones (V.5)(V.6) y (V.7) pueden ser calculados en un sistema de referencia arbitrario y elegimos uno en que la partícula  $i$  está en reposo. Tal sistema difiere del sistema  $S(Q_{i-1}, Q_{i,i+1}, p_i)$  en una transformación de velocidad finita en la dirección  $z$ , es decir es un sistema intermedio entre  $S(Q_{i-1,i}, Q_{i,i+1}, p_i)$  y  $S(Q_{i,i+1}, Q_{i-1,i}, p_i)$  y en él

$$\left. \begin{aligned}
 E_D|_i &\sim \cos h \xi_{12} \cos h \xi_{23} \dots \cos h \xi_{i-1,i} \\
 E_I|_i &\sim \cos h \xi_{i,i+1} \dots \cos h \xi_{N-1,N}
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.8})$$

es decir, recordando (V.4c)

$$s \sim E_D E_I. \quad (\text{V.9})$$

Las expresiones (V.6) y (V.7) se reescriben en este sistema

$$p_{i\parallel}^{\text{cm}} = \frac{m_i}{\sqrt{s}} (E_I|_i - E_D|_i), \quad (\text{V.10})$$

$$p_{i\perp}^2 = \frac{4m_i^2 m_i^2}{s^2} (E_D|_i^2 + E_I|_i^2) + \frac{4m_i^2 E_D E_I}{s} - m_i^2. \quad (\text{V.11})$$

De las fórmulas (V.8) y (V.10) se concluye que en el límite multi-Regge

$$p_{i\parallel}^{\text{cm}} > p_{i+1\parallel}^{\text{cm}}, \quad (\text{V.12})$$

puesto que  $E_D|_{i+1} > E_D|_i$  y  $E_I|_{i+1} < E_I|_i$ , es decir que los momentos longitudinales en el  $\text{cm}$  están ordenados.

De (V.11), (V.8) y (V.9) vemos también que en el límite MR los  $p_{i\perp}$  se mantienen acotados.

Vimos que mantener los  $|t_{i, i+1}|$  acotados implica que los  $p_{i\perp}$  también

están acotados, independientemente del valor de la energía total y las subenergías. Este hecho hace posible introducir una gran simplificación en la cinemática. En lugar de ir del sistema del proyectil al del laboratorio por la complicada secuencia de transformaciones (V.3), que pasa sucesivamente por sistemas de referencia en que las partículas  $i = 1, 2, \dots, N$  están en reposo<sup>(\*)</sup>, podemos utilizar tan solo transformaciones de velocidad colineales en la dirección de incidencia. Dichas transformaciones nos llevan del sistema en que  $p_{i\ell} = 0$  al sistema de laboratorio, es decir que en este último tenemos:

$$\left. \begin{aligned} E_i &= m_{\perp i} \cosh y_i \\ p_{i\ell} &= m_{\perp i} \sinh y_i \end{aligned} \right\} \quad (V.13)$$

con  $m_{\perp i} = \sqrt{p_{i\perp}^2 + m_i^2}$ .

Observamos que  $dy_i = \frac{d p_{i\ell}}{E_i}$  es decir que es invariante frente a transformaciones de velocidad en la dirección de incidencia, lo que nos permite pasar del sistema de laboratorio al de  $cm$  o al del proyectil con un simple cambio del origen a partir del cual medimos la variable rapidez  $y$ . El ordenamiento longitudinal en el límite MR se expresa entonces en la forma

$$y_N < y_{N-1} < \dots > y_1 .$$

(\*)

Por esto queremos decir que podemos descomponer la transformación  $B_Z(q_i)$  como producto de dos transformaciones colineales sucesivas de velocidad, una que lleva del sistema  $S(Q_{i-1,i}, Q_{i,i+1}, p_i)$  a un sistema en que la partícula  $i$  está en reposo, y otra que lleva de este sistema a  $S(Q_{i,i+1}, Q_{i-1,i}, p_i)$ .

VI - HIPOTESIS DINAMICAS

A alta energía, cuando decimos que procesos hadrónicos a dos cuerpos son periféricos, entendemos que la sección eficaz se concentra a pequeños valores de las variables  $t$  o  $u$ . Estas variables quedan definidas por las figuras 9(a) y (b).



Fig. 9

y consideramos un intervalo  $|t| < \Delta$ ,  $|u| < \Delta$ , es decir una fracción del espacio de las fases que tiende a cero a alta energía. La hipótesis periférica sostiene que la fracción de la sección eficaz concentrada en este intervalo no tiende a cero sino que, para  $\Delta$  convenientemente elegido, constituye la parte dominante de la sección eficaz para dicho proceso. Un modelo de tipo periférico es el de Regge, que propone para la amplitud a alta energía en la zona periférica una expresión

$$A \sim \beta_{I2}(t) \beta_{D1}(t) s_t^{\alpha(t)} + \beta_{I1}(u) \beta_{D2}(u) s_u^{\alpha(u)}, \quad (VI.1)$$

donde la característica periférica está implementada por la dependencia de los residuos  $\beta$  y las trayectorias de Regge  $\alpha$  en  $t$  y  $u$ .

Para los procesos de producción la extensión natural de la hipótesis anterior es la hipótesis multiperiférica (MP). Para ello se dibujan  $N!$  diagramas obtenidos a partir del de la fig. 10 por permutación de los índices de las partículas finales.

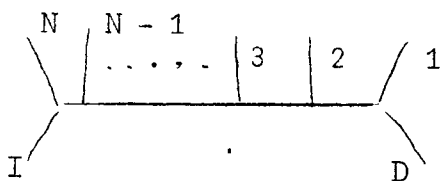


Fig. 10

Cada diagrama define  $N - 1$  variables  $t$ . La zona MP del espacio de las fases asociada a cada diagrama es aquella en que todos los  $t_{i, i+1}$  satisfacen

$$|t_{i, i+1}| < \Delta. \text{ La unión de las zonas aso-}$$

ciadas a los distintos diagramas es la zona MP total. Nuevamente, el volumen de esta zona es una fracción del volumen total del espacio de las fases que tiende a cero al **aumentar** la energía, pero afirmamos que allí se concentra la parte importante de la sección eficaz hadrónica para el procesos considerado.

La segunda hipótesis en que se basan los modelos MP es que la amplitud de producción asociada a un dado diagrama puede escribirse como producto de factores cada uno de los cuales depende de un número limitado de cuadvectores cercanos en dicho diagrama. Esto hace que los mecanismos de producción en puntos alejados del diagrama operen independientemente, y trae como consecuencia correlaciones de corto alcance que discutiremos más adelante.

Un ejemplo de modelo MP es el multi-Regge, en el que la amplitud se escribe

$$A \sim \beta_{IN} (t_{N-1,N}) (s_{N-1,N})^\alpha (t_{N-1,N}) \beta_{N-1} (t_{N-1,N}, \omega_{N-1}, t_{N-2,N-1}) \dots \dots (s_{12})^{\alpha(12)} \beta_{DN} (t_{12}) , \quad (VI.2)$$

pero queremos **aclarar** una diferencia importante con el caso anterior de procesos a dos cuerpos. En estos últimos la zona periférica coincide con la del límite de Regge:  $t$  fijo,  $s \rightarrow \infty$ . En el caso de muchas partículas la zona MP solo exige  $t_{i, i+1}$  acotados,  $s \rightarrow \infty$ , mientras que el límite MR requiere que todos los  $s_{i, i+1}$  crezcan. En otras palabras, una subenergía puede absorber el crecimiento de  $s$ , y en ese caso nos encontramos en la zona MP pero no en la MR.

Vimos anteriormente que en la zona MR las rapidezces de las partículas están ordenadas, y los  $p_{\perp i}$  limitados. Si estudiamos el comportamiento en toda la zona MP vemos que por lo menos una subenergía debe tender a infinito para  $s \rightarrow \infty$ ; sea esta la subenergía  $s_{j, j+1}$ . Análogamente a lo demostrado antes, se puede ver que en este límite  $p_{\perp i}^{cm} > p_{\perp k}^{cm}$  para toda  $i \leq j, k \geq j+1$ . La limitación de todos los  $p_{\perp i}$  sigue siendo válida en toda la zona MP.

Podemos examinar la limitación de los  $p_{\perp}$  a la luz del argumento siguiente. Supongamos que la amplitud de producción es independiente de la energía total y los momentos de las partículas finales. Obtendríamos:

$$\sigma_N \sim \frac{1}{s} \int d\phi_N |A|^2 = \frac{|A|^2 V_N}{s}, \quad (\text{VI.3})$$

donde  $V_N$  es el volumen del espacio de las fases de  $N$  partículas

$$V_N = \int \dots \int \frac{d^3 p_1}{E_1} \dots \frac{d^3 p_N}{E_N} \delta^4(p_1 + \dots + p_N - P). \quad (\text{VI.4})$$

Por razones dimensionales es fácil ver que cuando  $P^2 = s \rightarrow \infty$   $V_N \sim s^{N-2}$ , de donde  $\sigma_N \sim s^{N-3}$ . Este resultado viola el límite de Froissart, consecuencia de la unitariedad, que dice  $\sigma^{\text{tot}}(s) \lesssim (\ln s)^2$ , para  $N \geq 4$ . La forma como las interacciones fuertes respetan el límite de Froissart parece ser no poblar las direcciones transversales del espacio de las fases, con lo cual cada partícula producida ya no contribuye con una potencia de  $s$  a la sección eficaz.

## VII - MODELO SIMPLIFICADO

Desarrollamos a continuación un modelo hipersimplificado<sup>(5),(6)</sup> que nos permite sin embargo llegar a características cualitativas comunes a gran cantidad de modelos más realistas y complejos.

Supongamos dos partículas incidentes, denotadas por los índices  $D$  e  $I$ , y  $N$  partículas finales, de las cuales la 1 y la  $N$  llevan los números cuánticos de las incidentes, y las  $N - 2 = n$  restantes son piones. Utilizamos aproximaciones válidas en la zona MR para todo el espacio de las fases (en la práctica, para toda la zona MP que es la única que contribuye) y escribimos:

$$s_{i, i+1} \approx m_{\perp i} m_{\perp i+1} e^{z_{i, i+1}}, \quad (\text{VII.1})$$

con

$$z_{i,i+1} = y_i - y_{i+1}, \quad m_{\perp i} = \sqrt{m_i^2 + p_{i\perp}^2}, \quad (\text{VII.2})$$

y

$$t_{i,i+1} \approx -m_{\perp i} m_{\perp i+1} e^{-z_{i,i+1}} - \vec{Q}_{\perp i}^2, \quad (\text{VII.3})$$

con

$$\vec{Q}_{\perp i} = \sum_{j=1}^i \vec{p}_{i\perp j}. \quad (\text{VII.4})$$

Suponemos un único mecanismo de intercambio caracterizado por un valor promedio  $\bar{\alpha}$  de la trayectoria de Regge intercambiada, y utilizamos la aproximación de residuos exponenciales del tipo  $e^{b t_{i,i+1}}$ , independiente de los ángulos  $\omega_i$ .

Con todas estas aproximaciones la sección eficaz se puede escribir como

$$d\sigma \sim \frac{1}{s} G_I^2 G_D^2 g^{2n} e^{\bar{\alpha} \sum_{i=1}^{N-1} z_{i,i+1}} \prod_{i=1}^{N-1} e^{-b m_{\perp i} m_{\perp i+1}} e^{-z_{i,i+1}} \quad (\text{VII.5})$$

$$e^{-b \vec{Q}_{\perp i}^2} d\phi^N.$$

Si cambiamos variables de  $\vec{p}_{i\perp}$  a  $\vec{Q}_{\perp i}$ , la conservación de impulso en dirección transversal impone  $\vec{Q}_{\perp N} = 0$ , y el resultado de la integración sobre los  $\vec{Q}_{\perp i}$  puede aproximarse reemplazando  $m_{\perp i}$  por valores medios y redefiniendo las constantes de acoplamiento  $g$ ,  $G_D$  y  $G_I$ .

La función  $\theta(z) = \exp \left[ -b m_{\perp}^2 e^{-z} \right]$  es del tipo indicado en la fig. 10, en

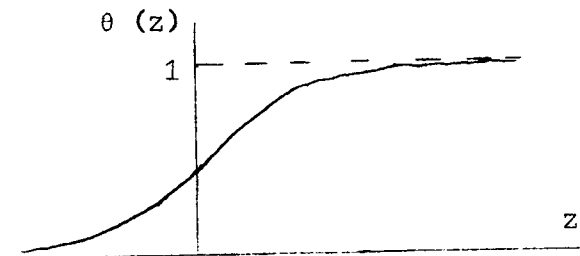


Fig. 10

la que un desplazamiento del origen corresponde a una elección distinta de constante  $b$ . Vemos que  $\theta(z)$  es del tipo función escalón y que refleja la ordenación de las rapidezces impuesta por la limitación de los momentos transferidos.

Finalmente, la conservación de energía y de la componente longitudinal del impulso puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 & \delta \left( m_D e^Y - \sum m_{\perp i} e^{y_i} \right) \delta \left( m_I - \sum m_{\perp i} e^{-y_i} \right) \approx \\
 & \approx \delta \left( m_D e^Y - m_{\perp 1} e^{y_1} \right) \delta \left( m_I - m_{\perp N} e^{-y_N} \right) = \\
 & = \frac{1}{m_I m_D e^Y} \delta \left( y_1 - Y - \ln \frac{m_D}{m_{\perp 1}} \right) \delta \left( y_N - \ln \frac{m_{\perp N}}{m_I} \right) \approx \\
 & \approx \frac{e^{-Y}}{m_I m_D} \delta (y_1 - Y) \delta (y_N) \tag{VII.6}
 \end{aligned}$$

con lo cual

$$e^{2\bar{\alpha}} \int z_{i,i-1} = e^{2\bar{\alpha}} (y_1 - y_N) \approx e^{2\bar{\alpha}} y,$$

y obtenemos:

$$\sigma_N \approx G_I^2 G_D^2 e^{(2\bar{\alpha} - 2)Y} \frac{g^{2n}}{g} I_n(Y), \tag{VII.7}$$

con

$$I_n(Y) = \int dy_2 \dots \int dy_{N-1} \theta(z_{12}) \dots \theta(z_{N-1,N}) = \frac{Y^n}{n!}, \tag{VII.8}$$

es decir:

$$\sigma_N(Y) = G_I^2 G_D^2 \frac{(g^2 Y)^n}{n!} e^{(2\bar{\alpha} - 2)Y}. \tag{VII.9}$$

La sección eficaz total viene dada por:

$$\sigma_{ID}^{tot} = \sum_{N=2}^{\infty} \sigma_N = G_I^2 G_D^2 e^{(2\bar{\alpha} - 2 + g^2)Y}, \tag{VII.10}$$

y la constancia de la misma requiere

$$g^2 = 2 - 2\bar{\alpha}, \tag{VII.11}$$

con lo que

$$\sigma_N(Y) = \sigma_{ID}^{tot} \frac{(g^2 Y)^n}{n!} e^{-g^2 Y}. \tag{VII.12}$$

El valor medio del número de partículas producido es

$$\bar{n} = \frac{\sum n \sigma_N}{\sigma_{ID}^{tot}} = g^2 Y, \tag{VII.13}$$

es decir que crece logarítmicamente con la energía, y a una energía dada, la distribución de multiplicidades es de tipo Poisson, o sea

$$\frac{\sigma_N}{\sigma_{ID}^{tot}} = P_n(Y) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \quad (VII.14)$$

Experimentalmente se observa crecimiento del número de partículas producidas compatible con la ec. (VII.13), con un coeficiente  $g^2$  que vale entre 1 y 2. De la relación (VII.11) sigue que  $\bar{\alpha} \approx 0 \rightarrow .5$ , compatible con algún tipo de mesón promedio intercambiado.

En resumen, las características del modelo son:

- 1) Las secciones eficaces parciales crecen con la energía, alcanzan un máximo y van a cero.
- 2) La sección eficaz total es constante y factorizada.
- 3) La multiplicidad promedio crece logarítmicamente con la energía.
- 4) La distribución de multiplicidades es de tipo Poisson.

Con la estimación del parámetro  $g^2$  nos podemos preguntar cuánto vale el valor medio de la subenergía. Recordando que

$$\ln \left( \frac{s}{4\tau} \right) \approx \sum_i \ln \left( \frac{s_{i,i+1}}{4\tau} \right),$$

a una multiplicidad fija

$$\langle \ln \left( \frac{s_{i,i+1}}{4\tau} \right) \rangle_n \approx \frac{\ln(s/4\tau)}{n+1} \quad (VII.15)$$

Promediando ahora sobre multiplicidades

$$\begin{aligned} \langle \langle \ln \left( \frac{s_{i,i+1}}{4\tau} \right) \rangle_n \rangle &= \frac{\sum P_n(n+1) \langle \ln \left( \frac{s_{i,i+1}}{4\tau} \right) \rangle_n}{\sum P_n(n+1)} \\ &= \frac{\ln \left( \frac{s}{4\tau} \right)}{\bar{n}+1} \approx \frac{1}{g^2} \quad (VII.16) \end{aligned}$$

es decir que

$$\langle\langle \frac{s_{i,i+1}}{4 \tau} \rangle\rangle \approx e^{1/g^2} \approx 2, \quad (\text{VII.17})$$

o sea

$$\langle\langle s_{i,i+1} \rangle\rangle \approx 8 \langle |t| \rangle. \quad (\text{VII.18})$$

Si tomamos  $\langle |t| \rangle \approx \langle p_{\perp}^2 \rangle \approx 0.1 \text{ GeV}^2$ , vemos que  $\langle\langle s_{i,i+1} \rangle\rangle \approx 0.8 \text{ GeV}^2$ , es decir la subenergía promedio de un par de piones producidos se halla entre la energía del  $\rho$  y la del  $f^0$ , o sea, está en plena zona de resonancias. El haber usado intercambio de reggeones para representar la amplitud no puede entonces justificarse, aunque argumentos de dualidad sugieren que el error cometido en promedio puede no ser tan grave. Notamos también que al aumentar la energía, el valor promedio de la subenergía no aumenta, sino que el modelo tiende en cambio a producir más partículas.

### VIII - ECUACION INTEGRAL<sup>(1),(7)</sup>

Podemos reproducir el cálculo anterior con un lenguaje un poco más sofisticado y que es susceptible de mejoras. Utilizando la relación de unitariedad podemos escribir:

$$\text{Im } A_{el} (Y, t=0) = \sum_{N=2}^{\infty} \int \left| A_{2N} \right|^2 d\phi^N, \quad (\text{VIII.1})$$

e introduciendo el modelo MP para  $A_{2N}$  llegamos a una expresión del tipo

$$\text{Im } A_{el} (Y, t=0) = G_I^2 B(Y) G_D^2, \quad (\text{VIII.2})$$

con

$$B(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(Y) \quad (\text{VIII.3})$$

y

$$B_n(Y) = g^{2n} \int K(z_{12}) dz_{12} \dots \int K(z_{N-1,N}) dz_{N-1,N} \delta \left( \sum_{i=1}^{N-1} z_{i,i+1} - Y \right). \quad (\text{VIII.4})$$

La "aproximación de Born" corresponde a  $n = 0$

$$B_0(Y) = \int K(z_{12}) \delta(z_{12} - Y) dz_{12} = K(Y) \quad (\text{VIII.5})$$

y el término siguiente es:

$$\begin{aligned} B_1(Y) &= \int K(z_{12}) K(z_{23}) dz_{12} dz_{23} \delta(z_{12} + z_{23} - Y) \\ &= \int B_0(Y - z) K(z) dz \end{aligned} \quad (\text{VIII.6})$$

Vemos que existe una relación de recurrencia entre  $B_n$  y  $B_{n+1}$  del tipo

$$B_{n+1}(Y) = g^2 \int B_n(Y - z) K(z) dz \quad (\text{VIII.7})$$

y sumando esta relación sobre  $n$  obtenemos:

$$\begin{aligned} B(Y) &= B_0(Y) + g^2 \int B_0(Y - z) K(z) dz \\ &= K(Y) + g^2 \int K(Y - Y') B(Y') dY' \end{aligned} \quad (\text{VIII.8})$$

La solución iterativa de esta ecuación integral corresponde a la suma que hicimos explícitamente en el caso

$$K(z) = \theta(z) e^{(2\bar{\alpha} - 2)z} \quad (\text{VIII.9})$$

Una forma más elegante de resolver la ecuación integral es notar que la ecuación es del tipo convolución y por lo tanto introducir la transformada de Laplace

$$b(j) = \int_0^\infty e^{-Yj} B(Y) dY, \quad (\text{VIII.10})$$

con lo cual la ecuación queda diagonalizada en el espacio transformado

$$b(j) = k(j) + g^2 k(j) b(j) \quad (\text{VIII.11})$$

La solución es entonces

$$B(Y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-1\infty}^{c+i\infty} b(j) e^{jY} dj \quad (\text{VIII.12})$$

con

$$b(j) = \frac{k(j)}{1 - g^2 k(j)} \quad (\text{VIII.13})$$

Si tomamos  $\theta(z)$  estrictamente como una función escalón en (VIII.9) tenemos

$$k(j) = \frac{1}{j - 2\bar{\alpha} + 2}, \quad (\text{VIII.14})$$

y

$$b(j) = \frac{1}{j - 2\bar{\alpha} + 2 - g^2}. \quad (\text{VIII.15})$$

Vemos que el término de Born tiene un polo en el plano  $j$  en  $2\bar{\alpha} - 2$ , y el resultado de sumar la serie es un polo desplazado a  $j = 2\bar{\alpha} - 2 + g^2$ .

### IX - GENERALIZACIONES.

Con la técnica de la ecuación integral debidamente desarrollada se puede prescindir de muchas de las aproximaciones hechas, a pesar de lo cual los rasgos principales del modelo subsisten.

1) En primer lugar, se puede intercambiar un reggeón de pendiente no nula, es decir eliminar la aproximación  $\alpha(t) \approx \bar{\alpha}$ . Como consecuencia, el término de Born tiene una superposición de potencias, es decir un corte en el plano  $j$  con punto de ramificación logarítmico en  $j = j_c = 2\alpha(0) - 1$ .

De la expresión (VIII.13) y el hecho que  $k(j) > 0$  para  $j > j_c$ , se deduce que  $b(j)$  tiene la singularidad en  $j_c$  donde, sin embargo, se mantiene acotada, y un polo en  $j = j_p > j_c$  <sup>(8)</sup>.

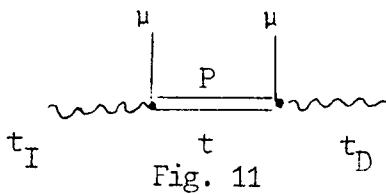
2) Otra generalización es introducir varios "canales", es decir mecanismos de intercambio y partículas producidas.  $B$  y  $K$  pasan entonces a tener índices matriciales, la ecuación (VIII.11) es ahora matricial y debe resolverse por inversión de matrices, y los polos vienen dados por los ceros del determinante correspondiente <sup>(9)</sup>.

Por una razón de consistencia, habiendo generado una sección eficaz constante, es decir un polo en  $j = 1$ , el Pomerón, es natural tratar de introducir su intercambio como posible mecanismo dinámico. Aquí surge una dificultad, seña-

lada hace tiempo por Finkelstein y Kajantie<sup>(10)</sup>, que se manifiesta de la siguiente forma: el intercambio del Pomerón da origen a un corte en  $j_c = 2 \alpha_p(0) - 1$ , es decir  $j_c = 1$  si  $\alpha_p(0) = 1$ . Vimos que además se generaba un polo en  $j_p > j_c$ , y ello en este caso viola el límite de Froissart. Varias posibles soluciones a esta inconsistencia han sido sugeridas pero el problema queda abierto.

a) La intersección del Pomerón está algo por debajo de 1, es decir  $\alpha_p(0) = 1 - \epsilon$  con lo cual  $\alpha_c = 1 - 2 \epsilon < \alpha_p$  y el conflicto desaparece. No hay evidencia experimental de que  $\alpha_p(0) < 1$ , y esta solución es considerada poco estética.

b) El residuo del Pomerón acoplado a otros intercambios se anula cuando  $t = 0$



para todo  $t_I$  y  $t_D$  en la zona física del proceso de producción. Esto no parece ser consistente con el hecho de que el Pomerón se acopla para  $t = 0$  a partículas físicas, es decir cuando  $t_I = u^2 = t_D$  (Fig. 11)<sup>(11)</sup>.

c) La trayectoria del Pomerón pasa por 1 para  $t = 0$ , pero tiene allí una singularidad. La posibilidad de reconciliar de esta forma  $\alpha_p(0) = 1$  con unitariedad ha sido estudiada por ejemplo por Bronzan<sup>(12)</sup>, pero no está totalmente esclarecida.

d) No debe pretenderse una solución del problema de las interacciones fuertes que sea estrictamente unitaria a todas las energías, sin tener en cuenta otras interacciones que eventualmente pueden jugar un papel.

3) La ecuación integral puede extenderse al estudio de  $\text{Im } A_{el}(s, t \neq 0)$ , y en este caso las fases de la amplitud de producción entran a jugar un papel no trivial, puesto que no se cancelan exactamente en el integrando de la relación de unitariedad<sup>(13)</sup>.

4) La ecuación integral puede usarse para procesos a dos cuerpos no elásticos, para lo cual deben introducirse números cuánticos al modelo y puede entenderse el hecho que trayectorias de Regge que llevan números cuánticos tengan intersecciones por debajo de la del Pomerón.

X - PROCESOS INCLUSIVOS.

El modelo MP se puede aplicar al estudio de procesos del tipo  $a+b \rightarrow c +$  cualquier cosa, donde sólo se detecta un hadrón final de momento  $p^c$  y se suma sobre todos los estados hadrónicos que pueden acompañar a esta partícula.

Se describen dichos procesos por la función:

$$\frac{1}{\sigma_{ab}^{tot}} \frac{d \sigma_{ab}^c}{d^3 p^c} = \frac{1}{\sigma_{ab}^{tot}} \frac{d \sigma_{ab}^c}{d^2 p_{\perp}^c dy^c} (p_{\perp}^c, y^c, Y) \equiv \rho_{ab}^c (p_{\perp}^c, y^c, Y) \quad (X.1)$$

que por su definición satisface la relación

$$\int d^2 p_{\perp} dy \rho_{ab}^c = n_{ab}^c(Y). \quad (X.2)$$

Para construir esta función  $\rho$  o "espectro" en el modelo MP debe efectuarse una doble suma: a multiplicidad fija debe sumarse sobre todas las partículas finales que contribuyen, y además debe sumarse sobre multiplicidades

$$\rho_{ab}^c = \sum_{N_c=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N_c} \rho^{i, N_c}. \quad (X.3)$$

Empezamos considerando la contribución de  $i = 1$  sumada sobre todas las multiplicidades<sup>(14)</sup>, representada en la fig. 12:

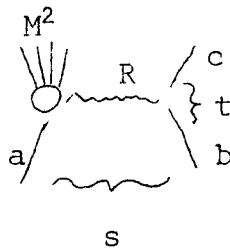
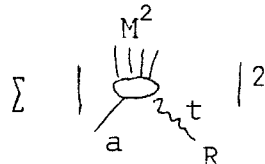


Fig. 12

Esta contribución se escribe como

$$\rho_{ab}^c = \frac{1}{s} \frac{1}{\sigma_{ab}^{tot}} \beta_b^c(t) \left( \frac{s}{M^2} \right)^{2\alpha(t)} \text{Im } A_{Ra}, \quad (X.4)$$

donde  $\text{Im } A_{Ra}(M^2, t)$  representa la suma



y viene dada por  $M^2 \sigma_{Ra}^{tot}(t)$ , donde  $\sigma_{Ra}^{tot}(t)$  puede escribirse como un producto  $G_a^2 G_R^2(t)$  e interpretarse como la sección eficaz total para la colisión reggeón de masa  $t$  - partícula  $a$ . También  $\sigma_{ab}^{tot}$  se factoriza en el modelo, de manera que en (X.4) la dependencia en la partícula  $a$  se simplifica. Usando además las relaciones cinemáticas

$$\left. \begin{aligned} \frac{s}{M^2} &= \frac{1}{1-x} \\ t &= m_b^2 (1-x) + m_c^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{p_\perp^2}{x} \end{aligned} \right\} \quad (X.5)$$

con

$$x = \frac{p_{c\ell}^{cm}}{p_{incidente}^{cm}} \approx \frac{p_{c\ell}^{cm}}{\sqrt{s}/2} \quad (X.6)$$

obtenemos que a alta energía la contribución de la primera partícula de la cadena multiperiférica es del tipo

$$\rho_{ab}^c = f_b^c(x, p_\perp) \quad (X.7)$$

Si hubiéramos elegido para la descripción de este proceso las variables  $p_{incidente}^{cm}$ ,  $p_\ell^{cm}$  y  $p_\perp$ , la ecuación (X.7) expresaría que a alta energía la sección inclusiva depende del cociente  $x = p_\ell^{cm}/p_{incidente}^{cm}$ , y a la hipótesis que al mantener fijo este cociente  $\rho$  se aproxima a una constante no nula al aumentar la energía se la suele llamar hipótesis de escala hadrónica<sup>(15)</sup>. Vimos como se implementa en el modelo MP para la primera partícula emitida y para  $x \neq 0$  (En el caso  $x \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow -\infty$  y  $\beta(t) \rightarrow 0$ , con lo cual no hay contribución de este diagrama. La contribución en  $x = 0$  provendrá de partículas producidas lejos de las puntas de la cadena MP).

En el proceso considerado hemos como siempre aceptado usar el modelo en zonas en que su validez no se justifica plenamente. Pero observamos que si conside-

ramos el límite  $M^2 \rightarrow \infty$   $\frac{s}{M^2} \rightarrow \infty$  en que mantenemos  $p_{\perp}$  constante, es decir un límite en que  $x \rightarrow 1$  y  $t \approx$  constante, se justifica escribir el propagador del reggeón como  $(\frac{s}{M^2})^{\alpha(t)}$ , y haber supuesto que  $\text{Im } A_{Ra}(M^2)$  está dominada por el Pomerón, es decir  $\text{Im } A_{Ra}(M^2) \sim (M^2)^{\alpha_P(0)}$ . En este límite, por lo tanto<sup>(16)</sup>, la expresión

$$\rho_{ab}^c \approx \left( \frac{1}{1-x} \right)^{2\alpha(t) - 1} G_R^2(t) \beta_b^c(t) \quad (X.8)$$

tiene mayor validez que la del modelo MP en general, y se suele describir por

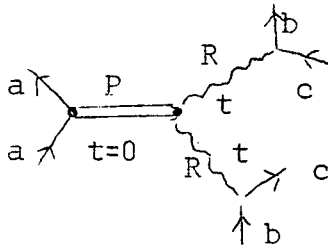


Fig. 13

el diagrama de la fig. 13, en el que se sobreentiende que se está tomando la discontinuidad en la variable  $M^2 = (p_a + p_b - p_c)^2$  y a alto  $M^2$  se representa esta discontinuidad por el intercambio del Pomerón a  $t = 0$ .

Se suele llamar al diagrama de la fig. 13

diagrama de triple Regge, aunque esta terminología no debe inducir a confundir dicho diagrama con uno MR en el que se intercambian tres reggeones. (ver fig. 14)

Naturalmente, si los números cuánticos de b y c lo permiten, en la fig. 13

se puede reemplazar R por un Pomerón,

pero si suponemos que su intersección está en 1 y que el residuo  $G_R^2(t)$  no se anula para  $t = 0$  caemos en las dificultades que ya discutimos anteriormente.

Podemos representar las contribuciones de las partículas emitidas en vértices internos de la cadena MP por el diagrama de la fig. 15, en que la suma doble de la ec. (X.3) se ha transformado en una suma, sobre infinitas líneas a la derecha y otra a la izquierda de

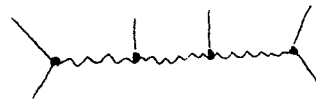


Fig. 14

Podemos representar las contribuciones de las partículas emitidas en vértices internos de la cadena MP por el diagrama de la fig. 15, en que la suma

doble de la ec. (X.3) se ha transformado en una suma, sobre infinitas líneas

a la derecha y otra a la izquierda de

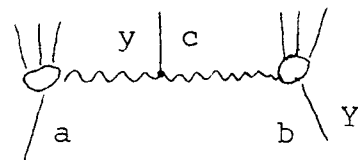


Fig. 15

la partícula considerada. El problema puede en la práctica reducirse a la juxtaposición de las ecuaciones integrales que representan esas dos sumas, y el resultado en su forma más sencilla, y tras haber integrado sobre el momento transversal puede expresarse en la forma

$$\rho_{ab}^c(y, Y) \approx \frac{B_{ac}(y) g_c^2 E_{cb}(Y-y)}{B_{ab}(Y)}, \quad (X.9)$$

donde  $B_{ab}(Y)$  en su forma más cruda se escribe como

$$B_{ab}(Y) = \theta(Y) e^Y, \quad (X.10)$$

pero aquí permitimos que tenga una estructura mayor, es decir que tenga dependencia adicional en  $Y$  y en las partículas externas, aunque seguimos requiriendo

$$B_{ab}(Y) \underset{Y \rightarrow \infty}{\sim} e^Y. \quad (X.11)$$

(Recordar que la dependencia de  $\text{Im} A_{e\ell}$  de las partículas externas a alta energía se factoriza y no está contenida en  $B$ ; ver ec. (VIII.2)).

La ecuación (X.9) con el límite (X.11) exhibe comportamientos diferentes en los tres límites que discutimos a continuación.

1) Fragmentación de  $b$  en  $c$  <sup>(17)</sup>.

En este límite se fija la rapidez relativa de  $b$  y  $c$ , y se hace tender la energía a infinito. De (X.9) resulta:

$$\rho_{ab}^c(y, Y) \underset{\substack{Y-y \text{ cte} \\ Y \rightarrow \infty}}{\rightarrow} B_{cb}(Y-y) e^{-(Y-y)} = F_b^c(Y-y). \quad (X.12a)$$

Este límite es el mismo que encontramos en la ec. (X.7), puesto que es equivalente fijar  $x > 0$  a fijar  $Y - y$ .

2) Fragmentación de  $a$  en  $c$ .

Análogamente al caso anterior, tenemos

$$\rho_{ab}^c(y, Y) \underset{\substack{y \text{ cte} \\ Y \rightarrow \infty}}{\rightarrow} B_{ac}(y) e^{-Y} = F_a^c(y). \quad (X.12b)$$

3) Pionización.

Aquí hacemos crecer las distancias en rapidez entre la partícula producida y las incidentes. Tenemos

$$\rho_{ab}^c(y, Y) \xrightarrow[\substack{y \rightarrow \infty \\ Y-y \rightarrow \infty}]{} g_c^2 . \quad (X.12c)$$

En este límite  $\rho$  no depende ni de la rapidez de la partícula producida ni de la naturaleza de las iniciales.

El comportamiento en los tres límites discutidos coincide con las predicciones de la hipótesis de escala para  $\rho_{ab}^c(x, p_{\perp}, Y)$  incluyendo el punto  $x = 0$  que corresponde al límite de pionización. Consecuencias de esta hipótesis son el crecimiento logarítmico de la multiplicidad promedio

$$\bar{n}_{ab}^c = g_c^2 Y + B_{ab}^c , \quad (X.13)$$

obtenida usando la relación (X.2), y la constancia de la inelasticidad

$$\begin{aligned} \eta_{ab}^c &= \frac{1}{\sqrt{s}} \int E \frac{d\sigma_{ab}^c}{d^3p} \frac{d^3p}{E} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{s}} \int \rho_{ab}^c d^3p = 2 \int \rho_{ab}^c(x, p_{\perp}) d^2 p_{\perp} dx. \quad (X.14) \end{aligned}$$

Usando soluciones  $B_{ab}(Y)$  del modelo que contengan, además del polo del Pomerón, polos secundarios, puede estudiarse no sólo el límite de escala sino también la velocidad con la cual se espera que dicho límite sea alcanzado. Las propiedades de los procesos absorptivos que hemos discutido pueden también obtenerse usando la generalización del teorema óptico debida a Mueller<sup>(18)</sup> y la hipótesis que ciertas discontinuidades de amplitudes elásticas de muchos cuerpos en la dirección hacia adelante están dominadas por el Pomerón y polos de Regge secundarios a alta energía. Desde este punto de vista, por ejemplo, la condición de escala de secciones inclusivas es análoga a la constancia de la sección eficaz total.

Finalmente, pueden estudiarse procesos inclusivos en que se observa más de una partícula. Por ejemplo, el proceso  $a + b \rightarrow c + d + \text{cualquier cosa}$  puede describirse por la función (nuevamente integramos sobre las componentes transversales de  $p^c$ )

$$\rho_{ab}^{cd}(y_c, y_d, Y) = \frac{1}{\sigma_{ab}^{tot}} \frac{d \sigma_{ab}^{cd}}{dy_c dy_d}, \quad (X.15)$$

o bien por la función de correlación

$$C_{ab}^{cd}(y_c, y_d, Y) = \rho_{ab}^{cd}(y_c, y_d, Y) - \rho_{ab}^c(y_c, Y) \rho_{ab}^d(y_d, Y). \quad (X.16)$$

El modelo MP, por la propiedad de factorización de la amplitud de producción, predice correlaciones de corto alcance, es decir

$$C_{ab}^{cd}(y_c, y_d, Y) \xrightarrow{y_d - y_c \rightarrow \infty} 0. \quad (X.17)$$

Un efecto de este tipo ya se ha observado a energías del ISR<sup>(19)</sup>.

En resumen, el modelo MP presenta varias características cualitativas que se observan en procesos hadrónicos de producción de partículas. Tiene sus limitaciones, pero permite una buena primera aproximación para un estudio de estos procesos que son de importancia indudable para la comprensión de las interacciones fuertes.

REFERENCIAS

- 1 - L. Bertocchi, S. Fubini y M. Tonin: Nuovo Cimento 25, 626 (1962);  
D. Amati, A. Stanghellini y S. Fubini: Nuovo Cimento 26, 896 (1962).
- 2 - J. Werle: Relativistic Theory of Reactions (Wiley, New York 1966).
- 3 - M. Toller: Nuovo Cimento 37, 631 (1965).
- 4 - N. Bali, G. Chew y A. Pignotti: Phys. Rev. 163, 1572 (1967).
- 5 - G. Chew y A. Pignotti: Phys. Rev. 176, 2112 (1968).
- 6 - C. de Tar: Phys. Rev. D3, 128 (1971).
- 7 - G. Chew, M. Goldberger y F. Low: Phys. Rev. Lett. 22, 208 (1969).
- 8 - W. Frazer y C. Mehta: Phys. Rev. Lett. 23, 258 (1969).
- 9 - G. Chew y D. Snider: Phys. Rev. D1, 3453 (1970).
- 10 - J. Finkelstein y K. Kajantie: Nuovo Cimento 56A, 659 (1968).
- 11 - R. Brower y J. Weis: Phys. Lett. 41B, 631 (1972).
- 12 - J. Bronzan: Phys. Rev. D4, 1097 (1971).
- 13 - L. Michejda, J. Turnau y A. BiaŁas: Nuovo Cimento 56A, 241 (1968).
- 14 - L. Caneschi y A. Pignotti: Phys. Rev. Lett. 22, 1219 (1969).
- 15 - R. Feynman: Phys. Rev. Lett. 23, 1415 (1969).
- 16 - C. de Tar, C. Jones, F. Low, J. Weis, J. Young y C. - I Tan: Phys. Rev. Lett. 26, 675 (1971).
- 17 - J. Benecke, T.T. Chou, C.N. Yang y E. Yen: Phys. Rev. 188, 2154 (1969).
- 18 - A. Mueller: Phys. Rev. D2, 2963 (1970).
- 19 - Colaboración Pisa-Stony Brook, presentado en la Conferencia Internacional de Física de Alta Energía, Batavia, 1972.  
Ver M. Jacob, High Energy Collisions - Production Processes at High Energy-Theory and Experiment, TH-1570-CERN.

II Simposio Argentino de Física Teórica de  
Partículas y Campos.  
Bariloche - Enero 1973

APROXIMACION EIKONAL Y PRODUCCION MULTIPLE

M.A. Virasoro  
Universidad de Buenos Aires

CONTENIDO

Este curso se basó fundamentalmente en R.J. Glauber: Lectures in  
Theoretical Physics, Vol. I, Interscience Pub. Inc., N. Y. (1959); pág. 315.-

S E M I N A R I O S

- 1) -- Invariancia de escala en fenómenos críticos . . . . . V. Alessandrini
- 2) -- Fenomenología de altas energías a grandes impulsos  
transversales . . . . . D. Amati
- 3) - Algunos resultados experimentales recientes en  
el CERN . . . . . D. Amati
- 4) - Origen del efecto Josephson . . . . . G. Beck
- 5) - Electromagnetic interaction of hadrons . . . . . L. Brown
- 6) - Finite electromagnetic mass difference for vector  
mesons . . . . . L. Brown
- 7) - Segunda cuantificación en un espacio curvo . . . . . M. Castagnino
- 8) - Fenómenos críticos. . . . . C. García Canal
- 9) - Identidades de Ward . . . . . H. Girotti
- 10) - Superconvergencia y reglas de suma para constantes  
ópticas . . . . . M. Nussenzweig
- 11) - Estados atómicos coherentes . . . . . M. Nussenzweig
- 12) - Teoría de campos en un modelo de partones . . . . . R. Suaya

COLOQUIOS INFORMALES

- 1) - Aplicación de PCAC a reacciones inclusivas . . . . . L. Másperi
- 2) - Problema de las fases . . . . . J. Navaza
- 3) - Modelo óptico y dispersión difractiva . . . . . R. Suaya
- 4) - Superpropagador exponencial en  $\nu$  dimensiones . . . H. Vucetich
- 5) - Factorización de secciones eficaces totales e inclu-  
sivas . . . . . G. Zgrablich

AGRADECIMIENTOS.

A todas aquellas instituciones que de una u otra manera colaboraron en la organización y realización de este II Simposio y en particular, al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas y a la Comisión Nacional de Energía Atómica por la ayuda financiera.

Al Director y al personal administrativo y de servicios del Centro Atómico Bariloche por la amplia colaboración prestada.-

Notas impresas en el Centro Atómico Bariloche, Febrero de 1973.-

Para copias, libre de gastos, dirigirse a:

Comité Organizador

II Simposio de Física Teórica de Partículas y

Campos

Centro Atómico Bariloche

Bariloche - Río Negro

A R G E N T I N A

II SIMPOSIO ARGENTINO DE FISICA TEORICA  
DE PARTICULAS Y CAMPOS

E R R A T A

En la lista de Participantes se omitió involuntariamente el nombre de  
M. Achterberg (U.B.A.).

## II SIMPOSIO DE FISICA TEORICA DE PARTICULAS Y CAMPOS

Centro Atómico Bariloche

Bariloche - Enero 1973

### PROGRAMA DE CURSOS

#### Modelos Duales

Dr. V. Alessandrini - Universidad Nacional de La Plata.

- I - Introducción. Introducción histórica, Motivaciones fenomenológicas. La fórmula de Veneziano. La fórmula de Koba-Nielsen para la amplitud de dispersión de N-partículas. El papel del grupo  $O(2,1)$ . Factorización a través del formalismo operatorial invariante proyectivo. Someras ideas acerca de vértices de N-Raggeones y correcciones unitarias. La singularidad de Pomeranchuk.
- II - Los modelos duales como teorías de medida. Identidades de Ward para modelos con  $\alpha(0) = 1$ . Relación con la invariancia conforme. Ausencia de estados fantasmas. Reinterpretación de los modelos duales como la mecánica cuántica relativista de una cuerda vibrante. La cuantización de Goddard, Goldstone, Rebbi y Thorn. Formulación de modelos duales en términos de integrales funcionales. El método de Popof-Faddeev para cuantizar teorías de medida convencionales (Yang-Mills, relatividad general). Ideas sobre la aplicación a modelos duales.

#### Modelos Unificados y su Regularización

Dres.: C.G. Bollini y J.J. Giambiagi - Universidad Nacional de La Plata.

- I - Teoría de los campos de "medida"
  - a - Invariancia de fase. Teoría de Yang-Mills.
  - b - Generalizaciones de Utiyama y Yang.
- II - Teoría unificada para interacciones electromagnéticas y débiles.
  - a - Modelo de Goldstone. Modelo de Higgs.
  - b - Modelo de Salam-Weinberg.
- III - Regularizaciones.
  - a - Regularización de divergencias. Regularización dimensional.
  - b - Aplicaciones a la electrodinámica y a la teoría Salam-Weinberg.

#### Modelos Multiperiféricos

Dr. A. Pignotti - Universidad de Buenos Aires

- I - Introducción. Cinemática. Elección de sistemas de coordenadas. Desarrollo en ondas parciales generalizado.
- II - Desarrollo  $O(2,1)$ . Desarrollo  $O(2,1)$  múltiple. Variables de Toller. Límite multi-Ragge. Periperialismo y multiperialismo.
- III - Modelo simplificado. Propiedades. Secciones eficaces parciales y totales. Comportamiento tipo Regge. Distribución de multiplicidades. Multiplicidad media.

IV - Generalizaciones. Intercambio de números cuánticos. Ecuación integral. Problema de dos canales.

V - Extensión a  $t \neq 0$ . La función de solapamiento. Descripción en parámetro de impacto. Multiplicidad media como función del parámetro de impacto.

Dr. M.A. Virasoro - Universidad de Buenos Aires.

Contenido a anunciarse.

H O R A R I O

El Simposio comenzará el Jueves 4 y finalizará el Viernes 26.

09:30 a 10:30	Clase
11:00 a 12:00	Clase
17:30 a 18:30	Té preseminario
18:00 a 19:30	Seminario