

08.83.05

CNEA-AC 31/83

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
Dirección de Centrales Nucleares

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES
Facultad de Ingeniería

CURSO DE POST-GRADO EN INGENIERIA NUCLEAR

SISTEMAS DINAMICOS LINEALES, CONTINUOS Y DISCRETOS

Carlos E. D'ATELLIS

Buenos Aires
1983

INDICE

=====

	Página
1 . Nociones preliminares	1
2 . Variables de estado	6
3 . Sistemas lineales	10
4 . La transformación Z	16
5 . Sistemas discretos	21
6 . Muestreo	24
7 . Análisis de sistemas muestreados	27
8 . Estabilidad en sistemas discretos	32
9 . Bibliografía	35

. SISTEMAS LINEALES CONTINUOS Y DISCRETOS

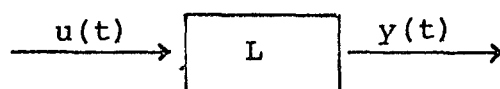
por

Carlos E. D'Attellis

1. NOCIONES PRELIMINARES

Llamaremos sistema dinámico L a una transformación de una señal de entrada $u(t)$ en una salida $y(t)$, es decir,

$$y(t) = L [u(t)] \quad (1.1)$$



Diremos que el sistema es lineal si

$$y_1(t) = L [u_1(t)] \quad , \quad y_2(t) = L [u_2(t)]$$

implican que

$$L [a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)] = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) .$$

Es invariante en el tiempo si (1.1) implica que, para cualquier h real,

$$y(t + h) = L [u(t + h)] .$$

Para estudiar el comportamiento de un sistema lineal e invariante ante excitaciones armónicas de distintas frecuencias λ , consideremos oscilaciones complejas $e^{i\lambda t}$; a la respuesta la

llamaremos

$$L \left[e^{i\lambda t} \right] = \varphi_{\lambda}(t)$$

(Observemos que $\varphi_{\lambda}(t)$ es un número complejo ya que $\varphi_{\lambda}(t) = L [\cos \lambda t] + iL [\sin \lambda t]$, por la linealidad).

Como el sistema es invariante,

$$L \left[e^{i\lambda(t+h)} \right] = \varphi_{\lambda}(t+h) ;$$

pero

$$\begin{aligned} L \left[e^{i\lambda t} \cdot e^{i\lambda h} \right] &= e^{i\lambda h} L \left[e^{i\lambda t} \right] \\ &= e^{i\lambda h} \varphi_{\lambda}(t) . \end{aligned}$$

Podemos afirmar entonces que, para todo λ, t, h , es válido que:

$$\varphi_{\lambda}(t+h) = e^{i\lambda h} \varphi_{\lambda}(t) .$$

En particular, si $t = 0$, resulta, para todo h ,

$$\varphi_{\lambda}(h) = e^{i\lambda h} \cdot \varphi_{\lambda}(0) .$$

Poniendo t en lugar de h y llamando $B(\lambda)$ al número $\varphi_{\lambda}(0)$, resulta

$$\varphi_{\lambda}(t) = B(\lambda) e^{i\lambda t} ,$$

o sea

$$L \left[e^{i\lambda t} \right] = B(\lambda) e^{i\lambda t} .$$

La fórmula anterior expresa la acción de un sistema lineal ante la excitación $e^{i\lambda t}$: multiplica esa función por el factor complejo $B(\lambda)$, al que llamaremos respuesta en frecuencia del sistema.

Si escribimos

$$B(\lambda) = |B(\lambda)| e^{i\theta(\lambda)}$$

llamaremos a $|B(\lambda)|$ ganancia y a $\theta(\lambda)$ fase del sistema lineal. Resulta entonces que un sistema lineal e invariante excitado con una armónica de frecuencia λ responde con otra de la misma frecuencia, pero corrida en fase y modificada su amplitud.

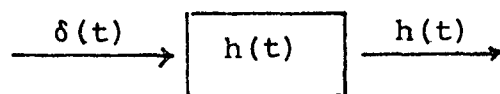
Se puede demostrar (Cf. 1) que los sistemas lineales invariantes quedan caracterizados por la función $h(t)$, llamada respuesta impulsiva, a través la operación de convolución; es decir, la respuesta a cualquier excitación $u(t)$ es la convolución de esta función con $h(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) = L[u(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

El nombre de respuesta impulsiva es evidente, ya que la delta de Dirac $\delta(t)$ es la unidad para la convolución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = h(t) \quad ,$$

o, en diagrama de bloques:



Si tomamos ahora como excitaciones las exponenciales e^{st} con $s = \sigma + iw$, resulta

$$\begin{aligned} L \left[e^{st} \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = \\ &= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau , \end{aligned}$$

lo que demuestra que e^{st} son autofunciones del sistema, y los autovalores están dados por la transformada de Laplace de la respuesta impulsiva. Esto hace que la transformación de Laplace sea una herramienta natural para el estudio de los sistemas dinámicos lineales.

Recordando que la transformada de la convolución es el producto de las transformadas, resulta

$$Y(s) = H(s) U(s)$$

donde Y , H , U son las transformadas de Laplace de $y(t)$, $h(t)$ y $u(t)$ respectivamente. Llamaremos a $H(s)$ función de transferencia del sistema.

Observemos que como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau ,$$

la salida en el instante t depende de los valores futuros de las entradas, puesto que τ puede tomar valores entre $-\infty$ y 0 . Llamaremos causal al sistema si lo anterior no sucede, lo que se consigue pidiendo que la respuesta impulsiva verifique

$$h(\tau) = 0 \quad \text{para } \tau < 0 ,$$

de manera que

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau \quad . \quad (1.1)$$

Cambiando de variables, $\mu = t - \tau$, resulta

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \mu) u(\mu) d\mu \quad ,$$

y si la excitación es aplicada a partir de $t = 0$, es decir, si $u(t) = 0$ para $t < 0$, resulta la expresión

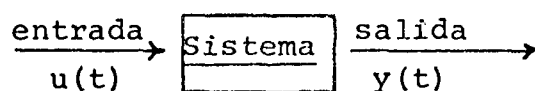
$$y(t) = \int_0^t h(t - \mu) u(\mu) d\mu \quad .$$

Se dicen estables a los sistemas que responden en forma acotada cuando son excitados con funciones acotadas. La estabilidad queda garantizada cuando la respuesta impulsiva $h(t)$ es una función integrable, ya que si $|u(t)| \leq M$, entonces

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \int |h(t - \tau)| |u(\tau)| d\tau \\ &\leq M \int |h| < \infty \quad . \end{aligned}$$

2. VARIABLES DE ESTADO

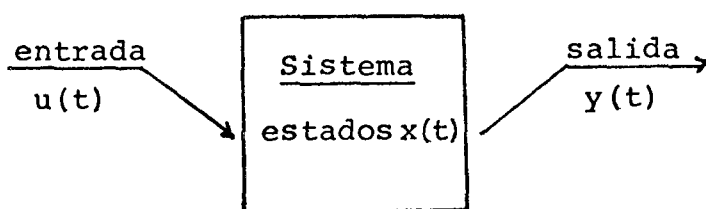
En el párrafo anterior hemos considerado a los sistemas dinámicos desde el punto de vista llamado "caja negra"; obtuvimos así una descripción del tipo entrada-salida (excitación-respuesta ó "input-output"), cuyo esquema es el siguiente:



Otra forma de caracterizarlos se obtiene agregando una variable más, que llamaremos estado.

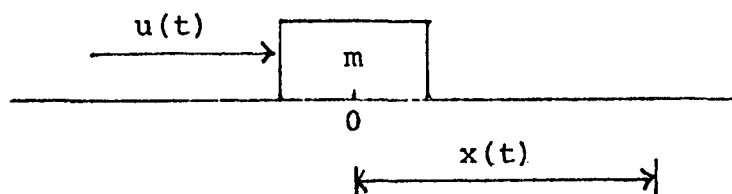
Podemos definir al estado como una característica x del sistema tal que, si conocemos su valor en cierto instante τ (es decir, conocemos $x(\tau)$), tenemos resumida toda la historia de ese sistema hasta ese momento, lo que nos permite, al aplicar cualquier excitación $u(t)$ en $t \geq \tau$, conocer su comportamiento, su evolución, desde τ en adelante.

Se incluye así una variable interna del sistema:



Veamos un ejemplo.

Consideremos una fuerza $u(t)$ actuando sobre una masa m , cuyo desplazamiento llamamos x :



La ecuación es

$$u(t) = m \ddot{x}(t) \quad ; \quad (2.1)$$

Sabemos que si en un instante τ definimos la posición $x(\tau)$ y la velocidad $\dot{x}(\tau)$, queda bien determinada la solución de la ecuación anterior ante la acción de la fuerza $u(t)$ para $t \geq \tau$, es decir, el comportamiento del sistema.

Observemos la idea de estados del sistema: si los conocemos en un instante τ y sabemos la entrada que aplicamos a partir de ese momento, determinamos completamente la conducta del sistema independientemente de su historia previa, ya que podemos conocer la solución de la ecuación diferencial para tiempos mayores que τ .

Con el objeto de plantear este problema en la forma que utilizaremos en adelante, realizaremos un cambio de variables, definiendo

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t)$$

En términos de las nuevas variables, la ecuación

diferencial de segundo orden (2.1), se transforma en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{m} u(t) \end{cases} ,$$

es decir, poniéndolo en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u(t) .$$

Hemos tratado hasta aquí la evolución en el tiempo de las variables de estado del sistema. Dentro del esquema que planteamos, ¿qué se entiende por salida ó respuesta del sistema?

Supongamos que está a nuestro alcance medir la posición del bloque de masa m , pero no la velocidad. Esto significa que desde el exterior del sistema lo único que podemos percibir, medir, del sistema en funcionamiento, es $x(t)$. Entenderemos por salida del sistema a esa manifestación hacia el exterior, que pueden ser algunas de las variables de estado, todas, o alguna función de ellas. En nuestro ejemplo, resulta

$$y(t) = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} .$$

Este enfoque de los sistemas dinámicos permite generalizar la teoría esbozada en el párrafo anterior.

En efecto, aquella tiene dos hipótesis fundamentales,

como son la linealidad y la invariancia en el tiempo; en cambio, si lo que sirve de modelo para la evolución de las variables de estado es una ecuación diferencial, puede ser lineal o no-lineal, invariante en el tiempo o no.

Entonces, el modelo general es

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (\text{evolución de los estados})$$

$$y(t) = g(x(t), u(t)) \quad (\text{evolución de la salida}).$$

Trataremos a continuación el caso más sencillo, pero a la vez de mucha utilidad en problemas concretos, como es el de sistemas dinámicos lineales e invariantes.

3. SISTEMAS LINEALES

Tomaremos como modelo del sistema la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$a_0 x(t) + a_1 \dot{x}(t) + \dots + a_n x^{(n)}(t) = u(t) \quad ; \quad (3.1)$$

como sabemos, con el conocimiento de las condiciones iniciales $x(0)$, $\dot{x}(0)$, $\dots$, $x^{(n-1)}(0)$ y de la excitación $u(t)$ para $t \geq 0$, queda determinada la solución.

Notemos que la ecuación (3.1) es una generalización del ejemplo del párrafo anterior.

Realizaremos el mismo cambio de variables:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) \\ x_3(t) &= \dot{x}_2(t) \\ &\dots \dots \dots \\ x_n(t) &= \dot{x}_{n-1}(t) \quad ; \end{aligned}$$

resulta entonces, el siguiente sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) &= -\frac{a_0}{a_n} x_1(t) - \frac{a_1}{a_n} x_2(t) - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) + \frac{u(t)}{a_n} \end{aligned} \right.$$

Expresado en forma matricial resulta

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) ,$$

donde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & - & - & - & 0 \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & - & - & - & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & - & - & - & - & - & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$$

Generalizando, diremos que los estados del sistema dinámico lineal están representados por la ecuación

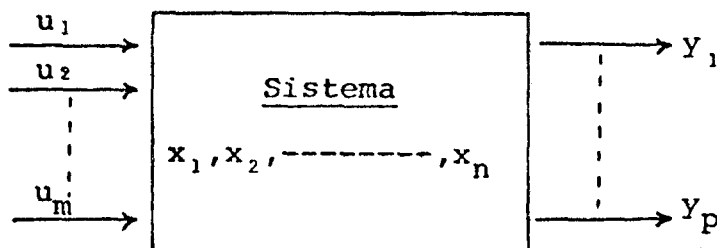
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) , \quad (3.2)$$

con A y B matrices de la dimensión adecuada y $\mathbf{x}(t)$, $u(t)$ vectores columna; la salida del sistema es

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} u(t) , \quad (3.3)$$

donde admitimos una influencia directa de la entrada sobre la salida, que no aparecía en el ejemplo del parágrafo 2.

El esquema es:



Nos ocuparemos de encontrar la solución de la ecuación general lineal (3.2).

Transformando Laplace, obtenemos

$$s X(s) - x(0) = A X(s) + B U(s) ,$$

$$[sI - A] X(s) = x(0) + B U(s)$$

y en consecuencia

$$X(s) = [sI - A]^{-1} x(0) + [sI - A]^{-1} B U(s) , \quad (3.4)$$

donde I es la matriz identidad y el exponente -1 indica la matriz inversa, que existe siempre que s no sea un autovalor de A , es decir que $\det(sI - A) \neq 0$.

Si aplicamos ahora la transformación inversa y llamamos matriz de transición $\phi(t)$ a

$$\phi(t) = L^{-1} [(sI - A)^{-1}] ,$$

resulta (observemos que el primer término de (3.4) es $(sI - A)^{-1}$

por una constante, y el segundo término es el producto de dos transformadas: $(sI - A)^{-1}$ y $B R(s)$

$$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t - \tau) B u(\tau) d\tau .$$

El primer sumando es la respuesta libre del sistema debida a la condición inicial $x(0)$, mientras que el segundo es la respuesta forzada por la excitación $u(t)$.

La primera parte puede obtenerse poniendo $u(t) \equiv 0$ en (3.2) y resolviendo

$$\dot{x}(t) = A x(t) .$$

Si el desarrollo de Taylor de $x(t)$ en $t = 0$ es

$$x(t) = E_0 + E_1 t + E_2 t^2 + \dots$$

(con E_i vectores columnas), resulta:

$$\bullet \quad x(0) = E_0$$

$$\bullet \quad \dot{x}(0) = E_1 ,$$

y por otra parte, de la ecuación,

$$\left. \dot{x}(t) \right|_{t=0} = A x(0) ,$$

entonces $E_1 = A x(0) .$

$$\bullet \quad \ddot{x}(0) = 2E_2 ,$$

y por otra parte

$$\ddot{x}(t) = A \dot{x}(t) = A^2 x(t)$$

$$\ddot{x}(0) = A^2 x(0) ,$$

de manera que $2E_2 = A^2 x(0)$,

y así siguiendo.

En conclusión, poniendo $x(0)$ como factor común a la derecha,

$$x(t) = \left[I + At + \frac{A^2}{2} t^2 + \frac{A^3}{3} t^3 + - - - \right] x(0) . \quad (3.5)$$

Por lo tanto, la matriz de transición es:

$$\phi(t) = e^{At} ,$$

donde la exponencial matricial se define mediante el desarrollo en serie que figura en (3.5).

Llamaremos función de transferencia del sistema al cociente entre las transformadas de Laplace de la salida y de la entrada, suponiendo condiciones iniciales nulas.

De (3.3) resulta

$$Y(s) = C X(s) + D U(s) ,$$

y de (3.2),

$$s X(s) = A X(s) + B U(s) .$$

Entonces

$$(sI - A)X(s) = G U(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} G U(s) ;$$

pero $(sI - A)^{-1} = \Phi(s)$ por definición, de manera que

$$Y(s) = C\Phi(s) G U(s) + D U(s) ,$$

y la transferencia del sistema es

$$H(s) = C\Phi(s) G + D .$$

Puede probarse (ver [4] ,pág.35) que la transferencia $H(s)$ puede escribirse de la forma

$$H(s) = \frac{P(s)}{\det(sI - A)} ,$$

donde $P(s)$ es una matriz cuyos elementos son polinomios. Los elementos de la matriz $H(s)$ son entonces funciones racionales de s .

Las raíces de $\det(sI - A)$, es decir, los autovalores de A , son los polos de la transferencia, y si no se produce ninguna cancelación, son los polos del sistema.

4. LA TRANSFORMACION Z.

Esta transformación es la herramienta para el análisis de los sistemas discretos equivalente a la transformación de Laplace para los sistemas continuos en el tiempo.

Como ahora el tiempo es una variable discreta, la transformación z se aplica a sucesiones $f(k)$, $k = 0, 1, 2, - - - - -$; estas sucesiones provienen generalmente de muestrear una función $f(t)$ con cierto intervalo de muestreo Δt , pero ahora no consideraremos esta cuestión, sobre la que volveremos más adelante.

Definición:

La transformada z de la sucesión $f(k)$ es la serie de Laurent

$$z[f(k)] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} ,$$

cuya región de convergencia es exterior a un círculo. Puede definirse también como la serie desde $-\infty$ hasta $+\infty$, y en tal caso, la región de convergencia es un anillo en el plano complejo.

Ejemplo 4.1

$$\text{Consideremos el escalón } u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

y definamos $g(t) = K \cdot u(t)$,

$$g(k) = K \quad \text{para } k = 0, 1, 2, - - - - -$$

Entonces

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} K z^{-k} = K \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k$$

serie geométrica cuya suma es

$$G(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}} \quad \text{si } |z^{-1}| < 1,$$

o sea

$$G(z) = \frac{K z}{z - 1} \quad \text{si } |z| > 1.$$

Ejemplo 4.2

$$g(t) = K \cdot \delta(t)$$

$$g(k) = \begin{cases} K & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0, \end{cases}$$

de manera que $G(z) = K$.

Si hacemos

$$g(k) = K \cdot \delta(k-n), \text{ con } n \text{ entero fijo}$$

resulta
$$g(k) = \begin{cases} K & \text{si } k=n \\ 0 & \text{si } k \neq n, \end{cases}$$

de donde

$$G(z) = K \cdot z^{-n}.$$

Este hecho puede generalizarse fácilmente: un retardo n en el tiempo implica la aparición de un factor z^{-n} en la transformada.

Demostraremos ahora un resultado que será de utilidad en el párrafo siguiente.

Definamos

$$g(k) = \begin{cases} 0 & k = -1, -2, - \dots \\ f(k+1) & k = 0, 1, 2, - \dots \end{cases}$$

La transformada Z de la sucesión $g(k)$ es

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1) z^{-k} = \\ &= f(1) + f(2) z^{-1} + f(3) z^{-2} + - - - \end{aligned}$$

Para obtener la relación entre $G(z)$ y $F(z)$, agregaremos a la última serie lo que falta para que quede $F(z)$, es decir, multiplicamos por z^{-1} y sumamos $f(0)$:

$$z^{-1} G(z) + f(0) = F(z) ,$$

o sea

$$G(z) = z F(z) - z f(0) .$$

Si en lugar de $G(z)$ ponemos $z [f(k+1)]$ obtenemos la siguiente relación:

$$z [f(k+1)] = z F(z) - z f(0) . \quad (4.1)$$

Este resultado puede generalizarse:

$$z [f(k+m)] = z^m F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{m-k}$$

Como vimos en el § 1, la convolución tiene un papel

fundamental en la teoría de sistemas lineales.

En el caso discreto, la convolución está definida por la expresión

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} g(n-k) x(k) ,$$

análoga a (1.1)

Si aplicamos la definición de transformación Z a la sucesión $y(n)$, resulta:

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} g(n-k) x(k) \right] z^{-n} ;$$

haciendo $m = n-k$, o sea $n = m+k$,

$$Y(z) = \sum_{m=-k}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g(m) x(k) z^{-m} z^{-k} .$$

Como suponemos el sistema causal, $g(m) = 0$ para $m < 0$ de manera que el límite inferior de la primera suma puede tomarse cero, y las sumas se separan:

$$Y(z) = \left[\sum_{m=0}^{\infty} g(m) z^{-m} \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \right] = G(z) X(z) .$$

Es el resultado análogo al de la transformación de Laplace; la transformación Z pasa convolución discreta a producto de transformadas.

Breve tabla de transformadas Z

$f(k)$	$F(z)$	
1	$\frac{z}{z - 1}$	en $ z > 1$
a^k	$\frac{z}{z - a}$	$ z > a $
k	$\frac{z}{(z - 1)^2}$	$ z > 1$
k^2	$\frac{z(z + 1)}{(z - 1)^3}$	$ z > 1$
$\frac{a^k}{k!}$	$e^{\frac{a}{z}}$	$ z > 0$
$\sin k\omega T$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	$ z > 1$
$\cos k\omega T$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	$ z > 1$
$k a^k$	$\frac{a z}{(z - a)^2}$	$ z > a $
$\delta(k)$	1	$ z > 0$
$\delta(k-m)$	z^{-m}	

5. SISTEMAS DISCRETOS

Por analogía con los sistemas lineales que estudiamos en el parágrafo 3, consideraremos ahora las siguientes ecuaciones:

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k) \quad (5.1)$$

$$y(k) = C x(k) + D u(k) \quad . \quad (5.2)$$

La evolución en el tiempo del vector de estados $x(k)$ está dada por la ecuación en diferencias (5.1), y la respuesta del sistema por (5.2).

Usando la transformación Z y la fórmula (4.1), obtenemos:

$$z X(z) - z x(0) = A X(z) + B U(z)$$

$$Y(z) = C X(z) + D U(z) ;$$

de la primera de las anteriores:

$$(zI - A) X(z) = z x(0) + B U(z) ,$$

y entonces

$$x(z) = (zI - A)^{-1} z x(0) + (zI - A)^{-1} B U(z) \quad ; \quad (5.3)$$

Vemos que lo que caracteriza la solución es la matriz $(zI - A)^{-1}$.

Buscaremos ahora la solución en el tiempo.

En el parágrafo 3 tuvimos que resolver una ecuación diferencial, ahora tenemos la ecuación recursiva (5.1); planteamos el siguiente problema: dados $x(0)$ y $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$, ¿cuál es el estado en N ?

Aplicando (5.1) ,

$$x(1) = A x(0) + B u(0)$$

$$x(2) = A x(1) + B u(1) = A^2 x(0) + A B u(0) + B u(1)$$

$$x(3) = A x(2) + B u(2) = A^3 x(0) + A^2 B u(0) + A B u(1) + B u(2)$$

$$x(N) = A^N x(0) + \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} B u(i)$$

Definiremos como matriz de transición a

$$\phi(N) = A^N$$

Comparando con (5.3) cuando la excitación es nula, obtenemos

$$z \left[\phi(k) \right] = z(zI - A)^{-1} ,$$

que nos da la relación entre las matrices que caracterizan la evolución del sistema.

Para continuar el paralelismo entre sistemas continuos y discretos, pasemos a analizar la transferencia en sistemas discretos.

Supongamos nulo el estado inicial, de manera que de (5.3) resulta

$$X(z) = \left[zI - A \right]^{-1} B U(z) ,$$

$$Y(z) = \left[C \left[zI - A \right]^{-1} B + D \right] U(z) = H(z) U(z) ,$$

donde llamamos $H(z)$ al corchete de arriba.

Para hacer aparecer la matriz de transición multiplicamos y dividimos por z :

$$\begin{aligned} H(z) &= C \left[z(zI - A)^{-1} \right] z^{-1} B + D \\ &= C \phi(z) z^{-1} B + D \end{aligned}$$

Entonces, recordando lo visto en § 4 sobre desplazamiento en el tiempo,

$$H(k) = C \phi(k-1) B + D$$

Como $Y(z) = H(z) U(z)$

tenemos en el tiempo (Cf. § 4):

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k-1} H(k-j) u(j) ,$$

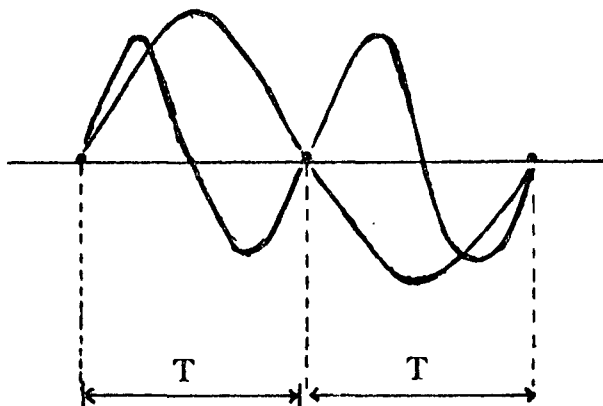
es decir, la convolución discreta.

La siguiente tabla muestra la comparación entre los sistemas lineales continuos y discretos.

	CONTINUO	DISCRETO
Modelo	$\dot{x}(t) = F x(t) + G u(t)$ $y(t) = C x(t) + D u(t)$	$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$ $y(k) = C x(k) + D u(k)$
Matriz de Transición	$\phi(t) = e^{Ft}$	$\phi(k) = A^k$
Transformada	$\phi(s) = [sI - F]^{-1}$	$\phi(z) = z [zI - A]^{-1}$
Transferencia	$H(s) = C\phi(s) G + D$	$H(z) = z^{-1} C\phi(z) B + D$
Respuesta impulsiva	$h(t) = C\phi(t) G + D \delta(t)$	$h(k) = C\phi(k-1) B + D$

6. MUESTREO

Como hemos dicho en el parágrafo 4, las sucesiones $f(k)$ aparecen generalmente al muestrear una función $f(t)$ cuya variable es real, es decir, una función que depende en forma continua del tiempo. Pero el muestreo se realiza cada cierto intervalo de tiempo T , y es evidente que de T depende la información obtenida al muestrear. Basta para ello observar la figura siguiente:



Con el T que se indica, las dos frecuencias son indistinguibles; con ese intervalo de muestreo se pierde información.

Mostraremos a continuación un resultado que nos permitirá una elección adecuada del intervalo de muestreo.

Supongamos que la transformada de Fourier de la función $f(t)$ a muestrear, es decir,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt ,$$

verifica que $F(\omega) = 0$ si $|\omega| > 2\pi W$
(son llamadas funciones de espectro acotado).

Esto significa que $f(t)$ no contiene componentes armónicas de frecuencias mayores que $2\pi W$.

Demostraremos que la función $f(t)$ queda unívocamente determinada por los valores que toma en instantes espaciados en $1/2W$.

Para ello, tomamos la función $F(\omega)$ definida en el intervalo $[-2\pi W, 2\pi W]$, y la hacemos periódica fuera de él; su desarrollo en serie de Fourier es:

$$F(\omega) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\omega}{2W}} \quad (6.1)$$

$$\text{con } c_n = \frac{1}{4\pi W} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) e^{-in\frac{\omega}{2W}} d\omega \quad (6.2)$$

Es claro que $F(\omega)$ determina a la función $f(t)$ a través de la transformada inversa, y que $F(\omega)$ queda determinada por los coeficientes C_n . Escribiremos estos coeficientes como función de $f(t)$. La relación entre $F(\omega)$ y $f(t)$ es:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (6.3)$$

De esto último y (6.2) concluimos que

$$C_n = \frac{1}{2W} f\left(-\frac{n}{2W}\right)$$

Es decir, con los valores de la función $f(t)$ en los instantes $-\dots, -\frac{3}{2W}, -\frac{2}{2W}, -\frac{1}{2W}, 0, \frac{1}{2W}, \dots$ obtenemos los coeficientes C_n que determinan $F(\omega)$ a través de (6.1), y luego $f(t)$ a través de (6.3).

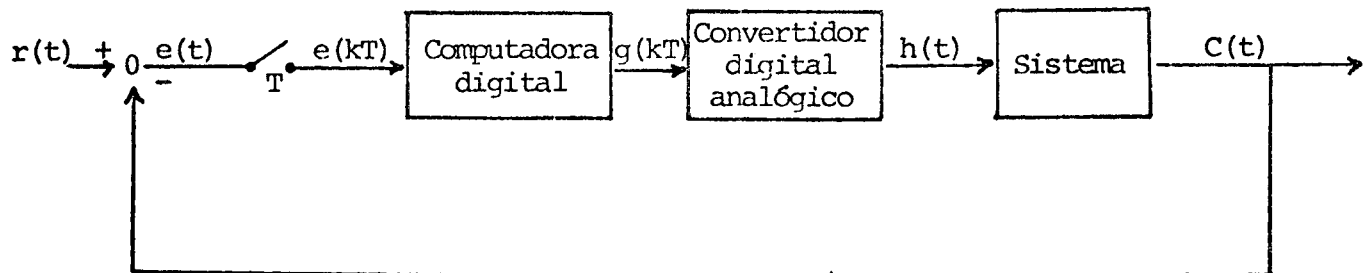
En resumen, $f(t)$ queda completamente determinada por sus valores muestreados con un intervalo $1/2W$.

Daremos la forma explícita de la relación.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{2\pi W} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2W} f\left(-\frac{n}{2W}\right) e^{in\frac{\omega}{2W}} \right] e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{4\pi W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{n}{2W}\right) \int_{-2\pi W}^{2\pi W} e^{i\omega\left(\frac{n}{2W} + t\right)} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{n}{2W}\right) \frac{\operatorname{sen} 2\pi W\left(\frac{n}{2W} + t\right)}{2\pi W\left(\frac{n}{2W} + t\right)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{n}{2W}\right) \frac{\operatorname{sen} 2\pi W\left(\frac{n}{2W} + t\right)}{2\pi W\left(\frac{n}{2W} + t\right)}. \end{aligned}$$

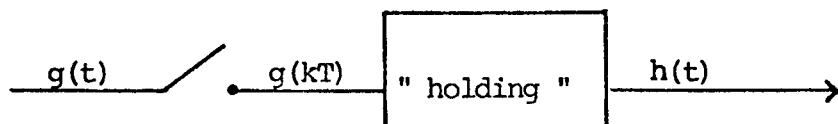
7. ANALISIS DE SISTEMAS MUESTREADOS.

Un lazo típico es el siguiente:



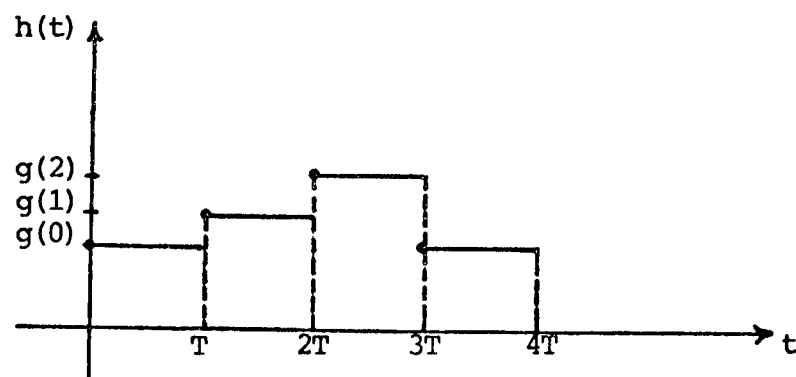
donde la llave indica un muestreo realizado cada T unidades de tiempo.

Consideremos el siguiente subsistema híbrido



donde el "holding" es de orden cero, que se define como

$$h(kT + \tau) = g(kT) \quad \text{para } 0 \leq \tau < T.$$



Podemos escribir esta función de la siguiente manera:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) \left[u(t - kT) - u(t - kT - T) \right] ,$$

donde $u(t)$ es la función escalón. Observemos que para cada t hay un solo sumando, puesto que la diferencia entre los escalones es una ventana de altura 1 y ancho T que se va desplazando con el índice k .

Entonces,

$$\begin{aligned} L[h(t)] = H(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) \left[\frac{e^{-skT} - e^{-s(k+1)T}}{s} \right] = \\ &= \underbrace{\left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right)}_{T(s)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{g(kT) e^{-skT}}_{G^*(s)} \end{aligned}$$

Es natural pensar que $T(s)$ es la transferencia que relaciona la entrada $G^*(s)$ con la salida $H(s)$, es decir, la transferencia del "hold" de orden cero.

La $G^*(s)$ es generada por la función

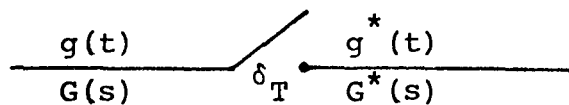
$$g^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) \delta(t - kT)$$

ya que operando formalmente,

$$\begin{aligned}
 L \left[g^*(t) \right] &= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g(t) \delta(t - kT) e^{-st} dt = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} \delta(t - kT) dt = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) e^{-skT} = G^*(s) \quad .
 \end{aligned}$$

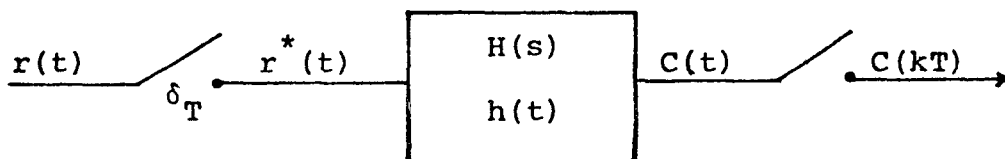
La función $g^*(t)$ es una sucesión de deltas de Dirac afectadas por un factor y separadas por T unidades de tiempo.

Podemos visualizar este proceso mediante el siguiente esquema:



en el que la llave cierra cada T segundos y genera los impulsos $g(kT) \delta(t - kT)$.

Usando esos recursos, podemos analizar los sistemas del siguiente tipo:



Tenemos:

$$\begin{aligned}
C(t) &= \int_0^t r^*(t) h(t - \tau) d\tau = \\
&= \int_0^t \sum_k r(t) \delta(t - kT) h(t - \tau) d\tau = \\
&= \sum_k r(kT) h(t - kT) ;
\end{aligned}$$

en los instantes de muestreo

$$C(nT) = \sum_k r(kT) h(nT - kT) ,$$

resulta una convolución discreta.

Como vimos, resulta que:

$$C(z) = R(z) H(z) ,$$

fórmula semejante a la de los sistemas continuos.

El sistema del dibujo anterior es continuo y entonces está caracterizado por la transferencia $H(s)$. Pero en la fórmula anterior aparece $H(z)$, de manera que veremos un método para obtener $H(z)$ a partir de $H(s)$.

Como

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] ,$$

usando la sucesión $\{h(kT)\}$ podemos calcular

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT) z^{-k}$$

Analicemos un ejemplo:

$$\text{si } H(s) = \frac{a}{s(s+a)},$$

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1}[H(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right] = \\ &= (1 - e^{-at}) u(t) ; \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-akT}) z^{-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} - e^{-akT} z^{-k} \quad (\text{series geométricas}) \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \\ &= \frac{z^{-1} (1 - e^{-aT})}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT} z^{-1})} . \end{aligned}$$

8. ESTABILIDAD EN SISTEMAS DISCRETOS

Como vimos en el párrafo anterior,

$$L \left[x^*(t) \right] = X^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-nTs} \quad (8.1)$$

Pero la transformada z de la sucesión $x(nT)$ es

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} ,$$

de manera que el cambio de variable para pasar de la transformada de Laplace de la función muestreada a la transformada z de la misma es:

$$z = e^{Ts} . \quad (8.2)$$

Entonces $s = \frac{1}{T} \ln z ,$

$$\begin{aligned} \text{y} \quad X(z) &= X^* \left(\frac{1}{T} \ln z \right) = && \text{(usando (8.1))} \\ &= L \left[x^*(t) \right] \Bigg|_{s = \frac{1}{T} \ln z} . \end{aligned}$$

Se ve aquí que el pasaje entre las transformaciones de Laplace y z se realiza mediante (8.2).

La estabilidad en sistemas continuos en el tiempo se analiza, como sabemos, mediante la ubicación de los polos de la transferencia en el plano complejo en que se mueve la variable S .

En consecuencia, para analizar la estabilidad de los sistemas discretos, debemos estudiar cómo se transforma el plano complejo con el cambio de variables (8.2), al pasar de S a Z . Veámoslo.

Todos los puntos del eje imaginario, $S = i\omega$, forman el círculo unitario en el plano Z ya que $Z = e^{i\omega T}$; como la función es periódica, se repiten los valores cada $2\pi/T$.

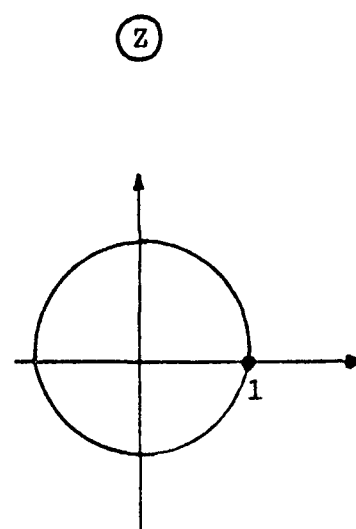
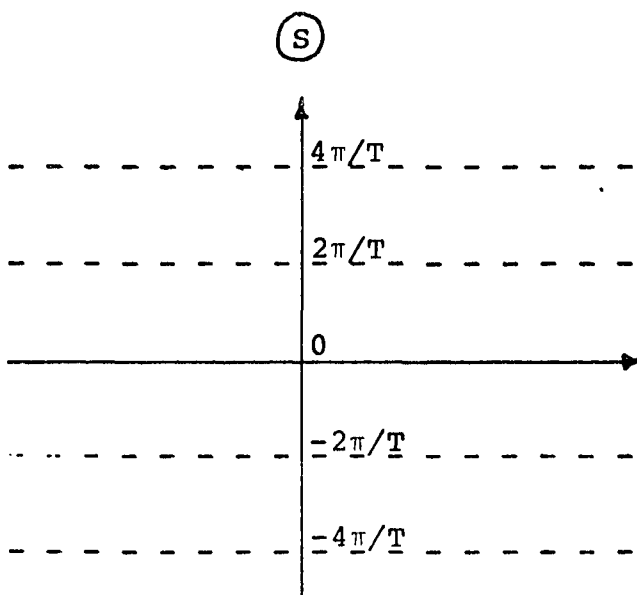
Los puntos del semiplano de la izquierda en la variable S forman el interior del círculo unitario en Z :

$$\text{Si } S = \alpha + i\omega \quad \text{con } \alpha < 0$$

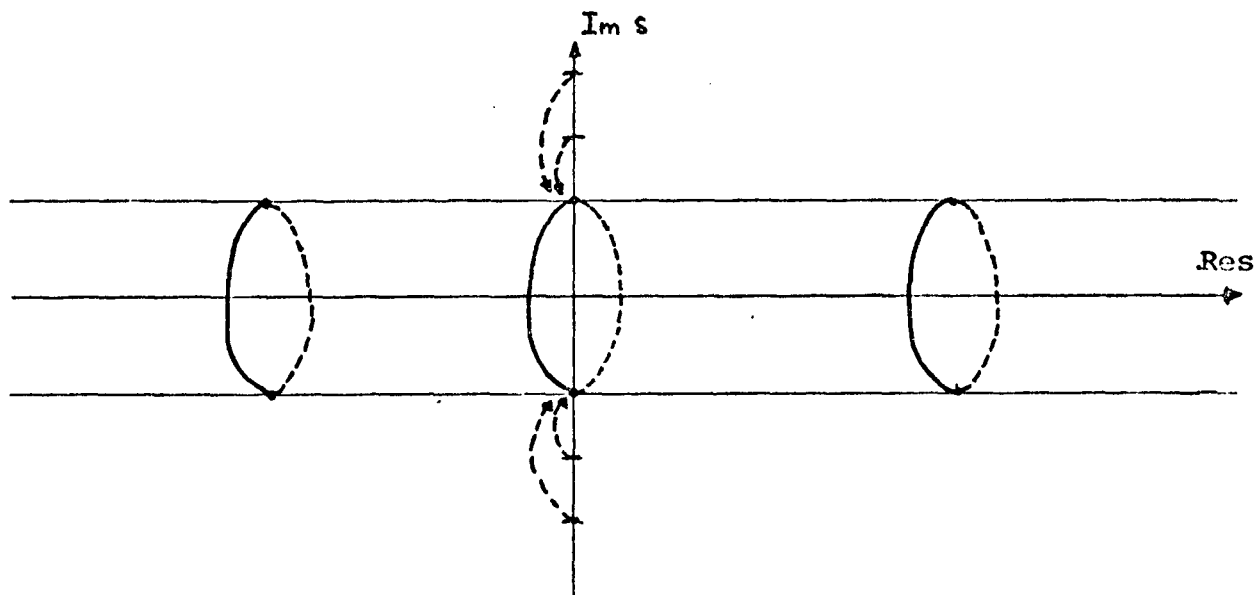
$$Z = e^{\alpha T} e^{i\omega T}$$

$$|Z| = e^{\alpha T} < 1 \quad \text{pues } \alpha < 0.$$

Análogamente, el semiplano S de la derecha se transforma en el exterior del círculo unitario en Z .



Observemos que $2\pi/T$ es la frecuencia de muestreo. Debido a la periodicidad de la transformación (8.2), se produce un arrollamiento infinito del plano S ; si hacemos coincidir los valores iguales, obtenemos un tubo:



Lo demás es como si la parte izquierda del tubo se empujara para formar el interior del círculo, y la parte derecha el exterior del mismo.

Dado que la ubicación de los polos de la transferencia $H(s)$ de un sistema continuo en los semiplanos izquierdo y derecho determinan la estabilidad, lo mismo ocurre en los sistemas discretos con la ubicación de los polos de $H(z)$ dentro o fuera del círculo unitario.

9. BIBLIOGRAFIA

1. M.R.WOHLERS:

Lumped and Distributed Passive Networks; A generalized and advanced Wiewpoint. Academic Press, 1969.

2. M. HEALEY:

Principles of automatic Control. The English Univ.Press, 1967.

3. O.L.R.JACOBS:

Introduction to Control Theory. Oxford University Press, 1974.

4. H. KWAKERNAAK, R. SIVAN:

Linear Optimal Control System. J. Wiley, 1972.

5. J.T.TOU:

Digital and Sampled-data Control Systems. McGraw-Hill, 1959.

6. J.CADZOW:

Discrete-time systems, Prentice Hall, 1972.