

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN MARTIN
COMISION NACIONAL DE ENERGÍA ATÓMICA
INSTITUTO DE TECNOLOGÍA
"Prof. Jorge A. Sabato"

Elementos de matriz en sistemas clásicamente
caóticos. Aplicaciones al mapa del gato.^(*)

Lic. David Marcelo Schneider

Director del Trabajo

Dr. Eduardo Vergini

Codirector del Trabajo: Dr. Alejandro Rivas

^(*)Tesis para optar al título de Doctor en Ciencia y Tecnología, Mención
Física

República Argentina

2007

A Ana y Graciela

*"I know it sounds wrong
and I don't have the face
but lately everything
is falling into place"*

Kevin Johansen

Resumen

En el marco de una teoría de órbitas de período corto, se estudiaron los elementos de matriz entre funciones de scar, sus propiedades asintóticas con el tiempo de Ehrenfest, y su dependencia con el área heteroclínica definida por las variedades estables e inestables de dos puntos fijos. Estas funciones de scar, que surgen naturalmente en torno a órbitas periódicas de sistemas caóticos (o más específicamente, en torno a aquellas órbitas de estructura hiperbólica), representan el objeto esencial de los enfoques destinados a evitar la inclusión de órbitas largas que vuelve inmanejable una descripción semiclásica, como ocurre con la fórmula de trazas de Gutzwiller. Es a través de sus interacciones, incorporadas en los elementos de matriz, que tales contribuciones (esenciales en la fórmula de trazas) pueden en definitiva ser eliminadas.

En una instancia preliminar, se implementó una nueva construcción de la función de scar basada en una representación integral de estados coherentes evolucionados temporalmente, cuyas propiedades asintóticas fueron así mismo analizadas. A continuación, se pasó a estudiar el comportamiento de los elementos de matriz de un Hamiltoniano hiperbólico prototipo, observándose una fuerte dependencia de estos con las áreas heteroclínicas asociadas a órbitas periódicas, traducida en una regla de cuantización de tipo Bohr-Sommerfeld. Los resultados teóricos fueron luego cotejados con cálculos numéricos efectuados en el mapa del gato, sistema en el que se implementó una construcción semiclásica de la función de scar, y a partir de esta se evaluaron los correspondientes elementos de matriz.

Palabras clave: elemento de matriz, función de scar, tiempo de Ehrenfest, área heteroclínica, fórmula de trazas, Hamiltoniano hiperbólico, regla de cuantización, mapa del gato.

Abstract

Within the framework of a short periodic orbits theory, we studied matrix elements between scar functions, their asymptotic properties with the so called Ehrenfest time, and their dependence on the heteroclinic area defined by the stable and unstable manifolds of two fixed points. Scar functions emerge in a natural way around periodic orbits in chaotic systems (more specifically, around orbits with hyperbolic structures), being the essential objects of techniques developed to avoid the use of long periodic orbits, for example in the Gutzwiller trace formula. Evaluating the interactions between scar functions, represented by the matrix elements, long periodic orbits can be eliminated.

In the first step we designed a new version of the scar function, based on an integral representation of time evolved coherent states. We analyzed its asymptotic properties and performed theoretical computations of the matrix elements of a hyperbolic Hamiltonian prototype. We found that these matrix elements depend essentially on the heteroclinic area related to periodic orbits in phase space, a result that takes the form of a Bohr-Sommerfeld quantization rule. Finally, we compared these theoretical results with numerical computation in the cat map, performing a semiclassical construction of the scar function in this system.

Keywords: matrix element, scar function, Ehrenfest time, heteroclinic area, trace formula, hyperbolic Hamiltonian, quantization rule, cat map.

Contenidos

Resumen	I
Abstract	III
1. Introducción	1
2. Elementos de matriz entre funciones de Scar, propiedades asintóticas	5
2.1. Funciones de scar	5
2.2. Representación integral de la función de scar	10
2.3. Elementos de matriz entre funciones de scar	19
2.4. Expansión de los elementos de matriz en potencias de $\hbar$	29
3. El mapa del gato	37
3.1. Introducción	37
3.2. Aspectos dinámicos	37
3.2.1. Mapas hiperbólicos	38
3.2.2. Automorfismo toroidal hiperbólico	42
3.2.3. Mapa del gato perturbado	44
3.2.4. Funciones generatrices	47
3.3. Cuantización	47
3.4. La función de scar en la base de autoestados	50
3.5. Construcción semiclásica de la función de scar	52
3.6. Cálculo semiclásico de elementos de matriz	59
4. Conclusiones	71
Lista de Publicaciones	75
A. La aproximación del Hamiltoniano local.	77
B. Validez del modelo Hamiltoniano $\mathcal{H} = pq$ para sistemas genéricos.	81
C. Elementos de matriz entre funciones de scar con distinta energía media.	87

D. Transformada de Fourier de la función $h\phi(q)$.	89
E. Funciones de scar asociadas a órbitas de período mayor que 1.	91
F. Cálculo de elementos de matriz en el toro.	95
Agradecimientos	99

Capítulo 1

Introducción

Durante el siglo XX, el conocimiento del hombre logró trascender sus propias dimensiones y ahondar en escenarios hasta entonces insospechados. La teoría general de la Relatividad, desarrollada por Einstein entre 1905 y 1916, permitiría explicar comportamientos a escala astronómica -como los orígenes del universo, la curvatura adquirida por un rayo de luz proveniente de una estrella lejana al pasar por las proximidades del sol, etc.- En el otro extremo del espectro, fenómenos como los efectos Compton y fotoeléctrico, y el espectro discreto del átomo de hidrógeno, pudieron ser comprendidos satisfactoriamente a partir del esfuerzo de hombres como Planck, de Broglie, Bohr, Schrödinger, Heisenberg. Esta teoría del mundo microscópico, formalmente conocida como mecánica cuántica, ha revelado un nivel de exactitud que superó las expectativas de sus fundadores, y se ha constituido no sólo en la disciplina reservada para la descripción de la física de partículas elementales, núcleos, átomos y moléculas, o bien de los fenómenos de interacción de la luz con la materia, sino incluso en la base del enfoque moderno de otras ciencias, particularmente de la química y la biología. Más aún, en la medida en que ha sido decisiva la mecánica cuántica para el desarrollo de la física del estado sólido y de la materia condensada, ha tenido un impacto crucial en la ingeniería de los semiconductores y como consecuencia de ello en los avances de la electrónica y de las computadoras.

En resumidas cuentas, el aspecto más significativo de la mecánica cuántica es quizás el uso de las probabilidades como elemento de descripción. A diferencia de la mecánica newtoniana, en la que, al menos en teoría, es posible calcular el futuro de un sistema conociendo de antemano las fuerzas involucradas y las condiciones iniciales, en cuántica se asume que lo máximo que puede hacerse es predecir las probabilidades asociadas a una serie de futuras mediciones. Esto es así dado que, como lo establece el principio de incerteza de Heisenberg, no hay forma de conocer estas condiciones iniciales con total precisión. Aquel paradigma clásico según el cual: “me das la ley, el q_i y el p_i , y yo te daré el $q(t)$ para todo t ”, queda así definitivamente abolido.

No obstante ello, siempre queda una suerte de “mancha” asociada a estas condiciones iniciales. En este sentido, suele decirse que las trayectorias del sistema comienzan en regiones “difusas” del espacio de fases y que todo el trabajo consiste en predecir la probabilidad de evolución de este conjunto o “manejo” de órbitas. El tamaño mínimo de esta área en el

espacio de fases está determinado por la constante de Planck, $h = 6.626... \times 10^{-34} \text{ Joule.seg}$, una constante con unidades de acción. De este modo, los estados cuánticos quedan caracterizados por una cantidad determinada de acción, que en el común de los casos viene representada por un múltiplo entero de la constante de Planck.

No obstante el éxito abrumador sostenido todo a lo largo del siglo XX, la mecánica cuántica ha despertado suspicacias en sectores del ambiente científico ya desde sus albores. Fundamentalmente en lo que respecta a la utilización de términos y conceptos derivados de la física newtoniana a la hora de hacer referencia a acontecimientos microscópicos. Nociones como posición, momento, espacio de fases, trayectoria, ya no significan lo que antes. Más aún, en opinión de algunos mecanicistas cuánticos, este último concepto carece absolutamente de sentido en el ámbito de la nueva teoría [1]. Esto, que a simple vista pudiera parecer un mero detalle semántico, trae aparejadas consecuencias insoslayables. Particularmente, la necesidad de prescindir de analogías y metáforas para trasladarse de un esquema de pensamiento a otro. El aprendizaje de la mecánica cuántica podría compararse, de este modo, al de un idioma desconocido para el cual no se ha escrito aún (ni se escribirá jamás) un diccionario bilingüe.

Los aspectos epistemológicos de la mecánica cuántica merecen un capítulo aparte dentro de la filosofía de la ciencia, que escapa a las pretensiones de esta Tesis. No obstante, si hemos de ocuparnos de una materia a la que llamaremos *Caos Cuántico*, la digresión es ineludible, pues es bien sabido que una de las principales características que identifican a los sistemas caóticos es la divergencia de trayectorias inicialmente cercanas. Ahora bien, si se nos obliga a abandonar la noción de trayectoria, ¿cómo podremos reconocer en el marco de la mecánica cuántica aquellos sistemas capaces de exhibir un comportamiento caótico? ¿O será que, a la inversa, lo que en realidad carece de sentido es indagar acerca de la presencia de caos en un sistema gobernado por la mecánica cuántica? Ya hacia 1917 el propio Einstein reconocía el problema, aunque con un planteo de otras características [2]. Hoy en día, y luego de varias décadas de prolíficos avances en este campo de investigación, las disputas siguen encendidas, y hay quienes sostienen que caos y cuántica son dos entidades irreconciliables¹.

Pero en la física, lo mismo que en cualquier ciencia natural, cuando se cruza una frontera y se descubren nuevos escenarios conceptuales, es preciso delinear con claridad caminos que nos permitan transitar libremente en una y otra dirección. Esto se conoce habitualmente como límite clásico de una teoría, o principio de correspondencia, y va asociado a una constante universal que en la escala newtoniana asume valores extremos (así, los efectos de la teoría de la relatividad desaparecen cuando la constante c “tiende a infinito”, en lo que se conoce como límite no relativista; la contrapartida cuántica, por su parte, corresponde a asumir que la constante de Planck, h , “tiende a cero”). De modo que el interrogante puede plantearse desde otra perspectiva, a saber: Dado un sistema que clásicamente manifiesta un comportamiento caótico, ¿Será posible plantear un problema cuántico compatible con el principio de correspondencia? Y si es así ¿Qué información relevante podrá extraerse de

¹Uno de los argumentos de más peso, corresponde a la imposibilidad de hallar caos en el marco de una teoría lineal como es la mecánica cuántica, pues es en las no-linealidades de las ecuaciones que lo describen donde radica la huella digital de un sistema caótico.

su resolución? Y en definitiva ¿Existirán en la naturaleza situaciones cuya fenomenología se pueda explicar siguiendo este itinerario?

Esta línea de razonamiento ha dado origen a un nuevo camino en la búsqueda de una reconciliación entre el caos y la mecánica cuántica. Concretamente, la búsqueda de un *Caos Cuántico* se ha enfocado en sistemas que, bajo condiciones apropiadas, exhiben lo que se conoce como comportamiento semiclásico. Esto alude a un sistema cuántico que, en determinadas circunstancias, consigue imitar algunas características de su análogo clásico [1]. Sirva de ejemplo el sistema compuesto por un electrón en un nivel atómico altamente excitado. En este caso pueden construirse, tanto teórica como experimentalmente, lo que se conoce como paquetes de ondas, vale decir, combinaciones lineales de autofunciones energéticas con un alto grado de localización espacial y espectral, cuya evolución temporal semeja las trayectorias del modelo clásico equivalente. A groso modo, el comportamiento semiclásico tiene lugar toda vez que la “mancha” de condiciones iniciales ocupe una región mucho menor en el espacio de fases que la subtendida por toda la trayectoria, y siempre que el tiempo de observación sea menor que el necesario para que el paquete de ondas se disperse.

Fue utilizando un enfoque semiclásico, preciasamente, que M. Gutzwiller introdujo hacia fines de los '60 la primer teoría exitosa para evaluar el espectro energético de un sistema clásicamente caótico. Este formalismo, hoy conocido como fórmula de trazas de Gutzwiller [3, 4], asocia las órbitas periódicas del sistema mecánico (que junto a otros parámetros como el índice de estabilidad y el índice de Maslov conforman los invariantes de la dinámica clásica) a la densidad de estados cuánticos. Los avances realizados desde entonces (fundamentalmente dirigidos a mejorar las propiedades de convergencia de las sumas involucradas en la fórmula de trazas) han sido muy significativos [5, 6, 7, 8], permitiendo profundizar en la comprensión de diversos fenómenos de naturaleza cuántica, entre los que se destacan los fenómenos de localización (como es por ejemplo el caso del *Scarring*, o “cicatrización”, donde se observa localización de las funciones de onda sobre órbitas periódicas cortas), y las fluctuaciones espectrales propias de los sistemas integrables, mixtos y caóticos, y sus vinculaciones con la teoría de matrices aleatorias [9]. No obstante ello, la teoría ha mostrado serias limitaciones a la hora de su implementación numérica, entre las que se destaca la divergencia exponencial del número de órbitas periódicas con el tiempo de Heisenberg. Un cálculo típico de unos veinte niveles de energía, por citar un ejemplo, puede requerir un número aproximado de 38000 órbitas [10].

Pocos años atrás, Vergini y Carlo desarrollaron un método basado en órbitas de período corto [12, 13, 14, 15]. Utilizando este formalismo, estos autores mostraron que es posible obtener toda la información cuántica de un sistema Hamiltoniano caótico en términos de un pequeño número de OPs (creciente a lo sumo en forma lineal con el tiempo de Ehrenfest). La idea central de este enfoque, consiste en reemplazar el uso de OPs de período largo por interacciones entre OPs cortas. Estas interacciones, por su parte, corresponden a elementos de matriz del Hamiltoniano del sistema entre estados asociados a las variedades estables e inestables de sus órbitas periódicas, los denominados estados de scar. Por añadidura, a partir de este enfoque surge un nuevo tipo de invariante clásico que se agrega a los invariantes canónicos asociados a órbitas periódicas individuales (considerados en la teoría

de Gutzwiller), a saber, el área definida por las variedades estables e inestables de dos órbitas diferentes, la denominada área heteroclínica.

Las primeras tentativas para la construcción semiclásica de estas funciones de scar, discutida con todo detalle en [11], no ofrecen, sin embargo, una descripción adecuada en determinadas regiones del espacio de fases, circunstancia que afecta drásticamente el comportamiento de los elementos de matriz. Uno de los objetivos centrales de esta Tesis es, por ende, plantear una formulación alternativa que permita subsanar este inconveniente. La representación integral de la función de scar constituye aquí la novedad, y su construcción, propiedades asintóticas, e implementación en el cálculo de los elementos de matriz de un Hamiltoniano hipérbólico prototipo (recogidas en [16]), el objeto del Capítulo 2. A lo largo de la Tesis, la expresión “elementos de matriz” se aplicará en general tanto para los overlaps como para los elementos de matriz del Hamiltoniano propiamente dichos.

Continuando con la línea planteada en [12, 13, 14, 15], las funciones de scar se construirán sobre órbitas periódicas inestables, y se considerará fundamentalmente sus contribuciones sobre una superficie de sección de Poincaré (donde la órbita, vista desde el punto de vista del mapa de retorno, adopta la forma de un punto fijo hiperbólico). Por supuesto, los elementos de matriz también dependen de la dinámica en la dirección transversal a la superficie de sección. No obstante, como se explica en el apéndice A, esta contribución es prácticamente irrelevante (en rigor, esta dirección adquiere importancia cuando las órbitas periódicas se ubican en capas de distinta energía). Estas funciones de scar, vale la pena aclararlo, admiten dos paridades. Aquí, sin embargo, no se considerará el caso más general, sino tan sólo el de las funciones pares, suficiente para capturar las propiedades asintóticas de los elementos de matriz.

El interés se centrará en el comportamiento asintótico de los elementos de matriz, particularmente en lo que se refiere a su dependencia con el área heteroclínica asociada a un par de órbitas. En este sentido, merecen ser destacados los resultados expuestos en las ecuaciones (2.56) y (2.62), relacionados con la forma en que cuantizan los elementos de matriz (al estilo Bohr-Sommerfeld) con este área heteroclínica.

En el capítulo 3, se implementarán los resultados teóricos anteriores (más específicamente, los que se exponen en la sección 2.4) al caso del mapa del gato de Hannay Berry (que es una variante cuantizable del mapa del gato de Arnold [31]). Este sistema posee la ventaja de presentar un comportamiento caótico en ausencia de no linealidades en las ecuaciones que lo describen, emergiendo esta como consecuencia única de la geometría del espacio de fases. Luego de una descripción detallada de los aspectos dinámicos de este sistema, se presentará el esquema tradicional que se utiliza para estudiar su mecánica cuántica, y se construirá la correspondiente función de scar (en representación integral) de dos maneras alternativas (expandiéndola en la base de los autoestados del propagador cuántico asociado al mapa, y mediante un conjunto de recetas semiclásicas estándar). En última instancia, se llevará a cabo el cálculo numérico de los elementos de matriz, que serán analizados comparándose las amplitudes y frecuencias de oscilación con las predicciones teóricas deducidas para el modelo estudiado en el capítulo 2. Estos resultados podrán así mismo ser consultados próximamente en [17].

Las conclusiones generales se reservan para el capítulo 4.

Capítulo 2

Elementos de matriz entre funciones de Scar, propiedades asintóticas

En este capítulo se expondrá la teoría preliminar desarrollada durante el trabajo. En primer lugar, en relación al comportamiento asintótico de las funciones de scar, construidas primero en la base de autoestados del oscilador armónico y luego mediante una representación integral. A continuación se mostrarán los cálculos de overlaps y elementos de matriz entre estos estados, cuyas propiedades asintóticas se exhibirán en última instancia.

2.1. Funciones de scar

Esta sección está dedicada a la construcción de la función de scar extendida sobre una sección de Poincaré. En la vecindad de un punto fijo que representa a la órbita periódica sobre esta superficie, el movimiento clásico está gobernado por un Hamiltoniano hiperbólico (véase Apéndice A para una explicación más detallada). Es por ello que aquí se evaluará el estado de scar sobre un punto fijo hiperbólico; en primer término en la base de autoestados del oscilador armónico, y por último en representación de coordenadas. Dado que con esta construcción no se ha logrado obtener una expresión útil para describir a la función de onda lejos de la vecindad del punto fijo, se ha implementado un formalismo alternativo basado en una representación integral del estado de scar, a cuya exposición se destinará la sección siguiente.

El Hamiltoniano clásico $\mathcal{H} = \lambda qp$ define un punto hiperbólico en el origen con exponente de Lyapunov λ , cuyas variedades estable e inestable corresponden a los ejes p y q respectivamente. De este modo, la evolución de un punto (q_0, p_0) con energía no nula tiene lugar sobre la rama hiperbólica $(q_0 e^{\lambda t}, p_0 e^{-\lambda t})$. De aquí en más se asumirá que el movimiento está restringido a una región del espacio de fases limitada por $|q| = Q$ y $|p| = P$, y se considerará, dentro de esta, a las funciones de onda con mínima dispersión energética. Antes de proceder, se realizará una adimensionalización para simplificar las expresiones. Para ello se medirá el tiempo en unidades de λ^{-1} , q en unidades de Q y p en unidades de P . De este modo, el movimiento clásico queda descrito por

$$\mathcal{H} = qp,$$

con $|q| < 1$ y $|p| < 1$.

En términos de los operadores estándar de creación y destrucción $\hat{a}^\dagger = (\hat{q} - i\hat{p})/\sqrt{2\hbar}$ y $\hat{a} = (\hat{q} + i\hat{p})/\sqrt{2\hbar}$ [18], el Hamiltoniano cuántico adopta la forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) = \frac{i\hbar}{2} (\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2). \quad (2.1)$$

Como ya se anticipó, la descripción se hará empleando la base de autoestados del oscilador armónico,

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger n} |0\rangle}{\sqrt{n!}}, \quad \text{para } n = 0, \dots, N_0; \quad (2.2)$$

base que resulta muy apropiada para la construcción de funciones de onda restringidas a la región del espacio de fases que se está considerando (siempre que las excitaciones incluidas no superen el valor $N_0 = 1/2\hbar$)¹. En esta base, el estado de vacío en representación q corresponde al paquete gaussiano

$$\langle q|0\rangle = (\pi\hbar)^{-1/4} \exp(-q^2/2\hbar). \quad (2.3)$$

En lo sucesivo, se restringirá la atención a estados de scar con energía media nula. El problema que se considerará aquí, corresponde a encontrar el estado $|\phi\rangle$ que minimice la dispersión σ , definida por

$$\sigma^2 \equiv \frac{\langle \phi | \hat{H}^2 | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle}, \quad (2.4)$$

que equivale a obtener el mínimo autovalor de $\hat{H}^2$ [14, 19]. Con este propósito se utilizan los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ sobre los estados definidos en (2.2), y la definición dada en (2.1). de donde resulta

$$\hat{H}^2 |n\rangle = \frac{\hbar^2}{4} (-a_n |n+4\rangle + b_n |n\rangle - a_{n-4} |n-4\rangle), \quad (2.5)$$

con $a_n = \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$ y $b_n = (n+1)(n+2) + (n-1)n$.

Es evidente a partir de esta ecuación que para la construcción del estado de scar podrán escogerse alternativamente cuatro combinaciones lineales, de la forma

$$|\phi\rangle = \sum_{j=k}^N c_j |4j+k\rangle, \quad (2.6)$$

¹Los estados de la ecuación (2.2) son autoestados del Hamiltoniano $\hat{H}_0 = (\hat{p}^2 + \hat{q}^2)/2$, con energías $E_n = \hbar(n+1/2)$. Por otra parte, en los bordes de la región que se está considerando la energía no supera el valor $H_0 = 1/2$. En consecuencia, la máxima excitación queda determinada por la condición $\hbar(N_0 + 1/2) \leq 1/2$.

todas ellas linealmente independientes entre sí (con $k = 0, 1, 2, 3$ y $N = N_0/4 \simeq 1/8\hbar$). No obstante, tan sólo las correspondientes a $k = 0, 1$ representan soluciones relevantes en el límite semiclásico (las otras dos tienen importancia tan sólo al construir funciones de scar de energía media no nula). En adelante se considerará el caso $k = 0$, que corresponde a la denominada función de scar par [13]. Insertando (2.6) -con este valor particular de k - en (2.4), y utilizando (2.5), se obtiene la dispersión universal definida en [13]

$$\Gamma^2 \equiv \frac{\sigma^2}{(\hbar^2/4)} = \frac{A}{B}, \quad (2.7)$$

donde

$$A = \sum_{j=0}^N \left[c_j \sqrt{(4j+1)(4j+2)} - c_{j+1} \sqrt{(4j+3)(4j+4)} \right]^2, \quad (2.8)$$

$$B = \sum_{j=0}^N c_j^2. \quad (2.9)$$

Los coeficientes c_j que minimizan Γ^2 pueden obtenerse del problema de autovalores $\hat{H}^2 |\phi\rangle = \sigma^2 |\phi\rangle$ que, utilizando (2.5), conduce al siguiente conjunto de ecuaciones para los coeficientes c_j y la dispersión Γ :

$$-A_j c_{j+1} + B_j c_j - A_{j-1} c_{j-1} = \Gamma^2 c_j, \quad (2.10)$$

con $A_j = a_{4j}$ y $B_j = b_{4j}$.

Este sistema se puede resolver recursivamente (véase [13]), con la precisión que se desee, o bien a través de una aproximación asintótica para los c_j y para Γ . Como lo que se pretende es obtener una expresión analítica para la dispersión, aquí se tomará el segundo camino. Para ello se definirá primeramente la función $c(z)$ en el rango $0 < z \leq 1$, de modo que

$$c\left(\frac{j}{N+1}\right) = c_j$$

para $j = 1, \dots, N$. De esta manera, y para valores grandes de N , la relación de recurrencia (2.10) se transforma en la siguiente ecuación diferencial:²

$$4z^2 \frac{d^2 c(z)}{dz^2} + 8z \frac{dc(z)}{dz} + \left(1 + \frac{\Gamma^2}{4}\right) c(z) = 0, \quad (2.11)$$

cuya solución general es

$$c(z) = \frac{A \cos\left[\frac{\Gamma}{4} \ln(z)\right] + B \sin\left[\frac{\Gamma}{4} \ln(z)\right]}{\sqrt{z}}.$$

²El procedimiento consiste en expandir las raíces de los A_j , asumiendo $j \gg 1$.

Ahora bien, debe tenerse presente que (2.11) no es una aproximación de (2.10) válida para $z \simeq 0$, y que la única condición de contorno de que se dispone es $c(1) = 0$ (derivada de $c_{N+1} = 0$, y de la que se deduce que $A = 0$). Para eliminar la constante B , lo que se hará es utilizar el grado de libertad correspondiente a la normalización, elegirla en forma arbitraria, y normalizar más adelante. Con ambos argumentos, una solución de (2.11) cuyo comportamiento sea el esperado a partir de (2.10) es

$$c(z) = -\frac{\sin\left[\frac{\Gamma}{4}\ln(z)\right]}{\sqrt{(N+1)z}}. \quad (2.12)$$

A continuación se realizará el cálculo de la dispersión. Se comenzará calculando B , para lo cual habrá primero que normalizar la función de scar. Esto se puede hacer aceptando que (2.12) es una buena aproximación de los c_j para $j \geq 1$ y tomando $c_0 = \sqrt{6}c_1/(1 - \Gamma^2/2)$ de (2.10). Si se asume que Γ es un parámetro pequeño (luego se verificará que efectivamente tiende a cero), y se define $u \equiv -(\Gamma/4)\ln z$, la norma resulta

$$B = \frac{4}{\Gamma} \int_0^{u_1} du \sin^2 u + \mathcal{O}(1) \simeq \frac{2}{\Gamma} \left(u_1 - \frac{\sin(2u_1)}{2} \right), \quad (2.13)$$

donde $u_1 \equiv (\Gamma/4)\ln(N+1)$. Del mismo modo se calcula el numerador de la ecuación (2.7), para obtener

$$A = 4\Gamma \int_0^{u_1} du \cos^2 u + \mathcal{O}(\Gamma^2) \simeq 2\Gamma \left(u_1 + \frac{\sin(2u_1)}{2} \right).$$

Por último, se introducen estas dos expresiones en (2.7) y se opera algebraicamente, obteniendo como resultado -al orden que se está estudiando- $\sin(2u_1) = 0$, cuya única solución admisible es $u_1 = \pi/2$.³ Con este resultado, y recordando las definiciones de u_1 y de N introducidas anteriormente, se arriba finalmente a la dispersión del Hamiltoniano como función de $\hbar$:

$$\sigma = \frac{\pi\hbar}{|\ln \hbar|} (1 + \mathcal{O}(|\ln \hbar|^{-1})). \quad (2.14)$$

Esta expresión para la dispersión, cuya importancia se apreciará en breve, se convertirá en la sección siguiente en el punto de comparación central de las dos diferentes aproximaciones a la función de scar.

Para mejorar los c_j para valores fijos de j cuando $N \rightarrow \infty$, se tendrá en cuenta que $A = \mathcal{O}(\Gamma) = \mathcal{O}(1/\ln N)$ (recuérdese que u_1 converge a $\pi/2$ cuando $N \rightarrow \infty$). Esto significa que cada uno de los términos del miembro derecho de (2.8) debe anularse en este límite. de modo que, llamando $\tilde{c}_j$ al valor de convergencia, resulta

$$\frac{\tilde{c}_j}{\tilde{c}_{j+1}} = \sqrt{\frac{(4j+3)(4j+4)}{(4j+1)(4j+2)}};$$

³Nótese que la solución $u_1 = 0$ resulta incompatible, pues anula también la constante de normalización B .

una relación de recurrencia cuya solución es

$$\tilde{c}_j = \frac{(2\pi)^{1/4} \sqrt{(4j)!} \tilde{\Gamma}(j+1/2)}{2^{2j} (2j)! \tilde{\Gamma}(j+3/4)}, \quad (2.15)$$

donde $\tilde{\Gamma}(x)$ corresponde a la función gamma de x .

Finalmente, acoplando las ecuaciones (2.12) y (2.15) (que funcionan para valores fijos de j/N y de j , respectivamente), y utilizando (2.13) para normalizar, que establece un valor asintótico de $B \simeq \pi/\Gamma$, se obtiene la siguiente expresión de convergencia en el límite $N \rightarrow \infty$:

$$c_j = \sqrt{\frac{\Gamma}{\pi}} \tilde{c}_j \sin \left[\frac{\Gamma}{4} \ln \left(\frac{N+2}{j+1} \right) \right]. \quad (2.16)$$

Cabe señalar que $\tilde{c}_j$ puede aproximarse por $\tilde{c}_j = [1 - \beta/j + \mathcal{O}(j^{-2})]/\sqrt{j}$ para $j \geq 1$, con $\beta = 1/16$. Este tipo de aproximación es considerada en [13], donde β se obtiene numéricamente como función de N en el rango $1 \leq N \leq 10^5$. No obstante, de acuerdo al análisis anterior, tal expresión no es adecuada en el límite $N \rightarrow \infty$.

Para obtener un resultado equivalente para los coeficientes de la función de scar impar, todo lo que hay que hacer es sustituir $k = 0$ por $k = 1$ en (2.6) y proceder del mismo modo que antes. La solución viene dada nuevamente por la ecuación (2.16), aunque esta vez los $\tilde{c}_j$ valen

$$\tilde{c}_j = \frac{(2\pi)^{1/4} \sqrt{(4j+1)!} \tilde{\Gamma}(j+3/4)}{2^{2j+1/2} j! \tilde{\Gamma}(2j+3/2)},$$

que a su vez se pueden aproximar por $\tilde{c}_j = [1 - 3/16j + \mathcal{O}(j^{-2})]/\sqrt{j}$ para $j \geq 1$.

Es oportuno dar cuenta aquí de las propiedades que caracterizan a la función de scar. Utilizando la relación $\hat{H}^2 |\phi\rangle = \sigma^2 |\phi\rangle$ que se deriva de la ecuación (2.4), y el orden más bajo de σ en potencias de $|\ln \hbar|^{-1}$ dado por la ecuación (2.14), se puede concluir que los momentos pares satisfacen

$$\langle \phi | \hat{H}^{2n} | \phi \rangle = \sigma^{2n} = \mathcal{O}(|\ln \hbar|^{-2n}), \quad (2.17)$$

mientras que para los impares es $\langle \phi | \hat{H}^{2n+1} | \phi \rangle = 0$ (recuérdese que, al tomar $k = 0$ en la combinación lineal (2.6), se ha impuesto implícitamente la condición $\langle \phi | \hat{H} | \phi \rangle = 0$). En la próxima sección se verá cómo sacar provecho de este requisito, al que debe ceñirse una función que en el límite asintótico converja a la función de scar.

En última instancia, se procederá a calcular la representación q del estado de scar en la vecindad de $q = 0$. Asumiendo que la eliminación de un número finito de términos en la ecuación (2.6) no afecta el orden más bajo, es posible utilizar la siguiente expresión asintótica (para $j \gg 1$) de las funciones de onda del oscilador armónico en torno a $q = 0$:

$$\langle q | 4j \rangle \simeq \frac{1}{(2\pi^2 j \hbar)^{1/4}} \sum_{l=0}^{2j} (-1)^l \frac{(2j)!}{(2l)! (2j-l)!} \left(\frac{4q^2}{\hbar} \right)^l. \quad (2.18)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.16) y (2.18) en (2.6) se obtiene finalmente

$$\phi(q) \simeq \frac{\Gamma^{1/2}}{\pi (2\hbar)^{1/4}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} \left(\frac{4q^2}{\hbar} \right)^l \sum_{j(\gg l)}^N (2j)^l j^{-3/4} \sin[(\Gamma/4) \ln(N/j)].$$

Para arribar a la expresión anterior se han eliminado varios términos en la suma sobre j para satisfacer $j \gg l$, y se ha utilizado la aproximación $(2j)!/(2j-l)! \simeq (2j)^l$. La suma sobre j se evalúa a continuación con una integración sobre la variable $u \equiv -(\Gamma/4) \ln z$ como se ha hecho anteriormente, que da como resultado $2^l N^{l+1/4} 4\Gamma/(4l+1)^2$. Con esto, y recordando que $N \simeq 1/8\hbar$ y $\Gamma \simeq 2\pi/|\ln \hbar|$, se arriba finalmente a la expresión asintótica alrededor de $q = 0$

$$\phi(q) \simeq \frac{2^{5/2} \pi^{1/2}}{|\ln \hbar|^{3/2} \hbar^{1/2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)! (4l+1)^2} (q/\hbar)^{2l}. \quad (2.19)$$

Observando esta ecuación, puede advertirse que los términos individuales no contribuyen a $\phi(q)$ cerca de $q = 0$, pues son $\mathcal{O}(\hbar^{-1/4})$; en particular, $\langle q|0\rangle = (\pi\hbar)^{-1/4} \exp(-q^2/2\hbar)$. La ecuación (2.19) corresponde a la función de scar par, y resulta de utilidad solamente en el rango $|q| < \mathcal{O}(\hbar)$. Para obtener la función de scar impar, lo que debe hacerse es simplemente multiplicar (2.19) por $\text{sgn}(q)$. Por último, la acción del Hamiltoniano sobre la función de scar se deduce de la aplicación de $\hat{H} = -i\hbar(1/2 + q d/dq)$ sobre la ecuación (2.19). El resultado es

$$\hat{H}\phi(q) \simeq \frac{-i\hbar^{1/2} 2^{3/2} \pi^{1/2}}{|\ln \hbar|^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)! (4l+1)} (q/\hbar)^{2l}. \quad (2.20)$$

2.2. Representación integral de la función de scar

Dado que en la sección anterior sólo fue posible obtener una expresión explícita de $\phi(q)$ en el rango $|q| \leq \mathcal{O}(\hbar)$, en esta sección se utilizará una representación integral para evaluar la función de scar. Se hallará la representación integral óptima y se estudiará su dependencia asintótica con el tiempo de Ehrenfest. Se verificará la equivalencia del esquema propuesto con la construcción descrita en la sección anterior, y se estudiará el comportamiento de la función en las regiones $q \sim \hbar$ (región del origen), $q \sim \sqrt{\hbar}$ (región intermedia y de mayor relevancia para el cálculo de los elementos de matriz), y $q \sim 1$.

Sobre la base de trabajos anteriores [23, 24, 25, 26], se propone aquí la siguiente forma integral:⁴

$$|\tilde{\phi}\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} dt f(2t/T) e^{i\theta t} \hat{U}^t |0\rangle, \quad (2.21)$$

⁴En adelante se emplearán las unidades introducidas en la sección anterior.

en la que $T \equiv |\ln \hbar|$ es del orden del tiempo de Ehrenfest, θ es un parámetro, y $f(x)$ una función real definida en el intervalo $|x| \leq 1$. La expresión resultante para $|\tilde{\phi}\rangle$ dependerá de la elección de esta función incógnita, cuya forma funcional se derivará, al igual que antes, de la minimización de la dispersión del estado de scar. Con este propósito, se define en primera instancia la función de autocorrelación

$$F(t) \equiv \langle \tilde{\phi} | \hat{U}^t e^{i\theta t} | \tilde{\phi} \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 dt_2 f(2t_1/T) f(2t_2/T) e^{i\theta(t+t_1-t_2)} \langle 0 | \hat{U}^{t+t_1-t_2} | 0 \rangle, \quad (2.22)$$

la cual será evaluada para tiempos infinitesimales ($t \sim 0$). Como se verá, esta definición es sumamente útil para rescatar la dependencia de la dispersión normalizada con el tiempo de Ehrenfest.

El procedimiento comienza con el cambio de variables $s = (t_1 + t_2)/T$ y $x = (t_1 - t_2)/T$, y la inserción de la igualdad $\langle 0 | \hat{U}^{t+t_1-t_2} | 0 \rangle = 1/\sqrt{\cosh(t+t_1-t_2)}$. Esta última, por su parte, se deriva multiplicando $\langle q | U^{t'} | 0 \rangle = (\pi \hbar)^{-1/4} \exp[-(q^2/2\hbar)e^{2t'} - t'/2]$ por (2.3) e integrando en todo el rango.⁵ De esta manera, la función de autocorrelación (2.22) adquiere la forma

$$F(t) = \frac{T^2}{2} \int_{-1}^1 dx h(x) \frac{e^{i\theta(t+XT)}}{\sqrt{\cosh(t+XT)}}, \quad (2.23)$$

donde

$$h(x) = \int_{-(1-|x|)}^{1-|x|} ds f(s+x) f(s-x). \quad (2.24)$$

Asumiendo que $h(x)$ está acotada, el rango de contribución de x a la integral es $\mathcal{O}(1/T)$ (puesto que $t \sim 0$). En consecuencia, se puede expandir el integrando hasta $\mathcal{O}(x^2)$ (que equivale a decir $\mathcal{O}(T^{-2})$), que resultará el orden más bajo que debe retenerse para optimizar asintóticamente la dispersión, como sigue

$$f(s+x) f(s-x) = f(s)^2 + [f''(s) f(s) - f'(s)^2] x^2 + \mathcal{O}(x^3). \quad (2.25)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$\int_{-(1-|x|)}^{1-|x|} ds f''(s) f(s) = [f'(1) f(1) - f'(-1) f(-1)] - \int_{-(1-|x|)}^{1-|x|} ds f'(s)^2 + \mathcal{O}(x),$$

y que este término va multiplicado en (2.25) por x^2 , la integración de la expansión precedente y la acumulación de los términos de $\mathcal{O}(x^3)$ dan lugar a la siguiente expresión para $h(x)$:

$$h(x) = \int_{-(1-|x|)}^{1-|x|} ds f(s)^2 - 2x^2 \int_{-(1-|x|)}^{1-|x|} ds f'(s)^2 +$$

⁵La relación $\langle q | U^{t'} | 0 \rangle = (\pi \hbar)^{-1/4} \exp[-(q^2/2\hbar)e^{2t'} - t'/2]$ es exacta dado que el Hamiltoniano es una forma cuadrática de las variables q y p , y se puede verificar fácilmente introduciéndola en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo.

$$+ [f(1)f'(1) - f(-1)f'(-1)]x^2 + \mathcal{O}(x^3). \quad (2.26)$$

Con el objeto de obtener una expansión en potencias de x para la autocorrelación, se utiliza una aproximación lineal en los segmentos de ancho $|x|$. Dada una función $g(s)$ definida en el intervalo $[-1, 1]$, la linealización en los extremos se traduce en la siguiente fórmula (trapezios)

$$\int_{-(1-|x|)}^{1-|x|} ds g(s) = \int_{-1}^1 ds g(s) - |x| [g(1) + g(-1)] + \frac{x^2}{2} [g'(1) + g'(-1)] + \mathcal{O}(x^3). \quad (2.27)$$

En este caso la linealización se aplica a $h(x)$ (fórmula (2.26)) si se definen $g_1(s) \equiv f(s)^2$ y $g_2(s) \equiv f'(s)^2$ (con lo que $g'_1(s) = 2f(s)f'(s)$, $g'_2(s) = 2f'(s)f''(s)$). De este modo se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-(1-|x|)}^{1-|x|} ds f(s)^2 &= \int_{-1}^1 ds f(s)^2 - |x| [f(1)^2 + f(-1)^2] + \\ &+ x^2 [f(1)f'(1) - f(-1)f'(-1)] \end{aligned} \quad (2.28)$$

y

$$-2x^2 \int_{-(1-|x|)}^{1-|x|} ds f'(s)^2 = \int_{-1}^1 ds f'(s)^2 + \mathcal{O}(x^3). \quad (2.29)$$

Lo que resta es simplemente reacomodar los términos de (2.26) agrupando los factores comunes en cada potencia de x , para arribar a la expansión buscada

$$h(x) = \alpha - \beta|x| + 2\gamma x^2 + \mathcal{O}(x^3), \quad (2.30)$$

con

$$\alpha = \int_{-1}^1 ds f(s)^2, \quad \beta = f(1)^2 + f(-1)^2, \quad \gamma = \int_{-1}^1 ds f'(s)^2 - [f(1)f'(1) - f(-1)f'(-1)].$$

Ahora bien, lo que se desea es obtener una expresión para la dispersión que permita realizar una minimización utilizando el tiempo de Ehrenfest como variable. Para ver cómo ello conduce a una condición necesaria que debe satisfacer la función $h(x)$, es preciso realizar aún una serie de pasos. Primeramente, se define

$$M_n = \langle \tilde{\phi} | \left(\hat{H}/\hbar - \theta \right)^n | \tilde{\phi} \rangle, \quad (2.31)$$

que teniendo en cuenta la definición de la función de autocorrelación, resulta ser el coeficiente n -ésimo de su serie de Taylor dividido por $(-i)^n$. En consecuencia, se lo puede

calcular también derivando n veces la ecuación (2.23) con respecto a t y evaluando en $t = 0$. De este modo, se obtiene una relación entre los M_n y las derivadas de $h(x)$ ⁶

$$M_n = \frac{(-i)^n T^{1-n}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy h^{(n)}(y/t) \frac{\exp(i\theta y)}{\sqrt{\cosh(y)}}. \quad (2.32)$$

A partir de la definición de los M_n , resulta inmediata la relación entre estos y la dispersión cuadrática media (2.4)

$$\frac{\sigma^2}{\hbar^2} = \frac{M_2}{M_0} - \left(\frac{M_1}{M_0} \right)^2, \quad (2.33)$$

relación válida independientemente del valor del parámetro θ .

Establecido el vínculo entre la función $h(x)$ (y sus derivadas) y la dispersión del Hamiltoniano, lo que sigue es evaluar explícitamente los M_n , introducir el resultado en la ecuación (2.33) y dar con la condición que debe satisfacer $h(x)$ a que se aludió anteriormente (véase el párrafo comprendido entre las ecuaciones (2.30) y (2.31)).

Dado que $h(x)$ y sus derivadas tienen paridad definida, será útil tener en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \exp(i\theta y) = 2 \int_0^{\infty} dy f(y) \cos(\theta y) \quad \text{para } f(x) \text{ par,}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \exp(i\theta y) = 2i \int_0^{\infty} dy f(x) \sin(\theta y) \quad \text{para } f(x) \text{ impar.}$$

Con esta observación, y las definiciones

$$I_n = \int_0^{\infty} dy y^n \frac{\cos(\theta y)}{\sqrt{\cosh y}}, \quad y \quad J_n = \int_0^{\infty} dy y^n \frac{\sin(\theta y)}{\sqrt{\cosh(y)}},$$

basta calcular las derivadas de la función $h(x)$ a partir de (2.30), introducirlas en (2.32), y operar algebraicamente para obtener

$$M_0 = T\alpha I_0 - \beta I_1 - \frac{2}{T}\gamma I_2,$$

$$M_1 = -\beta J_0 - \frac{4}{T}\gamma J_1,$$

y

$$M_2 = \beta + \frac{4}{T}\gamma I_0,$$

⁶Realizando el cambio de variable $y = Tx + t$, el miembro derecho de la ecuación (2.23) se convierte en $\frac{T^2}{2} \int dx h\left(\frac{y-t}{T}\right) \frac{e^{i\theta y}}{\sqrt{\cosh(y)}} + \mathcal{O}(e^{-T/2})$, cuyas derivadas n -ésimas evaluadas en $t = 0$ resultan $\frac{(-1)^n T^{1-n}}{2} \int dy h^{(n)}(y/t) \frac{\exp(i\theta y)}{\sqrt{\cosh(y)}}.$

que al sustituirlas en (2.33), permiten establecer la relación entre la dispersión y el tiempo de Ehrenfest que motiva todo el trabajo anterior,

$$\frac{\sigma^2}{\hbar^2} = \frac{1}{T} \frac{\beta}{\alpha I_0} + \frac{1}{T^2} \left(\frac{4\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2 J_0^2}{\alpha^2 I_0^2} \right) + \mathcal{O}(T^{-3}).$$

De la ecuación anterior se desprende inmediatamente que, para minimizar la dispersión cuadrática cuando $T \rightarrow \infty$, β debe anularse. Pero esta condición, de acuerdo con la definición de β (véase (2.30)), implica que $f(1) = f(-1) = 0$, con lo que resulta $\gamma = \int_{-1}^1 ds f'(s)^2$, y consecuentemente

$$\frac{\sigma^2}{\hbar^2} = \frac{4}{T^2} \Phi(f) + \mathcal{O}(T^{-3}), \quad (2.34)$$

en donde se ha introducido la funcional

$$\Phi(f) \equiv \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\int_{-1}^1 dx f'(x)^2}{\int_{-1}^1 dx f(x)^2}.$$

En lo sucesivo se mostrará cómo debe escogerse $f(x)$ para que la funcional $\Phi(f)$ resulte mínima. Para ello, se parte de la observación de que la función $f(x)$ óptima debe satisfacer la igualdad

$$\frac{\int_{-1}^0 dx f'(x)^2}{\int_{-1}^0 dx f(x)^2} = \frac{\int_0^1 dx f'(x)^2}{\int_0^1 dx f(x)^2}.$$

Esto es así dado que, si se asume, por ejemplo, que el miembro izquierdo es mayor que el derecho, definiendo una $\tilde{f}(x)$ que valga lo que $f(x)$ para $x > 0$ y $f(-x)$ para $x < 0$. se puede probar fácilmente que $\Phi(\tilde{f}) < \Phi(f)$. En consecuencia, y sin pérdida de generalidad, la función de prueba se puede elegir par.⁷

Como $f(x)$, a su vez, debe anularse en los extremos, será útil representarla mediante una expansión en serie de funciones trigonométricas,

$$f(x) = \sum_{n=0} a_n \cos[\pi x (n + 1/2)].$$

Insertando esta serie en la definición de $\Phi(f)$ y resolviendo las integrales (una tarea sencilla, si se tiene en cuenta la ortogonalidad de las funciones trigonométricas), la expresión resultante para $\Phi(f)$ es

$$\Phi(f) = \frac{\sum a_n^2 \pi^2 (n + 1/2)^2}{\sum a_n^2}, \quad (2.35)$$

⁷El mismo razonamiento se podría haber hecho definiendo $\tilde{f}(x) = -f(-x)$ para $x < 0$, y la conclusión habría sido la misma. No obstante, el mínimo que se obtiene utilizando funciones impares es mayor que el correspondiente a funciones pares.

cuya extremación equivale a resolver el problema de multiplicadores de Lagrange para la función⁸

$$G(a_0, a_1, a_2, \dots, \lambda) = \sum a_n^2 \pi^2 (n + 1/2)^2 - \lambda \left(\sum a_n^2 - c^2 \right).$$

Al optimizar G , se obtienen infinitos extremos, cada uno de ellos representados por un único a_n distinto de cero⁹, que al introducirlos en (2.35) dan como resultado $\Phi(f) = \pi^2 (n + 1/2)^2$. De todos estos extremos, el mínimo absoluto corresponde evidentemente a $n = 0$. Así se llega finalmente a que

$$f(x) = \cos(\pi x/2) \quad (2.36)$$

(tomando $c = 1$), y a un valor para la dispersión, de acuerdo con (2.34), de

$$\frac{\sigma}{\hbar} = \frac{\pi}{T} + \mathcal{O}(T^{-2}).$$

Dos aspectos son destacables de este resultado: en primer término, que al orden más bajo coincide con la dispersión obtenida en la construcción de la función de scar descripta en la sección anterior (ecuación (2.14)); y en segunda instancia que, al menos hasta $\mathcal{O}(T^{-1})$, es independiente del parámetro θ . Ahora bien, si se coloca el resultado (2.36) encontrado para la función $f(x)$ en (2.24), se puede resolver la integral y expandir $h(x)$ hasta $\mathcal{O}(x^3)$,

$$h(x) = \int_{-(1-|x|)}^{1-|x|} ds \cos(s+x) \cos(s-x) = 1 - \frac{\pi^2}{2} x^2 + \frac{\pi^2}{3} |x|^3 + \mathcal{O}(x^4), \quad (2.37)$$

y con ello recalculamos M_0 y M_1 mediante (2.32). Se obtiene de esta manera

$$\begin{aligned} M_0 &= T I_0 - (\pi^2/2T) I_2 + (\pi^2/3T^2) I_3 \\ M_1 &= -(\pi^2/T) J_1 + (\pi^2/T^2) J_2, \end{aligned} \quad (2.38)$$

de donde resulta $M_1/M_0 = \mathcal{O}(T^{-2})$. Ahora bien, teniendo en cuenta la definición de los momentos M_n (ecuación (2.31)), este resultado permite deducir que

$$\frac{\langle \tilde{\phi} | \hat{H}/\hbar | \tilde{\phi} \rangle}{\langle \tilde{\phi} | \tilde{\phi} \rangle} - \theta = \mathcal{O}(T^{-2}),$$

esto es, que a $\mathcal{O}(T^{-1})$ el parámetro θ coincide con la energía media (dividida por $\hbar$).

Establecidas las similitudes, y en vista de que las curvas de la figura (2.2) sugieren que la representación integral propuesta aquí no converge exactamente a la función de scar en el límite semiclásico, se procederá a estudiar las diferencias entre la construcción realizada

⁸Donde c representa la norma de $f(x)$, cuyo valor es, en principio, arbitrario.

⁹Adicionalmente, de aquí puede deducirse que, para el caso en que $a_n = 1$, resulta $c = \pm 1$.

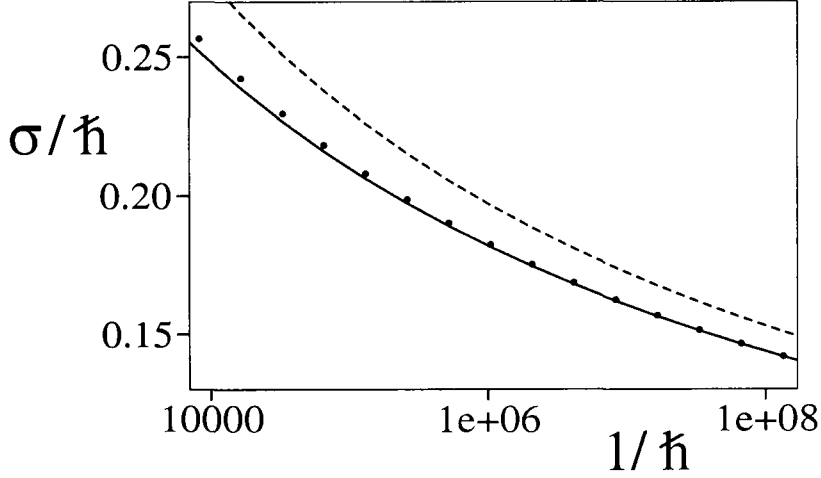


Figura 2.1: Gráficos de $\sigma/\hbar$ como función de $1/\hbar$ para la función de scar $\phi(q)$ ($\bullet$), de la aproximación numérica $\pi/(|\log \hbar| + 3.45)$ (—), y de la expresión analítica (2.39) obtenida con la representación integral $\tilde{\phi}(q)$ (---).

aquí y la de la sección anterior. Para ello se obtendrá primeramente el orden siguiente de la dispersión. A tal fin se utiliza la expansión (2.37) para calcular M_2 ,

$$M_2 = (\pi^2/T) I_0 - (2\pi^2/T^2) I_1,$$

que al introducirlo en (2.33) conduce a

$$\frac{\sigma}{\hbar} = \frac{\pi}{T + I_1/I_0} + \mathcal{O}(T^{-3}). \quad (2.39)$$

Mediante el cálculo numérico de los I_n evaluados en $\theta = 0$, se puede desarrollar I_1/I_0 hasta $\mathcal{O}(\theta^2)$ para arribar a $I_1/I_0 \simeq 2.12 - 16.75\theta^2$. Esto indica que, para un valor fijo de T , la dispersión mínima se obtiene para $\theta = 0$, lo que corresponde a una energía media nula. De este modo, resulta ser que para el estado de scar con energía nula, a $\mathcal{O}(T^{-2})$ es $\sigma/\hbar = \pi/(T + 2.12)$, un valor mayor que la cota hallada para el mismo estado con la construcción anterior ($\sigma/\hbar < \pi/(T + 3.45)$).¹⁰

Es posible establecer otra discrepancia entre ambas construcciones calculando el cuarto momento para el estado de energía nula. Mientras que por la vía de la ecuación (2.32), se obtiene un valor de

$$M_4/M_0 = 2\pi^2/I_0 T^3 + \mathcal{O}(T^{-4}),$$

el orden más bajo del correspondiente momento en la representación de los autoestados del oscilador armónico es T^{-4} (véase sección anterior).

¹⁰Si bien no ha sido posible encontrar analíticamente la dispersión hasta $\mathcal{O}(T^{-2})$ para $\phi(q)$, la fórmula de interpolación derivada en [14] establece un valor asintótico de $\frac{\sigma}{\hbar} = \frac{\pi}{T+3.62}$. De este valor y de los cálculos numéricos de la figura 1, la expresión $\frac{\sigma}{\hbar} \simeq \frac{\pi}{T+\alpha}$, donde $3.45 < \alpha \simeq 3.62$ parece ser una buena estimación.

A continuación, se estudiará la representación de coordenadas $\tilde{\phi}(q)$ correspondiente al estado de energía nula. Para ello se sustituye $f(x) = \cos(\pi x/2)$ en (2.21), se evalúa a esta en $\theta = 0$, y se normaliza con (2.38). Se llega así a

$$\tilde{\phi}(q) = \frac{1}{\sqrt{M_0} (\pi \hbar)^{1/4}} \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\pi t/T) \exp \left[- (q^2/2\hbar) e^{-2t} - t/2 \right]. \quad (2.40)$$

Como se puede ver en la ecuación (2.40), $\tilde{\phi}(q)$ es una función par; en consecuencia, el análisis se restringirá a las distintas regiones de interés. En primer lugar, a la zona en que $q \sim \hbar$. Con este objeto, se realiza una expansión de $\exp[-(q^2/2\hbar)e^{-2t}]$ en $q = 0$ y se resuelven las integrales que resultan de cada término como sigue

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\pi t/T) \exp[-(2n+1/2)t] = \frac{8\pi \cosh\left[\left(\frac{1}{4} + n\right)T\right]}{4\pi^2 + T^2(4n+1)^2},$$

cuyo límite asintótico es $8\pi/\hbar^{n+1/4}T^2(4n+1)^2$. Colocando este resultado dentro de la expansión y reemplazando la norma por su valor asintótico $M_0 = \tilde{\Gamma}^2(1/4)T/2^{3/2}\pi^{1/2}$, el orden más bajo de $\tilde{\phi}(q)$ resulta

$$\tilde{\phi}(q) \simeq \frac{2^{11/4}\pi}{\tilde{\Gamma}(1/4)T^{3/2}\hbar^{1/2}} \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{2^n n! (4n+1)^2} \left(\frac{q}{\hbar}\right)^{2n}. \quad (2.41)$$

Si se compara este resultado con el obtenido en la sección anterior (ecuación (2.19)), puede notarse que en ambos casos el comportamiento con $T = |\ln \hbar|$ es el mismo. Más aún, cerca de $q = 0$ se observa la misma dependencia con la coordenada, a saber, $1 - q^2/50\hbar^2$.

Para obtener una expresión en la región intermedia $q \sim \sqrt{\hbar}$, se realiza el cambio de variable $y = 2(t - t_0)$, con

$$t_0(q) = \frac{1}{2} \ln(2q^2/\hbar).$$

De este modo, de la ecuación (2.40) se obtiene

$$\tilde{\phi}(q) = \frac{1}{\sqrt{M_0} (2\pi)^{1/4} \sqrt{q}} \int_{-T-2t_0}^{T-2t_0} \frac{dy}{2} \cos[\pi(y/2 + t_0(q))/T] \exp\left[-\left(\frac{e^{-y} + y}{4}\right)\right]. \quad (2.42)$$

Esta integral se resuelve en la vecindad de $t_0 = 0$ (que corresponde a $q \sim \mathcal{O}(\sqrt{\hbar})$), llevando los límites de integración a $\pm\infty$, lo que conduce directamente a

$$\tilde{\phi}(q) = \frac{A \cos[\pi t_0(q)/T] - B \sin[\pi t_0(q)/T] \pi/2T + \mathcal{O}(T^{-2})}{2\sqrt{M_0} (2\pi)^{1/4} \sqrt{q}} \quad (2.43)$$

con

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(-\frac{e^{-y} + y}{4}\right) = \sqrt{2}\tilde{\Gamma}(1/4),$$

y

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} dy y \exp \left(-\frac{e^{-y} + y}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{\tilde{\Gamma}(1/4)} (2\tilde{\gamma} + \pi + \ln 4),$$

donde $\tilde{\gamma} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} - \ln n)$ corresponde a la constante de Euler, cuyo valor aproximado es 0.5772. Sustituyendo A , B y el límite asintótico de M_0 en (2.44), se llega a la expresión buscada,

$$\tilde{\phi}(q) \simeq \frac{\cos[\pi t_0(q)/T] - \chi \pi \sin[\pi t_0(q)/T]/T + \mathcal{O}(T^{-2})}{\sqrt{qT}}, \quad (2.44)$$

con $\chi = (2\tilde{\gamma} + \pi + \ln 4)/4 \simeq 1.4206$.

Esta expresión empalma correctamente con la obtenida para $q \sim \hbar$ (ecuación (2.41)), pues en esta región es $t_0 \simeq -T/2$, de modo que $\cos[\pi t_0(q)/T] = \mathcal{O}(T^{-1})$ y $\sin[\pi t_0(q)/T] = \mathcal{O}(1)$ y el comportamiento asintótico es nuevamente $\mathcal{O}(T^{-3/2})$. Por tanto, la construcción tiene la peculiaridad de alcanzar un valor aproximadamente constante para $q \rightarrow 0$. En el extremo opuesto ($t_0 \simeq T/2$, esto es, $q \sim 1$) se puede ver que $\tilde{\phi}(q)$ decae exponencialmente. Para ello, se realiza el cambio de variable $x = y + \ln(2q^2)$, que lleva la ecuación (2.42) a

$$\tilde{\phi}(q) = \frac{\pi + \mathcal{O}(T^{-2})}{2^{5/4} \tilde{\Gamma}(1/4) T^{3/2}} \int_0^{\infty} x \exp \left[(-2q^2 e^{-x} + x)/4 \right] dx,$$

una expresión que puede ser estimada, para $q \sim 1$, por

$$\tilde{\phi}(q) \sim 0.42 T^{-3/2} (1 + 3/q) e^{-2q - 0.3q^2}.$$

Si bien en la vecindad de $q = 0$, como se ha visto, $\tilde{\phi}(q)$ no se aproxima lo suficiente a $\phi(q)$, esto no afecta al cálculo de los elementos de matriz diagonales de cualquier operador de prueba, siempre al orden más bajo en T . Para ejemplificar se utilizará la expresión (2.44) en el cálculo de las dos cantidades con las que se pueden establecer comparaciones, la norma y la dispersión cuadrática del Hamiltoniano.

Teniendo en cuenta la paridad de $\tilde{\phi}(q)$ y el hecho de que el rango de trabajo está delimitado por $q \sim \hbar$ y $q \sim 1$, dadas dos constantes positivas arbitrarias de orden uno c y c' , el orden más bajo de (2.44) da lugar a

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\phi} | \tilde{\phi} \rangle &\simeq 2 \int_{ch}^{c'} dq \tilde{\phi}(q)^2 = 2 \int_{ch}^{c'} dq \cos^2 \left[\frac{\pi}{2T} (\ln(2q^2/\hbar)) \right] / qT \\ &= \int_{-1+\ln(2c^2)/T}^{1+\ln(2c'^2)/T} dx \cos^2 [\pi x(q)/2] = \int_{-1}^1 dq \cos^2 [\pi x(q)/2] + \mathcal{O}(T^{-2}) = 1 + \mathcal{O}(T^{-2}). \end{aligned} \quad (2.45)$$

donde se ha realizado el cambio de variable $x(q) = \ln(2q^2/\hbar)/T$.

Para realizar la verificación con el otro elemento de matriz que se ha mencionado, se utiliza $\hat{H} = -i\hbar(1/2 + qd/dq)$ aplicado a (2.44),

$$\hat{H}\tilde{\phi}(q) = i\pi\hbar \frac{\sin[\pi t_0(q)/T] + \chi\pi \cos[\pi t_0(q)/T]/T + \mathcal{O}(T^{-2})}{\sqrt{q}T^{3/2}},$$

y se realiza el mismo cálculo que antes:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\phi} | \hat{H}^2 | \tilde{\phi} \rangle &\simeq 2 \int_{ch}^{c'} dq \left(\hat{H}\tilde{\phi}(q) \right)^2 = 2 \int_{ch}^{c'} dq \sin^2 \left[\frac{\pi}{2T} (\ln(2q^2/\hbar)) \right] / qT \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{T^2} \int_{-1+\ln((2c^2)/T)}^{1+\ln(2c'^2)/T} dq \sin^2(\pi x/2) / qT = \frac{\hbar^2 \pi^2}{T^2} \int_{-1}^1 dq \sin^2(\pi x/2) / qT + \mathcal{O}(T^{-3}) \quad (2.46) \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{T^2} + \mathcal{O}(T^{-3}), \end{aligned}$$

que da el valor correcto para la dispersión cuadrática al orden más bajo (conviene recordar aquí que en la expresión (2.44) $\tilde{\phi}(q)$ ha sido ya normalizada, motivo por el cual no se divide por $\sqrt{M_0}$ en (2.45) y (2.46)). Consecuentemente, teniendo en cuenta que los elementos de matriz diagonales de $\tilde{\phi}(q)$ coinciden con los de $\phi(q)$ en el límite asintótico, resulta claro que $\tilde{\phi}(q)$ y $\phi(q)$ deben coincidir en la región intermedia, $q \sim \sqrt{\hbar}$. Por tanto, en esta zona es

$$\phi(q) \simeq \tilde{\phi}(q) \simeq \frac{\cos[\pi t_0(q)/T]}{\sqrt{qT}}, \quad (2.47)$$

$$\hat{H}\phi(q) \simeq \hat{H}\tilde{\phi}(q) \simeq \frac{i\hbar\pi \sin[\pi t_0(q_0)/T]}{T^{3/2} \sqrt{q}}. \quad (2.48)$$

En la figura 2.2 se compara $\phi(q)$, $\tilde{\phi}(q)$ y la aproximación analítica a $\tilde{\phi}(q)$ en la región intermedia $q \sim \sqrt{\hbar}$ dada por la ecuación (2.44). Como se desprende a partir de (2.47), en esta región las tres funciones coinciden al orden más bajo.

2.3. Elementos de matriz entre funciones de scar

En esta sección se estudiarán los elementos de matriz entre funciones de scar asociadas a dos puntos fijos de un mapa bidimensional. Desde el punto de vista de la teoría de órbitas de período corto [13, 14], esta situación se corresponde con la sección de Poincaré de un Hamiltoniano con dos grados de libertad, cuyas órbitas inestables adoptan (en la hipersuperficie de energía constante) una estructura hiperbólica. Los cálculos se realizarán utilizando un sistema de coordenadas cartesianas (q, p) , en el que se harán las siguientes suposiciones: a) que ambos puntos fijos poseen el mismo índice de estabilidad y b) que las variedades estables de uno y otro son paralelas -la misma consideración rige para las variedades inestables-. Matemáticamente, esto puede resumirse asociando Hamiltonianos

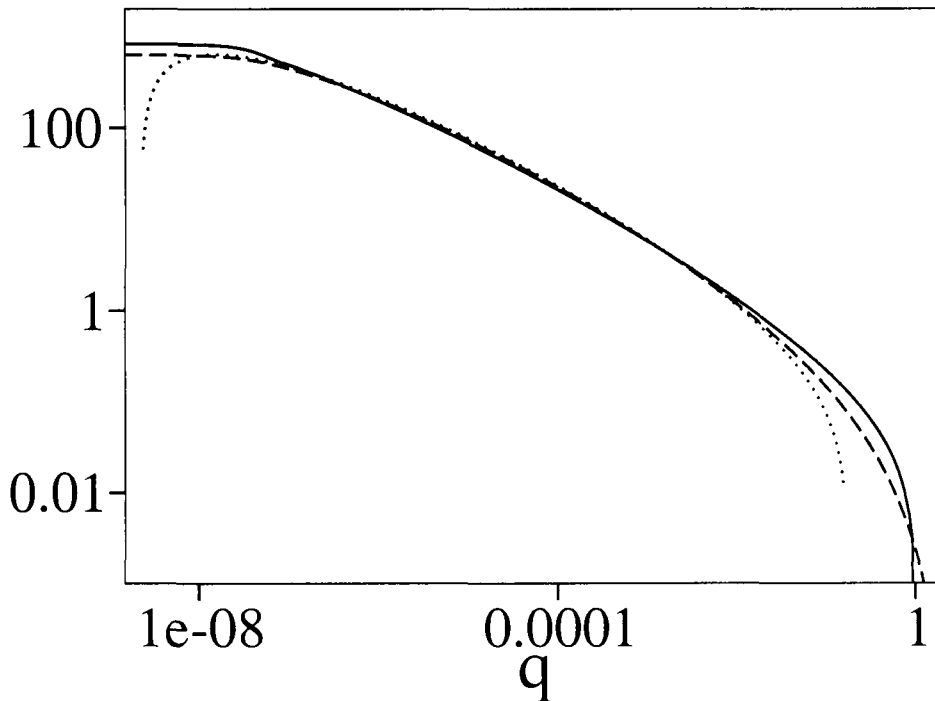


Figura 2.2: Para $1\hbar = 10^7$, se comparan la función de scar exacta $\phi(q)$ (—), la aproximación dada por $\tilde{\phi}(q)$ (---), y la estimación obtenida en la ecuación (2.44) (.....). Al orden más bajo de aproximación, las tres funciones coinciden en la región intermedia $q \sim \sqrt{\hbar}$.

locales a los puntos fijos, cuyas líneas de flujo posean la misma disposición que las del mapa que se pretende utilizar como modelo; esto es, Hamiltonianos del tipo del de la sección anterior ($\mathcal{H} = \lambda qp$), que en la práctica no serían más que la versión continua del mapa. Estos Hamiltonianos unidimensionales, por otra parte, surgen naturalmente al realizar una descomposición del movimiento en las direcciones tangente y transversa a la superficie de sección, y son los que aportan la contribución más importante a la interacción global entre las funciones de scar. La figura 2.3 ilustra los ingredientes principales de esta construcción. En ella pueden apreciarse los puntos fijos y sus variedades, el rango de accesibilidad en el espacio de fases, delimitado por las rectas $q = \pm Q$ y $p = \pm P$, y el área heteroclínica que definen las variedades. Este área debe entenderse, a su vez, como la intersección de un conducto tridimensional -inmerso en la hipersuperficie de energía constante del espacio de fases original- con la superficie de sección de Poincaré, el denominado tubo heteroclínico. En la última sección de este capítulo se probará que esta representación del problema, que pudiera parecer un tanto restringida, es totalmente genérica, y se reseñará la metodología apropiada para trasladar los resultados a otros casos de interés.

En el sistema de unidades definido en la sección anterior, la dinámica a tiempos cortos en torno al origen queda representada por el Hamiltoniano $\mathcal{H} = qp$ (donde ahora son $q, p < 1$), punto fijo que servirá de soporte de una de las funciones de scar. La restante, ubicada en (q_0, p_0) e influenciada por una dinámica descrita mediante el Hamiltoniano $\mathcal{H}' = (q - q_0)(p - p_0)$, se construirá a partir de la anterior mediante la aplicación del

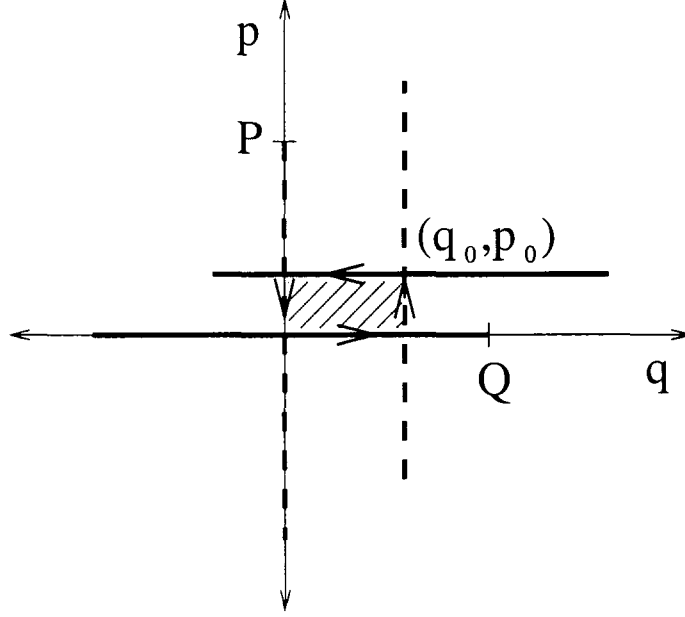


Figura 2.3: Sección del espacio de fases exhibiendo los puntos fijos $(0, 0)$ y (q_0, p_0) que soportan las funciones de scar utilizadas para el cálculo de los elementos de matriz. Sus variedades respectivas estables (---) e inestables (—) se extienden a lo largo del rango disponible, intersectándose en los puntos heteroclínicos $(q_0, 0)$ y $(0, p_0)$. Sombreada en líneas oblicuas, se exhibe el área heteroclínica que estas definen, indicándose con flechas las direcciones del flujo.

operador de Heisenberg [20], como sigue

$$\phi'(q) = \phi(q - q_0) \exp(i q p_0 / \hbar) e^{i\zeta}. \quad (2.49)$$

El objeto de esta definición, como puede advertirse, consiste en modificar los valores medios de los operadores $\hat{q}$ y $\hat{p}$ -nulos cuando se calculan utilizando $\phi(q)$ -. La fase ζ , que a priori puede elegirse en forma arbitraria, será asignada de modo que los elementos de matriz resulten reales. Exigiendo que esta condición se satisfaga para los overlaps, resultará automáticamente inducida para los elementos de matriz del Hamiltoniano.

Para evaluar el overlap entre ambos estados, ahora sí, se tendrá en cuenta la paridad de $\phi(q)$, y que como consecuencia de ella la función $\phi(q) \phi(q - q_0)$ resulta par respecto del punto $q_0/2$. Tras manipular convenientemente el overlap, expandido en la base de posición, se arriba a la siguiente expresión

$$\langle \phi | \phi' \rangle = 2e^{i(\zeta + q_0 p_0 / 2\hbar)} \int_{q_0/2}^{\infty} dq \phi(q) \phi(q - q_0) \cos((q - q_0/2) p_0 / \hbar). \quad (2.50)$$

De este modo, la condición de elementos de matriz reales resulta inmediatamente satisfecha con $\zeta = -q_0 p_0 / 2\hbar$. Esta es la convención que se usará en lo sucesivo.

Para obtener una primera estimación del overlap, se considerará la función $\phi_0(q) = 1/\sqrt{|q|T}$, que satisface las condiciones $\phi_0(q) \geq \phi(q)$ en todo el rango de q y $\phi_0(q) \sim \phi(q)$

para $q \sim \sqrt{\hbar}$. Insertando esta función en (2.50), y realizando el cambio de variable $x = 2q/q_0 - 1$, se deduce

$$\langle \phi_0 | \phi'_0 \rangle = \frac{2}{T} \int_0^\infty dx \frac{\cos(\alpha x)}{\sqrt{|1-x^2|}} = \frac{\pi}{T} [J_0(\alpha) - Y_0(\alpha)], \quad (2.51)$$

donde J_0 e Y_0 son respectivamente las funciones de Bessel y Neumann de orden 0. El argumento está definido por $\alpha \equiv A/2\hbar$, con $A = q_0 p_0$ el valor absoluto del área heteroclínica encerrada por las cuatro variedades (véase figura 2.3).

Para $A/\hbar > 1$ (lo que corresponde a valores grandes de α), resulta útil emplear las aproximaciones $J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{z\pi}} \cos(z - \nu\pi/2 + \pi/4)$, $Y_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{z\pi}} \sin(z - \nu\pi/2 + \pi/4)$, (válidas para ν fijo y $|z| \gg 1$) [21], que dan lugar a la siguiente expresión para el elemento de matriz

$$\langle \phi_0 | \phi'_0 \rangle \sim \frac{2\sqrt{\pi}}{T} \frac{\cos(A/2\hbar)}{\sqrt{A/2\hbar}}, \quad (2.52)$$

un resultado interesante, dado que pone de manifiesto la aparición de una suerte de regla de cuantización al estilo Bohr-Sommerfeld, en la que el overlap se anula para $A = 2\pi\hbar(n + 1/2)$, con n entero.

Este mismo comportamiento para $A \gg \hbar$ se puede deducir partiendo de la ecuación (2.51), y asumiendo que la contribución más importante proviene de la región en que $x \sim 1$. Esto permite llevar el límite inferior de integración a $-\infty$, reemplazar en el denominador $|1-x^2|$ por $2|1-x|$, y resolver la integral resultante en forma analítica¹¹,

$$\langle \phi_0 | \phi'_0 \rangle \simeq \frac{\sqrt{2}}{T} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{\cos[\alpha(x-1)+1]}{\sqrt{|1-x|}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{T} \frac{\cos(A/2\hbar)}{\sqrt{A/2\hbar}}.$$

El resultado es el mismo que antes (ecuación (2.52)) y, como se puede ver, se ha eludido la utilización de las funciones de Bessel.

A continuación se procederá al refinamiento de la aproximación. El punto de partida radica en la observación de que en lo hecho hasta aquí se ha utilizado una $\phi_0(q)$ que diverge en $q = 0$ y decrece algebraicamente para q grande, mientras que, como se ha visto en la sección anterior, la función de scar $\phi(q)$ es finita en el origen y cae exponencialmente en $q \sim 1$. Para corregir estas discrepancias se definirá una función de corrección $\phi_1(q)$ de modo que $\phi(q) \simeq \phi_0(q) + \phi_1(q)$ reproduzca el comportamiento deseado en las regiones $q \sim \hbar$ y $q \sim \sqrt{\hbar}$, y se considerarán por separado las dos contribuciones al overlap. Dado que el rango en que esta contribución tiene relevancia es pequeño respecto del rango total de integración, el overlap corregido en la región $q \sim \hbar$ resultará

$$\langle \phi | \phi' \rangle \simeq \langle \phi_0 | \phi'_0 \rangle + \delta \langle \phi | \phi' \rangle_{q \sim \hbar}, \quad (2.53)$$

¹¹Donde se ha utilizado la identidad $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(u)}{\sqrt{|u|}} = 2 \int_0^\infty \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

con

$$\delta \langle \phi | \phi' \rangle_{q \sim \hbar} \equiv \langle \phi_0 | \phi'_1 \rangle + \langle \phi_1 | \phi'_0 \rangle.$$

Para realizar la mejora en la región $q \sim \mathcal{O}(1)$, se considerará la representación p de la función de scar, cuyas contribuciones en la zona $p \sim \hbar$ se corresponden a las de $\phi(q)$ para q grande. El argumento se puede sintetizar señalando que, la transformada de Fourier de $\phi_0(q)$, $\dot{\phi}_0(p) = 1/\sqrt{|p|T}$, diverge en $p = 0$. Esta divergencia está asociada al hecho de que $\phi_0(q)$ decae lentamente para $q > 1$. Luego, el error en el overlap debido a que $\phi_0(q)$ no se comporta correctamente para $q > 1$, puede ser tratado en representación p . Matemáticamente, esto se puede traducir escribiendo

$$\delta \langle \phi | \phi' \rangle_{q \sim \mathcal{O}(1)} \simeq \delta \langle \phi | \phi' \rangle_{p \sim \hbar} = \langle \phi_0 | \phi'_1 \rangle_p + \langle \phi_1 | \phi'_0 \rangle_p,$$

donde el subíndice p se ha agregado para señalar que el cálculo se hará con la función de onda transformada. De este modo, el overlap corregido quedará constituido por tres términos, a saber:

$$\langle \phi | \phi' \rangle \simeq \langle \phi_0 | \phi'_0 \rangle + \delta \langle \phi | \phi' \rangle_{q \sim \hbar} + \delta \langle \phi | \phi' \rangle_{p \sim \hbar}. \quad (2.54)$$

La definición que se utiliza para la $\phi_1(q)$, a los fines de que $\phi(q)$ converja al valor $\phi(0)$ obtenido en la construcción de la función de scar (véase ecuación (2.19)), y que al mismo tiempo empalme correctamente con $\phi_0(q)$, es

$$\phi_1(q) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{q_1 T}} - \frac{1}{\sqrt{|q|T}}, & |q| < q_1 = \frac{T^2 \hbar}{2^5 \pi} \\ 0, & |q| \geq q_1. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $q_1 \ll q_0$, y que $\phi'_0(q)$ tiene un pico muy pronunciado en q_0 , para calcular $\langle \phi_1 | \phi'_0 \rangle$ puede considerarse a $\phi'_0(q)$ constante dentro del intervalo de integración, y aproximarla por $\phi'_0(0)$. De este modo, resulta

$$\langle \phi_1 | \phi'_0 \rangle \simeq \frac{e^{-iA/2\hbar}}{T \sqrt{q_0}} \int_{-q_1}^{q_1} dq \left(\frac{1}{\sqrt{q_1}} - \frac{1}{\sqrt{|q|}} \right) = -\frac{e^{-iA/2\hbar}}{2\sqrt{A/2\hbar}} \frac{\sqrt{p_0}}{\sqrt{\pi}}.$$

El otro término se calcula de manera análoga, esta vez con la aproximación $\phi(q) \sim \phi(q_0)$, obteniéndose el resultado

$$\langle \phi_0 | \phi'_1 \rangle = -\frac{e^{iA/2\hbar}}{2\sqrt{A/2\hbar}} \frac{\sqrt{p_0}}{\sqrt{\pi}},$$

que corresponde al complejo conjugado del anterior. Consecuentemente, la corrección proveniente de las discrepancias entre $\phi(q)$ y $\phi_0(q)$ para $q \leq \hbar$ estará dada por

$$\delta \langle \phi | \phi' \rangle_{q \sim \hbar} \simeq -\frac{T}{2} \langle \phi_0 | \phi'_0 \rangle \frac{\sqrt{p_0}}{\sqrt{\pi}}.$$

El cálculo en representación p es completamente simétrico respecto del anterior, dado que al realizar la transformada de Fourier resulta $\hat{\phi}_0(p) = 1/\sqrt{|p|T}$, y así es posible utilizar la misma forma funcional para la corrección (con $p_1 = q_1$). La discrepancia en este caso resulta

$$\delta \langle \phi | \phi' \rangle_{p \sim \hbar} \simeq -\frac{T}{2} \langle \phi_0 | \phi'_0 \rangle \frac{\sqrt{q_0}}{\sqrt{\pi}}.$$

Al incluir estas desviaciones en (2.54), se obtiene el overlap corregido, que finalmente adquiere la forma,

$$\langle \phi | \phi' \rangle = \langle \phi_0 | \phi'_0 \rangle (1 - \beta T / \pi), \quad (2.55)$$

con $\beta \equiv 1/2 (\sqrt{q_0} + \sqrt{p_0})$.

Cabe señalar que el valor particular de β depende del comportamiento de $\phi(q)$ cerca de $q = 0$, de modo que si en lugar de la expansión (2.19) para $\phi(q)$ se usa el resultado de la representación integral (la función $\tilde{\phi}(q)$), el valor de β debe incrementarse con el factor $\tilde{\Gamma}(1/4) / (2^{1/2} \pi^{1/4}) \simeq 1.72$. Más aún, de la inmediata observación del resultado anterior se desprende que, para $A \sim \mathcal{O}(1)$, el overlap cambia de signo, circunstancia que conduce a una descripción decididamente inadecuada. Sin embargo, si se tiene en cuenta que la influencia de la corrección $\phi_1(q)$ se traduce en una modulación de las oscilaciones, es razonable considerar a la expresión (2.55) como el desarrollo a primer orden de una función positiva, monótonamente decreciente, y que toma el valor $\langle \phi | \phi' \rangle = 1$ en $q = 0$. Si se toma una exponencial como función de prueba, la estimación del overlap derivada del análisis precedente se resume en la expresión que sigue

$$\langle \phi | \phi' \rangle \sim \frac{2\sqrt{\pi} \cos(A/2\hbar)}{T \sqrt{A/2\hbar}} e^{-\beta T / \pi}. \quad (2.56)$$

La figura 2.4 compara la evaluación numérica del overlap (calculado a partir de la ecuación (2.50) con $\zeta = -A/2\hbar$), con la correspondiente a la ecuación (2.56). Como puede apreciarse, el comportamiento oscilatorio es el mismo en ambos casos para $A > \hbar$, aunque existe una desviación de las amplitudes correspondientes. La relación entre esta desviación y el área heteroclínica se estudia en la figura 2.5, en donde el eje de ordenadas corresponde al cociente entre ambas amplitudes. Sobre la base de este gráfico, puede concluirse que la ecuación (2.56) representa una cota superior al overlap en todo el rango de A (como es de esperar de acuerdo a la estimación usada para $\phi(q)$).

Antes de abordar el cálculo de los elementos de matriz del Hamiltoniano, resulta preciso realizar una breve digresión. En primer lugar, se definirá la función

$$h\phi(q) \equiv \langle q | \hat{H} \phi \rangle, \quad (2.57)$$

correspondiente a la representación en coordenadas del Hamiltoniano aplicado al estado de scar. Ahora bien, dado que este último está definido localmente en la vecindad del punto fijo $(0, 0)$, la validez de su aplicabilidad queda restringida exclusivamente al estado $|\phi\rangle$. En

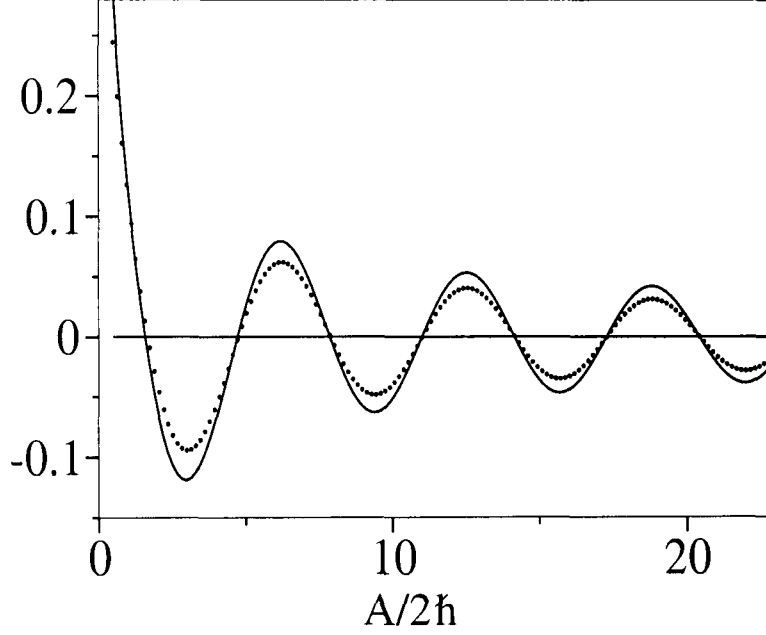


Figura 2.4: Gráfico del overlap entre funciones de scar como función de $A/2\hbar$ que compara los resultados numéricos obtenidos al evaluar (2.50) (·····), con la estimación analítica dada por (2.56) (—).

consecuencia, para operar sobre $|\phi'\rangle$ debe procederse en el sentido de las translaciones de Heisenberg, definiendo

$$h\phi'(q) \equiv \langle q | \hat{H}' \phi' \rangle \equiv h\phi(q - q_0) e^{ip_0 q / \hbar} e^{i\zeta}, \quad (2.58)$$

donde ζ no puede ahora tomarse arbitrariamente, pues ya ha sido fijado en (2.50).

De este modo, el elemento de matriz queda librado a una ambigüedad, puesto que por un lado puede calcularse el braket $\langle \hat{H}\phi | \phi' \rangle$ y por el otro $\langle \phi | \hat{H}'\phi' \rangle$. Tal ambigüedad se soluciona, como es habitual, realizando una simetrización que garantice la hermiticidad del operador. Esto es, vía la definición del operador $\hat{H}_h$, cuyos elementos de matriz vendrán dados por

$$\langle \phi | \hat{H}_h | \phi' \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle \hat{H}\phi | \phi' \rangle + \langle \phi | \hat{H}'\phi' \rangle \right). \quad (2.59)$$

Para realizar el cálculo será útil tener en cuenta que $\phi(q)$ es una función real, mientras que $\hat{H}\phi(q)$ es puramente imaginaria (recuérdese que $\hat{H} = -i\hbar(1/2 + qd/dq)$) de modo que $h\phi(q)^* = -h\phi(q)$. Con esta consideración, y definiendo la función impar

$$f(q) = i\phi(q)h\phi(q - q_0) - i h\phi(q)\phi(q - q_0), \quad (2.60)$$

no es difícil deducir, luego de un poco de álgebra, la siguiente expresión para el elemento de matriz:

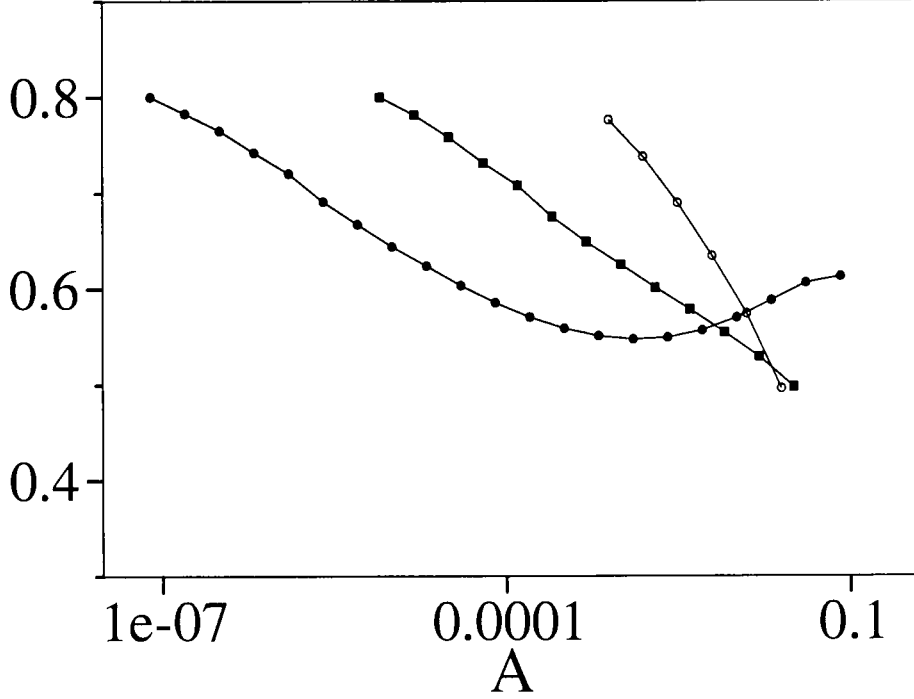


Figura 2.5: Cociente entre los cálculos numéricos del overlap efectuados mediante (2.50) y la estimación numérica (2.56), para $1/8\hbar = 10^3$ ($\circ$), $1/8\hbar = 10^5$ ($\blacksquare$), y $1/8\hbar = 10^7$ ($\bullet$).

$$\langle \phi | \hat{H}_h | \phi' \rangle = \int_{q_0/2}^{\infty} dq f(q) \sin[(q - q_0/2) p_0/\hbar]. \quad (2.61)$$

Como se ha visto en la sección anterior, en la región $q \sim \sqrt{\hbar}$ las funciones $\phi(q)$ y $h\phi(q)$ se estiman adecuadamente a partir de las fórmulas (2.47) y (2.48), respectivamente. Insertando las correspondientes expresiones en la ecuación (2.60), se obtiene

$$f(q) \simeq \frac{\pi\hbar}{T^2} \frac{\sin[g(q)]}{\sqrt{|q(q - q_0)|}},$$

con

$$g(q) \equiv \frac{\pi}{T} [t_0(q) - t_0(q - q_0)] = \frac{\pi}{T} \log \left(\frac{|q|}{|q - q_0|} \right).$$

La primera aproximación consistirá en considerar únicamente la divergencia en $q = q_0$ dentro de la raíz, y aproximar $\sin[g(q)] = 1$. Esto corresponde a definir

$$f_0(q) = \frac{\pi\hbar}{T^2} \frac{1}{\sqrt{q_0|q - q_0|}},$$

y a llevar el límite inferior de integración a $-\infty$. De esta manera, la integral (2.61) resulta:

$$\langle \phi | \hat{H}_h | \phi' \rangle_0 \sim \int_{-\infty}^{\infty} dq f(q) \sin[(q - q_0/2) p_0 / \hbar] = \frac{\hbar \pi^{3/2} \sin(A/2\hbar)}{T^2 \sqrt{A/2\hbar}}.$$

Para implementar la corrección proveniente de las divergencias de $\phi(q)$ y $\hat{H}\phi(q)$, se procederá como se hizo con el overlap (ecuaciones (2.53) a (2.56)). Esta vez, no obstante, deberá evaluarse la función $f(q)$ en la región $|q - q_0| \leq \mathcal{O}(\hbar)$ de modo de obtener un valor de saturación para esta. Con este propósito se utilizan las ecuaciones (2.20) y (2.48), que conducen a

$$f(q) \simeq \frac{2^{3/2} \pi^{1/2} \hbar^{1/2} [1 - (q - q_0)^2 / 2\hbar^2] \cos[\pi t_0(q_0)/T]}{T^2 \sqrt{q_0}}.$$

De este modo resulta

$$f(q_0) \simeq \frac{2^{3/2} \pi^{1/2} \hbar^{1/2} \cos[\pi t_0(q_0)/T]}{T^2 \sqrt{q_0}} \simeq \frac{2^{3/2} \pi^{1/2} \hbar^{1/2}}{T^2 \sqrt{q_0}}.$$

Teniendo esto en cuenta, la función $f_1(q)$ que hace que $f(q) \simeq f_0(q) + f_1(q)$ sature en $|q - q_0| = 0$ será:

$$f_1(q) = \begin{cases} \frac{2^{3/2} \pi^{1/2} \hbar^{1/2}}{T^2 \sqrt{q_0}} - \frac{\hbar \pi}{T^2 \sqrt{q_0 |q - q_0|}}, & |q - q_0| < q_1 = \frac{\pi \hbar}{8} \\ 0 & , \quad |q - q_0| \geq q_1, \end{cases}$$

en donde q_1 , al igual que en el caso del overlap, se ha elegido de manera de satisfacer la condición de empalme de $f(q)$ en $q = q_1$.

Las correcciones son análogas a las establecidas en la ecuación (2.54), a saber,

$$\langle \phi | H_h | \phi' \rangle = \langle \phi | H_h | \phi' \rangle_0 + \delta \langle \phi | H_h | \phi' \rangle_{|q - q_0| \sim \hbar} + \delta \langle \phi | H_h | \phi' \rangle_{|q - q_0| \sim 1}$$

con

$$\delta \langle \phi | H_h | \phi' \rangle_{q \sim \hbar} \equiv \int_{q_0 - q_1}^{q_0 + q_1} dq f_1(q) \sin[(q - q_0/2) p_0 / \hbar] = -\frac{\hbar \pi^{3/2} \sin(A/2\hbar)}{T^2 \sqrt{A/2\hbar}} \frac{\sqrt{p_0}}{2}.$$

Asimismo, realizando el cálculo en representación p , se puede comprobar que:

$$\delta \langle \phi | H_h | \phi' \rangle_{p \sim \hbar} = -\frac{\hbar \pi^{3/2} \sin(A/2\hbar)}{T^2 \sqrt{A/2\hbar}} \frac{\sqrt{q_0}}{2},$$

de modo que, al igual que antes, la corrección viene dada por un factor $e^{-\beta}$.

Ahora bien, para realizar los cálculos anteriores se ha asumido que $\sin[g(q)] = 1$. Para dar cuenta del error cometido al hacer esta aproximación, una alternativa es observar

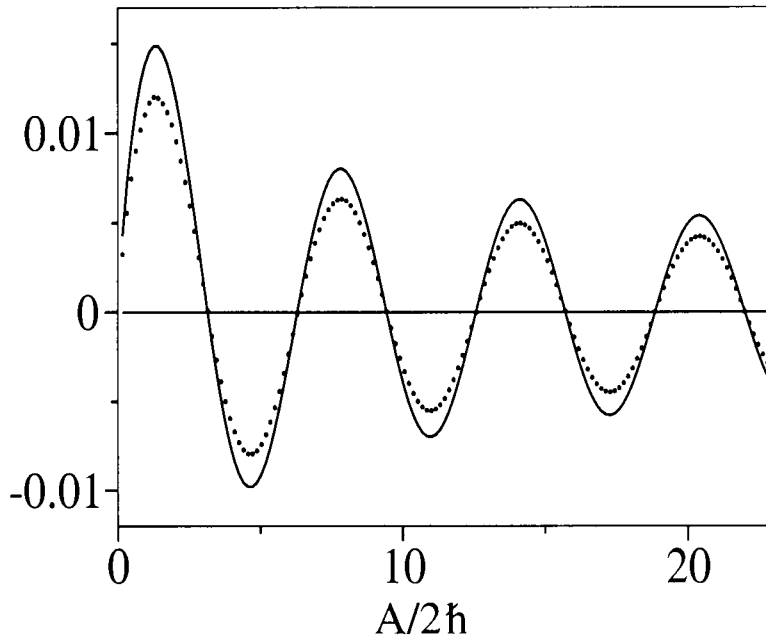


Figura 2.6: Gráfico del elemento de matriz entre funciones de scar como función de $A/2\hbar$ que compara los resultados numéricos obtenidos al evaluar (2.61) ($\cdots$), con la estimación analítica dada por (2.62) (—).

que de acuerdo al factor $\sin[(q - q_0/2)p_0/\hbar]/\sqrt{|q - q_0|}$, el rango de q_2 en torno a q_0 de la contribución más importante a la integral satisface la relación $p_0 q_2/\hbar \sim 1$. De este modo, la sobreestimación al elemento de matriz se puede corregir promediando $\sin[g(q)]$ con el valor que toma esta función en los extremos del intervalo en cuestión, esto es, con $\sin[g(q_0 \pm q_2)] = \sin[(\pi/T) \ln(A/\hbar + 1)] \simeq \sin[(\pi/T) \ln(A/\hbar)]$. En definitiva, el elemento de matriz corregido resulta

$$\langle \phi | \hat{H}_h | \phi \rangle \sim \frac{\hbar \pi^{3/2}}{T^2} \frac{\sin(A/2\hbar)}{\sqrt{A/2\hbar}} \frac{[1 + \sin(\pi/T) \ln(A/\hbar)]}{2} e^{-\beta}. \quad (2.62)$$

En la figura 2.6 se compara la evaluación numérica del elemento de matriz de acuerdo a la ecuación (2.61) con la estimación provista por la ecuación (2.62). Como se puede apreciar, el comportamiento oscilatorio coincide en ambos casos, aunque existe una leve discrepancia entre las amplitudes. Esta última es analizada en la figura 2.7, en donde se grafica el cociente entre las mismas. Resulta evidente, a partir de esta figura, que la ecuación (2.62) da una estimación apropiada para el orden de magnitud: concretamente, la sobreestimación observada es de un 25 % respecto de los resultados numéricos.

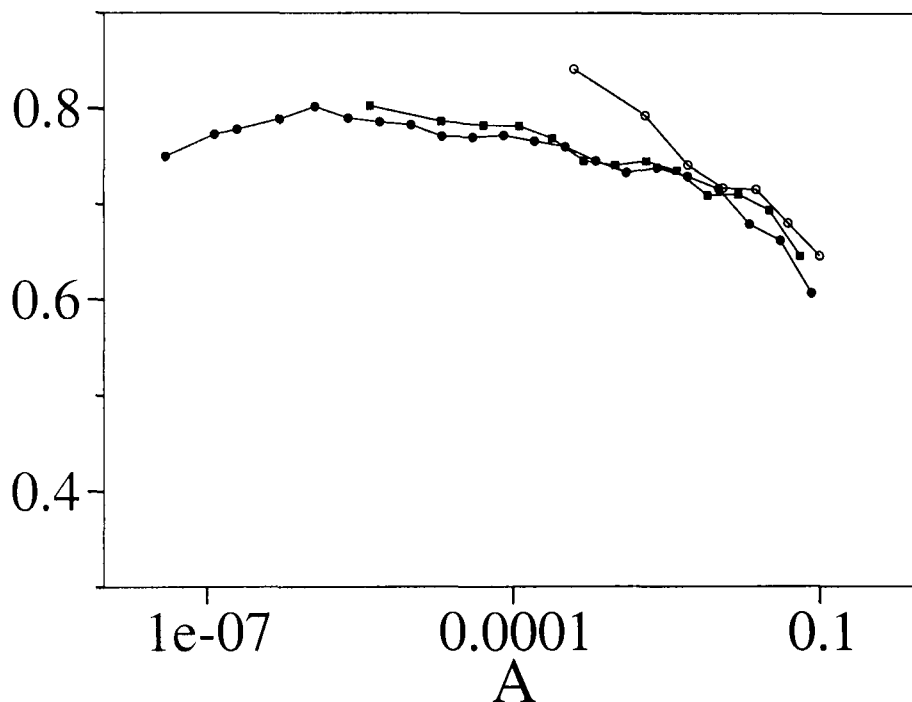


Figura 2.7: Cociente entre los cálculos numéricos del elemento de matriz efectuados mediante (2.61) y la estimación numérica (2.62), para $1/8\hbar = 10^3$ ($\circ$), $1/8\hbar = 10^5$ ($\blacksquare$), y $1/8\hbar = 10^7$ ($\bullet$).

2.4. Expansión de los elementos de matriz en potencias de $\hbar$

Se completará este capítulo con una derivación alternativa de los elementos de matriz, basada en una expansión de las funciones de scar en las regiones en que se cruzan las variedades de los puntos fijos (puntos heteroclínicos). Dado que las funciones de scar se concentran rápidamente a lo largo de estas variedades, es de esperar que las series resultantes exhiban un buen grado de convergencia, convirtiendo a este par de puntos del espacio de fases en buenos representantes de las contribuciones esenciales al elemento de matriz. La motivación del cálculo que se expondrá es doble. Primeramente, las expresiones obtenidas permitirán establecer la precisión necesaria de las cantidades calculadas en términos del tiempo de Ehrenfest, circunstancia que permitirá establecer, en una segunda instancia, la comparación cuantitativa con los cálculos numéricos efectuados en el mapa del gato, tema que se desarrollará en el capítulo siguiente.

Antes de exponer los cálculos, se enunciará una serie de propiedades y definiciones relacionados con la función de scar que serán explotadas repetidamente. En primer lugar, en lo que atañe a la función de scar trasladada fuera del origen (y centrada en la posición (q_0, p_0)), a partir de la ecuación (2.49) y del resultado $\zeta = -q_0 p_0 / 2\hbar$ extraído de (2.50)¹²,

¹²Como se recordará, esta fase había sido fijada de imponer la condición de que el overlap fuese real.

podrá escribirse para esta la fórmula

$$\phi'(q) = \phi(q - q_0) e^{ip_0(q - q_0/2)/\hbar}. \quad (2.63)$$

La segunda propiedad, a saber, que

$$\phi(q) \in \mathbb{R}, \quad (2.64)$$

ha sido ya mencionada en la sección anterior, y surge simplemente de inspeccionar la ecuación (2.40) (en donde a la definición (2.21) de la representación integral se le ha incorporado el resultado $f(t) = \cos(\pi t/T)$).

El siguiente enunciado, corresponde a la convención que se utilizará para transformar Fourier. Dada $\phi(q)$, la función de scar en representación de posiciones, la correspondiente función en representación de momentos se calculará mediante la definición [22]

$$\hat{\phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq \phi(q) \exp(-iqp/\hbar), \quad (2.65)$$

de la que se desprende la fórmula

$$\phi(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \hat{\phi}(p) \exp(iqp/\hbar) \quad (2.66)$$

para antitransformar nuevamente a posiciones¹³. En este punto puede demostrarse una primera propiedad verdaderamente interesante que tiene la función de scar, y que corresponde a la invariancia de su forma funcional con respecto a la operación indicada en la ecuación (2.65). Para probar esta aseveración, se partirá simplemente de la representación en posiciones y se realizará la transformación a momentos. Mediante (2.40) y (2.65) puede escribirse para esta transformada

$$\hat{\phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{M_0}(\pi\hbar)^{1/4}} \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\pi t/T) \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq \exp\left[-\frac{q^2}{2\hbar}e^{-2t} - iq p/\hbar\right],$$

una expresión que se integra inmediatamente en la variable q dando lugar a

$$\hat{\phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{M_0}(\pi\hbar)^{1/4}} \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\pi t/T) \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}e^{-t/2}} \exp\left[-\frac{p^2}{2\hbar}e^{-2t}\right].$$

Por último, el cambio de variable de integración $t \rightarrow -t$ permite arribar a

$$\hat{\phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{M_0}(\pi\hbar)^{1/4}} \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\pi t/T) \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left[-\frac{p^2}{2\hbar}e^{-2t}\right],$$

en donde, tras reacomodar las exponenciales, puede reconocerse a la propia función de scar ϕ evaluada en la variable conjugada p . Esto significa, en definitiva, que

$$\hat{\phi}(p) = \phi(p), \quad (2.67)$$

¹³La omisión de índices de integración designará en lo sucesivo la integración en todo el rango.

precisamente lo que se pretendía demostrar.

El último ingrediente necesario para exponer la expansión de los elementos de matriz en potencias de $\hbar$, corresponde a la translación de la función de scar en representación de momentos. Esta puede deducirse a partir de (2.63) transformando Fourier vía (2.65), procedimiento que conduce a la fórmula¹⁴

$$\hat{\phi}'(p) = \hat{\phi}(p - p_0) e^{-iq_0(p-p_0)/2\hbar},$$

que en virtud de (2.67) puede reescribirse directamente como

$$\hat{\phi}'(p) = \phi(p - p_0) e^{-iq_0(p-p_0)/2\hbar}. \quad (2.68)$$

Consignadas las propiedades que van a utilizarse, el procedimiento, ahora sí, consiste en expandir el overlap sucesivamente en posición y momento¹⁵,

$$\begin{aligned} \langle \phi | \phi' \rangle &= \int dq \phi(q)^* \phi'(q) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq dp \phi(q)^* \hat{\phi}'(p) \exp(iq p / \hbar) \\ &= \frac{\exp(iq_0 p_0 / 2\hbar)}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq dp \phi(q) \phi(p - p_0) \exp(ip(q - q_0) / \hbar) \end{aligned}$$

(en donde se han utilizado las propiedades (2.64) y (2.68)), y en desarrollar luego el producto $\phi(q) \phi(p - p_0)$ en serie de potencias en la vecindad del punto heteroclínico $(q_0, 0)$, de modo de obtener para el overlap la suma doble

$$\langle \phi | \phi' \rangle = \frac{\exp(iq_0 p_0 / 2\hbar)}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sum_{n,m \geq 0} \frac{I_{nm}}{n!m!} \phi^{(n)}(q_0) \phi^{(m)}(-p_0), \quad (2.69)$$

con

$$I_{nm} \equiv \int dq dp (q - q_0)^n p^m \exp(i(q - q_0)p / \hbar) = \int dq dp q^n p^m \exp(iq p / \hbar).$$

Esta última integral se puede resolver partiendo de la identidad

$$\int dq \exp(iq p / \hbar) = 2\pi\hbar \delta(p),$$

¹⁴Debe tenerse cuidado al valorar estas relaciones, pues en este punto puede resultar sugestivo el intento de vincular $\hat{\phi}'$ con ϕ' . Estas dos funciones no son iguales en general. A lo sumo, puede probarse la igualdad $\hat{\phi}' = \phi'^*$ (complejo conjugado) para el caso particular en que $q_0 = p_0$, una relación que, aunque restrictiva, generaliza el resultado (2.67) (que se deduce de esta última poniendo $q_0 = p_0 = 0$ y valiéndose de (2.64)).

¹⁵La expansión en posición, como puede apreciarse, se hace introduciendo la relación de completitud, mientras que para los momentos se transforma Fourier según (2.66).

de cuya derivada n -ésima con respecto a p se deduce la fórmula

$$\int dq q^n \exp(iq p/\hbar) = (-i\hbar)^n 2\pi\hbar \delta^{(n)}(p).$$

Es esta una relación que, multiplicada a ambos miembros por p^m e integrada por partes m veces en la variable p , conduce directamente al resultado¹⁶

$$I_{nm} = 2\pi\hbar n! (i\hbar)^n \delta_{nm}.$$

Insertando estos coeficientes en (2.69), el overlap se convierte en una suma sobre un único índice en la que intervienen tan sólo las derivadas de la función de scar:

$$\langle \phi | \phi' \rangle = \sqrt{2\pi\hbar} \exp(iq_0 p_0/2\hbar) \sum_{n \geq 0} (i\hbar)^n \frac{\phi^{(n)}(q_0) \phi^{(n)}(-p_0)}{n!}. \quad (2.70)$$

Para lo que sigue, será útil reescribir la expresión anterior sacando provecho de la paridad de la función de scar y sus derivadas,

$$\phi^{(n)}(-q) = (-1)^n \phi^{(n)}(q),$$

y desglosar (2.70) de modo de obtener

$$\begin{aligned} \langle \phi | \phi' \rangle &= \sqrt{2\pi\hbar} \exp(iq_0 p_0/2\hbar) \sum_{n \geq 0} (-i\hbar)^n \frac{\phi^{(n)}(q_0) \phi^{(n)}(p_0)}{n!} \\ &= \sqrt{2\pi\hbar} \exp(iq_0 p_0/2\hbar) \times \\ &\times \left\{ \sum_{n \geq 0} (-1)^n \hbar^{2n} \frac{\phi^{(2n)}(q_0) \phi^{(2n)}(p_0)}{(2n)!} - i\hbar \sum_{n \geq 0} (-1)^n \hbar^{2n} \frac{\phi^{(2n+1)}(q_0) \phi^{(2n+1)}(p_0)}{(2n+1)!} \right\}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Debe tenerse presente, sin embargo, que se está realizando una expansión algebraica de una función que decae exponencialmente. Por consiguiente, la misma es válida sólo en las proximidades del centro de expansión (en este caso el punto $(q_0, 0)$). La contribución correspondiente a la zona vecina a $(0, p_0)$, por consiguiente, debe rehacerse por separado y añadirse luego al resultado anterior. El esquema es completamente equivalente, aunque ahora la expansión debe realizarse transformando Fourier el primer factor de la relación de completitud, esto es,

$$\begin{aligned} \langle \phi | \phi' \rangle &= \int dq \phi(q)^* \phi'(q) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq dp \hat{\phi}(p)^* \phi'(q) \exp(-iq p/\hbar) \end{aligned}$$

¹⁶Para comprobar esta última relación basta ver que $\int dp p^m \delta^{(n)}(p)$ es distinto de cero únicamente en el caso en que $n = m$, situación en la que la integración por partes arroja el resultado $(-1)^n n!$.

$$= \frac{\exp(-iq_0 p_0 / 2\hbar)}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq dp \phi(p) \phi(q - q_0) \exp(-iq(p - p_0) / \hbar)$$

(donde ahora se han utilizado, en forma secuencial, las propiedades (2.67), (2.64) y (2.63); además de reacomodarse las exponenciales complejas). Los pasos que siguen son esencialmente los mismos que los realizados anteriormente. Basta tener en cuenta que

$$\int dq dp q^n (p - p_0)^m \exp(-iq(p - p_0) / \hbar) = \int dq dp q^n p^m \exp(-iq p / \hbar) = (-1)^n I_{nm},$$

en donde tan sólo se ha efectuado un cambio de variable de integración, y proceder como ya se ha hecho para llegar a una fórmula similar a (2.71),

$$\begin{aligned} \langle \phi | \phi' \rangle &= \sqrt{2\pi\hbar} \exp(-iq_0 p_0 / 2\hbar) \sum_{n \geq 0} \frac{(i\hbar)^n \phi^{(n)}(q_0) \phi^{(n)}(p_0)}{n!} \\ &= \sqrt{2\pi\hbar} \exp(-iq_0 p_0 / 2\hbar) \\ &\times \left\{ \sum_{n \geq 0} (-1)^n \hbar^{2n} \frac{\phi^{(2n)}(q_0) \phi^{(2n)}(p_0)}{(2n)!} + i\hbar \sum_{n \geq 0} (-1)^n \hbar^{2n} \frac{\phi^{(2n+1)}(q_0) \phi^{(2n+1)}(p_0)}{(2n+1)!} \right\}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Para obtener la serie definitiva del overlap deben sumarse, como ya se ha explicado, las contribuciones (2.71) y (2.72), lo que permite arribar al resultado

$$\begin{aligned} \langle \phi | \phi' \rangle &= 2\sqrt{2\pi\hbar} \left[\cos\left(\frac{q_0 p_0}{2\hbar}\right) \sum_{n \geq 0} (-1)^n \hbar^{2n} \frac{\phi^{(2n)}(q_0) \phi^{(2n)}(p_0)}{(2n)!} \right. \\ &\quad \left. + \hbar \sin\left(\frac{q_0 p_0}{2\hbar}\right) \sum_{n \geq 0} (-1)^n \hbar^{2n} \frac{\phi^{(2n+1)}(q_0) \phi^{(2n+1)}(p_0)}{(2n+1)!} \right] \end{aligned} \quad (2.73)$$

Para efectuar el cálculo del elemento de matriz del Hamiltoniano, se realizan las mismas expansiones en torno a los puntos heteroclínicos. A las propiedades consignadas para la función de scar, deberá añadirse las correspondientes a la función $\hbar\phi(q)$ (resultante de aplicar a aquella el operador Hamiltoniano, véase ecuación (2.57) y los párrafos que le siguen). Entre ellas, su translación a un punto arbitrario del espacio de fases,

$$\hbar\phi'(q) = \hbar\phi(q - q_0) e^{ip_0(q - q_0/2)/\hbar}, \quad (2.74)$$

el hecho de que su parte real sea nula, y que por lo tanto resulte

$$\hbar\phi(q)^* = -\hbar\phi(q), \quad (2.75)$$

como puede deducirse de (2.64) y de la representación en posiciones del operador Hamiltoniano. Una propiedad similar a la deducida para la transformada de Fourier de $\phi(q)$, pero que esta vez sale asimismo con el signo cambiado (véase apéndice C)

$$\hat{\hbar}\phi(p) = -\hbar\phi(p), \quad (2.76)$$

y por último, lo que atañe a la transformada de Fourier de la función trasladada,

$$\hat{h}\phi'(p) = \hat{h}\phi(p - p_0)e^{-iq_0(p-p_0/2)/\hbar} = -h\phi(p - p_0)e^{-iq_0(p-p_0/2)/\hbar}, \quad (2.77)$$

que puede deducirse transformando Fourier (2.74) y empleando (2.75) y (2.76).

Esta vez, no obstante, el procedimiento adquiere la complejidad adicional proveniente de la simetrización (2.59). Conforme a la notación introducida en (2.57) y (2.58) para la representación en coordenadas de $|\hat{H}\phi\rangle$, el primero de los términos de $\langle\phi|\hat{H}_h|\phi'\rangle$ queda representado por dos contribuciones, a saber:¹⁷

$$\begin{aligned} \langle\hat{H}\phi|\phi'\rangle &= \int dq \hbar\phi(q)^* \phi'(q) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq dp h\phi(q)^* \hat{\phi}'(p) \exp(iq p/2\hbar) \\ &= -\frac{\exp(iq_0 p_0/2\hbar)}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq dp h\phi(q) \phi(p - p_0) \exp(ip(q - q_0)/\hbar) \\ &= -\sqrt{2\pi\hbar} \exp(iq_0 p_0/2\hbar) \sum_{n \geq 0} \frac{(-i\hbar)^n h\phi^{(n)}(q_0) \phi^{(n)}(p_0)}{n!} \end{aligned} \quad (2.78)$$

correspondiente al desarrollo en $(q_0, 0)$, y

$$\begin{aligned} \langle\hat{H}\phi|\phi'\rangle &= \int dq h\phi(q)^* \phi'(q) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq dp \hat{h}\phi(p)^* \phi'(q) \exp(-iq p/\hbar) \\ &= \frac{\exp(-iq_0 p_0/2\hbar)}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq dp h\phi(p) \phi(q - q_0) \exp(-iq(p - p_0)/\hbar) \\ &= \sqrt{2\pi\hbar} \exp(-iq_0 p_0/2\hbar) \sum_{n \geq 0} \frac{(i\hbar)^n h\phi^{(n)}(p_0) \phi^{(n)}(q_0)}{n!} \end{aligned} \quad (2.79)$$

proveniente del otro punto heteroclínico. En relación al segundo término de $\langle\phi|\hat{H}_h|\phi'\rangle$ en la fórmula (2.59), se tienen dos expansiones equivalentes a la anteriores,

$$\begin{aligned} \langle\phi|\hat{H}'\phi'\rangle &= \int dq \phi(q)^* h\phi'(q) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq \phi(q)^* \hat{h}\phi'(p) \exp(iq p/\hbar) \end{aligned}$$

¹⁷A lo largo de todo el procedimiento que sigue, se utilizan repetidamente las propiedades y enunciados (2.63), (2.64), (2.65), (2.66), (2.67), (2.68), (2.74), (2.75), (2.76) y (2.77). Con estas en mente, es relativamente simple seguir la secuencia de los cálculos.

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\exp(iq_0p_0/2\hbar)}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq dp \phi(q) h\phi(p-p_0) \exp(ip(q-q_0)/\hbar) \\
 &= -\sqrt{2\pi\hbar} \exp(iq_0p_0/2\hbar) \sum_{n \geq 0} \frac{(-i\hbar)^n \phi^{(n)}(q_0) h\phi^{(n)}(p_0)}{n!}, \tag{2.80}
 \end{aligned}$$

en $(q_0, 0)$, y

$$\begin{aligned}
 \langle \phi | \hat{H}' \phi' \rangle &= \int dq \phi(q)^* h\phi'(q) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq \hat{\phi}(p)^* \hat{h}\phi'(q) \exp(-iqp/\hbar) \\
 &= \frac{\exp(-iq_0p_0/2\hbar)}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq dp \phi(p) h\phi(q-q_0) \exp(-iq(p-p_0)/\hbar) \\
 &= \sqrt{2\pi\hbar} \exp(-iq_0p_0/2\hbar) \sum_{n \geq 0} \frac{(i\hbar)^n \phi^{(n)}(p_0) h\phi^{(n)}(q_0)}{n!}, \tag{2.81}
 \end{aligned}$$

en $(0, p_0)$.

Para arribar a la serie definitiva, del tipo de (2.73), pueden ahora simetrizarse por separado las contribuciones en cada punto heteroclínico. Esto se logra definiendo la función simétrica en q y p ,

$$G_n(q, p) \equiv \frac{\phi^{(n)}(q) h\phi^{(n)}(p) + h\phi^{(n)}(q) \phi^{(n)}(p)}{2},$$

y promediando en primer término (2.78) y (2.80), lo que da lugar a

$$\begin{aligned}
 \langle \phi | \hat{H}_h | \phi' \rangle &= -\sqrt{2\pi\hbar} \exp(iq_0p_0/2\hbar) \sum_{n \geq 0} \frac{(-i\hbar)^n G_n(q_0, p_0)}{n!} \\
 &= -\sqrt{2\pi\hbar} \exp(iq_0p_0/2\hbar) \left\{ \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \hbar^{2n} G_{2n}(q_0, p_0)}{(2n)!} + i\hbar \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \hbar^{2n} G_{2n+1}(q_0, p_0)}{(2n+1)!} \right\} \tag{2.82}
 \end{aligned}$$

para la contribución al elemento de matriz en el punto heteroclínico $(q_0, 0)$, y en segunda instancia (2.79) y (2.81), que arroja el resultado

$$\begin{aligned}
 \langle \phi | \hat{H}_h | \phi' \rangle &= \sqrt{2\pi\hbar} \exp(-iq_0p_0/2\hbar) \sum_{n \geq 0} \frac{(i\hbar)^n G_n(q_0, p_0)}{n!} \\
 &= \sqrt{2\pi\hbar} \exp(-iq_0p_0/2\hbar) \left\{ \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \hbar^{2n} G_{2n}(q_0, p_0)}{(2n)!} - i\hbar \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \hbar^{2n} G_{2n+1}(q_0, p_0)}{(2n+1)!} \right\}. \tag{2.83}
 \end{aligned}$$

para el punto $(0, p_0)$. Por último, debe procederse del mismo modo que con el overlap y sumar ambas contribuciones, para obtener la expansión en potencias de $\hbar$ del elemento de matriz del Hamiltoniano simetrizado, que de esta manera adopta la forma definitiva

$$\begin{aligned} \langle \phi | H_h | \phi' \rangle = & -2i\sqrt{2\pi\hbar} \left[\sin\left(\frac{q_0 p_0}{2\hbar}\right) \sum_{n \geq 0} (-1)^n \hbar^{2n} \frac{G_{2n}(q_0, p_0)}{(2n)!} - \right. \\ & \left. -\hbar \cos\left(\frac{q_0 p_0}{2\hbar}\right) \sum_{n \geq 0} (-1)^n \hbar^{2n} \frac{G_{2n+1}(q_0, p_0)}{(2n+1)!} \right]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Capítulo 3

El mapa del gato

En este capítulo se desarrollarán los aspectos dinámicos del mapa del gato, se presentará brevemente el esquema utilizado para cuantizarlo, y se construirán las funciones de scar asociadas a sus órbitas periódicas. Sobre el final, se calcularán los elementos de matriz correspondientes, comparándose los resultados con los obtenidos en el caso del modelo derivado del Hamiltoniano $\mathcal{H} = \lambda pq$. La descripción clásica que se expondrá, permite conectar al sistema tratado en este capítulo con el modelo referido en el capítulo anterior, y al mismo tiempo interpretar al mapa en términos de la sección de Poincaré de un sistema de dimensión mayor.

3.1. Introducción

El mapa del gato se incluye en una clase de sistemas conservativos ampliamente difundidos en el estudio del caos clásico, y por extensión del caos cuántico. Una de sus características más interesantes, proviene del hecho de que la naturaleza caótica no surge de no-linealidades en las ecuaciones que lo describen (como sucede en la mayoría de los modelos empleados para estudiar la mecánica clásica de sistemas caóticos), sino de un sencillo cambio de topología. Esta circunstancia permite llevar a cabo un tratamiento analítico del operador unitario $\hat{U}$, y abordar el estudio semiclásico de propiedades de las funciones de onda de manera exacta que en el caso de otros mapas resultan de carácter aproximativo [27]. De todas maneras, aquí no se intentará encontrar resultados exactos.

3.2. Aspectos dinámicos

Desde el punto de vista estrictamente algebraico, el mapa del gato corresponde a una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, de carácter hiperbólico, que se transporta al toro $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ mediante una relación de equivalencia. Esta modificación del espacio de fases convierte al sistema dinámico en un automorfismo hiperbólico toroidal -también conocido como sistema Anosov [28]- y de este modo introduce dos de los tres ingredientes necesarios para que exista

caos, a saber, transitividad topológica y estructura densa de órbitas periódicas¹. Tales condiciones se pueden apreciar fácilmente mediante un análisis simbólico de la dinámica [29]. La presentación del sistema se dividirá en cuatro partes; en la primera de ellas se discutirá la dinámica de un mapa hiperbólico en el plano, y se ahondará a continuación en los aspectos que conciernen al cambio de geometría y a la estructura dinámica que esta trae aparejada. Se introducirá luego la versión perturbada del mapa del gato, y por último su función generatriz asociada, punto de partida del método de cuantización.

3.2.1. Mapas hiperbólicos

Si bien en la literatura suele presentarse directamente el modelo matemático del mapa gato, definiendo el sistema algebraico que lo describe, y señalando las propiedades que debe satisfacer la matriz de transformación -véase más adelante-, aquí se utilizará de un enfoque alternativo basado en trabajos de Faure y colaboradores [26]. Esta construcción, como se verá, permite conectar directamente un mapa hiperbólico general, a través de una relación de similaridad sencilla, con el mapa introducido en el capítulo anterior

$$\begin{aligned} q' &= e^\lambda q \\ p' &= e^{-\lambda} p \end{aligned} ,$$

que matricialmente corresponde a

$$\begin{bmatrix} q' \\ p' \end{bmatrix} = D(\lambda) \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$$

con

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{bmatrix} ,$$

y cuyo efecto corresponde tan sólo a un estiramiento en la dirección q y un estrechamiento en la dirección p .

Para obtener un mapa lineal conservativo, se puede partir del Hamiltoniano cuadrático

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\alpha q^2 + \frac{1}{2}\beta p^2 + \gamma q p, \quad (3.1)$$

del cual, por vía de las ecuaciones de Hamilton, se obtiene el sistema dinámico

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \gamma q + \beta p \\ \dot{p} &= -\alpha q - \gamma p. \end{aligned}$$

La integración de este conduce directamente al flujo

¹La sensibilidad a las condiciones iniciales, característica restante, se manifiesta inclusive en el plano, en la medida en que el mapa es hiperbólico.

$$\begin{bmatrix} q_t \\ p_t \end{bmatrix} = M_t \begin{bmatrix} q_0 \\ p_0 \end{bmatrix},$$

con

$$M_t = \begin{bmatrix} \cosh(\lambda t) + \frac{\gamma}{\lambda} \sinh(\lambda t) & \frac{\beta}{\lambda} \sinh(\lambda t) \\ -\frac{\alpha}{\lambda} \sinh(\lambda t) & \cosh(\lambda t) - \frac{\gamma}{\lambda} \sinh(\lambda t) \end{bmatrix},$$

donde $\lambda = \sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta}$. La matriz M_t -conocida como matriz de estabilidad- se convierte en la matriz de monodromía M al tomar $t = 1$. Desde este punto de vista, la dinámica entre t y $t + 1$ puede asimilarse al movimiento en una dirección transversal en un espacio de fases de cuatro dimensiones, en donde se pretende estudiar el flujo a través de una sección de Poincaré. Con esta consideración, queda establecida la correspondencia entre el escenario actual y el descrito en los capítulos anteriores

El antecedente euclídeo del mapa del gato, queda así definido a través de la ecuación

$$\begin{bmatrix} q' \\ p' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix},$$

en donde la conservatividad de las áreas simplécticas, que se puede verificar calculando el determinante, ha sido impuesta a priori -la obtención de M a partir de un Hamiltoniano, garantiza la simplecticidad de esta matriz-. La construcción, a su vez, permite identificar inmediatamente los tipos de órbitas que pueden tener lugar. Teniendo en cuenta que los autovalores de M son e^λ y $e^{-\lambda}$, de acuerdo al signo de $\gamma^2 - \alpha\beta$ podrá haber órbitas elípticas ($\lambda^2 < 0$), parabólicas ($\lambda^2 = 0$) o hiperbólicas ($\lambda^2 > 0$, en esta situación, el parámetro expresa una medida del apartamiento asintótico de órbitas inicialmente próximas y recibe el nombre de exponente de Lyapunov). El mapa del gato corresponde al último de los casos, que es consecuentemente al que se considerará en lo sucesivo.

El efecto de M se interpreta definiendo primeramente la matriz de cambio de base

$$Q(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\sin 2\phi}} \begin{bmatrix} \cos(\pi/4 - \phi) & \sin(\pi/4 - \phi) \\ \sin(\pi/4 - \phi) & \cos(\pi/4 - \phi) \end{bmatrix},$$

con $\phi \in [0, \pi/4)$, que lleva las coordenadas en una base de vectores distantes en un ángulo ϕ de la bisectriz del primer cuadrante (véase figura 3.1) al sistema ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (de modo que $\text{Id} = Q(\phi = \pi/4)$); y en segundo lugar, a la matriz de rotación

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

que transforma desde una base rotada en θ a la base estándar (en este caso, el ángulo θ puede recorrer media circunferencia, y por supuesto, $\text{Id} = R(\theta = 0)$).²

²Al incrementar R en π las variedades coinciden, y se vuelven redundantes los demás valores de θ .

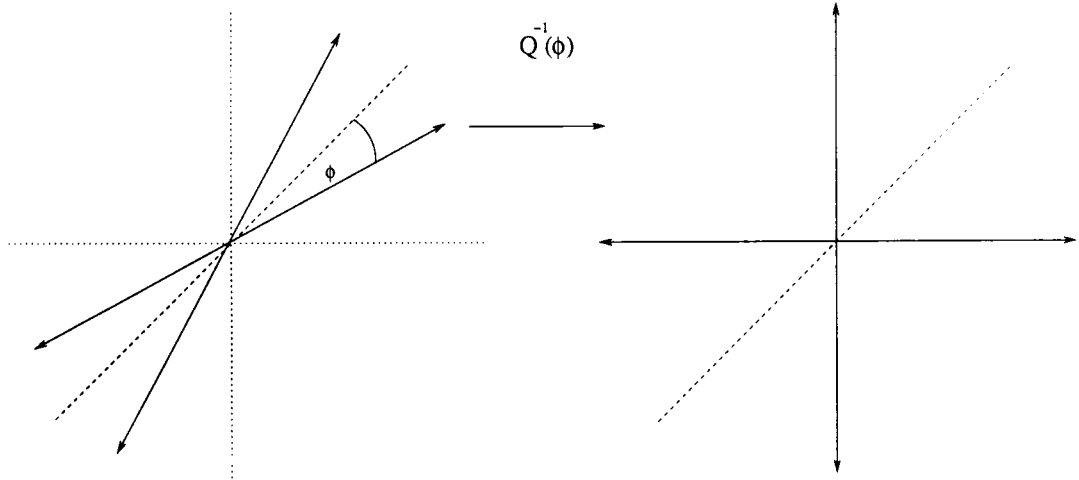


Figura 3.1: Transformación inversa $Q^{-1}(\phi)$ aplicada a los ejes coordenados de la base original.

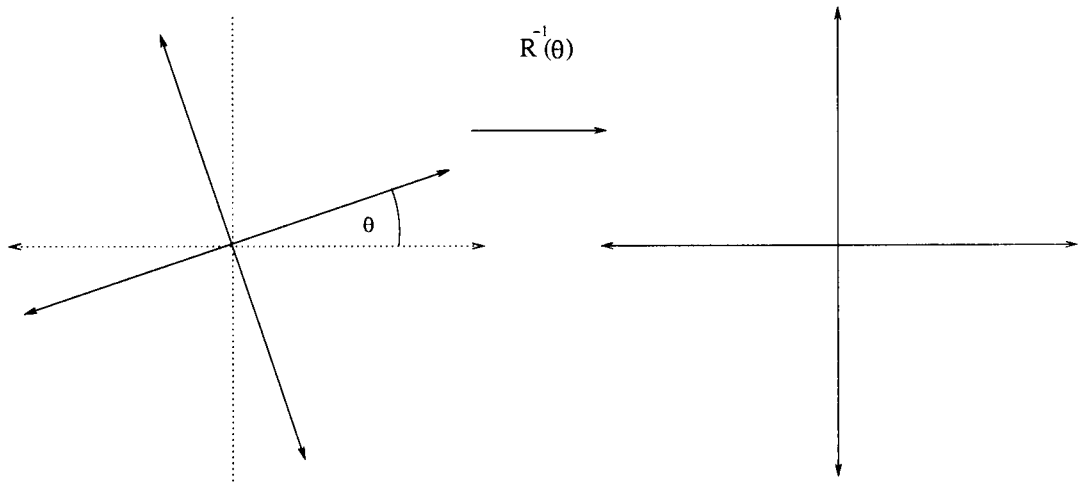


Figura 3.2: Transformación inversa $R^{-1}(\theta)$ aplicada a los ejes coordenados de la base original.

El producto de ambas matrices da lugar a la nueva matriz

$$B(\theta, \phi) \equiv R(\theta)Q(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\sin 2\phi}} \begin{bmatrix} \cos(\pi/4 + \theta - \phi) & \sin(\pi/4 - \theta - \phi) \\ \sin(\pi/4 + \theta - \phi) & \cos(\pi/4 - \theta - \phi) \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

cuyos parámetros pueden relacionarse apropiadamente con α , β y γ , de modo de obtener una matriz que transforme a $D(\lambda)$ en M . Esto es, una base en la que ambas matrices sean similares y cuyos vectores estén representados por las columnas de B , de manera tal que

$$M(\lambda, \theta, \phi) = B(\theta, \phi) D(\lambda) B(\theta, \phi)^{-1}.$$

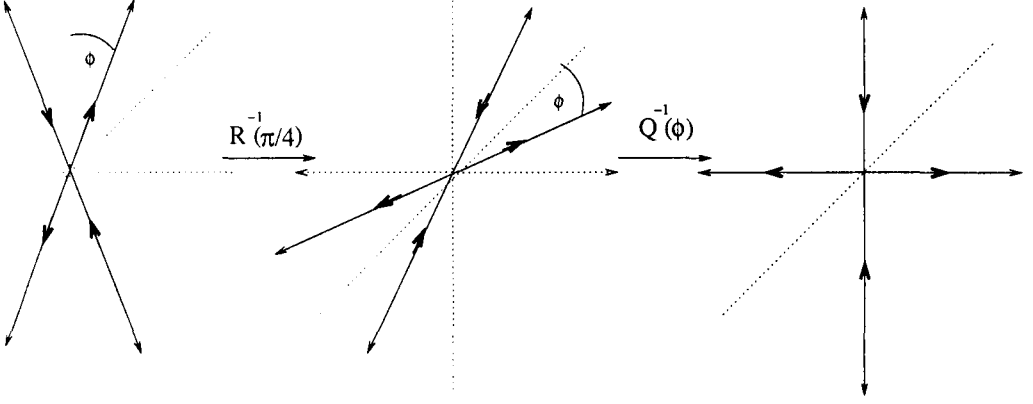


Figura 3.3: Esquema de diagonalización de los mapas M^b vía la transformación inversa $B^{-1}(\pi/4, \phi) = Q^{-1}(\phi)R^{-1}(\pi/4)$, aplicada a los ejes coordenados de la base original.

Procediendo así, resulta

$$\begin{aligned}\alpha/\lambda &= -\cot(2\phi) - \sin(2\theta)/\sin(2\phi), \\ \beta/\lambda &= -\cot(2\phi) + \sin(2\theta)/\sin(2\phi), \\ \gamma/\lambda &= \cos(2\theta)/\sin(2\phi).\end{aligned}\tag{3.3}$$

A modo de ejemplo, se analizará el efecto de la transformación en términos de los ángulos θ y ϕ en dos situaciones particulares. En primer lugar, se considerarán matrices hiperbólicas simétricas. Dado que R es la matriz ortogonal más general de determinante uno, basta tomar $Q = \text{Id}$. La condición resultante es entonces $\phi = \pi/4$, y el resultado, la familia de matrices

$$M^a = \begin{bmatrix} \cosh(\lambda) + \cos(2\theta)\sinh(\lambda) & \sin(2\theta)\sinh(\lambda) \\ \sin(2\theta)\sinh(\lambda) & \cosh(\lambda) - \cos(2\theta)\sinh(\lambda) \end{bmatrix},\tag{3.4}$$

que corresponden al mapa $D(\lambda)$ rotado antihorariamente en un ángulo θ .

El otro caso de interés, es aquel en el que una de las bisectrices del ángulo que forman las autodirecciones coincide con el eje p (y la otra con el eje q). Ello sucede cuando $\theta = \pi/4$, y da lugar a otra familia de matrices, a saber

$$M^b = \begin{bmatrix} \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda)/\tan(\phi) \\ \tan(\phi)\sinh(\lambda) & \cosh(\lambda) \end{bmatrix}.\tag{3.5}$$

En este caso, además de haber sido rotado en 45 grados, el mapa D ha sufrido una deformación por la cual las autodirecciones dejaron de ser perpendiculares, y se desplazaron en un ángulo $\pi/4 - \phi$ hacia la bisectriz (figura 3.3).

3.2.2. Automorfismo toroidal hiperbólico

Hasta aquí, se ha construido la transformación hiperbólica³ más general en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$. Se completará la definición del mapa del gato mediante el cambio de topología ya mencionado. Este paso se realiza restringiendo el plano al cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, e introduciendo una identificación entre los bordes de este último. Esto es, haciendo coincidir los lados $q = 0$ con $q = 1$, y $p = 0$ con $p = 1$. Formalmente, la operación puede asimilarse a una relación de equivalencia entre variedades a través del proyector

$$\begin{bmatrix} q' \\ p' \end{bmatrix} = \pi \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q - i \\ p - j \end{bmatrix}, \quad \text{con } i, j \in \mathbb{Z}.$$

que a cada punto de $\mathbb{R}^2$ lo envía a un punto del cuadrado. Como para cada $(q, p) \in \mathbb{R}^2$ hay un sólo par (i, j) para el cual la relación anterior se verifica, es evidente que π es un homomorfismo, y que en consecuencia divide al plano en clases de equivalencia. El toro $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ es, pues, el conjunto de estas clases.

Componiendo al proyector con la transformación hiperbólica de la sección anterior, se define al operador que, ahora sí, representa al mapa del gato

$$G = \pi \circ M.$$

El sistema, también conocido como automorfismo toroidal hiperbólico [29], a los fines prácticos quedará descripto por la ecuación

$$\begin{bmatrix} q' \\ p' \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \pmod{1}. \quad (3.6)$$

Ahora bien, se ha dicho en la sección anterior que M debe ser una matriz conservativa e hiperbólica, circunstancia satisfecha automáticamente por construcción al ser $\det(M) = 1$ y $\text{Tr}[M] = 2 \cosh \lambda > 2$. No obstante, el hecho de que los bordes del dominio estén identificados, obliga a imponer una condición adicional. A los fines de garantizar la continuidad del mapa, los coeficientes de M deberán ser enteros, lo que restringe los posibles valores de λ conforme a la condición

$$\lambda = \cosh^{-1}(n/2) = \ln \left[n/2 + \sqrt{(n/2)^2 - 1} \right],$$

con $n = \text{Tr}M \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. De este modo, los mapas estarán discretizados mediante una fórmula para los autovalores, a saber

$$\nu_n = e^{\lambda_n} = n/2 + \sqrt{(n/2)^2 - 1}, \quad (3.7)$$

en donde el subíndice $n \in \mathbb{N}$ utilizado para designar a la traza, en lo sucesivo se empleará también para caracterizar al mapa.

³Estrictamente hablando, se está haciendo alusión a transformaciones hiperbólicas con autovalores positivos, lo que excluye la posibilidad de inversiones.

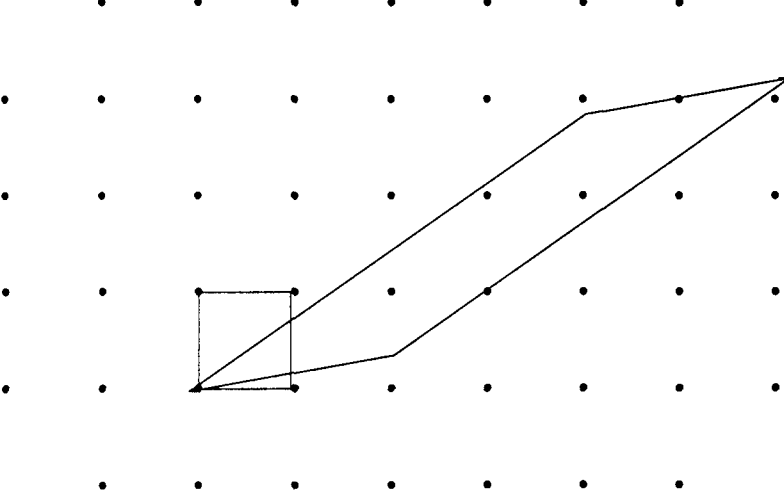


Figura 3.4: Deformación del cuadrado $[0, 1) \times [0, 1)$ vía la matriz $M_n^l - \text{Id}$. Las marcas que quedan contenidas dentro del paralelogramo - correspondientes a pares $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ - son las imágenes de los puntos periódicos de período l .

Pueden así apreciarse dos propiedades. Primeramente, que para todo n vale que $n - 1 < \nu_n < n$, y en segundo lugar, la propiedad asintótica $\nu_n \rightarrow n$ (para $n \rightarrow \infty$).

Así mismo, del hecho de que los elementos de M_n sean enteros, se deduce que los puntos periódicos tienen coordenadas racionales. Ello se evidencia al considerar la condición que debe satisfacer un punto de período l , a saber

$$\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = M_n^l \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix},$$

donde i y j son ahora los enteros que hay que sustraer para llevar a cabo la operación (mod 1); o bien

$$(M_n^l - \text{Id}) \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

La ecuación (3.8) puede explicarse mediante la figura 3.4, donde se advierte cómo los puntos de periodicidad l son mapeados vía $M_n^l - \text{Id}$ en los pares de enteros (i, j) que se encuentran dentro del paralelogramo al que es mapeado el dominio cuadrado. Como este posee área 1, el área del paralelogramo corresponderá al determinante $\det [M_n^l - \text{Id}]$, cuyo valor absoluto será, en consecuencia, igual al número de pares (i, j) contenidos en él. Esto permite deducir que el número de puntos periódicos de período l vale

$$|\det [M_n^l - \text{Id}]| = \text{Tr} M_n^l - 2 = \nu_n^l + \nu_n^{-l} - 2, \quad (3.9)$$

independientemente de a cuál miembro particular entre los mapas de traza n se esté uno refiriendo.

Se concluirá esta sección citando los ejemplos más conocidos en la literatura. El mapa del gato de Arnold

$$M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

que en la nomenclatura de la sección anterior es un mapa del tipo M^a con $\theta \simeq 31.72^\circ$; y su inverso

$$M_3^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

($\theta \simeq 58.28^\circ$), que geométricamente corresponde a un intercambio de las variedades del anterior; y para n par ($n = 2k$), los mapas del tipo M^b (cuyas variedades, como se ha dicho anteriormente, se bisectan en el eje p en un ángulo ϕ)⁴,

$$M_{2k} = \begin{bmatrix} k & 1 \\ k^2 - 1 & k \end{bmatrix} \quad y \quad \tilde{M}_{2k} = \begin{bmatrix} k & k^2 - 1 \\ 1 & k \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

con sus respectivos inversos

$$M_{2k}^{-1} = \begin{bmatrix} k & -1 \\ 1 - k^2 & k \end{bmatrix} \quad y \quad \tilde{M}_{2k}^{-1} = \begin{bmatrix} k & 1 - k^2 \\ -1 & k \end{bmatrix},$$

correspondientes una vez más a intercambiar las variedades de los originales. Estos mapas representan las únicas soluciones de (3.5) compatibles con la condición de que $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, e incluyen al mapa de Hannay y Berry [31],

$$M_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad (3.11)$$

que en secciones subsiguientes servirá de modelo para estudiar la teoría desarrollada en el capítulo anterior. Pero antes se completará la descripción clásica.

3.2.3. Mapa del gato perturbado

Tal como se mencionara al comienzo de esta sección, el mapa del gato tiene la característica de manifestar caos aún en ausencia de no-linealidades. Sin embargo, el espectro resultante al realizar la cuantización exhibe degeneraciones que no son típicas de los sistemas caóticos, motivo por el cual en determinadas circunstancias se hace preciso modificarlo introduciendo una perturbación.

La versión perturbada del mapa del gato se construye añadiendo un término no lineal en la ecuación (3.6), procedimiento que usualmente se realiza escribiendo

$$\begin{bmatrix} q' \\ p' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} + k f(q) \begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{22} \end{bmatrix} \pmod{1},$$

⁴donde $\phi = \tan^{-1}(\sqrt{k^2 - 1})$ y $\tilde{\phi} = \cot^{-1}(\sqrt{k^2 - 1}) = \pi/2 - \phi$.

con $f(q)$ una función de período 1, de modo de preservar la continuidad. La condición de conservación del área se traslada ahora al jacobiano de la transformación (es requisito que el área se conserve localmente), mientras que para mantener la condición de hiperbolicidad, se hace preciso que el mapa sea estructuralmente estable (lo que equivale a decir que las órbitas de ambos mapas, perturbado y sin perturbar, sean topológicamente equivalentes vía un homomorfismo H). Esto es cierto para el mapa del gato, como lo garantiza el teorema de Anosov[28], siempre y cuando

$$k \leq k_{\text{máx}} \equiv \frac{\sqrt{(\text{Tr} M)^2 - 4} - \text{Tr} M + 2}{2 \max_q |f'(q)| \sqrt{1 + M_{22}^2}}.$$

Bajo esta condición, el mapa perturbado resulta ergódico, como lo es el mapa sin perturbar. De otro modo el comportamiento es mixto, con zonas elípticas (“islas de estabilidad”) interpuestas en un fondo caótico. El mapa que aquí se considerará ha sido extraído de trabajos de Basilio de Matos y Ozorio de Almeida [30], y viene caracterizado por

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad f(q) = \frac{1}{2\pi} [\cos(2\pi q) - \cos(4\pi q)] . \quad (3.12)$$

En este caso, para $k \leq (\sqrt{3} - 1)/\sqrt{5} = 0.33\dots$ el mapa resulta Anosov. Su parte lineal puede ser decripta mediante la descomposición expuesta en las secciones anteriores, y geoméricamente corresponde a un M^b de traza 4 cuyas variedades bisectan al eje p en un ángulo $\phi = \pi/6$ (véase ecuaciones (3.5) y (3.10)).

Alterativamente, si A satisface el teorema de Anosov, se podrá escribir

$$A = H^{-1} \circ G \circ H = G \circ [G^{-1} \circ H^{-1} \circ G \circ H] ,$$

de modo que

$$A = G \circ P = G \circ [1 + \epsilon(q)] , \quad (3.13)$$

con

$$\epsilon(q) = k \begin{bmatrix} 0 \\ f[q] \end{bmatrix} , \quad (3.14)$$

de donde se deduce la expresión para el mapa inverso, a saber:

$$A^{-1} = P^{-1} \circ G^{-1} = [1 - \epsilon(q)] \circ G^{-1}.$$

Antes de pasar al último segmento de esta la sección, se citarán algunos elementos de la dinámica cuyo cálculo se realiza perturbativamente a partir de los correspondientes al mapa sin perturbar. Las órbitas periódicas, por ejemplo, se obtienen resolviendo (3.8) y realizando luego un análisis infinitesimal (tomando $k \ll k_{\text{máx}}$, esta aproximación es siempre factible). Existen dos puntos fijos que se ubican en $(0, 0)$ y $(1/2 + k/2\pi, 1/2 + k/2\pi)$, respectivamente,

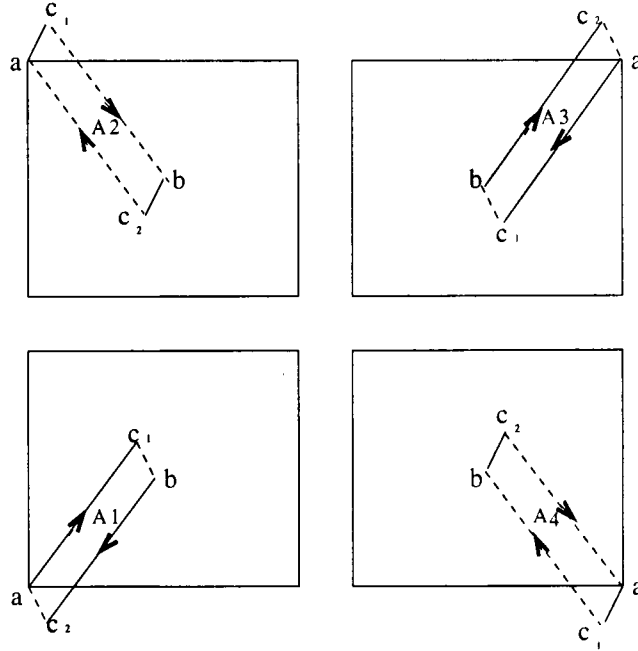


Figura 3.5: Las cuatro áreas heteroclínicas principales enmarcadas por las variedades estable e inestable de los puntos fijos $a = (0,0)$ y $b = (1/2 + k/2\pi, 1/2 + k/2\pi)$. Los puntos c_1 y c_2 denominados puntos heteroclínicos- corresponden a los cruces entre las variedades de uno y otro punto fijo.

y cinco órbitas primitivas de período dos, correspondientes a los pares:

$$\begin{array}{ll}
 (1/6 - k/6\pi, -k/4\pi) & (1/3 - k/12\pi, 1/2) \\
 (k/6\pi, 1/2) & (1/2 + k/3\pi, k/2\pi) \\
 (1/3, 0) & (2/3, 0) \\
 (2/3 - k/12\pi, 1/2) & (5/6 - k/6\pi, -k/4\pi) \\
 (1/6 - k/4\pi, 1/2 - k/4\pi) & (5/6 - k/4\pi, 1/2 - k/4\pi)
 \end{array}$$

A su vez, las áreas heteroclínicas encerradas por las variedades estables e inestables (de dos puntos fijos, de puntos pertenecientes a órbitas periódicas, o bien de combinaciones entre unos y otros), a primer orden en la perturbación, corresponden a trapezoides que se obtienen al deformar linealmente los correspondientes paralelogramos.

En la figura 3.5 se muestran las áreas heteroclínicas principales que definen las variedades de los dos puntos fijos. Como puede apreciarse, estas "reaparecen" en diferentes lugares del espacio de fases como resultado de las proyecciones en el toro del origen (uno de los puntos fijos). Con $A^0 = 0.1443380$ el área correspondiente al mapa sin perturbar, y $\delta = 0.091888k$, las cuatro áreas toman respectivamente los valores $A_1 = A^0 + \delta$, $A_2 = A^0 - \delta$, $A_3 = A^0 + 2\delta$, $A_4 = A^0 - 2\delta$

3.2.4. Funciones generatrices

Para poder introducir el método de cuantización del mapa del gato, será necesario presentar previamente su función generatriz asociada (primeramente en la versión del mapa sin perturbar) [30],

$$S(q', q, m, n) = \frac{1}{2M_{12}} \left[M_{11}q^2 - 2q(q' + m) + M_{22}(q' + m)^2 - 2M_{12}nq' \right]. \quad (3.15)$$

A partir de esta se puede obtener la fórmula (3.6) mediante las transformaciones canónicas $p = -\partial S/\partial q$ y $p' = \partial S/\partial q'$. En relación a la parte perturbativa, la correspondiente función puede escribirse directamente como la suma [30]

$$S_A(q', q, m, n) = S(q', q, m, n) + S_P(q_i, q), \quad (3.16)$$

donde S_P es la función generatriz de la perturbación P introducida en la sección anterior (tal que su derivada con respecto a q corresponde a la parte no nula del mapa $\epsilon(q)$ (ecuación (3.14))), y q_i la coordenada intermedia del sistema luego de la acción de P . Esta última función generatriz, por su parte, permite obtener la perturbación P mirando estroboscópicamente un hipotético Hamiltoniano $H_P(q)$ vinculado con $S_P(q)$ partir de la relación [30]

$$-\frac{dH_P(q)}{dq} = -\frac{1}{T} \frac{dS_P}{dq},$$

donde T corresponde al tiempo transcurrido entre observaciones. En la próxima sección se sacará provecho de este último enunciado.

3.3. Cuantización

La cuantización del mapa del gato se realiza semiclásicamente partiendo de un propagador clásico, en el que la acción es representada por la función generatriz (3.15). La dificultad principal consiste en llevar a cabo la periodización, para lo cual es preciso utilizar herramientas de teoría de números que aquí sólo serán comentadas, remitiendo al lector interesado a [31] y [32, 33].

Dado que el espacio de fases es el toro unidad, las funciones de onda $\psi(q)$ deben tener período 1 en q , lo que implica que sus transformadas $\tilde{\psi}(p)$ deben corresponder a series de deltas centradas en $p = 2n\pi\hbar$, con n entero. Pero como las $\tilde{\psi}(p)$ deben poseer así mismo la periodicidad toroidal, las $\psi(q)$ deben consistir a su vez en deltas, en este caso centradas en $q = 2m\pi\hbar$. Estas condiciones son mutuamente consistentes sólo si el área del toro es un múltiplo entero de la constante de Planck, que en el caso presente -toro unidad- corresponde a decir

$$\hbar = 1/2\pi N,$$

donde $N \in \mathbb{N}$ define el tamaño del espacio de Hilbert. De este modo, cualquier “medición” realizada de q o de p sólo puede tomar valores en la red de puntos con coordenadas

$$q = Q/N, p = P/N \quad (1 \leq Q, P \leq N),$$

para $Q, P \in \mathbb{N}$. En el límite semiclásico, correspondiente a $N \rightarrow \infty$, $\hbar$ se anula en forma asintótica y q y p se vuelven prácticamente.

La construcción del operador involucra a un propagador continuo en el plano, al que se escribe en términos de la acción correspondiente a una única trayectoria clásica

$$U(q', q) = (-1)^r \left(\frac{-i\partial S(q', q)}{\hbar \partial q' \partial q} \right)^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar} S(q', q)},$$

donde r es la signatura del mapa [30]. Introduciendo la versión plana de (3.15) en esta ecuación, se obtiene el propagador para el mapa sin perturbar

$$U^G(q', q) = \left(\frac{N}{iM_{12}} \right)^2 \exp \left[\frac{i\pi N}{M_{12}} (M_{11}q^2 - 2q'q + M_{22}q'^2) \right],$$

que resulta una expresión exacta en la medida de que la función generatriz es una función cuadrática de las coordenadas. Para realizar la periodización, se utiliza la analogía óptica propuesta por Hannay y Berry[31] en la que se considera a $U^G(q', q)$ como el campo en la posición q' producido por una fuente en q . El propagador en el toro resulta así el promedio sobre los enteros m de todos los puntos $q = Q/N + m$, con Q un entero entre 1 y N . De este modo se obtiene

$$U_{Q'Q}^G = \left(\frac{M_{12}}{iN} \right)^{1/2} \left\langle \exp \left[\frac{i\pi}{NM_{12}} (M_{11}(Q + mN)^2 - 2Q'(Q + mN) + M_{22}Q'^2) \right] \right\rangle_m,$$

donde $\langle \rangle_m$ denota el promedio sobre m .

Este tipo de promedios se conoce como sumas gaussianas, y se calcula mediante la teoría de números [34]. No obstante, para que los elementos de matriz del propagador U^G resulten no nulos para todo N , las matrices M deben ser de la forma [31]

$$M : \begin{bmatrix} \text{par} & \text{impar} \\ \text{impar} & \text{par} \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} \text{impar} & \text{par} \\ \text{par} & \text{impar} \end{bmatrix}.$$

Esto descarta al mapa de Arnold, pero permite en cambio utilizar la versión considerada por Hannay y Berry (que le sucede inmediatamente desde el punto de vista de la ecuación (3.7)), e introducida con anterioridad en la ecuación (3.11).

La cuantización de la perturbación se realiza partiendo del hecho de que el mapa completo puede escribirse como una composición (ecuación (3.13)), en la que, por simplicidad, se tomará al mapa P como un caso de “delizamiento” (shear) no-lineal [30]. En esta situación, el propagador asociado a la perturbación se obtiene mediante el Hamiltoniano $H_P(q)$

introducido al final de la sección anterior, definiendo a la evolución en el plano como la propagación temporal de H_P sobre un período T ,

$$U^P = e^{-iH_P T/\hbar},$$

o en representación de coordenadas,

$$U^P(q, q') = \delta(q - q') e^{-iH_P T/\hbar}.$$

Procediendo del mismo modo que con $U^G(q, q')$, a este operador se le toma el promedio en m sobre todos los puntos $q = Q/N + m$, para obtener el propagador en el toro

$$U_{QQ'}^P = \delta_{QQ'} e^{-i2\pi N H_P(Q/N)T},$$

un promedio que resulta no nulo únicamente si $H_P(q)$ tiene período 1. El mapa cuántico definitivo queda entonces definido a partir de la composición de dos operadores evolución, uno correspondiente al mapa del gato sin perturbar, y el otro al shear no-lineal

$$U^A = U^G U^P. \quad (3.17)$$

La ventaja en la utilización de un shear para incorporar la no-linealidad al mapa del gato, reside en el hecho de que la aproximación semiclásica sigue siendo exacta [30]. El propagador se obtiene mediante la expresión (3.16) para la función generatriz, y vale

$$U^A(q', q) = \left(\frac{N}{iM_{12}} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{i\pi N}{M_{12}} (M_{11}q^2 - 2q'q + M_{22}q'^2) + i2\pi N S_P(q) \right].$$

Promediando esta expresión sobre los enteros m para los puntos tales que $q = Q/N + m$, se obtiene

$$U_{Q'Q}^A = \left(\frac{M_{12}}{iN} \right)^{1/2} \left\langle \exp \left[\frac{i2\pi}{NM_{12}} (M_{11}(Q + mN)^2 - Q'(Q + mN) + M_{22}Q'^2) \right] \right\rangle_m e^{i2\pi N S_P(Q/N)}, \quad (3.18)$$

que es justamente la representación en coordenadas de (3.17) :

$$U_{Q'Q}^A = U_{Q'Q}^G U_{Q'Q}^P.$$

La no periodicidad de U^P , se traslada directamente al propagador U^A , lo que se traduce en una ruptura de la degeneración característica de los mapas del gato sin perturbar [30].

La aplicación de este esquema de cuantización al mapa utilizado por Basilio de Matos y Ozorio de Almeida (véase ecuación (3.12) y la referencia asociada) conduce a las siguientes expresiones para las funciones generatrices

$$S_G(q', q, m, n) = q^2 - q(q' + m) + (q' + m)^2 - nq'$$

y

$$S_P(q) = \frac{k}{4\pi^2} \left(\sin(2\pi q) - \frac{1}{2} \sin(4\pi q) \right),$$

para los mapas G y P , respectivamente (en donde se han utilizado las formas explícitas de G y de $\epsilon(q)$ introducidas en la sección 3.2.3). Estas deben colocarse luego en (3.18), y promediarse por último para obtener la matriz

$$U_{Q'Q}^A = \left(\frac{1}{iN} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{i2\pi}{N} (Q^2 - QQ' + Q'^2) + \frac{iNk}{2\pi} \left(\sin(2\pi Q/N) - \frac{1}{2} \sin(4\pi Q/N) \right) \right], \quad (3.19)$$

cuya diagonalización podrá implementarse ahora en un código computacional para valores de N arbitrarios.⁵

3.4. La función de scar en la base de autoestados

Una vez diagonalizado el operador deducido sobre el final de la sección precedente, y con el objeto de obtener una expansión de la función de scar en la base de autoestados del gato, puede introducirse la completitud generada por estos últimos en la ecuación (2.21) (con $f(2t/T) = \cos(\pi t/T)$). Procediendo así, la representación integral de la función de scar se convierte en la suma

$$|\phi\rangle = \sum_{k=1}^N \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\pi t/T) e^{i\theta t} \hat{U}^t |\mu_k\rangle \langle \mu_k|0\rangle,$$

que luego de hacer actuar al propagador sobre los $|\mu_k\rangle$ ⁶, puede integrarse exactamente dando lugar a la serie

$$|\phi\rangle = \sum_{k=1}^N Y_k |\mu_k\rangle \langle \mu_k|0\rangle,$$

con

$$Y_k = 2\pi T \frac{\cos((\mu_k - \theta)T/2)}{\pi^2 - ((\mu_k - \theta)T)^2}.$$

El único ingrediente que hay que especificar corresponde a los coeficientes $\langle \mu_k|0\rangle$, que son precisamente los paquetes gaussianos propagados que intervienen en la construcción de la función de scar, proyectados en la base de autoestados del mapa del gato. Esto es

⁵Como ya se ha mencionado, la no inclusión de un término perturbativo en el propagador cuántico puede dar lugar a espectros que no son característicos de sistemas clásicamente caóticos. Sin embargo, las manifestaciones de este rasgo atípico del mapa del gato no se han puesto en evidencia (al menos en el transcurso de este trabajo) en los cálculos semiclásicos de elementos de matriz.

⁶Esto es, de acuerdo a la ecuación de autovalores $\hat{U}^t |\mu_k\rangle = e^{i\mu_k t} |\mu_k\rangle$.

$$\langle \mu_k | 0 \rangle = \sum_{i=1}^N \langle \mu_k | q_i \rangle \langle q_i | 0 \rangle ,$$

con

$$\langle q | 0 \rangle \propto \exp \left[-\frac{q^2}{2\hbar} \right] ,$$

donde los coeficientes $\langle \mu_k | q_i \rangle$ provienen de la diagonalización de la matriz U^A deducida en la sección anterior (ecuación (3.19)).

Ahora bien, para describir adecuadamente el problema que se está tratando, deben tenerse presentes dos consideraciones: en primer lugar, la simetría toroidal del espacio de fases, que obliga a introducir una periodización en la definición de los estados coherentes. Por otra parte, del hecho de que las variedades del sistema lineal no sean perpendiculares, se desprende que la autocorrelación $\langle 0 | \hat{U}^t | 0 \rangle$ no resulta máxima entre estados coherentes isotrópicos. En este caso debe introducirse el estado de máxima autocorrelación centrado en el origen del espacio de fases, reemplazando al estado gaussiano isotrópico por el que se obtiene a partir de la fórmula [35]

$$\langle q | 0 \rangle \propto \exp \left[i \frac{q^2 P}{2\hbar Q} \right] , \quad (3.20)$$

donde

$$\begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} = \xi_u + i\xi_s \quad (3.21)$$

es un vector complejo construido con los autovectores estable e inestable de M . En el caso particular del gato de Hannay Berry, estos valen

$$\begin{aligned} \xi_u &= \sin(\pi/6)\mathbf{e}_q + \cos(\pi/6)\mathbf{e}_p \\ \xi_s &= -\sin(\pi/6)\mathbf{e}_q + \cos(\pi/6)\mathbf{e}_p \end{aligned} \quad (3.22)$$

de modo que el estado en cuestión toma la forma

$$\langle q | 0 \rangle \propto \exp \left[-\sqrt{3} \frac{q^2}{2\hbar} \right] , \quad (3.23)$$

lo que corresponde a un estrechamiento del paquete isotrópico en la dirección q y un estiramiento en la dirección p .

En cuanto a la traslación de la función de scar a puntos arbitrarios del espacio de fases, a este efecto se procede de manera análoga a como se hizo en el capítulo anterior (ecuación (2.49)). Los detalles serán expuestos en la sección que sigue.

Restaría aclarar el procedimiento de periodización mencionado anteriormente. Incluido este, la determinación numérica de los elementos de matriz se reduce a sumas sobre los puntos en que queda discretizada la coordenada q . Sin embargo, tal procedimiento no difiere del empleado mediante una construcción semiclásica de la función de scar que se presentará a continuación, lo mismo que el criterio establecido, una vez evaluados los elementos de matriz, para analizar los resultados y compararlos con las fórmulas deducidas en la sección 2.4.

3.5. Construcción semiclásica de la función de scar

La construcción semiclásica de la función de scar se realiza mediante la representación integral (2.21), reemplazando al operador $\hat{U}^t$ por la versión correspondiente al mapa del gato, obtenido a partir de (3.1) con $\alpha = -\sqrt{3}\lambda$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda$, $\gamma = 0$ (ecuaciones (3.3) aplicadas al caso particular en que $\theta = \pi/4$, $\phi = \pi/6$),

$$\mathcal{H} = \frac{\lambda}{2\sqrt{3}} (p^2 - 3q^2), \quad (3.24)$$

con $\lambda = \ln(2 + \sqrt{3})$. El mapa en el plano tiene un punto fijo en el origen cuyas direcciones estable e inestable vienen dadas por los vectores (3.22) que, normalizados de modo que $\xi_u \wedge \xi_s = 1$, toman los valores

$$\xi_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3^{-1/4} \\ 3^{1/4} \end{bmatrix} \quad y \quad \xi_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -3^{-1/4} \\ 3^{1/4} \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

En este caso se partirá directamente del paquete gaussiano

$$\langle q|0\rangle = \frac{1}{(\hbar\pi)^{1/4} \sqrt{e^{i\pi/4}Q}} \exp \left[i \frac{q^2 P}{2\hbar Q} \right], \quad (3.26)$$

que corresponde a la ecuación (3.20) con la inclusión del factor de normalización. El paquete así escogido satisface las relaciones

$$\langle 0|0\rangle = 1,$$

$$\langle 0|\hat{H}|0\rangle = 0,$$

$$\langle 0|\hat{H}^2|0\rangle = \hbar^2\lambda^2/2;$$

esto es, es un paquete normalizado con dispersión en energía $\sigma_E = \hbar\lambda/\sqrt{2}$. Debe enfatizarse que cualquier combinación lineal de la forma $\alpha\xi_u + i\xi_s/\alpha$ con $\alpha > 0$ (generalización de la ecuación (3.21)) da lugar a un paquete gaussiano que también satisface las tres ecuaciones anteriores. Esto significa que existe una familia uniparamétrica de paquetes con igual dispersión en energía (más aún, puede probarse que es esta la mínima dispersión que se obtiene mediante construcciones gaussianas). No obstante, dentro de esta familia, el paquete escogido presenta además mínima dispersión en q y en p . Por consiguiente, se trata del paquete con mayor localización en la vecindad del punto fijo.

La función de scar adopta entonces la forma

$$\phi_{scar}(q) = \kappa \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\pi t/T) \langle q|\hat{U}^t|0\rangle, \quad (3.27)$$

con κ una constante de normalización.

La evolución temporal del paquete gaussiano resulta a su vez un paquete gaussiano (esto debido a que el Hamiltoniano utilizado es una forma cuadrática), y viene dada por la siguiente expresión:

$$\langle q | \hat{U}^t | 0 \rangle = \frac{1}{(\hbar\pi)^{1/4} \sqrt{e^{i\pi/4} Q(t)}} \exp \left[i \frac{q^2 P(t)}{2\hbar Q(t)} \right],$$

donde el vector

$$\begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} (t) \equiv \xi_u(t) + i\xi_s(t)$$

se obtiene evolucionando los autovectores del mapa en el plano [35],

$$\xi_u(t) = \exp(\lambda t) \xi_u; \quad \xi_s(t) = \exp(-\lambda t) \xi_s;$$

con lo que⁷

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = \sqrt{3} [\tanh(2\lambda t) + i \operatorname{sech}(2\lambda t)].$$

De este modo, resulta

$$\langle q | \hat{U}^t | 0 \rangle = \frac{3^{1/8} e^{-\frac{i}{2} \arctan[\tanh(\lambda t)]}}{[\pi \hbar \cosh(2\lambda t)]^{1/4}} \exp \left\{ \left[-\frac{1}{\cosh(2\lambda t)} + i \tanh(2\lambda t) \right] \frac{\sqrt{3} q^2}{2\hbar} \right\}, \quad (3.28)$$

donde la fase de $\sqrt{e^{i\pi/4} Q(t)}$ se ha elegido en el rango $(-\pi/4, \pi/4)$ con el objeto de que $\langle q | \hat{U}^t | 0 \rangle$ resulte una función continua del tiempo.

Esta expresión puede ahora introducirse en (2.21) para obtener una fórmula cerrada para la representación integral de la función de scar en el plano,

$$\phi_{scar}(q) = 2 \kappa \left[\frac{\sqrt{3}}{\pi \hbar} \right]^{1/4} \int_0^{T/2} dt \cos \left(\frac{\pi t}{T} \right) \frac{\exp \left[-\frac{\sqrt{3}}{\cosh(2\lambda t)} \frac{q^2}{2\hbar} \right]}{[\cosh(2\lambda t)]^{1/4}} \cos[\theta(t)], \quad (3.29)$$

en donde, a los fines de realizar la manipulación algebraica, se ha definido la función impar

$$\theta(t) \equiv \frac{\sqrt{3}}{2\hbar} \tanh(2\lambda t) - \frac{1}{2} \arctan[\tanh(\lambda t)].$$

Esta función de scar depende de un parámetro T , en principio arbitrario, que puede variar entre 0 e ∞ . No obstante, debe tenerse presente que en sistemas más generales que el que se está tratando no es posible obtener expresiones explícitas como la ecuación (3.28) más allá del tiempo de Ehrenfest. Por este motivo, en general se tomará a $T/2$ igual al tiempo de Ehrenfest, $T_E = \ln(A/\hbar)/2\lambda$, con A el área accesible en el espacio de fases, igual a la unidad en el caso del mapa del gato.

⁷De acuerdo a la discusión previa, el paquete evolucionado tiene dispersión mínima en energía.

Conviene recordar aquí que la función coseno en el integrando de (3.29) minimiza a la dispersión en energía de la función de scar (véase capítulo anterior). Esto es, que la cantidad

$$\left\langle \phi_{scar} \left| \hat{H}^2 \right| \phi_{scar} \right\rangle = \sigma_E^2 \quad (3.30)$$

alcanza, al considerar el límite $T \rightarrow \infty$, el mínimo valor asintótico posible correspondiente a $\sigma_E \simeq \pi \hbar / T$. Ahora bien, teniendo en cuenta que T crece (logarítmicamente) con $\hbar$, puede concluirse que para cualquier tiempo fijo t se satisface (semiclásicamente)

$$\left\langle \phi_{scar} \left| \hat{U}^t \right| \phi_{scar} \right\rangle \simeq e^{-\sigma_E^2 t^2 / 2\hbar}.$$

En particular, para $t = 1$ se puede definir

$$\rho \equiv \left\langle \phi_{scar} \left| \hat{U}^{t=1} \right| \phi_{scar} \right\rangle,$$

una nueva cantidad asociada al tiempo de Ehrenfest, que en este caso tiende a 1 en el límite semiclásico.

El paso siguiente de la construcción consiste en trasladar la función de scar introducida anteriormente a un punto arbitrario (q_j, p_j) del toro, y luego periodizar en q y en p . La periodización en q se realiza mediante una suma de funciones trasladadas en esta dirección, y la periodización en p , simplemente restringiendo los valores posibles que puede tomar la variable q a un número discreto. Concretamente, la forma definitiva que adopta la función de scar en la vecindad del punto (q_j, p_j) es

$$\phi^{(q_j, p_j)}(q_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{ip_j(q_k - q_j - l)/\hbar} \phi_{scar}(q_k - q_j - l), \quad (3.31)$$

con $q_k = k/N$ para $k = 0, 1, \dots, N-1$. Tal como se mencionó en la sección anterior, el entero N da el tamaño del espacio de Hilbert, y se vincula con $\hbar$ a través de la relación $N = 1/2\pi\hbar$.

Una propiedad importante que atañe a la función introducida en (3.31), corresponde a su evolución vía el mapa cuántico $\hat{M} \equiv \hat{U}^{t=1}$. Dados dos puntos (q_j, p_j) y (q_{j+1}, p_{j+1}) del espacio de fases, conectados por el mapa clásico M , a nivel semiclásico se satisface la siguiente relación

$$\left\langle \phi^{(q_{j+1}, p_{j+1})} \left| \hat{M} \right| \phi^{(q_j, p_j)} \right\rangle \simeq \rho e^{i\alpha_j}, \quad (3.32)$$

donde

$$\alpha_j = S(q_{j+1}, q_j)/\hbar$$

corresponde a la acción clásica (por unidad de $\hbar$) para ir desde un punto hasta el otro.

En este punto, puede pasarse a la tercera y última etapa en la construcción de la función de scar en el toro, correspondiente a la asociación de esta a órbitas periódicas de período $n (> 1)$.

Dada una órbita descripta por las coordenadas $(q_0, p_0), (q_1, p_1), \dots, (q_{n-1}, p_{n-1})$, la correspondiente función de scar viene dada por la combinación lineal

$$\Phi(q_k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i\eta_j} \phi^{(q_j, p_j)}(q_k), \quad (3.33)$$

para $k = 0, 1, \dots, n-1$ (para una justificación de la fórmula precedente, véase apéndice E). Las fases η_j , a priori desconocidas, se introducen con el objeto de reproducir la condición que caracteriza a la función de scar, a saber:

$$\langle \Phi | \hat{M} | \Phi \rangle = \rho e^{i\beta}, \quad (3.34)$$

donde β , que así mismo es una fase a determinar, representa una energía de Bohr-Sommerfeld.

El significado de esta ecuación puede esclarecerse representando a la función de scar en la base de autoestados del gato,

$$|\Phi\rangle = \sum_{k=1}^N c_k |\mu_k\rangle.$$

En este caso, en el límite semiclásico los coeficientes c_k deben ser tales que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N |c_k|^2 &\simeq 1 \\ \sum_{k=1}^N |c_k|^2 e^{i(\alpha_k - \beta)} &\simeq \rho, \end{aligned} \quad (3.35)$$

lo que permite concluir que los estados que contribuyen a la función de scar Φ son aquellos con fases propias próximas a β , y dispersos respecto de esta en un ancho σ_E (véase ecuación (3.30)).

Reemplazando ahora (3.33) en (3.34) y haciendo uso de (3.32), se obtiene

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{-i\eta_{j+1}} e^{i\alpha_j} e^{i\eta_j} \simeq e^{i\beta},$$

de donde, teniendo en cuenta que la suma de n números complejos unimodulares es tal que

$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} e^{i\theta_j} \right| = n \iff \theta_j = \text{constante},$$

se desprende que las fases deben relacionarse de acuerdo a

$$-\eta_{j+1} + \alpha_j + \eta_j = \beta,$$

para todo $j = 0, 1, \dots, n-1$; o equivalentemente

$$\eta_j = \eta_{j+1} + \beta - \alpha_j.$$

Esta fórmula se puede emplear recursivamente, para obtener

$$\eta_0 = \eta_1 + \beta - \alpha_0 = \eta_2 + 2\beta - \alpha_0 - \alpha_1 = \dots = \eta_n + n\beta - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j.$$

Ahora bien, la condición de cuantización

$$\eta_n = \eta_0 \pmod{2\pi},$$

implica que

$$n\beta = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j + 2m\pi,$$

con $m = 0, \dots, n-1$. De donde, en definitiva, pueden obtenerse n valores de β independientes, de la forma

$$\beta^{(m)} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j + \frac{2\pi m}{n}, \quad (3.36)$$

cada uno de ellos asociado a un conjunto de fases relativas en la combinación lineal, dadas por la relación de recurrencia

$$\eta_{j+1}^{(m)} = \eta_j^{(m)} + \alpha_j - \beta^{(m)}.$$

Dado que la función de scar está definida a menos de una fase global, sin pérdida de generalidad se puede imponer $\eta_0^{(m)} = 0$, con lo que el m -ésimo conjunto de fases relativas asociado a $\beta^{(m)}$ quedará prescripto por las n ecuaciones

$$\begin{aligned} \eta_1^{(m)} &= \alpha_0 - \beta^{(m)} \\ \eta_2^{(m)} &= \alpha_0 + \alpha_1 - 2\beta^{(m)} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\eta_n^{(m)} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j - n\beta^{(m)} = 0 \pmod{2\pi}. \quad (3.37)$$

La conclusión es que, en lugar de una, se obtienen n funciones de scar equiespaciadas en el espectro de fases.

En lo que sigue, se incorporará la dinámica a nivel semiclásico. Para ello habrá primero que calcular la acción del Hamiltoniano del mapa del gato (ecuación (3.24)) sobre la función de scar. En representación de coordenadas, esto corresponde a escribir

$$h\phi_{scar}(q) \equiv \left\langle q \left| \hat{H}/\hbar \right| \phi_{scar} \right\rangle = \frac{\lambda}{2\sqrt{3}\hbar} \left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dq^2} - 3q^2 \right) \phi_{scar}(q),$$

que aplicado a (3.29) conduce a

$$\begin{aligned} h\phi_{scar}(q) &= \lambda \kappa \left[\frac{\hbar^3}{\pi\sqrt{3}} \right]^{1/4} \int_0^{T/2} dt \cos \left(\frac{\pi t}{T} \right) \\ &\times \exp \left[-\frac{\sqrt{3}}{\cosh(2\lambda t)} \frac{q^2}{2\hbar} \right] \frac{a(t) \cos[\theta(t)] + b(t) \sin[\theta(t)]}{[\cosh(2\lambda t)]^{1/4}}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

con

$$a(t) = \frac{\sqrt{3}}{\hbar \cosh(2\lambda t)} + \frac{3q^2}{\hbar^2} \{ [\operatorname{sech}(2\lambda t)]^2 - [\tanh(2\lambda t)]^2 - 1 \}$$

y

$$b(t) = \frac{\sqrt{3} \tanh(2\lambda t)}{\hbar} \left\{ 1 - \frac{2\sqrt{3}q^2}{\hbar \cosh(2\lambda t)} \right\}.$$

Al igual que se hizo con la función de scar, el paso siguiente consiste en trasladar la $h\phi_{scar}$ a un punto arbitrario (q_j, p_j) del espacio de fases, y en periodizar en q y en p , de modo de obtener

$$h\phi^{(q_j, p_j)}(q_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i\hbar(q_k - q_j + l)} h\phi_{scar}(q_k - q_j + l), \quad (3.39)$$

con $q_k = k/N$ para $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Por último, se define la acción del operador Hamiltoniano sobre las funciones de scar asociadas a órbitas de período n (descriptas en la ecuación (3.33)) como sigue

$$h\Phi(q_k) \equiv \left\langle q_k \left| \frac{\hat{H}}{\hbar} + \beta \hat{\text{Id}} \right| \Phi \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i\phi_j} h\phi^{(q_j, p_j)}(q_k), \quad (3.40)$$

con β (la energía de Bohr-Sommerfeld de la función de scar) y ϕ_j definidos en (3.36) y (3.37) respectivamente.

Antes de discutir las aproximaciones involucradas en (3.40), se introducirán los primeros momentos del operador utilizado,

$$M_0 \equiv \langle \Phi | \Phi \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(q_k)^* \Phi(q_k),$$

$$M_1 \equiv \left\langle \Phi \left| \frac{\hat{H}}{\hbar} + \beta \hat{\text{Id}} \right| \Phi \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(q_k)^* h \Phi(q_k),$$

y

$$M_2 \equiv \left\langle \left(\frac{\hat{H}}{\hbar} + \beta \hat{\text{Id}} \right) \Phi \left| \left(\frac{\hat{H}}{\hbar} + \beta \hat{\text{Id}} \right) \Phi \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h \Phi(q_k)^* h \Phi(q_k).$$

A partir de estos momentos, la dispersión en el espectro de fases puede escribirse como

$$\sigma_{\hat{H}/\hbar} = \sqrt{\frac{M_2}{M_0} - \left(\frac{M_1}{M_0} \right)^2}. \quad (3.41)$$

Con estas expresiones, puede regresarse a la ecuación (3.35), que expresa a Φ en la base de autoestados del gato, para obtener

$$\sum_{k=1}^N |c_k|^2 = M_0 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$$

$$\sum_{\mu=1}^N |c_k|^2 (\alpha_k - \beta)_{\min} = M_1 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

donde $(\alpha_k - \beta)_{\min}$ representa el menor valor que toma esta cantidad módulo 2π (en valor absoluto).

En último término, puede establecerse que los coeficientes c_k son cantidades no despreciables sólo cuando se satisface la relación

$$|\alpha_k - \beta| \lesssim \sigma_{\hat{H}/\hbar}.$$

Ahora sí, se procederá a la explicación de la primera de las aproximaciones semiclásicas utilizadas. Se asumirá que una descripción hamiltoniana en el mapa del gato es razonable siempre y cuando $\sigma_{\hat{H}/\hbar}$ sea mucho menor que π . De esta manera, la acción del Hamiltoniano no se verá afectada por la naturaleza periódica del espectro de fases. Puesto que $\sigma_{\hat{H}/\hbar}$ (que tiene un comportamiento similar a σ_E) tiende a cero en el límite semiclásico, se puede afirmar que el operador $\hat{H}/\hbar$ introducido tiene un carácter semiclásico.

La restante aproximación involucrada tiene que ver con el carácter local que posee el Hamiltoniano del sistema. Esta aproximación opera también en flujos, y fue ya descrita en el capítulo anterior. Teniendo en cuenta que bajo esas circunstancias el Hamiltoniano deja de ser hermítico, se le restituirá su hermiticidad a continuación simetrizando los elementos de matriz entre funciones de scar. Concretamente, dadas Φ y Φ' dos funciones de scar con fases de Bohr-Sommerfeld β y β' respectivamente, se definirá el elemento de matriz del Hamiltoniano como sigue

$$\left\langle \Phi \left| \frac{\hat{H}}{\hbar} + \frac{\beta + \beta'}{2} \hat{\text{Id}} \right| \Phi' \right\rangle \equiv \frac{1}{2} \left(\left\langle \Phi \left| \frac{\hat{H}}{\hbar} + \beta \hat{\text{Id}} \right| \Phi' \right\rangle + \left\langle \Phi' \left| \frac{\hat{H}}{\hbar} + \beta' \hat{\text{Id}} \right| \Phi \right\rangle \right).$$

3.6. Cálculo semiclásico de elementos de matriz

Una de las grandes ventajas que posee el formalismo Hamiltoniano presentado en secciones anteriores, corresponde a la posibilidad de calcular semiclásicamente elementos de matriz entre estados de scar en términos de un número reducido de invariantes clásicos. Las áreas homoclínicas, por una parte, son necesarias en el cálculo de elementos diagonales, en tanto que las heteroclínicas intervienen en los elementos de matriz no diagonales. En esta sección se expondrá en detalle este último tipo de cálculo, esto es, el que corresponde a elementos de matriz entre estados de scar ubicados en dos puntos fijos diferentes del mapa presentado en la sección 3.2.3. El procedimiento involucrado en el caso diagonal es completamente equivalente.

Los dos puntos fijos del mapa sin perturbar corresponden, como ya se ha mencionado anteriormente, a los puntos de coordenadas $q = p = 0$ y $q = p = 1/2$ (representados en la figura 3.8 por los puntos a y b , respectivamente). Ahora bien, para poder emplear las expansiones en potencias de $\hbar$ derivadas en la sección 2.4, debe establecerse una correlación entre los cruces heteroclínicos del modelo empleado en el capítulo anterior (representados en la figura 2.3 por los puntos de coordenadas $(q_0, 0)$ y $(0, p_0)$, respectivamente), y los correspondientes cruces del gato de Hannay Berry (puntos c_1 y c_2 de la figura 3.8, respectivamente). En la medida en que exista una transformación simpléctica que permita pasar de un sistema clásico al otro, habrá asociada una transformación unitaria que establezca la equivalencia entre ambos desde el punto de vista cuántico [20], que en definitiva deberá verse reflejada en los elementos de matriz entre sus funciones de onda. Tal transformación viene representada por los vectores inestable y estable ξ_u y ξ_s (ecuación (3.25)), y matricialmente corresponde a escribir

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3^{-1/4} & -3^{-1/4} \\ 3^{1/4} & 3^{1/4} \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

precisamente la matriz B asociada al cambio de base que fuera introducida en la sección 3.2.1.

Teniendo en cuenta que los cruces heteroclínicos en el mapa del gato se asocian a los vectores de componentes $q_1 = 0.394338$, $p_1 = 0.683013$ (que va de a a c_1), y $q_2 = 0.105662$, $p_2 = -0.183013$ (que va de a a c_2), para vincular al primero de ellos con el punto $(q_0, 0)$ del mapa diagonal, habrá que escribir

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ p_1 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} q_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

de donde se deduce que para que ambos sistemas sean clásicamente equivalentes debe valer $q_0 = 0.733945$. Si ahora se reescribe al vector asociado al cruce heteroclínico c_1 , pero con origen en el punto fijo b , mediante el mismo procedimiento podrá obtenerse el valor de p_0 . Esto es,

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ p_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 0 \\ p_0 \end{bmatrix},$$

que arroja el resultado $p_0 = 0.196660$. Estos valores deberán insertarse en las fórmulas (2.73) y (2.84) a la hora de predecir teóricamente los elementos de matriz entre funciones de scar asociadas a los puntos fijos del mapa del gato, y de comparar tales estimaciones con los resultados numéricos que serán expuestos a continuación.

De ahora en más, se considerarán las funciones $\Phi(q_k)$ y $\Phi'(q_k)$ situadas en los puntos a y b de la figura 3.8, respectivamente. De acuerdo a (3.33), estas adoptan la forma

$$\Phi(q_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi_{scar}(q_k - l),$$

y

$$\Phi'(q_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i(q_k - 1/2 - l)/2h} \phi_{scar}(q_k - 1/2 - l),$$

y tienen asociadas las fases de Bohr-Sommerfeld $\beta = 0$ y $\beta' = N\pi/2 \pmod{2\pi}$ (véase apéndice D para una explicación detallada sobre este punto). Por su parte, $\phi_{scar}(q)$ se calcula numéricamente a partir de (3.29) en los valores de la coordenada q que corresponda, para lo cual se adopta como límite de integración $T/2 = \ln(2\pi N)/\lambda$ (lo que corresponde a tomar $A = 1$). Por su parte, las funciones $h\Phi(q_k)$ y $h\Phi'(q_k)$ se calculan también numéricamente mediante (3.38) y (3.39). Una vez hecho esto, las determinaciones numéricas se incorporan en las expansiones de los elementos de matriz, que se obtienen computando

$$\langle \Phi | \Phi' \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^*(q_k) \Phi'(q_k),$$

$$\left\langle \Phi \left| \frac{\hat{H}}{\hbar} + \frac{\beta + \beta'}{2} \hat{\text{Id}} \right| \Phi' \right\rangle = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\Phi^*(q_k) h\Phi'(q_k) + h\Phi^*(q_k) \Phi'(q_k) \right],$$

y

$$\left\langle \Phi \left| \left(\frac{\hat{H}}{\hbar} + \beta \hat{\text{Id}} \right) \left(\frac{\hat{H}}{\hbar} + \beta' \hat{\text{Id}} \right) \right| \Phi' \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h\Phi^*(q_k) h\Phi'(q_k).$$

Estas cantidades se evalúan para todo N en el rango $4 \leq N \leq 816$, observándose que: (i) para todo $N \neq 0 \pmod{4}$ cada una de ellas se anula, (ii) para $N = 0 \pmod{4}$ los resultados son reales⁸, y (iii) en todos los casos se aproximan asintóticamente a cero cuando N aumenta. En la figura 3.6 se grafica $\langle \Phi | \Phi' \rangle$ multiplicado por el factor $\sqrt{N} \ln^2(N)$ como función de N para $N = 0 \pmod{4}$. A partir de este gráfico, puede afirmarse que esta función está dominada por una oscilación de amplitud aproximadamente constante. Los dos elementos de matriz que le siguen exhiben exactamente el mismo comportamiento al multiplicar las respectivas determinaciones numéricas por $\sqrt{N} \ln^2(N)$, motivo por el cual se omitirá la exposición de los gráficos correspondientes, centrando toda la atención en el overlap.

⁸Salvo en el caso de $\left\langle \Phi \left| \frac{\hat{H}}{\hbar} + \frac{\beta + \beta'}{2} \hat{\text{Id}} \right| \Phi' \right\rangle$, en que son puramente imaginarios.

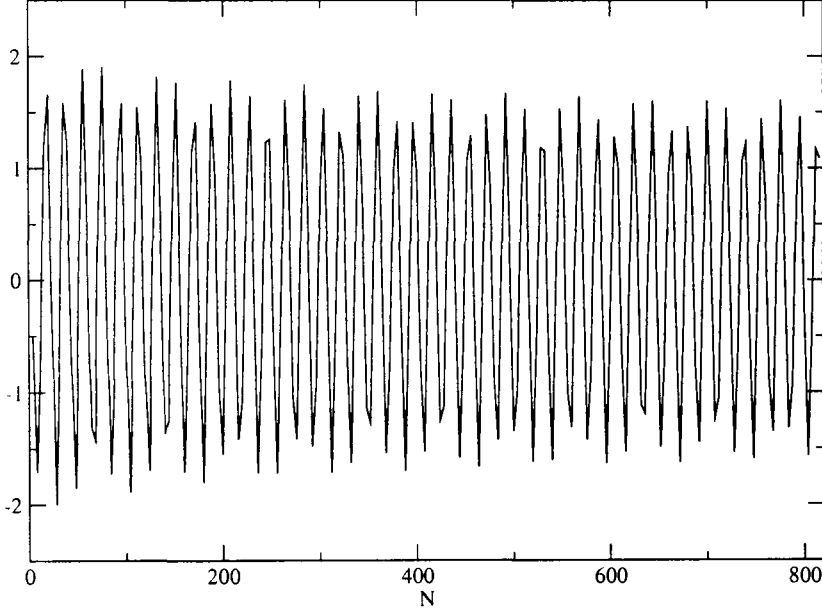


Figura 3.6: Overlap entre funciones de scar centradas en los puntos fijos del mapa del gato, multiplicado por el factor $\sqrt{N} \ln^2(N)$.

Para analizar el comportamiento oscilatorio observado en la figura 3.6, se efectúa una transformada de Fourier como sigue

$$F(s) = \sum_N \langle \Phi | \Phi' \rangle_N \sqrt{N} \ln^2(N) e^{i2\pi N s},$$

en donde, puesto que $N = 1/2\pi\hbar$, la variable conjugada s tiene unidades de acción y varía en el rango $0 \leq s < 1$. La figura 3.7 muestra un gráfico de $F(s)$, en el cual se pueden apreciar ocho picos principales y ocho secundarios. De acuerdo al análisis semiclásico descrito sobre el final del capítulo anterior, y que concluye con la derivación de las fórmulas (2.73) y (2.84), cada uno de estos picos corresponde a un cruce heteroclínico, cuya ubicación en el espectro se discutirá a continuación.

Llamando α_1 a la acción clásica (medida en unidades de $\hbar$) entre los dos puntos fijos, en el sentido del flujo y por el camino que pasa por el punto heteroclínico c_1 , y α_2 a la correspondiente al camino que pasa por c_2 , a partir de la figura 3.8 es posible deducir que

$$\alpha_1 = A_1 - A_2 = \frac{A_1 - A_3}{2} + \frac{A_1 - 2A_2 + A_3}{2} = 1/8 + A_h/2,$$

y

$$-\alpha_2 = -A_2 + A_3 = -\frac{A_1 - A_3}{2} + \frac{A_1 - 2A_2 + A_3}{2} = -1/8 + A_h/2.$$

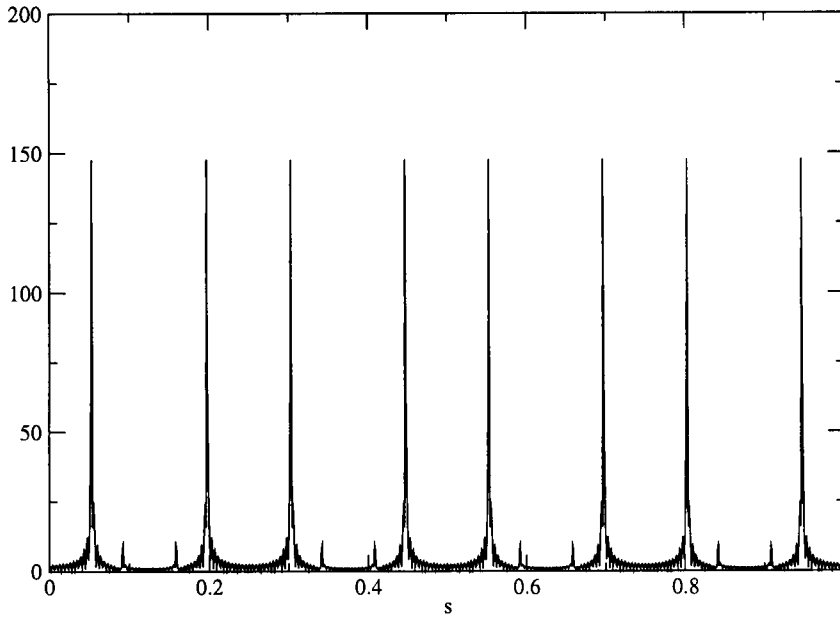


Figura 3.7: Transformada de Fourier del overlap entre funciones de scar centradas en los puntos fijos del mapa del gato de Berry.

Estos resultados predicen un par de frecuencias en las posiciones $\alpha_1 = 0.1972$ y $\alpha_2 = 0.0528$, que en el espectro vienen representadas por el segundo y el primer pico, respectivamente. Este patrón de frecuencias, desplazadas en $\pm A_h/2 = 0.0722$ respecto de $s = 1/8$, se repite tres veces más por efecto de la periodización. Las diferentes contribuciones pueden obtenerse si se efectúan las correspondientes traslaciones de la función de scar centrada en el origen. Para ejemplificar, se considerará el ángulo superior izquierdo, y se adaptará a los nuevos cruces el esquema utilizado anteriormente (figura 3.9).

En este caso, las correspondientes acciones valen

$$\alpha_1 = 1/2 - A_2 + A_3 = 1/2 - \frac{A_1 - A_3}{2} + \frac{A_1 - 2A_2 + A_3}{2} = 3/8 + A_h/2,$$

y

$$-\alpha_2 = -1/2 + A_1 - A_2 = -1/2 + \frac{A_1 - A_3}{2} + \frac{A_1 - 2A_2 + A_3}{2} = -3/8 + A_h/2,$$

y se corresponden con el segundo par de picos principales, desplazados en $A_h/2$ respecto de $s = 3/8$.

Procediendo del mismo modo para las otras dos posibles traslaciones del punto fijo a (esquematizadas en la figura 3.5) se obtienen los cuatro picos restantes, ubicados en $5/8 \pm A_h/2$ y en $7/8 \pm A_h/2$, respectivamente.

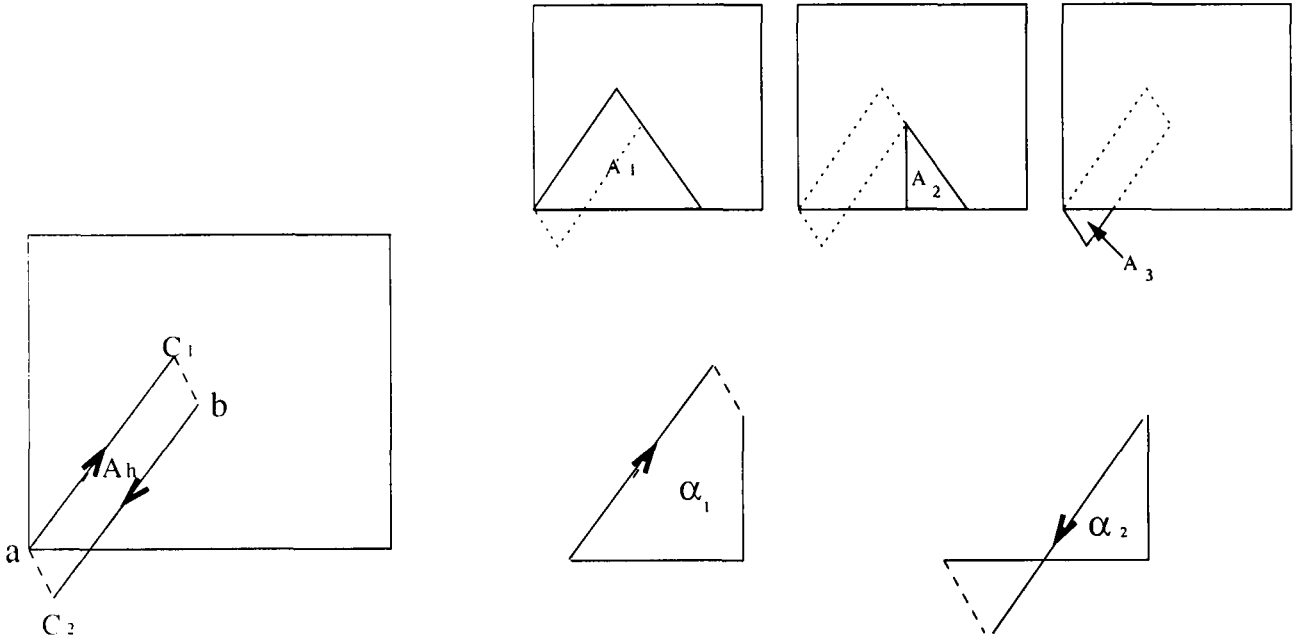


Figura 3.8: Áreas y cruces heteroclínicos. En la parte superior, las semiáreas utilizadas para calcular las acciones α_1 y α_2 . $A_h = A_1 - 2A_2 + A_3$.

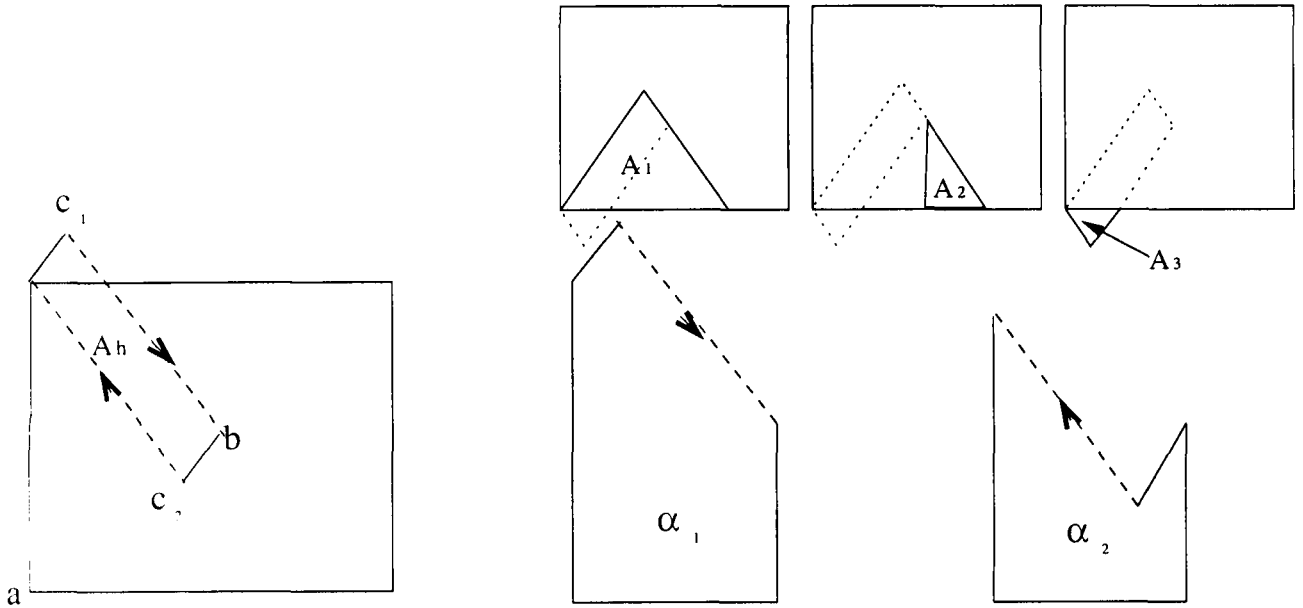


Figura 3.9: Ejemplo de cruces y áreas heteroclínicos inducidos por la periodicidad del mapa. $A_h = A_1 - 2A_2 + A_3$.

Estos resultados permiten explicar la primera observación realizada anteriormente, a saber, que los elementos de matriz son no nulos únicamente para $N = 0 \pmod{4}$. Para ello debe apelarse a la fórmulas (2.71) y (2.72) deducidas en el capítulo anterior. De acuerdo a estas, los cruces heteroclínicos en c_1 y en c_2 aportarán respectivamente las contribuciones

$$\langle a|b\rangle_{c_1} = e^{i\alpha_1} \sqrt{2\pi\hbar} \sum_{n=0} (-1)^n \hbar^{2n} \left[\frac{\phi^{(2n)}(q_0)\phi^{(2n)}(p_0)}{(2n)!} - i\hbar \frac{\phi^{(2n+1)}(q_0)\phi^{(2n+1)}(p_0)}{(2n+1)!} \right] \quad (3.43)$$

y

$$\langle a|b\rangle_{c_2} = e^{i\alpha_2} \sqrt{2\pi\hbar} \sum_{n=0} (-1)^n \hbar^{2n} \left[\frac{\phi^{(2n)}(q_0)\phi^{(2n)}(p_0)}{(2n)!} + i\hbar \frac{\phi^{(2n+1)}(q_0)\phi^{(2n+1)}(p_0)}{(2n+1)!} \right],$$

que sumadas arrojan el resultado

$$\begin{aligned} \langle a|b\rangle_{c_1} + \langle a|b\rangle_{c_2} &= e^{iN2\pi s_j} 2\sqrt{2\pi\hbar} \left\{ \cos(A_h\pi N) \sum_{n=0} (-1)^n \hbar^{2n} \frac{\phi^{(2n)}(q_0)\phi^{(2n)}(p_0)}{(2n)!} \right. \\ &\quad \left. + \hbar \sin(A_h\pi N) \sum_{n=0} (-1)^n \hbar^{2n} \frac{\phi^{(2n+1)}(q_0)\phi^{(2n+1)}(p_0)}{(2n+1)!} \right\}, \end{aligned}$$

con $s_1 = 1/8$ para el primer par de picos, $s_2 = 3/8$ para el segundo, $s_3 = 5/8$ para el tercero, y $s_4 = 7/8$ para el cuarto. De este modo, las contribuciones provenientes de las cuatro traslaciones del punto fijo a difieren únicamente en los factores e^{is_j} , de cuya suma se obtiene

$$e^{iN\pi/4} + e^{i3N\pi/4} + e^{i5N\pi/4} + e^{i7N\pi/4} = 2 \{ \cos(N\pi/4) + \cos(3N\pi/4) \},$$

una cantidad que vale $4(-1)^{N/4}$ toda vez que N sea múltiplo de 4 y cero en cualquier otro caso. Teniendo en cuenta únicamente estos ocho cruces heteroclínicos, la predicción teórica del overlap estaría dada entonces por la fórmula

$$\langle \Phi|\Phi'\rangle = \begin{cases} F_N(q_0, p_0) & N = 0 \pmod{4} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (3.44)$$

con

$$\begin{aligned} F_N(q_0, p_0) &= 8(-1)^{N/4} \sqrt{2\pi\hbar} \left\{ \cos(A_h\pi N) \sum_{n=0} (-1)^n \hbar^{2n} \frac{\phi^{(2n)}(q_0)\phi^{(2n)}(p_0)}{(2n)!} \right. \\ &\quad \left. + \hbar \sin(A_h\pi N) \sum_{n=0} (-1)^n \hbar^{2n} \frac{\phi^{(2n+1)}(q_0)\phi^{(2n+1)}(p_0)}{(2n+1)!} \right\}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Antes de estudiar las discrepancias entre esta fórmula y los resultados numéricos del overlap expuestos en la figura 3.6, se completará el análisis de su transformada de Fourier. Como ya se ha mencionado, en la figura 3.7 se aprecian, además de los ocho picos

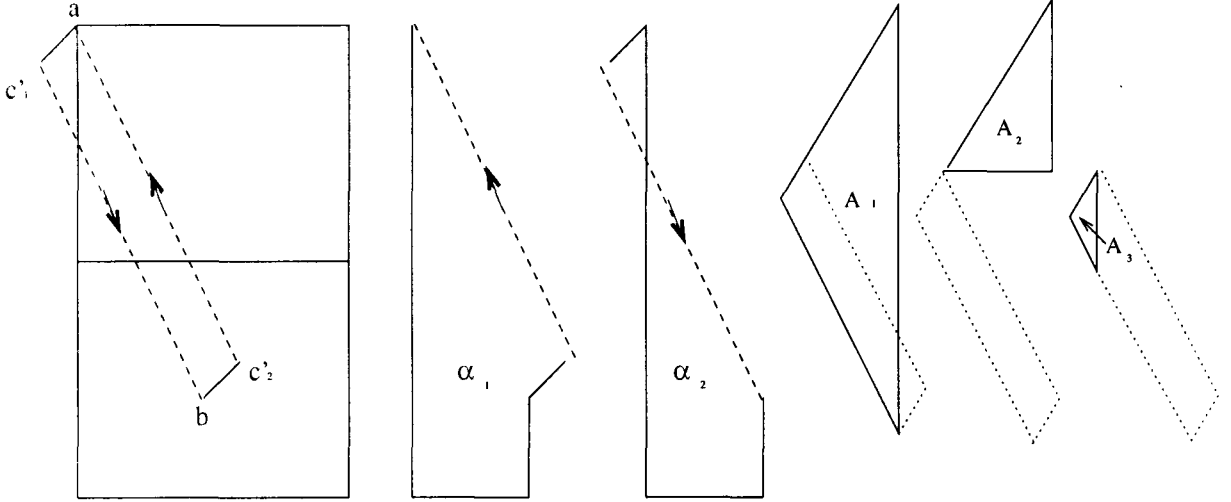


Figura 3.10: Cruces y áreas heteroclínicas asociados al cuarto y séptimo pico secundario del espectro del overlap.

ya discutidos, ocho picos de menor tamaño. Estos últimos están relacionados con cruces heteroclínicos asociados a traslaciones más alejadas del punto fijo a . Considérese la figura 3.10, en la que se representan los cruces entre las variedades del punto fijo b y los correspondientes al punto fijo a trasladado dos unidades en la dirección p .

Con un área heteroclínica que en este caso triplica el valor del área principal ($A_h = 0.43301\hbar$), de la figura 3.10 se puede deducir que estos cruces estarán asociados a las acciones clásicas

$$-\alpha_1 = -1 + A_2 - A_3 = -1 + \frac{A_1 - A_3}{2} - \frac{A_1 - 2A_2 + A_3}{2} = -5/8 + A_h/2,$$

y

$$\alpha_2 = 1 - A_1 + A_2 = 1 - \frac{A_1 - A_3}{2} - \frac{A_1 - 2A_2 + A_3}{2} = 5/8 + A_h/2,$$

que en el espectro están representadas por el cuarto ($s = 0.4085$) y el séptimo ($s = 0.8415$) picos secundarios, respectivamente. Al igual que antes, para obtener las posiciones restantes se debe proceder trasladando el punto fijo a a las ubicaciones del espacio de fases que inducen áreas heteroclínicas equivalentes (figura 3.11).

Cualitativamente, el resultado que se observa es exactamente el mismo que antes, esto es, existen contribuciones únicamente para N múltiplo de 4. Sin embargo, como la geometría del paralelogramo subtendido por las variedades de a y b es diferente de la que tiene lugar al considerar los primeros cruces heteroclínicos, esta vez difieren las coordenadas q_0 y p_0 provenientes de la transformación (3.42)⁹. De este modo, no sólo las frecuencias de

⁹Recuérdese que el punto c'_1 es, lo mismo que c_1 , el equivalente simpléctico de $(q_0, 0)$, mientras que c_2

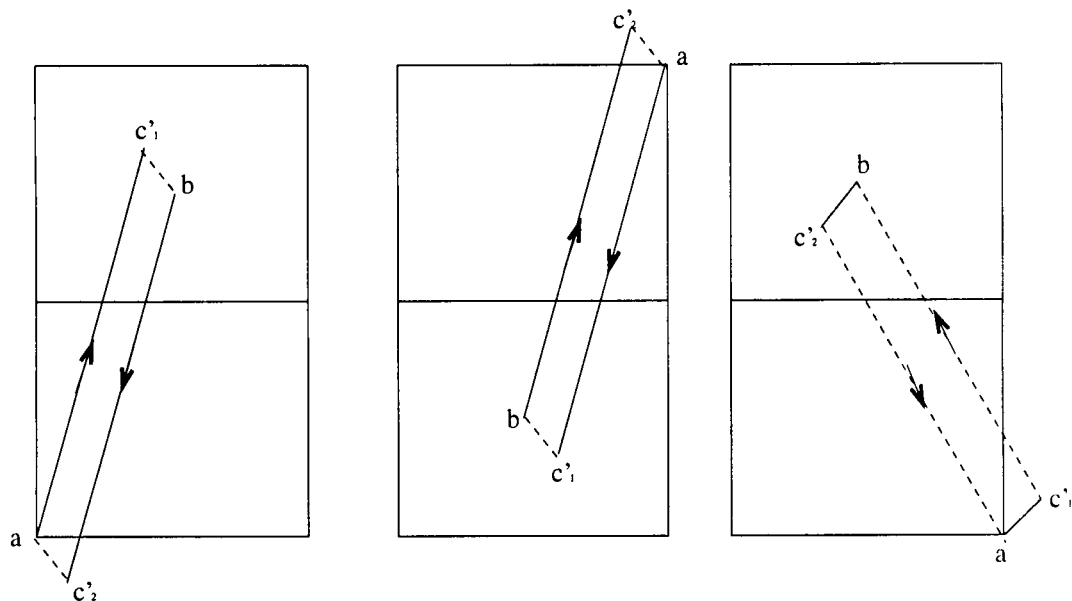


Figura 3.11: Cruces y áreas heteroclínicos de segundo orden.

oscilación deben ser distintas, sino también los términos de la serie (3.45), al evaluar F_N en las coordenadas q_0 y p_0 asociadas a c'_1 y c'_2 .

Una vez comprendida la estructura general del espectro del overlap entre funciones de scar centradas en los puntos fijos, se estudiarán las contribuciones de los sucesivos cruces heteroclínicos. El esquema que se utilizará es el siguiente: en primer lugar, se calculará la transformada de Fourier como ya se hizo anteriormente. A posteriori, se le sustraerán al overlap las oscilaciones provenientes de las ocho frecuencias principales. Obtenidas las frecuencias secundarias a partir de una nueva transformada de Fourier, se repetirá el procedimiento de sustracción empleando las oscilaciones correspondientes a estas, para obtener las frecuencias asociadas a los cruces siguientes. Y así siguiendo. En la figura 3.12 se exhiben las sucesivas transformadas en la región que comprende al primer pico principal.

Como puede advertirse en la figura 3.12, próximo al pico principal ($s_1 = 0.0528$), se localiza un pico secundario ($s_2 = 0.0918$). Los picos más lejanos se ponen en evidencia en los sucesivos pasos de sustracción y reconstrucción del espectro. En la figura 3.13 se esquematizan los diversos cruces correspondientes a proyecciones del punto fijo b ¹⁰, que dan lugar a los diferentes picos de la jerarquía establecida en las curvas de la figura 3.12. Pueden distinguirse: el primer cruce (x_1) correspondiente al pico principal, cuya manifestación en

y c'_2 lo son de $(0, p_0)$. En este caso, los valores de las coordenadas en el toro extendido por periodicidad son $(q'_1, p'_1) = (-0.183013, 1.683010)$ para c'_1 y $(q'_2, p'_2) = (0.683013, 0.816987)$ para c'_2 . Conociendo estos valores, se procede como se ha explicado al comienzo de esta sección, y se obtienen las correspondientes coordenadas asociadas $(q_0, p_0) = (-0.340625, 1.271230)$.

¹⁰Dado que se está trabajando sin perturbación ($k = 0$), las traslaciones de uno u otro punto son intercambiables, y en consecuencia se obtienen la mismas acciones y las mismas áreas heteroclínicas al hacer el análisis trasladando a uno u otro punto.

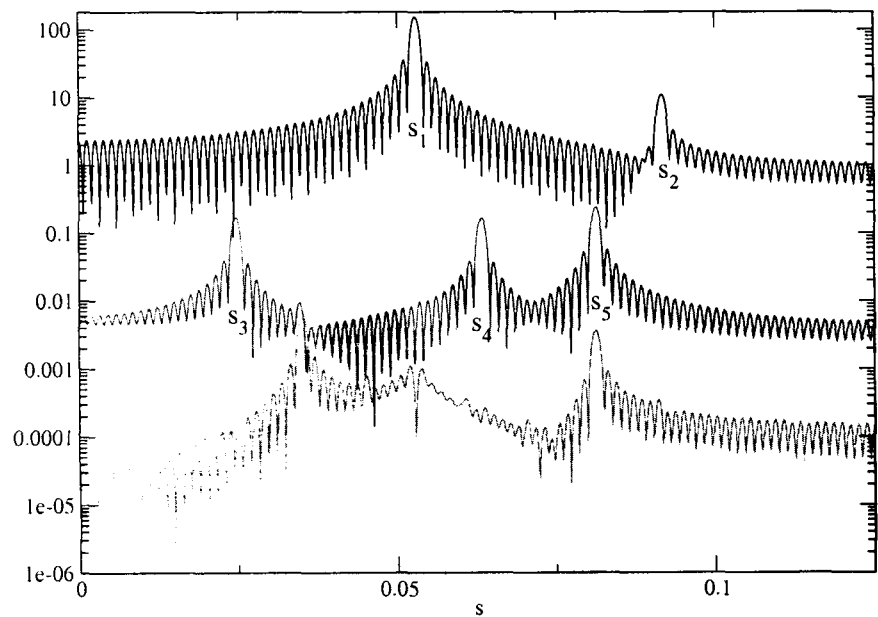


Figura 3.12: En escala logarítmica, la jerarquía picos asociados a los cruces heteroclínicos.

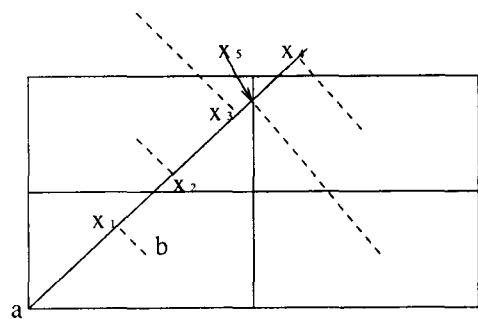


Figura 3.13: Esquema de la jerarquía de cruces heteroclínicos que generan las diferentes contribuciones al espectro del overlap.

el espectro se aprecia únicamente en la transformada de Fourier original; el segundo cruce (x_2), que se asocia a una amplitud espectral un orden de magnitud por debajo de aquel; y luego los tres cruces subsiguientes (x_3, x_4 y x_5), correspondientes a las frecuencias s_3, s_4 y s_5 , con amplitudes dos órdenes de magnitud inferiores a la del principal, que pueden verse con claridad recién en la segunda curva (segundo paso de sustracción y reconstrucción del espectro).

En relación al estudio de las amplitudes de oscilación obtenidas numéricamente, estas se

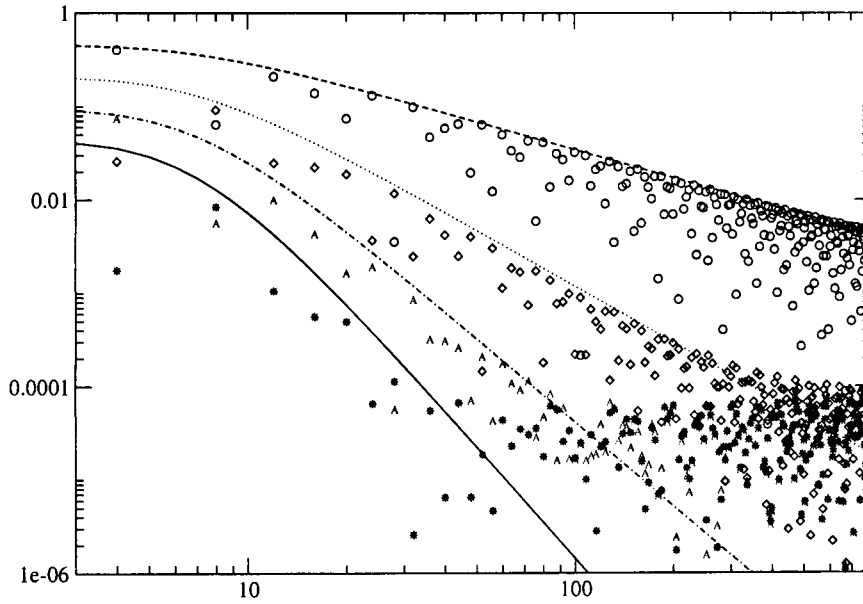


Figura 3.14: Error relativo de la amplitud del overlap.

contrastarán con los resultados teóricos deducidos en el capítulo anterior y adaptados aquí al caso del mapa del gato (fórmula (3.44)). Concretamente, se analizará el error relativo entre ambas cantidades como función del parámetro N (y por consiguiente de $\hbar$). En la figura 3.14 se grafica este error para los distintos órdenes de aproximación (potencias de $\hbar$ en la fórmula (2.73)). El procedimiento aquí involucrado consiste en extraer del overlap numérico todas las oscilaciones, con excepción de la correspondiente al pico principal, y en graficar para esta última el error relativo

$$\mathcal{E} = \left| \frac{\langle \Phi | \Phi' \rangle_{Num} - \langle \Phi | \Phi' \rangle_{Teo}}{F(N)} \right|,$$

en el rango $4 \leq N \leq 816$, y únicamente para los N múltiplos de 4. Cada curva introduce un término más en la expansión (3.43), correspondiente al cruce c_1 de la figura 3.8. Las curvas sólidas representan ajustes empíricos de las envolventes, dados por las funciones

$$g_n(x) = \left[\frac{\tanh(2.2/x)}{2.2} \right]^n$$

(donde n es el orden en $\hbar$ incluido en la aproximación, y x corresponde a la variable N en el continuo multiplicada por el factor $2A$). Este error, que como puede apreciarse en la

figura converge a un valor de 10^{-6} al introducir el cuarto término en la expansión, puede acotarse en el límite asintótico a través de la fórmula

$$\mathcal{E} < \left[\frac{\tanh(2.2\pi\hbar/A)}{2.2} \right]^{n+1}.$$

Capítulo 4

Conclusiones

A lo largo de la primera parte de esta Tesis, se han estudiado las propiedades asintóticas de las funciones de scar sobre una sección de Poincaré; esto es, de funciones de onda con estructura hiperbólica definidas sobre una región finita del plano $q-p$. A partir de estas, se ha logrado luego obtener estimaciones asintóticas para los overlaps y elementos de matriz de un Hamiltoniano hiperbólico, centrando para ello a las funciones en diferentes puntos del espacio de fases. En base a ello, pueden enunciarse dos conclusiones importantes: la primera tiene que ver con la dependencia de estos elementos de matriz con el área heteroclínica definida por las variedades de los punto fijos donde se centran las funciones de scar, que se manifiesta a través de la regla de cuantización de tipo Bohr-Sommerfeld encontrada en el capítulo 2 (ecuación (2.52)); la segunda de estas conclusiones, por su parte, corresponde a la cuasiortogonalidad de tales funciones reflejada en la ecuación (2.56). Aquí, aún en el peor de los casos correspondiente a tomar $A \sim \hbar$, sigue siendo cierto que el overlap cae asintóticamente al menos a orden T^{-1} , con $T = |\ln \hbar|$ el denominado tiempo de Ehrenfest. Por lo demás, en todas las derivaciones involucradas se ha asumido que $A > \hbar$, que es el caso si sólo se consideran órbitas cortas (de períodos inferiores al tiempo de Ehrenfest).

Paralelamente, a partir de la ecuación (2.62) puede observarse que el producto del elemento de un matriz típico por la densidad de estados energéticos (de orden $\hbar^{-2}$ para sistemas con dos grados de libertad) diverge en el límite semiclásico. Este hecho implica que las funciones de scar no sólo conforman una base ortogonal en el límite semiclásico, sino que además es esta una base que no puede ser conectada por medio de teoría de perturbaciones con la base de autoestados del Hamiltoniano. Esta conclusión es central a la hora de describir semiclásicamente autofunciones caóticas en términos de órbitas de período corto, como puede apreciarse en [36], donde se emplea la base de funciones de scar para construir una “onda aleatoria” en el marco de un modelo estadístico.

La dependencia de los elementos de matriz con el área heteroclínica exhibe dos características fundamentales. En primer lugar, tanto para los overlaps como para los elementos de matriz propiamente dichos se aprecia una dependencia del tipo $1/\sqrt{A}$, que indica que el parámetro A define un primer ordenamiento respecto a las interacciones entre órbitas periódicas. El otro aspecto destacable corresponde a la regla de cuantización ya mencionada, que establece que los overlaps se anulan para valores de $A = 2\pi\hbar(n+1/2)$ (nodos), en tanto

que los elementos de matriz del Hamiltoniano alcanzan sus valores máximos (antinodos). Más aún, el hecho de que los elementos de matriz del Hamiltoniano sean proporcionales a $\sin(A/2\hbar)$, implica que cada elemento de matriz no diagonal depende de una manera muy sensible del valor particular de la correspondiente área heteroclínica, lo que se traduce en una pérdida de correlación entre distintos elementos de matriz.

En el apéndice B se analizan las contribuciones a los elementos de matriz provenientes de la dinámica en la dirección transversal a la superficie de sección para dos funciones de scar con la misma energía media. Las fórmulas correspondientes a la inclusión de todas las contribuciones involucradas toman la forma (en unidades arbitrarias):

$$\langle a|b\rangle \sim \frac{2\sqrt{\pi}e^{i\alpha_{a,b}}}{T\sqrt{A/2\hbar}} \cos\left(\frac{1}{2\hbar} \oint p dq\right) \exp\left[-\left(\frac{\Delta E}{2\sigma_T}\right)\right] N_{Ov} \quad (4.1)$$

y

$$\begin{aligned} \langle a|\hat{H}_{sys} - \bar{E}|b\rangle &\sim -\frac{\hbar\bar{\lambda}\pi^{3/2}e^{i\alpha_{a,b}}}{T^2\sqrt{A/2\hbar}} \sin\left(\frac{1}{2\hbar} \oint p dq\right) \frac{\{1 + \sin[(\pi/T) \ln(A/\hbar)]\}}{2} \\ &\times \exp\left[-\left(\frac{\Delta E}{2\sigma_T}\right)\right] N_H, \end{aligned} \quad (4.2)$$

para el overlap y el elemento de matriz del Hamiltoniano, respectivamente (con $T = \ln(S/\hbar)$). El área S es una generalización de la cantidad $Q \times P$ utilizada en la definición del espacio de fases de la sección 2.1 (figura 2.3), y corresponde a una estimación de la región transversal a las órbitas periódicas donde la construcción semiclásica de la función de scar funciona adecuadamente. Una forma razonable de definir S en términos de invariantes clásicos es tomando el mínimo (o el valor medio) de las áreas homoclínicas asociadas a las órbitas periódicas que intervienen en los cálculos.

Debe señalarse, así mismo, que la única referencia a la superficie de sección en las ecuaciones (4.1) y (4.2) está dada a través de las cantidades $\alpha_{a,b}$, por medio de la convención de fases elegida para las funciones de scar en los puntos a y b . De este modo, puede concluirse que estas expresiones son efectivamente invariantes canónicos.

Sobre el final del capítulo 2, se han deducido fórmulas para el overlap y el elemento de matriz del Hamiltoniano (ecuaciones (2.73) y (2.84)) convergentes asintóticamente a los verdaderos elementos de matriz, que tienen la ventaja de que permiten obtener un mejor nivel de aproximación para el caso en que las áreas heteroclínicas se acercan al valor $\hbar$. Estas series, consecuentemente, pueden ser contrastadas con resultados numéricos concernientes al sistema que se estudia en el capítulo siguiente.

En la sección 3.5 se ha implementado semiclásicamente el esquema de la representación integral de la función de scar al sistema del mapa del gato (utilizando una receta semiclásica para el operador evolución aplicado a un paquete gaussiano), y se han calculado numéricamente los overlaps y elementos de matriz del Hamiltoniano como función de $\hbar$ (para los valores permitidos de este parámetro de acuerdo a la condición $\hbar = 1/2\pi N$, con N entero). La vinculación entre ambos sistemas (el mapa del gato y el modelo genérico presentado en el capítulo 2), se ha establecido introduciendo una transformación simpléctica para pasar de una representación a la otra.

Para realizar el análisis de los elementos de matriz entre funciones de scar asociadas a órbitas de período 1, se han estudiado primeramente las oscilaciones del overlap mediante transformadas de Fourier, pudiendo observarse la aparición de ocho frecuencias principales en las posiciones correspondientes a los cruces heteroclínicos entre las variedades estables e inestables de los dos puntos fijos del mapa del gato ($q = p = 0$ y $q = p = 1/2$, respectivamente). Esta repetitividad de picos en el espectro, que es atribuida a la geometría toroidal del espacio de fases (traducida en la periodicidad de las funciones de onda en ambas direcciones (q y p)), ha podido ser explicada calculando las acciones en configuraciones periodizadas de los puntos fijos. Al observar los espectros de ambos elementos de matriz (overlap y elemento de matriz del Hamiltoniano) en escala lineal, ya puede observarse la presencia de contribuciones de menor peso que, en base al esquema general de periodización de los puntos fijos y mediante el cálculo de las correspondientes acciones, ha sido posible asimilar satisfactoriamente a cruces heteroclínicos subsiguientes (cruces entre las variedades de proyecciones más distantes de los puntos fijos que definen áreas heteroclínicas de mayor tamaño). Finalmente, se ha dilucidado una jerarquía de contribuciones en base a un procedimiento iterativo de transformaciones de Fourier y sustracciones de las oscilaciones, destinado a revelar la presencia de las frecuencias correspondientes a los cruces heteroclínicos sucesivos, que representa cabalmente los aspectos geométricos del sistema estudiado. Estos aspectos pueden comprenderse con más rigor mediante un cálculo formal de productos escalares entre funciones de onda en el toro, cuyo detalle puede seguirse en el apéndice E. Allí puede observarse que la proyección al toro, a los fines que implican de este tipo de cálculos, involucra tan sólo la traslación de una de las dos funciones de onda a todos los puntos definidos por la periodicidad, lo que da lugar a la infinidad de cruces heteroclínicos estructurados de la manera que se ha explicado anteriormente.

En última instancia, y con el propósito de establecer el grado de exactitud de las expansiones en potencias de $\hbar$ para los elementos de matriz, se han llevado a cabo comparaciones entre estos resultados teóricos (adaptados al mapa del gato) y los cálculos numéricos efectuados implementando las fórmulas semiclásicas obtenidas en la sección 3.6. Con este fin, se han graficado las discrepancias entre las respectivas amplitudes de oscilación. Se han eliminado todas las oscilaciones del overlap numérico con excepción de la correspondiente al pico principal de menor área heteroclínica, y se ha procedido a graficar el error relativo entre este y el valor teórico predicho por la fórmula (2.71) para los distintos órdenes de aproximación en el parámetro $\hbar$. En la figura 3.14 se exhibe esta discrepancia como función de N en el rango $4 < N < 816$, observándose que en este rango la misma decae de acuerdo con la expresión heurística

$$g_n(x) = \left[\frac{\tanh(2.2/x)}{2.2} \right]^n,$$

donde n corresponde al orden de aproximación en $\hbar$ incluido en la expansión teórica (2.71), y $x \equiv 2NA = A/\pi\hbar$.

Un resultado numérico que así mismo ha sido explicado a partir de las simetrías de las funciones de onda en el mapa del gato, corresponde al hecho de que el overlap es no nulo únicamente para $N = 0 \pmod{4}$, circunstancia que, de igual modo que todo lo referido

a las frecuencias de oscilación observadas al transformar Fourier, se repite al efectuar el análisis de los elementos de matriz del Hamiltoniano. Por este motivo, en el capítulo 3 se presentan únicamente los resultados correspondientes al overlap.

Como conclusión más significativa, debe señalarse que en este trabajo de Tesis doctoral se ha logrado comprobar que los elementos de matriz entre funciones de scar pueden evaluarse semiclásicamente utilizando un número reducido de órbitas homo y heteroclínicas. Cada una de estas órbitas, por otro lado, introduce una contribución al elemento de matriz caracterizada exclusivamente por invariantes canónicos.

En última instancia, debe destacarse que a partir de este trabajo surgen interrogantes que plantean posibles líneas para futuras investigaciones. En primer lugar, sería interesante utilizar una base de funciones de scar como punto de partida para la diagonalización del propagador del mapa del gato, en reemplazo de la base de posición empleada en la construcción de Hannay y Berry [31] que se reproduce en la sección 3.3. La ventaja de este procedimiento de diagonalización estaría dada por el hecho de que, en la base de funciones de scar, los autoestados del gato están concentrados en torno a la energía de Bohr-Sommerfeld en un ancho σ_E de orden $1/\ln N$. Esta circunstancia reduciría el tamaño de la matriz resultante, que de N (en la base de posición) pasaría a tener dimensión $N/\ln N$.

Paralelamente, todo el análisis semiclásico efectuado en relación a estos elementos de matriz podría extenderse al caso del mapa del gato perturbado. Aquí, el aspecto de mayor interés estribaría en establecer con claridad hasta qué punto los invariantes canónicos utilizados para caracterizar al sistema sin perturbar (áreas y cruces heteroclínicos), se adecúan de igual manera a la descripción del sistema modificado, o si, por el contrario, se hace preciso introducir nuevos invariantes asociados a las no linealidades que presentan las variedades en este caso. Finalmente, se podría trasladar la tecnología desarrollada en el capítulo 2 a casos más “realistas” de sistemas dinámicos, y proceder como se ha hecho con el mapa del gato emprendiendo el cálculo semiclásico de elementos de matriz. Un ejemplo muy atrayente tanto por su sencillez, la riqueza de sus propiedades dinámicas, y la vasta literatura que existe reunida, es el billar-estadio de Bunimovich. Los aspectos clásicos de este sistema se analizan con profundidad en [37]; con respecto a su mecánica cuántica, el lector podrá encontrar en [10] una implementación muy optimizada de la fórmula de trazas de Gutzwiller, y en [15] los primeros resultados concernientes a la construcción de funciones de scar.

Lista de publicaciones

A continuación se citan las publicaciones originadas en este trabajo de Tesis Doctoral:

1. *Asymptotic behaviour of matrix elements between scar functions*,
E. G. Vergini and D. Schneider, J. Math A: Math Gen. **38** (2005) 587-616.
2. *The short periodic approach for quantum cat maps*,
E. G. Vergini, D. Schneider and A. M. F. Rivas. En preparación.

Apéndice A

La aproximación del Hamiltoniano local.

En este apéndice se discutirá la construcción de la función de scar para un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad, y la validez de la aproximación de Hamiltoniano local utilizada para la evaluación de los elementos de matriz del Hamiltoniano.

Sea γ una órbita periódica inestable con período T e índice de Maslov μ , y sean x e y las coordenadas curvilíneas en el espacio de configuración en las direcciones paralela y perpendicular a γ , respectivamente. En lo sucesivo se utilizará la aproximación de movimiento sincronizado (o aproximación adiabática), en la que la dinámica rápida a lo largo de γ queda desacoplada de la dinámica lenta en la otra dirección. En esta aproximación, todas las órbitas en la vecindad de γ se mueven en el espacio de fases con los mismos valores de x y de p_x . Más aún, de acuerdo al teorema de Floquet, el movimiento transversal definido por las variables y y p_y se descompone en una parte periódica y otra hiperbólica. De este modo, el Hamiltoniano puede separarse del siguiente modo:

$$H_{sys}(x, p_x, y, p_y) \simeq H_{||}(x, p_x) + H_p(y, p_y, x) + H_h(y, p_y, x), \quad (\text{A.1})$$

donde la variable x en H_p y H_h hace las veces de un parámetro que puede asimilarse al tiempo, de manera tal que ambos Hamiltonianos transversales adquieren una dependencia temporal periódica con período T .

Debe señalarse que el Hamiltoniano del miembro derecho de (A.1) presenta una dinámica no confinada, pudiendo las variedades separarse de la órbita central indefinidamente. En consecuencia, esta aproximación describe correctamente la divergencia exponencial pero elimina la propiedad de “mixing”. No obstante ello, el comportamiento de las variedades al alejarse de γ puede describirse con precisión arbitraria, bastando con una forma cuadrática del Hamiltoniano transversal para describir correctamente el comportamiento lineal.

El Hamiltoniano restringido $H_{||}(x, p_x) + H_p(y, p_y, x)$ incorpora la topología de las órbitas en la vecindad de γ , y describe una dinámica neutra en la que las órbitas vecinas son siempre periódicas. En el caso de un Maslov par, estas órbitas poseen período T y se enroscan $\mu/2$ veces alrededor de γ , mientras que cuando este índice es impar, el período pasa a ser $2T$, y μ , el número de vueltas que dan en torno a la órbita central.

Por supuesto, estas órbitas cerradas del Hamiltoniano restringido no se corresponden con las trayectorias clásicas de H_{sys} . Sin embargo, debe remarcarse que esta familia de

órbitas es invariante respecto a la dinámica genuina, en el sentido de que la evolución por medio de H_{sys} preserva su condición de órbitas cerradas. Es por este motivo que su evolución temporal puede ser analizada vía la evolución de sus intersecciones con una superficie de sección definida en alguna posición particular x_0 . En este caso, la evolución de una trayectoria cerrada queda incorporada exclusivamente por el Hamiltoniano $H_h(y, p_y, x_0)$. No obstante, debe destacarse que esta evolución es correcta únicamente en las regiones del espacio de fases donde las variedades de $H_{||} + H_p + H_h$ determinan una aproximación aceptable a las variedades genuinas de γ .

Para esclarecer el esquema anterior, se considerará el Hamiltoniano $H(x, p_x, y, p_y) = p_x^2 + x^2 + p_y^2 - y^2$. Es este un caso de Hamiltoniano no confinado que contiene una única órbita periódica para cada valor de energía, definida por la condición $p_y = y = 0$. En la medida en que la propiedad de “mixing” no está aquí presente, la aproximación establecida por la ecuación (A.1) es exacta. Concretamente, la descomposición involucrada está dada por $H_{||}(x, p_x) = p_x^2 + x^2$, $H_p(y, p_y, x) = 0$ y $H_h(x, p_x) = p_y^2 - y^2$ ¹. En este ejemplo, $H_p = 0$ dado que la topología de las órbitas vecinas es esencialmente trivial; la variedad estable, al observarse para algún valor particular de x_0 , viene definida por la relación $p_y = -y$, mientras que la inestable, por $p_y = y$.

La dinámica del Hamiltoniano restringido $H_{||} + H_p = x^2 + p^2$ consiste en órbitas periódicas equivalentes a las de la órbita central, pero donde las variables transversales se han corrido a los valores $p_y = p_0$ y $y = y_0$ (que determinan la órbita particular). El aspecto que debe destacarse es que estas trayectorias cerradas, o equivalentemente, estas órbitas periódicas del Hamiltoniano restringido, evolucionan en forma trivial bajo la acción del Hamiltoniano completo. La dinámica en las variables x y p_x queda inalterado por la inclusión de H_h , de modo que una trayectoria cerrada evoluciona en forma de una traslación a lo largo de la dirección transversal. De esta manera, las órbitas periódicas de $H_{||} + H_p$ se conectan entre sí a través de la dinámica gobernada por H_h .

Estas trayectorias cerradas son precisamente los objetos clásicos sobre los cuales se construyen semiclásicamente las funciones de scar [14]. Considérese por ejemplo un manojo de trayectorias cerradas de ancho $\sqrt{\hbar}$ en torno a γ . Cuando se observan en una superficie de sección definida por $x = x_0$, estas trayectorias cruzan la superficie en un conjunto de puntos sobre el plano $y - p_y$. Correspondientemente, la construcción semiclásica consiste en (i) una aproximación de onda plana a lo largo del manojo de órbitas cerradas con igual energía a la de γ (por tanto, las posibles energías de γ deben satisfacer una condición de cuantización de tipo Bohr-Sommerfeld) y (ii) un paquete de onda transversal asociado a los puntos de intersección, de manera tal que su evolución venga descrita por la versión cuántica ($\hat{H}_h$) de $H_h(y, p_y, x)$. En consecuencia, evolucionando el paquete transversal con $\hat{H}_h$, el estado de scar, $|\phi\rangle$, podrá ser construido como se explica en el capítulo 2. Y más aún, la acción de $\hat{H}_h$ sobre $|\phi\rangle$ proveerá una buena aproximación local para la acción del Hamiltoniano del sistema

$$\hat{H}_h |\phi\rangle \simeq (\hat{H}_{sys} - E) |\phi\rangle, \quad (\text{A.2})$$

donde E es la energía de γ . Esta relación se desprende del hecho de que $|\phi\rangle$ está construido

¹En el caso general, H_h (como así también H_p) son polinomios con coeficientes dependientes de x .

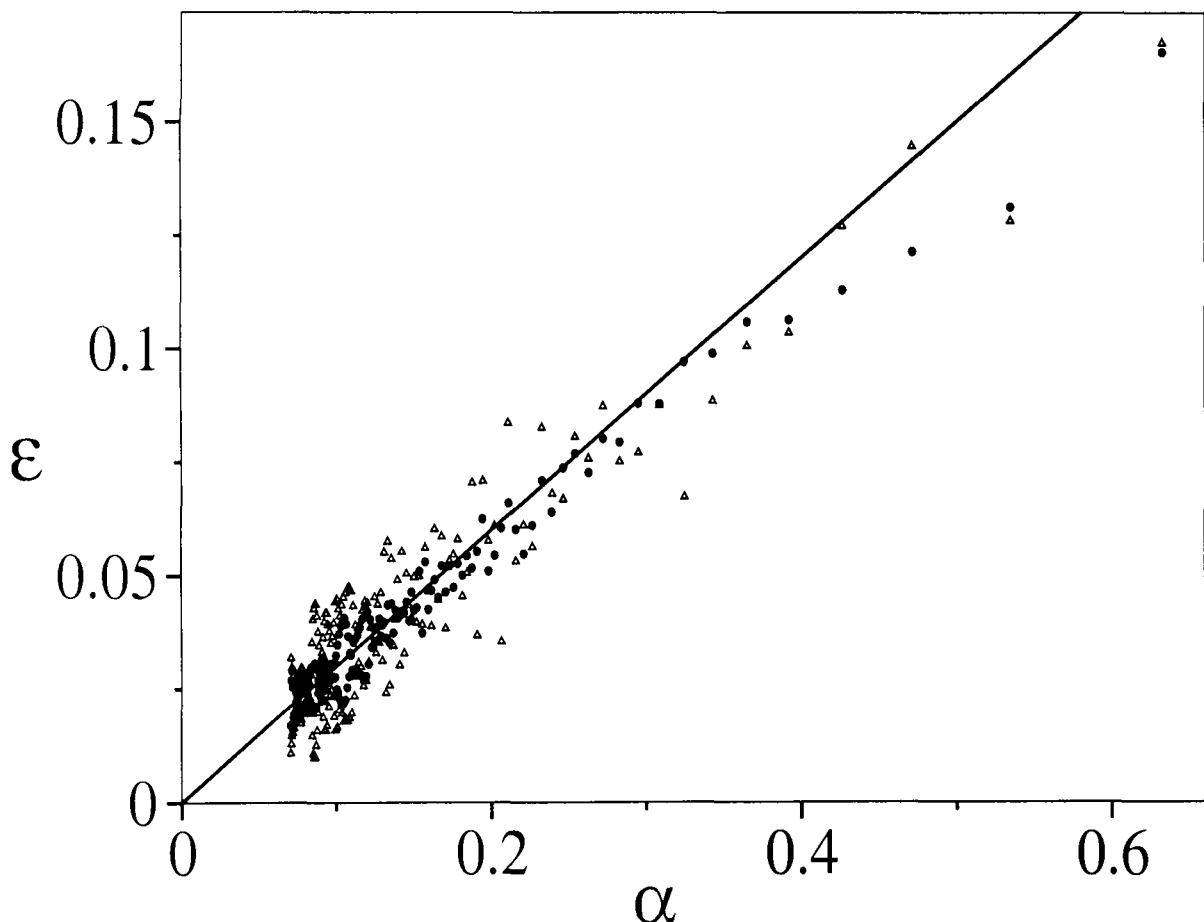


Figura A.1: Grado relativo de no hermiticidad, $\mathcal{E}$, de los elementos de matriz del Hamiltoniano de acuerdo a la ecuación (A.3), como función de $\alpha \equiv (2\pi\hbar/A)^{1/2}$.

sobre órbitas periódicas de $H_{||} + H_p$, de donde resulta $(\hat{H}_{||} + \hat{H}_p) |\phi\rangle \simeq E |\phi\rangle$.

La ecuación (A.2) es el punto de partida para la evaluación de los elementos de matriz del Hamiltoniano. Cuando dos funciones de onda están definidas en una región común del espacio de fases, entonces existe una superficie de sección adecuada donde la vecindad de estas órbitas puede ser representada por un esquema similar al de la figura 2.3, una circunstancia que justifica la descripción efectuada al abordar el cálculo de los elementos de matriz en el capítulo 2.

No obstante, debe señalarse que esta aproximación contiene un error esencial. La aplicación de $\hat{H}_h$ sobre $|\phi\rangle$ asume el conocimiento de la posición del correspondiente punto fijo, información que desde un punto de vista estrictamente cuántico debiera estar restringida por el principio de incerteza. En consecuencia, la aproximación de Hamiltoniano local introduce un ingrediente clásico que destruye la hermiticidad del operador Hamiltoniano. Este es el precio que debe pagarse para reducir la información dinámica a la vecindad de una órbita periódica.

Una estimación de este error puede obtenerse mediante argumentos relativamente sim-

ples de mecánica cuántica. La incerteza del punto fijo (q_0, p_0) en la figura 2.3, es de aproximadamente $\sqrt{\hbar}$ en cada variable, lo que establece un error relativo de orden $\sqrt{\hbar/A}$ en la especificación del área heteroclínica. Por tanto, conforme los elementos de matriz del Hamiltoniano dependen esencialmente de la cantidad A , debiera esperarse para estos un error relativo proporcional a $\sqrt{\hbar/A}$. Para verificar esta predicción, podrá emplearse el grado de no hermiticidad de los elementos de matriz del Hamiltoniano como medida del error relativo

$$\mathcal{E}(A) \equiv \frac{\left| \langle \hat{H}\phi|\phi' \rangle - \langle \phi|\hat{H}\phi' \rangle \right|_{\text{medio}}}{\left| \langle \hat{H}\phi|\phi' \rangle + \langle \phi|\hat{H}\phi' \rangle \right|_{\text{medio}}}. \quad (\text{A.3})$$

Teniendo en cuenta que el numerador y el denominador son funciones oscilatorias de $A/2\hbar$, se considerarán valores medios en el rango $[A/2\hbar - \pi/2, [A/2\hbar + \pi/2]$. La figura A.1 exhibe el comportamiento de $\mathcal{E}$ como función de $\alpha \equiv (2\pi\hbar/A)^{1/2}$, para dos valores distintos de $\hbar$. Como puede apreciarse, la relación $\mathcal{E} = 0.3\alpha$ establece un muy buen ajuste.

Vale la pena mencionar, en última instancia, que la receta introducida en la ecuación (2.59) impone la propiedad de hermiticidad a los elementos de matriz del Hamiltoniano. Presumiblemente, esta corrección debería reducir el error; estudios numéricos sobre billares o mapas podrían arrojar luz sobre este punto. No obstante, debe señalarse que este error no implica problemas serios en la evaluación de elementos de matriz entre funciones de scar de períodos cortos dado que, es en este caso justamente, que el área heteroclínica es mayor que $\hbar$.

Apéndice B

Validez del modelo Hamiltoniano

$\mathcal{H} = pq$ para sistemas genéricos.

En este apéndice se discutirá la validez de la figura 2.3 para sistemas genéricos y la generalización de la convención de fases utilizada en el capítulo 4. Así mismo, se discutirán las contribuciones a los elementos de matriz provenientes de una interacción en la dirección transversal a la superficie de sección, que no han sido tenidas en cuenta en los cálculos realizados en el texto principal.

Considérese primeramente, y a modo de ejemplo introductorio, las dos órbitas periódicas del estadio de Bunimovich que se esquematizan en la figura (B.1). Los puntos indicados con las letras a , a' , b y b' corresponden a puntos fijos del mapa P^4 , donde P representa al mapa de retorno de Poincaré en coordenadas de Birkhoff. El comportamiento de las variedades estable e inestable de estas órbitas periódicas puede ser analizado en la vecindad de los puntos fijos a y b , o equivalentemente de a' y b' . Esta figura pone en evidencia que, el escenario aparentemente complejo representado en la vecindad de los puntos a y b , se convierte vía la transformación canónica P en uno mucho más sencillo, a todas luces similar al que se presenta en la figura 2.3.

En lo que sigue, se mostrará que la figura efectivamente describe la situación más genérica. Para ello, sin embargo, debe recordarse que el espacio de fases no es un espacio métrico: conceptos tales como el de distancia, curvatura, o ángulo carecen de sentido. Las únicas propiedades relevantes son los invariantes ante transformaciones canónicas, entre ellos: (i) las áreas simplécticas definidas por curvas cerradas y (ii) las intersecciones entre variedades de órbitas periódicas. Paralelamente, en sistemas caóticos hay dos tipos de curvas invariantes temporales sobre secciones de Poincaré: las variedades estables y las inestables. Las variedades de un mismo tipo nunca se intersectan, de modo que puede asumirse que estas son paralelas.

Considerando los comentarios realizados hasta aquí, y a la luz de su estructura simpléctica, la figura 2.3 resulta equivalente al esquema general. En consecuencia, ha de existir una transformación canónica que conecte ambas situaciones¹.

¹La esencia de este argumento se hace más intuitiva vista en el espacio euclídeo de tres dimensiones,

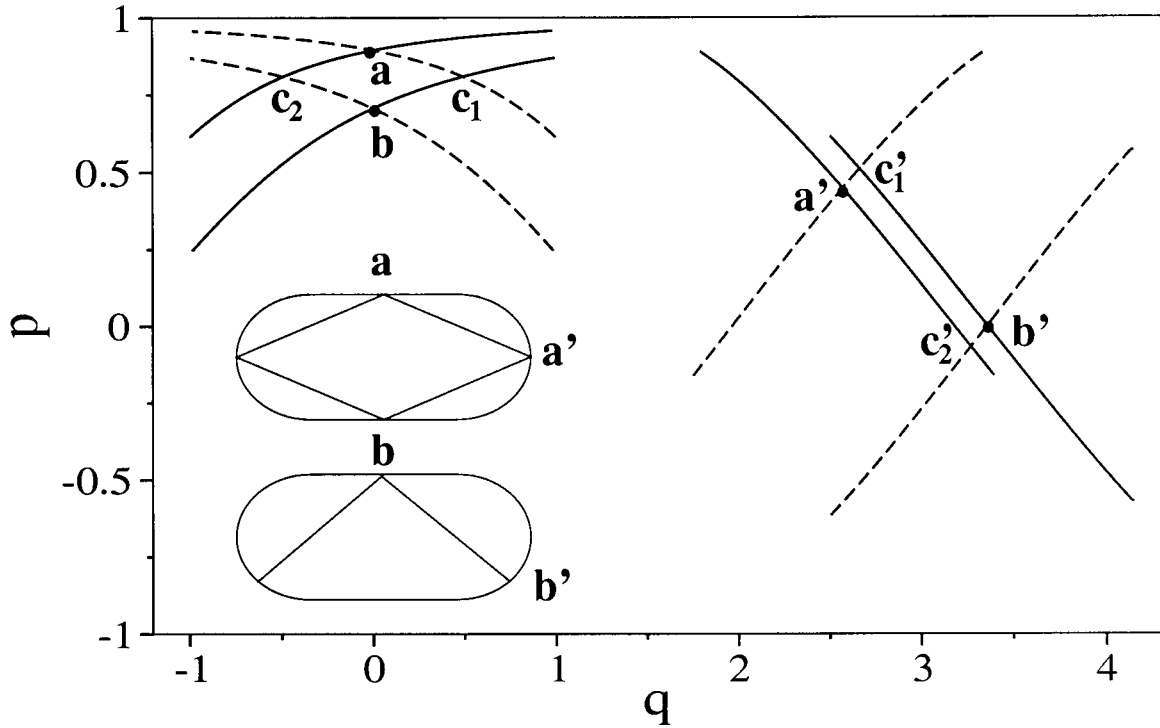


Figura B.1: Superficie de sección del estadio de Bunimovich (en coordenadas de Birkhoff). representando el comportamiento de las variedades estable (—) e inestable (---) en la vecindad de diferentes puntos fijos (•) del mapa P^4 . Los puntos heteroclínicos están etiquetados con la letra c . En el ángulo inferior izquierdo, las correspondientes órbitas en el espacio de configuración.

Comprendidas estas cuestiones, se procederá ahora a analizar el comportamiento de los elementos de matriz bajo la acción de transformaciones canónicas. Por simplicidad, se considerará la aproximación que sigue para el overlaps

$$\langle \phi | \phi' \rangle \simeq \langle \phi | z_1 \rangle \langle z_1 | \phi' \rangle + \langle \phi | z_2 \rangle \langle z_2 | \phi' \rangle,$$

donde $|z_1\rangle$ y $|z_2\rangle$ representan estados coherentes centrados respectivamente en los puntos heteroclínicos $z_1 = (0, p_0)$ y $z_2 = (q_0, 0)$ de la figura 2.3. De acuerdo a la discusión anterior, existe una transformación canónica que conecta los puntos $(0, 0)$, (q_0, p_0) , z_1 y z_2 con los puntos a , b , c_1 y c_2 de la figura B.1. Y aún más, esta transformación puede aproximarse en la vecindad de z_1 y z_2 por transformaciones simplécticas S_1 y S_2 , respectivamente. Realizando el cálculo en representación de coordenadas para los estados coherentes (y utilizando la forma funcional aproximada $\phi(q) = 1/\sqrt{|q|T}$ para la función de scar) puede arribarse a la relación

$$|\langle a | c_j \rangle \langle c_j | b \rangle| \simeq |\langle \phi | c_j \rangle \langle c_j | \phi' \rangle| \simeq 2 (\pi \hbar / A)^{1/2} / T \quad \text{para } j = 1, 2, \quad (\text{B.1})$$

donde son las traslaciones y las rotaciones las únicas transformaciones que mantienen invariante la orientación en el espacio. Los cuerpos rígidos representan aquí a los objetos invariantes, de manera tal que, para que dos de estos sean equivalentes, debe existir alguna composición de rotaciones y traslaciones que los conecten.

donde $|a_j\rangle = \hat{U}_j |z_j\rangle$, con $\hat{U}_j$ el operador cuántico asociado a la transformación canónica S_j , que se obtiene de una combinación de un operador de Heisemberg con otro metaplético [20].

De este modo, el overlap entre estados de scar centrados en los puntos fijos a y b adquiere la forma (a menos de factores constantes irrelevantes para esta discusión)

$$\langle a|b\rangle \sim (e^{i\alpha_1} + e^{i\alpha_2}) (\hbar/A)^{1/2}, \quad (\text{B.2})$$

en donde las fases α_j corresponden a las diferencias entre las acciones clásicas de los estados de scar en los puntos c_i . Esto es,

$$\alpha_1 = \frac{1}{\hbar} \left[\left(S_b + \int_b^{c_1} p dq \right) - \left(S_a - \int_{c_1}^a p dq \right) \right] = \frac{1}{\hbar} \left(S_b - S_a + \int_b^a p dq \right)$$

y

$$\alpha_2 = \frac{1}{\hbar} \left[\left(S_b - \int_{c_2}^b p dq \right) - \left(S_a + \int_a^{c_2} p dq \right) \right] = \frac{1}{\hbar} \left(S_b - S_a - \int_a^b p dq \right),$$

Las fases $S_a/\hbar$ y $S_b/\hbar$ son elegidas por convención en los correspondientes puntos fijos, en tanto que las integrales de línea se toman a lo largo de las variedades siguiendo la dirección determinada por el flujo; esto es, antihorariamente en todos los ejemplos considerados. Estas ecuaciones, pueden ahora substituirse en (B.2) para obtener

$$\langle a|b\rangle \sim e^{i\alpha_{a,b}} \cos \left(\frac{1}{2\hbar} \oint p dq \right) (\hbar/A)^{1/2} / T, \quad (\text{B.3})$$

donde

$$\alpha_{a,b} = \frac{1}{\hbar} \left(S_a - S_b + \frac{1}{2} \int_b^a p dq - \frac{1}{2} \int_a^b p dq \right). \quad (\text{B.4})$$

Esta expresión para el overlap es equivalente a la de la ecuación (2.52). Recuérdese que en el capítulo 2 se ha escogido una convención de fase para obtener elementos de matriz reales: del mismo modo, puede aquí elegirse $S_b - S_a$ para que sea $\alpha_{a,b} = 0$. No obstante, debe quedar en claro que no es posible que se verifique esta condición de fase para todos los elementos de matriz de una base de funciones de scar. En cambio, los overlaps y elementos de matriz del Hamiltoniano deberán incluir en general la fase $\alpha_{a,b}$ introducida en la ecuación (B.4).

A continuación se considerará la posibilidad de encontrar una relación sencilla entre $\alpha_{a,b}$ y la correspondiente fase $\alpha_{a',b'}$, definida en la vecindad de los puntos fijos a' y b' . Para ello, téngase en cuenta en primer lugar que los puntos de intersección c_1 y c'_1 pertenecen a la misma órbita heteroclínica. Supóngase que se tienen dos secuencias finitas de símbolos, ξ_a y ξ_b , asociadas respectivamente a las dos órbitas periódicas. De ser así, los puntos c_1 y c'_1 deberán pertenecer a la órbita etiquetada con $\xi_b \xi_a$, en tanto que c_2 y c'_2 a la de secuencia $\xi_a \xi_b$. Consecuentemente, α_1 y α_2 deben tomar valores constantes dado que los incrementos de fase de las dos funciones de scar vienen dados por la misma integral de línea $\int p dq / \hbar$ a

lo largo de la correspondiente órbita heteroclínica. En particular, $\alpha_{a,b} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ toma también un valor constante, de donde $\alpha_{a'b'} = \alpha_{ab}$.

A partir de la discusión anterior, puede arribarse a la conclusión de que ambos términos en el miembro derecho de (B.2) toman valores constantes. De modo que, si se trata por ejemplo de evaluar la contribución del primer término en la dirección transversal a la superficie de sección, puede realizarse una simple integración de este valor constante a lo largo de la correspondiente órbita heteroclínica. En este punto, surge la aparente complicación de que, dada la no periodicidad de $\xi_b \xi_a$, esta integral introduciría una divergencia. Un problema cuyo origen debe atribuirse a la aproximación utilizada en la ecuación (B.1). Las formas funcionales $\phi(q)$ y $\phi(q)'$ empleadas para obtener este resultado, son soluciones del problema no confinado, en donde las variedades se extienden en ambas direcciones hasta el infinito. No obstante, y como se ha visto en la ecuación (2.56), cuando estas variedades están acotadas a una región finita, el parámetro β adquiere una relevancia crucial. Este último, sin embargo, no es un invariante respecto a las transformaciones canónicas, circunstancia que atribuye al overlap una dependencia en relación a la superficie de sección elegida para calcularlo.

La situación puede ser esclarecida considerando una vez más la figura B.1 e introduciendo en el plano $q-p$ la distancia euclídea $d(,)$. Por supuesto, las conclusiones no podrán depender del tipo particular de métrica utilizada. Si se tiene en cuenta que $d(a, c_1) \simeq d(b, c_1)$ y que $\gamma d(a', c_1) \simeq d(b', c_1)/\gamma$ (con $\gamma \sim e^\lambda$ el factor de estiramiento asociado al exponente de Lyapunov del mapa P), puede deducirse que, al evolucionarse vía P el punto c_1 hasta el c'_1 , el parámetro β de la ecuación (2.56) se incrementa en un factor de aproximadamente $(\sqrt{\gamma} + 1/\sqrt{\gamma})$ (cosa que así mismo ocurre al evolucionarse con P^{-1} el punto c'_1 hasta el c_1). En este caso, el parámetro toma su valor mínimo, $\beta = A^{1/4}$, y la contribución de Poincaré al primer término del overlap es máxima. Más aún, toda vez que c_1 evolucione, tanto para delante como para atrás en el tiempo, β crece de acuerdo a la relación

$$\beta(t) \simeq A^{1/4} (e^{\lambda t/2} + e^{-\lambda t/2})/2 = A^{1/4} \cosh(\lambda t/2),$$

con λ el exponente de Lyapunov por unidad de tiempo. En definitiva, la contribución transversal al primer término queda así establecida por el factor

$$N_{Ov} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\beta(t)T/\pi}}{\sqrt{T_a T_b}} dt \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-(A^{1/4}T/\pi) \cosh(\lambda t/2)]}{\sqrt{T_a T_b}} dt, \quad (B.5)$$

donde T_a y T_b son respectivamente los períodos de las órbitas periódicas asociadas a los puntos a y b . La contribución transversal al segundo término de (B.2), resultado de la integración a lo largo de la otra órbita heteroclínica, se realiza obviamente de manera análoga. La inclusión de las contribuciones correspondientes a la dirección transversal a la superficie de sección queda así completada substituyendo $e^{-\beta T/\pi}$ por N_{Ov} en la ecuación (2.56).

En el caso del elemento de matriz del Hamiltoniano, el análisis es completamente equivalente reemplazando $e^{-\beta T/\pi}$ por $e^{-\beta}$, lo que conduce a un factor que habrá que reemplazar

ahora en la ecuación (2.62), de la forma

$$N_H \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\beta(t)}}{\sqrt{T_a T_b}} dt \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-A^{1/4}(\lambda t/2)]}{\sqrt{T_a T_b}} dt. \quad (\text{B.6})$$

Debe señalarse, en última instancia, que en los casos de interés, los factores anteriores son muy poco sensibles a los parámetros involucrados. En particular, si se consideran órbitas de período corto con períodos del orden del tiempo de Ehrenfest (esto es, tales que $T_a, T_b \sim |\ln \hbar|/2\lambda$, que es la situación más típica), los factores de las ecuaciones (B.5) y (B.6) resultan (al orden más bajo) iguales a 2 para interacciones fuertes ($A \sim \hbar$), y a 1 para interacciones de medio alcance ($A \sim \sqrt{\hbar}$).²

²Aquí se ha utilizado la aproximación $\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha \cosh(x)] dx \simeq \ln(1/\alpha^2)$, válida para $0 < \alpha \ll 1$. Para el caso en que $\alpha \sim 1$, esta debe sustituirse por $\log(1 + 1.260947/\alpha^2)$, y por $\sqrt{2\pi/\alpha}e^{-\alpha}$ para $\alpha > 1$.

Apéndice C

Elementos de matriz entre funciones de scar con distinta energía media.

En este apéndice se calcularán los elementos de matriz entre las funciones de scar ϕ y ϕ' , con energías medias E y E' respectivamente (las denominadas energías de Bohr-Sommerfeld [13]). Teniendo en cuenta que cada una de las funciones de scar vive en una determinada superficie de energía constante, es razonable esperar que los correspondientes elementos de matriz decrezcan en la medida que estas superficies se aparten entre sí. Aunque esta representación del problema pudiera parecer bastante simple, los argumentos utilizados en este apéndice son de naturaleza cuántica y se apoyan en un conocimiento profundo del comportamiento espectral de las funciones de scar.

En el capítulo 2 de esta Tesis se utilizó el mismo índice de estabilidad λ para los dos puntos fijos (recuérdese que en todas las ecuaciones derivadas se empleó como unidad de tiempo λ^{-1}). Aquí, en cambio, se admitirán índices de estabilidad distintos λ y λ' para las órbitas asociadas respectivamente a ϕ y ϕ' . Por lo tanto, las dispersiones energéticas de cada una de estas funciones estarán dadas por $\sigma \simeq \lambda\pi\hbar/|\ln \hbar|$ y $\sigma' \simeq \lambda'\pi\hbar/|\ln \hbar|$.

Nótese que, de acuerdo al significado de la dispersión energética, el overlap $\langle \phi | \phi' \rangle$ debería ser prácticamente nulo para $|\Delta E| \ll \sigma_T$, donde $\Delta E \equiv E - E'$ y $\sigma_T \equiv \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2}$. Por supuesto, este tipo de situación no es tenida en cuenta en los casos de las ecuaciones (2.56) y (B.5), dado que ambas fueron derivadas para $\Delta E = 0$.

Es oportuno mencionar en este punto que las funciones de scar se construyen mediante una aproximación adiabática para el movimiento en la vecindad de la órbita periódica, donde la dinámica lenta en la dirección transversal se desacopla de la dinámica que tiene lugar a lo largo de la órbita (véase apéndice A para una discusión detallada). En el marco de esta aproximación, el overlap se desacopla en dos factores provenientes de cada una de las dinámicas. En consecuencia, el movimiento transversal lento viene dado por una contribución sobre la superficie de sección (ecuación (2.56)), con una energía de sección dada por $\tilde{E} = (E + E')/2$.¹ Por otro lado, es de esperar que el factor asociado a la dinámica

¹Nótese que la representación de las funciones de scar sobre la superficie de sección es invariante frente a variaciones en la energía del orden de la dispersión. De acuerdo con esta observación, la evaluación de la ecuación (2.56) da prácticamente lo mismo para energías de sección iguales a E , E' o $\tilde{E}$.

rápida (transversal a la sección) tenga una dependencia suave con ΔE . Puesto que la contribución transversal cuando $\Delta E = 0$ viene caracterizada por la ecuación (2.56), aquí se analizarán únicamente las contribuciones que introduce la separación entre las superficies energéticas, esto es, cuando $\Delta E \neq 0$.

Teniendo en cuenta que en la base de autoestados de un sistema Hamiltoniano el overlap se escribe $\langle \phi | \phi' \rangle = \sum_{\mu} \langle \phi | \phi_{\mu} \rangle \langle \phi_{\mu} | \phi' \rangle$, la dependencia suave con ΔE debería estar relacionada con las distribuciones de probabilidad suavizadas $|\langle \phi_{\mu} | \phi \rangle|^2$ y $|\langle \phi_{\mu} | \phi' \rangle|^2$.² Para distribuciones que viven en la misma región energética, este factor es próximo a la unidad, y tiende a cero en la medida que aquellas se apartan.

De acuerdo a la discusión precedente, se propone para el overlap la siguiente expresión:

$$\langle \phi | \phi' \rangle_{\Delta E} \simeq \exp \left[-(\Delta E / 2\sigma_T)^2 \right] \langle \phi | \phi' \rangle.$$

Aquí, el factor $\Delta E / 2\sigma_T$ en la exponencial es la resultante del overlap entre dos distribuciones gaussianas con dispersión $\sqrt{2}\sigma$ y $\sqrt{2}\sigma'$, que describen respectivamente a las dos distribuciones suavizadas de probabilidad $|\langle \phi_{\mu} | \phi \rangle|^2$ y $|\langle \phi_{\mu} | \phi' \rangle|^2$.

Con el mismo espíritu, se propone una expresión análoga para el elemento de matriz del Hamiltoniano entre funciones de scar con distinta energía media:

$$\left\langle \phi | \hat{H}_{\text{sys}} - \tilde{E} | \phi' \right\rangle_{\Delta E} \simeq \exp \left[-\frac{1}{2} (\Delta E / 2\sigma_T)^2 \right] \left\langle \phi | \hat{H}_h | \phi' \right\rangle,$$

ecuación en cuyo miembro izquierdo se ha incluido $\tilde{E}$ en lugar de E o E' con el propósito de imponer la propiedad de hermiticidad al operador $\hat{H}_{\text{sys}}$. En cuanto al factor $1/2$ dentro de la exponencial del miembro derecho, su inclusión obedece al hecho de que la dispersión de la función $h\phi$ (aplicación del Hamiltoniano a la función de scar ϕ), es $\sqrt{3}$ veces la correspondiente a ϕ (lo mismo que en lo que respecta a $h\phi'$ y ϕ'). Como última consideración, debe aclararse que el factor $\left\langle \phi | \hat{H}_h | \phi' \right\rangle$ corresponde a un elemento de matriz entre funciones de scar con $\Delta E = 0$, pero con un índice de estabilidad modificado $\tilde{\lambda} \equiv (\lambda + \lambda')/2$.

²Las fuerte correlación entre las amplitudes se incorpora en las contribuciones sobre la sección transversal.

Apéndice D

Transformada de Fourier de la función $h\phi(q)$.

En este apéndice se demostrará la propiedad (2.76) del capítulo 2, esto es, que la transformada de Fourier de la función $h\phi$ (correspondiente a la aplicación del operador Hamiltoniano $\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q})$ a la función de scar), es la propia función $h\phi$ evaluada en la variable conjugada y con el signo cambiado. El cálculo es ligeramente más complejo que el desarrollado en el texto para probar la propiedad (2.67) relacionada a la función de scar ϕ , aunque al igual que ese caso, corresponde a la evaluación de la transformada de Fourier de la forma explícita de la función en cuestión

$$h\phi(q) = -\frac{i\hbar}{\sqrt{M_0}(\hbar\pi)^{1/4}} \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\pi t/T) (1/2 - (q^2/\hbar) e^{-2t}) \exp[-(q^2/2\hbar) e^{-2t} - t/2]. \quad (D.1)$$

De acuerdo a la convención para cambiar de representación, esta transformada de Fourier adopta la forma¹

$$\hat{h}\phi(p) = -\frac{i\hbar}{\sqrt{M_0}(\hbar\pi)^{1/4}} \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\pi t/T) \frac{e^{t/2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{2} I_0\left(\frac{p}{\sqrt{2\hbar}} e^t\right) - 2I_1\left(\frac{p}{\sqrt{2\hbar}} e^t\right) \right\}, \quad (D.2)$$

con

$$I_n(z) \equiv \int dx x^{2n} \exp(-x^2 - i 2 z x) = \sqrt{\pi} \exp(-z^2) \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \frac{(-z^2)^{n-k} (2k-1)!!}{2^k}. \quad (D.3)$$

A partir de (D.3) se desprende que $I_0(z) = \sqrt{\pi} \exp(-z^2)$ y $I_1(z) = \sqrt{\pi} \exp(-z^2)(1/2 - z^2)$, que ahora pueden introducirse en (D.2) (luego de evaluarse en el argumento corres-

¹Para verificar la validez de estas relaciones basta tomar la definición de los I_n (miembros derecho e intermedio de (D.3)) y realizar el cambio de variable $q = x e^t / \sqrt{2\hbar}$. La manipulación algebraica subsiguiente conduce a (D.2) que, como lo señala el texto, es la transformada de Fourier de (D.1).

pondiente). Esto transforma a (D.2) en

$$\hat{h}\phi(p) = -\frac{i\hbar}{\sqrt{M_0}(\hbar\pi)^{1/4}} \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\pi t/T) (-1/2 + (p^2/\hbar) e^{2t}) \exp[-(p^2/2\hbar) e^{2t} + t/2],$$

que tras el cambio de variable de integración $t \rightarrow -t$ se convierte en

$$\hat{h}\phi(p) = \frac{i\hbar}{\sqrt{M_0}(\hbar\pi)^{1/4}} \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\pi t/T) (1/2 - (p^2/\hbar) e^{-2t}) \exp[-(p^2/2\hbar) e^{-2t} - t/2],$$

Como puede advertirse, esta última expresión es precisamente la misma que la de la función $\hbar\phi$, aunque evaluada en la variable conjugada p , y con el signo invertido, tal como se quería demostrar.

Apéndice E

Funciones de scar asociadas a órbitas de período mayor que 1.

En este apéndice se discutirá la construcción de las funciones de scar asociadas a órbitas de períodos mayores que 1 (esto es, la generalización de lo hecho en el capítulo 3 para puntos fijos). Para ejemplificar se considerará primeramente el caso órbitas de período 2, y luego se extenderán los resultados a órbitas más largas.

La construcción de los estados de scar sobre órbitas periódicas se realiza partiendo de combinaciones lineales de estados del tipo (3.23), a las que se les impone la condición de que, al aplicarles el mapa, los tubos heteroclínicos correspondientes se cierran sobre sí mismos. Esto equivale a decir que, al menos en una primera aproximación, tales combinaciones lineales resulten autoestados del operador metapléctico asociado a M ,

$$\hat{M} |\phi\rangle \simeq e^{i\beta} |\phi\rangle. \quad (\text{E.1})$$

Dados dos estados coherentes $|\chi_0\rangle$ y $|\chi_1\rangle$, centrados respectivamente en $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ (los dos puntos de la órbita periódica),

$$\begin{aligned} |\chi_1\rangle &= e^{i\delta_{\mathbf{x}_1}} \hat{T}_{\mathbf{x}_1} |0\rangle \\ |\chi_0\rangle &= e^{i\delta_{\mathbf{x}_0}} \hat{T}_{\mathbf{x}_0} |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

(con $\delta_{\mathbf{x}} \equiv -N\pi qp$), la combinación lineal en cuestión deberá escribirse incluyendo una fase relativa entre ambos, esto es,

$$|\phi\rangle = |\chi_0\rangle + e^{i\alpha} |\chi_1\rangle, \quad (\text{E.3})$$

cuya determinación será el objeto de los próximos párrafos. Antes de desarrollar el cálculo, se mencionarán tres propiedades que resultarán de utilidad en adelante. Primeramente, la que atañe al overlap entre estados coherentes,

$$\langle 0 | \hat{D} | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh \lambda}},$$

con λ el Lyapunov del mapa M , y $\hat{D}$ la versión cuántica de su mapa diagonal asociado. En segundo lugar, la relación de composición para los operadores de Heisenberg,

$$\hat{T}_{\mathbf{x}_a} \hat{T}_{\mathbf{x}_b} = \hat{T}_{\mathbf{x}_a + \mathbf{x}_b} e^{-iN \pi \mathbf{x}_a \wedge \mathbf{x}_b},$$

y por último una propiedad que vincula a estos con la aplicación del mapa [26],

$$\hat{M} \hat{T}_{\mathbf{x}_a} \hat{M}^{-1} = \hat{T}_{M\mathbf{x}_a}.$$

Para obtener la fase α , ahora sí, se procede insertando (E.3) en (E.1) y teniendo en cuenta que, a menos de una pequeña deformación, el estado $|\chi_0\rangle$ es evolucionado vía $\hat{M}$ hasta el $|\chi_1\rangle$ (y el $|\chi_1\rangle$ hacia el $|\chi_0\rangle$). Matemáticamente, esto corresponde a escribir

$$\begin{aligned} \hat{M} |\chi_0\rangle &\simeq e^{if_{01}} |\chi_1\rangle \\ \hat{M} |\chi_1\rangle &\simeq e^{if_{10}} |\chi_0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Bajo esta última consideración, el procedimiento anteriormente mencionado da lugar a la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} e^{i(f_{10}+\alpha)} |\chi_0\rangle + e^{if_{01}} |\chi_1\rangle = \\ e^{i\beta} |\chi_0\rangle + e^{i(\beta+\alpha)} |\chi_1\rangle, \end{aligned}$$

de la que, comparando las fases, se obtienen las siguientes ecuaciones para α y β ,

$$\begin{aligned} \alpha &= -f_{10} + \beta + 2k'\pi \\ -\alpha &= -f_{01} + \beta + 2k''\pi, \end{aligned}$$

de donde resulta

$$\begin{aligned} \alpha &= (f_{01} - f_{10})/2 + k\pi \\ \beta &= (f_{01} + f_{10})/2 + m\pi, \end{aligned}$$

con k y m enteros. El problema, de ahora en más, consiste en establecer cuánto valen las fases f_{01} y f_{10} , que de acuerdo a (E.4) deberían poder obtenerse de manera sencilla calculando, respectivamente, los elementos de matriz $\langle \chi_1 | \hat{M} | \chi_0 \rangle$ y $\langle \chi_0 | \hat{M} | \chi_1 \rangle$. No obstante, estos estados viven en un espacio de Hilbert con geometría toroidal, y por lo tanto deben estar adaptados a esta última. Ello se efectúa por medio del proyector

$$\hat{P}_\theta = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-i\theta \cdot \mathbf{n} + i\delta_{\mathbf{n}}} \hat{T}_{\mathbf{n}},$$

en donde $\theta = (\theta_q, \theta_p)$ corresponde a los ángulos de Floquet (que a los fines aquí considerados se podrán tomar nulos). En adelante se distinguirá con un supraíndice T a los estados en el espacio de Hilbert toroidal, reservando la notación por omisión para los estados en el plano. Con esta convención, podrá escribirse

$$|\chi_a^T\rangle \equiv \hat{P} |\chi_a\rangle.$$

A fin de calcular los elementos de matriz mencionados entre estados en el toro, la estrategia consistirá en retener la contribución más importante a estos últimos, que corresponde a realizar la aproximación

$$\langle \chi_b^T | \hat{M} | \chi_a^T \rangle \simeq \langle \chi_b^T | \hat{M} | \chi_a \rangle \simeq \langle \chi_b | \hat{T}_{M\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b}^\dagger \hat{M} | \chi_a \rangle.$$

Como se puede advertir, de todos los elementos de matriz posibles en el plano aquí se está rescatando solamente uno, aquel que proviene de la acción del mapa sobre el estado $|\chi_a\rangle$ situado en el dominio elemental. La aplicación de $\hat{M}$ a estados más apartados del origen da lugar a paquetes mucho más estirados que casi no contribuyen al overlap.

Utilizando las definiciones (E.2) para los estados coherentes apartados del origen, la ecuación anterior se podrá reescribir

$$\langle \chi_b^T | \hat{M} | \chi_a^T \rangle \simeq e^{i\Phi_{ab}} \langle 0 | \hat{T}_{\mathbf{x}_b}^\dagger \hat{T}_{M\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b}^\dagger \hat{M} \hat{T}_{\mathbf{x}_a} | 0 \rangle, \quad (\text{E.5})$$

donde $\Phi_{ab} = \delta_{\mathbf{x}_a} - \delta_{\mathbf{x}_b} - \delta_{M\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b}$. El último paso consiste en operar algebraicamente sobre esta ecuación utilizando las tres propiedades indicadas anteriormente, procedimiento que da lugar a la siguiente relación para el elemento de matriz:

$$\langle \chi_b^T | \hat{M} | \chi_a^T \rangle \simeq \frac{e^{-iN\pi\mathbf{x}_b \wedge M\mathbf{x}_a + i\Phi_{ab}}}{\sqrt{\cosh \lambda}},$$

de donde, de acuerdo a los comentarios hechos párrafos atrás, se deducen los valores de las fases:

$$\begin{aligned} f_{01} &= -N\pi\mathbf{x}_1 \wedge M\mathbf{x}_0 + \Phi_{01} \quad (\text{mod } 2\pi) \\ f_{10} &= -N\pi\mathbf{x}_0 \wedge M\mathbf{x}_1 + \Phi_{10} \quad (\text{mod } 2\pi). \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Si se considera, a modo de ejemplo, la órbita del mapa sin perturbar compuesta por los puntos $\mathbf{x}_0 = (1/3, 0)$ y $\mathbf{x}_1 = (2/3, 0)$, mediante la aplicación de la fórmula (E.6) se obtiene

$$f_{01} = f_{10} = -\frac{2}{3}N\pi \quad (\text{mod } 2\pi)$$

de donde resulta

$$\begin{aligned} \alpha &= k\pi \\ \beta &= -\frac{2}{3}N\pi + m\pi. \end{aligned}$$

En cambio, para la órbita definida por los puntos $\mathbf{x}_0 = (1/2, 0)$ y $\mathbf{x}_1 = (0, 1/2)$, es

$$f_{01} = f_{10} = -\frac{1}{2}N\pi \quad (\text{mod } 2\pi),$$

de modo que

$$\begin{aligned} \alpha &= k\pi \\ \beta &= -N\pi/2 + m\pi. \end{aligned}$$

Para construir el estado de scar correspondiente a una órbita de período n , se puede emplear un procedimiento equivalente al utilizado anteriormente. Como ahora se trata de un conjunto de n estados coherentes, la combinación lineal involucrará $n - 1$ fases relativas,

$$|\phi\rangle = |\chi_0^T\rangle + e^{i\alpha_1} |\chi_1^T\rangle + e^{i\alpha_2} |\chi_2^T\rangle + \dots + e^{i\alpha_{n-1}} |\chi_{n-1}^T\rangle.$$

A diferencia de lo que sucedía antes, esta vez debe tenerse en cuenta el orden en que los distintos puntos de una órbita son recorridos. Esto corresponde a escribir, para la evolución de los paquetes,

$$\begin{aligned}\hat{M} |\chi_0^T\rangle &\simeq e^{if_{01}} |\chi_1^T\rangle \\ \hat{M} |\chi_1^T\rangle &\simeq e^{if_{12}} |\chi_2^T\rangle \\ &\dots \\ \hat{M} |\chi_{n-1}^T\rangle &\simeq e^{if_{n-1,0}} |\chi_0^T\rangle.\end{aligned}$$

Con esta apreciación, ahora sí, puede introducirse el estado $|\phi\rangle$ en la ecuación de autovalores (E.1), lo que tras un reacomodamiento conduce a la igualdad

$$\begin{aligned}e^{i(\alpha_{n-1}+f_{n-1,0})} |\chi_0^T\rangle + e^{if_{01}} |\chi_1^T\rangle + e^{i(\alpha_1+f_{12})} |\chi_2^T\rangle + \dots + e^{i(\alpha_{n-2}+f_{n-2,n-1})} |\chi_{n-1}^T\rangle = \\ e^{i\beta} |\chi_0^T\rangle + e^{i(\beta+\alpha_1)} |\chi_1^T\rangle + e^{i(\beta+\alpha_2)} |\chi_2^T\rangle + \dots + e^{i(\beta+\alpha_{n-1})} |\chi_{n-1}^T\rangle.\end{aligned}$$

De esta última, igualando los términos correspondientes de cada miembro, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}-\alpha_{n-1} &= f_{n-1,0} - \beta + 2k'\pi \\ \alpha_1 &= f_{01} - \beta + 2k''\pi \\ \alpha_2 - \alpha_1 &= f_{12} - \beta + 2k'''\pi \\ &\dots \\ \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} &= f_{n-2,n-1} - \beta + 2k^{(n)}\pi,\end{aligned}$$

cuya solución, definiendo $f_{\text{Tot}} \equiv f_{n-1,0} + f_{01} + f_{12} + f_{23} + \dots + f_{n-1,n-2}$, resulta

$$\alpha_j = \sum_{l=0}^{j-1} f_{l,l+1} - j f_{\text{Tot}}/n + 2jk_j/n, \quad j = 1, \dots, n-1$$

$$\beta = f_{\text{Tot}}/n + 2m\pi/n$$

Las f_{ab} , al igual que antes, se calculan usando la fórmula (E.5), con ayuda de las relaciones subsiguientes.

Apéndice F

Cálculo de elementos de matriz en el toro.

Sean $\psi(q)$ and $\phi(q)$ dos funciones de onda definidas en el eje real, con $\bar{\psi}(k/N)$ y $\bar{\phi}(k/N)$ sus correspondientes proyecciones en el toro de acuerdo a la ecuación (3.22). En este apéndice se mostrará la validez de la siguiente relación:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{\psi}(k/N)^* \bar{\phi}(k/N) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(q)^* \hat{P}\phi(q) dq, \quad (\text{F.1})$$

con

$$\hat{P}\phi(q) = \sum_{j,l=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi Njq} \phi(q-l). \quad (\text{F.2})$$

Debe notarse que el factor $e^{i2\pi Njq} \phi(q-l)$ en la ecuación (F.1) corresponde a la traslación de $\phi(q)$ en l unidades según la dirección q , y en j unidades según la dirección p . Esto significa que la ecuación (F.1) expresa lo siguiente: el overlap en el toro puede ser evaluado en el plano si una de las funciones de onda es reemplazada por la suma de todas sus traslaciones enteras.

Utilizando la ecuación (F.2) y la identidad $\int_{-\infty}^{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1}$, resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(q)^* \hat{P}\phi(q) dq = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} \psi(q)^* \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi Njq} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi(q-l) \right] dq.$$

De este modo, con el cambio de variables $q' = q + n$ (y teniendo en cuenta que $\sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi(q-l)$ es periódica con período unidad), puede arribarse a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(q)^* \hat{P}\phi(q) dq = \int_0^1 \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi(q'-n)^* \right] \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi Njq'} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi(q'-l) \right] dq'.$$

Finalmente, utilizando la fórmula de suma de Poisson

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi N j q'} = \frac{1}{N} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(q' - j/N),$$

se obtiene inmediatamente la ecuación (F.1). Por supuesto, la extensión del cálculo precedente al elemento de matriz del Hamiltoniano es inmediata.

Agradecimientos

A E. Vergini, por su manera tan peculiar de expresar una opinión sincera; muy acorde, por otra parte, a mi manera no menos peculiar de necesitarla. Y por el inestimable aprendizaje que extraje en su compañía durante estos años de doctorado, cuyo alcance, no tengo la menor duda de ello, aún no he comenzado siquiera a vislumbrar.

Muchas veces, y en los contextos más diversos, puede uno oír frases que ponderan la salud por sobre los demás bienes que debe preservar un ser humano. Sin embargo, en este momento recuerdo una ocasión, tan sólo una, en la que pude presenciar con creces su profundo significado. Quiero dejar expreso mi agradecimiento a A. Rivas, por su llegada oportuna para pronunciarla.

Por decir dos verdades separadas que, repetidas al unísono, me liberaron de una pesada carga, agradezco especialmente a J. Hernando y D. Wisniacki.

A los muchachos del call center, A. Vertanesián, I. Prario, y F. Palumbo; que además de extenuar mis últimos vestigios de concentración con sus incesantes arrebatos telefónicos, de obligarme a trabajar en traje de neoprén durante los crudos inviernos, y de convertirme en visitante asiduo del taller del cerrajero Gómez, transformaron a la oficina en un lugar a donde, cosa extraña, realmente daban ganas de llegar por la mañana.

Al cerrajero Gómez.

A C. Pastorino y R. de Luca, que desafiando las fronteras de la Paleontología de comienzos del siglo XXI, resolvieron mi problema de último momento.

A mi difunta compu del año 2000. Quién se hubiera atrevido a llamarte obsoleta en aquellas épocas en que conquistábamos galaxias con la Commodore y la Sinclair...

A I. Caridi, cuya predisposición inclaudicable probablemente nunca vaya a comprender. Pero no tiene mayor importancia. Llegado el momento, sé lo que debo hacer.

A la Comisión Nacional de Energía Atómica, la entrañable Comisión Nacional de Energía Atómica.

A mi familia, a mis amigos, y a Miao-Tse-Tung.

Disculpas

A Z. Gamba y F. Borondo.

Bibliografía

- [1] R. C. Hilborn. *Chaos and Nonlinear Dynamics* (New York: Oxford University Press, 1994).
- [2] A. Einstein, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **19**, 82 (1917).
- [3] M. C. Gutzwiller. J. Math. Phys. **12**, 343 (1971).
- [4] M. C. Gutzwiller. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (New York: Springer, 1990).
- [5] A. Voros. J. Phys A: Math. Gen. **21** (1988), 685.
- [6] M. V. Berry and J. P. Keating. J. Physique **23** (1990) 4839. M. V. Berry and J. P. Keating. R. Soc. A, **23** (1992) 151.
- [7] P. Cvitanović, Phys. Rev. Lett. **61**, (1988) 2729 ; P. Cvitanović and B. Eckhardt, Phys. Rev. Lett. **63**, (1989) 823.
- [8] M. Sieber and F. Steiner, Phys. Rev. Lett. **67**, (1991) 1941.
- [9] O. Bohigas, M. J. Giannoni and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **52**, (1984) 1.
- [10] J. P. Keating y M. Sieber. Proc. R. Soc. A **447** 413 (1994).
- [11] G. G. Carlo. Tesis doctoral.
- [12] E. G. Vergini. *Semiclassical theory of short periodic orbits in quantum chaos*. J. Phys. A: Math. Gen. **33** (2000), 4709-4716.
- [13] E. G. Vergini y G. G. Carlo, *Semiclassical quantization with short periodic orbits*. J. Phys. A: Math. Gen. **33** (2000), 4717-4724.
- [14] E. G. Vergini y G. G. Carlo, *Semiclassical construction of resonances with hyperbolic structure*. J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001), 4525.
- [15] G. G. Carlo, E. G. Vergini and P. Lustemberg, *Scar functions in the Bunimovich Stadium Billiard*, J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002), 7965-7982.

- [16] E. G. Vergini and D. Schneider. *Asymptotic behaviour of matrix elements between scar functions*. J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005), 587-616.
- [17] E. G. Vergini, D. Schneider and A. M. F. Rivas. *The short periodic orbit approach for quantum cat maps*. En preparación.
- [18] A. Perelemov. *Generalized Coherent States and Their Applications* (Berlin: Springer, 1986).
- [19] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics* (New York: Interscience, 1966).
- [20] R. G. Littlejohn, *The semiclassical evolution of waves packets*. PHYSICS REPORTS. (Review Section of Physics Letters) 138, Nos 4 & 5 (1986), 193-231.
- [21] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of mathematical functions* (New York: Dover Publications Inc., 1970).
- [22] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. San Fu Tuan Editors. Copyright © by Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1994.
- [23] G. G. de Polavieja, F. Borondo and R. M. Benito. *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994) 1613.
- [24] L. Kaplan and E. J. Heller. *Phys. Rev. E.* **59** (1999) 6609.
- [25] D. Wisniacki, F. Borondo, E. G. Vergini, and R. M. Benito. *Phys. Rev. E. Phys. Rev. E.* **63** 066220.
- [26] F. Faure, S. Nonnenmacher and S. De Bièvre, *Scarred eigenstates for quantum cat maps of minimal periods*. Communications in Mathematical Physics, **239**, (2003) 449-492.
- [27] M. Berry, *Regular and irregular motion*, Chaos and Quantum Physics, Les Houches (1981).
- [28] A. Bäcker, *Numerical aspects of eigenvalue and eigenfunction computation for chaotic quantum system*. (Berlin/Heidelberg: Springer, 2003).
- [29] R. L. Devaney, *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*.
- [30] M.B. de Matos and A. Ozorio de Almeida, *Quantization of Asanov maps*, Annals of Physics **237** (1994) 46-65.
- [31] J. H. Hannay and M. V. Berry, *Quantization of linear maps on a torus - Fresnel diffraction by a periodic grating*. Physica 1D (1980) 267-290.
- [32] J. P. Keating, *The cat map: quantum mechanics and classical motion*. Nonlinearity **4** (1991) 309-341.

- [33] J. P. Keating, *Asymptotic properties of the periodic orbits of the cat map*. Nonlinearity 4 (1991) 277-307.
- [34] S. Lang, "*Algebraic Number Theory*", Addison-Wesley, New York, 1970.
- [35] V. M. Babič and V. S. Buldyrev. *Short-Wavelength Diffraction Theory*. (Berlin: Springer-Verlag, 1991).
- [36] E. G. Vergini. *Semiclassical limit of chaotic eigenfunctions*. J. Phys. A: Math. Gen. 37 (2004), 6507-6519.
- [37] M. Hénon. *Numerical exploration of Hamiltonian systems*. Les Houches Sessions, 1981.

