

C. N. E. A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
NO 1	1969

01.69.04

CNEA - 233

NO SE PRESTA

REPUBLICA ARGENTINA

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA

UN MODELO IDEALIZADO DE UNA SUPER CORRIENTE

por

Guido Beck

BUENOS AIRES

1969

REPUBLICA ARGENTINA

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA



UN MODELO IDEALIZADO DE UNA SUPERCORRIENTE

por

Guido Beck



BUENOS AIRES

1969

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION

UN MODELO IDEALIZADO DE UNA SUPERCORRIENTE

Guido Beck⁽¹⁾

RESUMEN

Se muestra que mediante el modelo simple, aquí desarrollado, se obtienen cualitativamente las principales propiedades de una corriente a través de un material superconductor.

(1) C.N.E.A. - Centro Atómico Bariloche.

1. Introducción

El lector desprejuiciado puede tomar al modelo que se describe como una herramienta fenomenológica, destinada a resumir las principales características de una corriente fluyendo en un superconductor: su estabilidad, su valor máximo permitido y la cuantificación del flujo magnético cuando circula en un cilindro hueco.

Desde el punto de vista del autor, el presente trabajo tiene un significado más específico. Significa una introducción a una rediscusión del experimento de Faraday. En la física clásica el experimento de Faraday es considerado como uno de los fundamentos de la electrodinámica. La mecánica cuántica, sin embargo, nos trae nuevos detalles acerca del comportamiento del imán que usó Faraday. De hecho, si un átomo magnético es introducido en el campo magnético de una bobina, se produce el efecto de Zeeman y cambia la energía cinética interna del átomo. El imán en el experimento de Faraday no es, de ninguna manera, inerte; participa del fenómeno tanto como lo hace la corriente en la bobina. Desde el punto de vista de la física de hoy en día, el experimento de Faraday no puede considerarse electromagnético puro. Pone de manifiesto un fenómeno mecanolectromagnético, que hasta ahora no ha sido posible describir, ni entender en su totalidad. Una nueva discusión del fenómeno no solamente requiere la introducción de los conocimientos provistos por la teoría del efecto de Zeeman, sino necesita simultáneamente, un conocimiento más preciso de las propiedades de una corriente.

El modelo que será discutido se refiere, por lo tanto, solamente a un aspecto parcial del problema, a un aspecto que puede ser llamado mecanomagnético y que puede proveer información necesaria para poder entender el fenómeno observado en 1831.

2. La energía de una corriente casieta

Consideramos n partículas de carga e que se mueven en un alambre muy fino que forma una espira cerrada de radio ρ . La posición de las partículas está determinada por las componentes del vector $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ del espacio de configuración de n dimensiones. El momento de inercia de cada partícula lo llamaremos $I = m \cdot \rho^2$. Las cargas positivas que neutralizan nuestras n cargas tengan posiciones fijas, distribuidas en el alambre en forma uniforme o periódica.

Supondremos que la energía del sistema es la suma de la energía ciné-

tica y potencial de las partículas, $\frac{1}{2} \cdot I \cdot \sum_i \dot{\vec{\varphi}}_i^2 + V(\vec{\varphi})$, y de la energía magnética de la corriente que forman,

$$\frac{1}{8\pi} \int H^2 \cdot d\tau = \frac{1}{2} \cdot L \cdot J^2$$

donde L es la autoinducción de la espira y

$$J = \frac{e}{2\pi} \sum_k \dot{\varphi}_k \quad (1)$$

La energía de nuestro sistema será, luego,

$$E = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \sum_i \dot{\vec{\varphi}}_i^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 L}{4\pi^2} \cdot \left(\sum_k \dot{\vec{\varphi}}_k \right)^2 + V(\vec{\varphi}) \quad (2)$$

El Lagrangiano de nuestro sistema difiere de (2) solamente en el signo de $V(\vec{\varphi})$ y no es necesario escribirlo explícitamente.

La pregunta de si es necesario incluir, en la energía total, la energía del campo magnético de cada partícula, no es importante, en nuestro caso. Lleva solamente a un cambio insignificante (renormalización) de lo que hemos llamado momento de inercia I.

Expresando los momentos canónicos por las velocidades y viceversa, obtenemos

$$p_i = I \cdot \dot{\vec{\varphi}}_i + \frac{e^2 L}{4\pi^2} \sum_k \dot{\vec{\varphi}}_k \quad (3)$$

$$I \cdot \dot{\vec{\varphi}}_i = p_i - \frac{e^2 L}{4\pi^2} \cdot \left(I + n \cdot \frac{e^2 L}{4\pi^2} \right)^{-1} \cdot \left(\sum_k p_k \right) \quad (4)$$

De (3) y (4) vemos que

$$A_i = A = \frac{e C L}{4\pi^2 \rho} \cdot \left(I + n \cdot \frac{e^2 L}{4\pi^2} \right)^{-1} \cdot \left(\sum_k p_k \right) \quad (5)$$

tiene el carácter de un vectorpotencial (en la dirección $\vec{\varphi}$) actuando en la partícula i. Además (4) muestra la acción de la inducción electromagnética en la aproximación casiestacionaria. Si una fuerza actúa sobre la partícula i no solo la velocidad $\dot{\vec{\varphi}}_i$ cambia. Todas las otras partículas sienten el efecto de la fuerza y son movidas en la dirección opuesta.

(1), (2) y (3) nos permiten determinar los operadores de la corriente y de Hamilton de nuestro problema.

$$J = \frac{e}{2\pi} \cdot \left(I + n \cdot \frac{e^2 L}{4\pi^2} \right)^{-1} \cdot \left(\sum_k p_k \right) \quad (6)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2I} \left\{ \sum_i p_i^2 - \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2} \cdot \left(I + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2} \right)^{-1} \cdot \left(\sum_k p_k \right)^2 \right\} + V(\vec{\Phi}) \quad (7)$$

(7) resulta más familiar si, usando (5), escribimos

$$= \sum_i \frac{1}{2I} \cdot (p_i - \rho \cdot \frac{\epsilon}{C} \cdot A_i)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 p^2}{C^2 L} \cdot A^2 + V(\vec{\Phi}) \quad (8)$$

3. Coordenadas relativas

Para una parte de la discusión que sigue será más conveniente pasar a coordenadas relativas

$$\xi_r = \sum_k \alpha_r^k \cdot \Psi_k \quad ; \quad \Psi_k = \sum_r \alpha_r^k \cdot \xi_r \quad (9)$$

Exigimos que los α_r^k representen una transformación ortogonal y elegimos, en particular, $\alpha_1^k = 1/n$. Esto deja una transformación ortogonal en el subespacio $r = 2, 3, \dots, n$ indeterminada, que, por el momento, no necesita especificarse. Nuestra elección hace a

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k \Psi_k \quad (10)$$

la coordenada del "centro de gravedad" o, como la tenemos que llamar aquí, la coordenada de la corriente. Las otras coordenadas, ξ_r , $r = 2, 3, \dots, n$, se refieren a movimientos relativos entre las partículas.

En las variables ξ la energía se expresa por

$$E = \sum'_{r=2} \frac{1}{2} \cdot I \cdot \dot{\xi}_r^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(I + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2} \right) \cdot \dot{\xi}_1^2 + V(\vec{\xi}) \quad (11)$$

donde usamos el signo Σ' para indicar suma en el subespacio $r \neq 1$.

De (11) encontramos los momentos canónicos

$$\pi_1 = \left(I + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2} \right) \cdot \dot{\xi}_1 \quad ; \quad \pi_r \neq 1 = I \cdot \dot{\xi}_r$$

y los operadores de corriente y de Hamilton

$$J = \frac{\epsilon \sqrt{n}}{2\pi} \cdot \pi_1 \cdot \left(I + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2} \right)^{-1} \quad (12)$$

$$\mathcal{H} = \sum'_{r=2} \frac{1}{2I} \cdot \pi_r^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(I + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2} \right)^{-1} \cdot \pi_1^2 + V(\vec{\xi}) \quad (13)$$

Aunque las expresiones (12) y (13) parecen ser mucho más simples que las correspondientes expresiones (6) y (7), no son convenientes para ser resueltas en forma directa, debido a que sus autofunciones no obedecen condiciones simples de periodicidad en las variables ξ .

4. Solución del caso idealizado

Llamaremos modelo idealizado a aquel en el cual ponemos

$$V(\vec{\varphi}) = 0 \quad (14)$$

Las razones para esta suposición, bastante irreal desde el punto de vista físico, son las siguientes:

- a) el modelo idealizado puede ser resuelto rigurosamente,
- b) contiene ya las características fundamentales de nuestro problema
- c) permite, después, estudiar las modificaciones introducidas por la existencia de la interacción entre las partículas.

La solución de (6) y (7) con la condición (14) es inmediata. Está dada por la función de Schrödinger

$$\Psi_{\vec{m}} = \exp(i \vec{m} \cdot \vec{\varphi}) \quad (15)$$

donde las componentes del vector $\vec{m}$ están restringidas a valores enteros, debido a la condición de periodicidad

$$\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n), \quad m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16)$$

(6) y (7) proveen inmediatamente, junto con (15), los autovalores de corriente y energía para nuestro sistema idealizado como función de las componentes del vector $\vec{m}$ de los números cuánticos,

$$J_{\vec{m}} = \frac{\epsilon \hbar}{2\pi} \cdot \left(1 + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2}\right)^{-1} \cdot \left(\sum_k m_k\right) \quad (17)$$

$$E_{\vec{m}} = \frac{\hbar^2}{2I} \cdot \left\{ \sum_k (m_k) - \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2} \cdot \left(1 + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2}\right)^{-1} \cdot \left(\sum_k m_k\right)^2 \right\} \quad (18)$$

Transformando nuestras expresiones a las coordenadas ξ en (9), obtenemos

$$\psi_{\vec{\mu}} = \exp(i \vec{\mu} \cdot \vec{\xi}) \quad (19)$$

donde el vector $\vec{\mu}$ de los números cuánticos

$$\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$$

tiene ahora las componentes

$$\mu_r = \sum_k \alpha_r^k \cdot m_k \quad ; \quad \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_k m_k$$

Las componentes μ_r ya no tienen, sin embargo, valores enteros y dependen de la elección del sistema de coordenadas. Ellas permiten escribir los autovalores de corriente y energía en la forma

$$J_{\vec{\mu}} = \frac{\epsilon \sqrt{n} \hbar}{2\pi} \cdot \left(1 + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2}\right)^{-1} \cdot \mu_1 \quad (20)$$

$$E_{\vec{\mu}} = \sum_{h=2}^n \frac{\hbar^2}{2I} (\mu_r)^2 + \frac{1}{2} \cdot \hbar^2 \cdot \left(1 + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2}\right)^{-1} \cdot (\mu_1)^2 \quad (21)$$

5. Los valores principales del vector de los números cuánticos

De entre los numerosos vectores de los números cuánticos permitidos por (16), consideraremos separadamente aquellos cuyos componentes son todas entre sí,

$$\vec{M} = (M, M, \dots, M) \quad (22)$$

Los llamaremos vectores principales de los números cuánticos. Ellos están caracterizados por un solo número entero M . Los correspondientes autovalores de corriente y energía serán llamados autovalores principales.

Podemos observar que la variable de la corriente (10) tiene una dirección paralela a los vectores principales de los números cuánticos, de manera que en el sistema de coordenadas ξ un vector principal adquiere las componentes

$$\vec{M}' = (\sqrt{n} \cdot M, 0, 0, \dots, 0) \quad (23)$$

Los autovalores principales de corriente y energía son

$$J_{\vec{M}} = M \cdot \frac{n \epsilon \hbar}{2\pi} \cdot \left(1 + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2}\right)^{-1} \quad (24)$$

$$E_{\vec{M}} = \frac{1}{2} \cdot M^2 \cdot n \cdot \hbar^2 \cdot \left(1 + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2}\right)^{-1} \quad (25)$$

Comparemos ahora los autovalores principales de la energía, (25), con los autovalores de los varios estados vecinos no principales. Sea $\vec{s}$ un vector arbitrario de los números cuánticos y hagamos la diferencia de energía

$$\Delta E(\vec{M}, \vec{s}) = E_{\vec{M} + \vec{s}} - E_{\vec{M}} \quad (26)$$

Encontramos

$$\begin{aligned} \Delta E(\vec{M}, \vec{s}) = & \frac{\hbar^2}{2I} \left\{ \sum_k (s_k)^2 - \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2} \cdot \left(I + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2} \right)^{-1} \cdot \left(\sum_k s_k \right)^2 \right\} \\ & + M \cdot \hbar^2 \cdot \left(I + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2} \right)^{-1} \cdot \left(\sum_k s_k \right) \end{aligned} \quad (27)$$

Llamaremos energéticamente estable ante una transición $\vec{s}$, a un estado $\vec{M}$ si

$$E(\vec{M}, \vec{s}) > 0 \quad (28)$$

Antes de poder proseguir con la discusión de la condición de estabilidad, debemos mencionar, sin embargo, que en el caso de un vector principal $\vec{M}$ la autofunción (15) de nuestro estado es simétrica en las coordenadas de todas las partículas.

En el caso de un gas de Bose, la inducción da a los estados principales un papel privilegiado.

Un gas de Fermi de $2n$ partículas no posee estados principales. Sin embargo, si agrupamos las $2n$ partículas en n pares, aquellos estados en los cuales los n centros de gravedad de los pares tienen el mismo impulso (y, luego la misma velocidad) se comportan como los estados principales arriba descritos, sin que estos pares sean bosones*.

6. La condición de estabilidad

Por medio de la desigualdad

$$n \cdot \sum_k (s_k)^2 \geq \left(\sum_k s_k \right)^2 \quad (29)$$

se encuentra fácilmente que el primer término del segundo miembro de (27) es siempre positivo

$$\frac{\hbar^2}{2I} \cdot \left\{ \sum_k (s_k)^2 - \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2} \cdot \left(I + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2} \right)^{-1} \cdot \left(\sum_k s_k \right)^2 \right\} \geq \frac{1}{2} \hbar^2 \cdot \left(I + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4\pi^2} \right)^{-1} \cdot \sum_k (s_k)^2$$

* Ver: A. BOHR y B. MOTTELSON, Phys. Rev. 125, 495, 1962

Por lo tanto es una condición suficiente para la estabilidad que

$$\sum_k s_k > 0 \quad (30)$$

(suponiendo $M > 0$). Entonces, la inestabilidad puede sólo ocurrir si

$$\sum_k s_k < 0 \quad (31)$$

Para obtener estabilidad en el caso (31), la condición

$$2 \cdot M < \left\{ \left(1 + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4 \pi} \right) \cdot \sum_k (s_k)^2 - \frac{\epsilon^2 L}{4 \pi} \cdot \left(\sum_k s_k \right)^2 \right\} \cdot \left| \sum_k s_k \right|^{-1} \quad (32)$$

tiene que ser satisfecha.

Para ver el significado de (32) consideremos el caso

$$s_1 = s_2 = \dots = s_{n'} = -f, \quad s_{n'+1} = \dots = s_n = 0$$

Esta elección corresponde al caso que n' de nuestras partículas hacen transiciones individuales cambiando su número en $-f$, mientras que las restantes no son afectadas. (32) da en este caso

$$2 \cdot M < f \cdot \left\{ 1 + (n - n') \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4 \pi^2 I} \right\}$$

Si $n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4 \pi^2 I} \gg 1$, como veremos, es el caso de superconductores, y si $n' \ll n$, existe un amplio rango de valores de M y, luego, de estados principales, que son estables con respecto a transiciones a estados vecinos, aun si aquellos estados pertenecen a valores de corriente menores, de acuerdo a (17) y (31). Esta característica desaparece, como se ve de (32), tan pronto como omitimos los términos debidos a la inducción.

Si consideramos transiciones para las cuales $n' \cong n$, encontramos nuevamente inestabilidad. Sin embargo tales transiciones requieren procesos en los cuales la mayoría de las partículas están afectadas simultáneamente. En movimientos térmicos, en los cuales procesos individuales actúan independientemente, estas transiciones son extremadamente improbables. Ellos ocurren, sin embargo, en fenómenos macroscópicos, cuando un campo externo actúa simultáneamente sobre todas las partículas.

Consideraremos, finalmente, nuestro proceso en las coordenadas ξ . De acuerdo a (23), un estado principal está caracterizado por el hecho que todos los movimientos relativos de las partículas están en el estado fundamental. Una

transición $\vec{s}$ conduce, en general a estados en los cuales los movimientos relativos se excitan. Nuestra condición de estabilidad (28) significa, que en el caso considerado, la excitación de los movimientos relativos cuesta más energía que la que puede ser ganada disminuyendo la corriente.

7. La interacción estática entre las partículas

Antes de poder comparar nuestros resultados con la evidencia experimental debemos todavía asegurarnos que las propiedades que hemos encontrado, no desaparecen si tomamos en cuenta la interacción $V(\vec{\varphi})$ en (8) y (13).

Suponemos que la interacción $V(\vec{\xi}) = V(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$ es principalmente debida a la repulsión coulombiana entre las n cargas. Depende sólo de las coordenadas relativas y representa, escrita en las φ 's, una función periódica sobre el círculo. Si la repulsión es suficientemente fuerte, ella fijará las n partículas en puntos equidistantes del círculo, pero les permitirá efectuar oscilaciones de amplitud pequeña y de frecuencia correspondientemente alta, alrededor de sus posiciones relativas de equilibrio. Estas serán las vibraciones de plasma de nuestro sistema. La variable de corriente, (10), sin embargo, no será afectada por la interacción.

Las autofunciones de (7) y (13) tienen que ser funciones periódicas en las φ . Como la interacción no afectó la dependencia en ξ_1 en (19), la periodicidad requiere que las autofunciones sean de la forma

$$\Psi_{\vec{\mu}} = v_{\vec{\mu}}(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n) \cdot \exp(i \cdot \vec{\mu} \cdot \vec{\xi}) \quad (33)$$

donde las componentes de $\vec{\mu}$ son las mismas que las dadas por (16) y (19). Las funciones $v_{\vec{\mu}}(\vec{\xi})$ son periódicas en φ pero dependen sólo de las coordenadas relativas $\xi_{i \neq 1}$. Dependen de los $n - 1$ números cuánticos $\vec{\mu} = (\mu_2 \mu_3 \dots \mu_n)$. En ausencia de interacciones, las funciones $v_{\vec{\mu}}(\vec{\xi})$ tienden todas a un valor constante; en el límite de repulsión fuerte tienden a un producto de polinomios de Hermite, correspondiente a las $n - 1$ oscilaciones de plasma del sistema.

Ahora, es fácil ver que los autovalores de la corriente, (20) y (24), no son cambiados por la interacción y que los autovalores de la energía (25) de los estados principales son solamente desplazados en un valor constante, es decir por la energía cero de los movimientos relativos. En consecuencia, los estados principales no son esencialmente alterados por la interacción.

Los autovalores de energía de los estados no-principales son modificados esencialmente por la interacción. Las diferencias de energías entre estados vecinos de los movimientos relativos se incrementan por la repulsión, tanto más que la repulsión es grande. Tal incremento, sin embargo, amplía nuestra condición de estabilidad (32) porque tiende a hacer el rango de valores estables de M aún mayor. El número de valores principales estables depende, luego, del tamaño de la interacción $V(\vec{\varphi})$ y nuestra falta de conocimiento de este tamaño nos impide, por el momento, hacer afirmaciones cuantitativas sobre este número.

La intervención de la interacción se requiere, también, desde otro punto de vista. Como el número n puede ser apreciable y dado que el espaciado de los niveles de energía correspondiente a los movimientos relativos es muy denso en el caso de un anillo macroscópico, los movimientos relativos, según nuestro modelo idealizado, darían una contribución sensible al calor específico del sistema, siguiendo la ley de un gas de bosones libres. La evidencia experimental no favorece este punto de vista. En consecuencia tenemos que suponer que la repulsión $V(\vec{\varphi})$ impide tal contribución al calor específico, aún si esta repulsión no es tan drástica como la que conduce al caso límite de vibraciones de plasma.

8. Comparación con resultados experimentales

Como hemos visto, nuestro modelo da cuenta de la existencia de corrientes estables en un supraconductor, por sus estados principales y por la existencia de un límite superior de la intensidad de tales corrientes. Sin embargo, todavía no permite determinar cuantitativamente este límite. El modelo nos dice, además, que en un superconductor deben existir otras corrientes que no son estables sino que decrecen espontáneamente por procesos microscópicos internos de origen térmico, teniendo, por lo tanto una resistencia finita, positiva o negativa. No sería imposible la verificación de este resultado del modelo teórico.

La comparación más directa con los experimentos se refiere a los autovalores de la corriente (24). Suponiendo

$$n \frac{\epsilon^2 L}{4 \pi^2} \gg I \quad (34)$$

(24) se convierte en

$$J_{\vec{M}} = M \cdot \frac{2 \pi \hbar}{\epsilon L} \quad (35)$$

Para un cilindro de radio ρ y de largo ℓ tenemos $L = 4 \pi^2 \rho^2 / (\ell \cdot c^2)$ y $H_M = 4 \pi \cdot J_M / (\ell \cdot c)$. A partir de (35) obtenemos

$$\pi \rho^2 \cdot H_M = M \cdot \frac{2 \pi \hbar c}{\epsilon} \quad (36)$$

(36) coincide con los valores experimentales encontrados por Deaver y Fairbankdel y por Doll y Näbauer

$$\epsilon = 2 \cdot e \quad (37)$$

Tenemos, luego, que identificar nuestras n partículas con los pares de electrones que fueron supuestos, primero, por Schafroth formando un gas de Bose condensado y que son considerados por Bardeen, Cooper y Shrieffer como unidos entre sí por fuerzas de la red.

Nuestras fórmulas (24) y (25) pueden ser consideradas como generalizaciones de las fórmulas empíricas (36) y (37).

9. Campo magnético externo

Antes de concluir el tema del trabajo consideraremos, brevemente, el mecanismo de acuerdo al cual nuestro modelo reacciona en presencia de un campo magnético externo. Este campo sea determinado por su potencial vector $\mathcal{U}_\varphi(\rho)$.

Introduciendo el campo externo $\mathcal{U}$, nuestras relaciones (3), (4), (5), (6), (7) y (8) quedan reemplazadas por

$$p_i = I \cdot \dot{\varphi}_i + \rho \cdot \frac{\epsilon}{c} \cdot \mathcal{U} + \frac{\epsilon^2 L}{4 \pi^2} \sum_k \dot{\varphi}_k \quad (3')$$

$$I \cdot \dot{\varphi}_i = p_i - \rho \cdot \frac{\epsilon}{c} \cdot \mathcal{U} - \frac{\epsilon^2 L}{4 \pi^2} \cdot (I + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4 \pi^2})^{-1} \cdot \{ \sum_k (p_k - \rho \cdot \frac{\epsilon}{c} \cdot \mathcal{U}) \} \quad (4')$$

$$A = \frac{\epsilon c L}{4 \pi^2 \rho} \cdot (I + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4 \pi^2})^{-1} \cdot \sum_k (p_k - \rho \cdot \frac{\epsilon}{c} \cdot \mathcal{U}) \quad (5')$$

$$J' = \frac{\epsilon}{2 \pi} \cdot (I + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4 \pi^2})^{-1} \cdot \sum_k (p_k - \rho \cdot \frac{\epsilon}{c} \cdot \mathcal{U}) \quad (6')$$

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{2I} \cdot \{ \sum_i (p_i - \rho \cdot \frac{\epsilon}{c} \cdot \mathcal{U})^2 - \frac{\epsilon^2 L}{4 \pi^2} \cdot (I + n \cdot \frac{\epsilon^2 L}{4 \pi^2})^{-1} \cdot [\sum_k (p_k - \rho \cdot \frac{\epsilon}{c} \cdot \mathcal{U})]^2 \} + V(\vec{r}) \quad (7')$$

$$\mathcal{H}' = \sum_i \frac{1}{2I} \cdot (p_i - \rho \cdot \frac{\epsilon}{c} \cdot \mathcal{U} - \rho \cdot \frac{\epsilon}{c} \cdot A)^2 + \frac{1}{2} \frac{4\pi^2 \rho^2}{c^2 L} A^2 + V(\vec{\varphi}) \quad (8')$$

La relación (8') muestra inmediatamente que no puede tener sino un rango de aplicación limitado. En el primer término contiene, correctamente, la suma de las acciones de los campos magnéticos externo e interno, $\mathcal{U}$ y A . En el segundo término, sin embargo, sólo aparece el campo interno A . Esto no corresponde a la situación física que estamos tratando. Este hecho proviene de la forma, desafortunadamente convencional, en que hemos introducido el concepto de campo magnético externo.

Si el campo $\mathcal{U}$ es producido por un segundo circuito, la energía magnética del sistema está dada por

$$\frac{1}{2} \cdot L_{11} \cdot J_1^2 + L_{12} \cdot J_1 \cdot J_2 + \frac{1}{2} L_{22} \cdot J_2^2 \quad (38)$$

mientras (8') solo da cuenta del primero de los tres términos de (38). En este caso el problema debe ser tratado de un modo diferente, considerando desde el principio tanto los circuitos como la energía magnética total, (38), utilizando un método análogo al que hemos aplicado anteriormente. La razón para la inaplicabilidad de (8'), en este caso, proviene del hecho que no existe un "campo magnético externo". El campo participa activamente en el fenómeno, salvo en el límite $L_{12}/L_{22} \rightarrow 0$.

(8') tiene, sin embargo, todavía un rango de aplicación, al menos en forma aproximada, si usamos un campo magnético de un imán permanente "rígido". Esto no es evidente, pero proviene del hecho que los términos de energía que omitimos se cancelan, al menos en primera aproximación. Los dos términos que se compensan son la energía de superposición de los dos campos A y $\mathcal{U}$ y la energía cinética interna (energía de Zeeman) del imán *

Después de haber mencionado las restricciones con las cuales (8') puede ser usada, podemos resolver el problema de los autovalores de (6') y (7'). Las autofunciones (15), (19) y (33) no se alteran por el campo $\mathcal{U}$. Lo que cambia son los autovalores de la corriente y de la energía. El cambio consiste, simplemente en el reemplazo

$$m_k \rightarrow m_k - N_k \quad (39)$$

con

$$N_k = \frac{n \epsilon}{h c} \rho \mathcal{U} \quad (40)$$

* Una discusión más detallada de esta situación física inesperada ha sido dada en un artículo remitido a *Acta Physica Austriaca*.

en las expresiones (17) y (18).

Podemos notar que los N_k forman, en el caso simple que estamos considerando, un vector principal (aun no siempre de números enteros). Los autovalores de corriente y de energía resultan

$$J'_m = J_m \cdot \vec{N} = J_m \cdot J_N \quad (41)$$

$$E'_m = E_m \cdot \vec{N} \quad (42)$$

J_N en (41) representa la corriente inducida en nuestro circuito por el campo $\mathcal{U}$. Nuestro circuito exhibe, por lo tanto, el comportamiento diamagnético esperado por F. London.

Si enfriamos una muestra superconductora sin corriente en un campo magnético $\mathcal{U}$, obtenemos de (41) $m_k = N_k$ (o el número entero más cercano a N_k). El estado principal $\vec{N}$ está, por lo tanto, preparado, pero su corriente está todavía cancelada por la corriente de inducción correspondiente. Quitando adiabáticamente el campo $\mathcal{U}$ aparece la supercorriente J_N . Esto es lo que observó Kammerlingh Onnes en 1911.

10. Comparación con la electrodinámica cuántica

En el modelo simple que hemos estudiado nos hemos basado en la expresión (2) de la energía dada por la teoría clásica de las corrientes casies-tacionarias. Tenemos, todavía, que averiguar, como esta expresión se encuadra en el esquema general de la electrodinámica cuántica.

La electrodinámica cuántica se basa en la validez simultánea de las ecuaciones mecánicas de Dirac, las cuales representan al campo electrónico, y de las ecuaciones de Maxwell que describen la parte electromagnética del sistema. Es bien sabido que el conjunto de estas ecuaciones simultaneas permite formar una expresión de energía total, la cual, simplemente, suma las energías de las partes mecánicas y electromagnéticas del sistema.

En nuestro tratamiento, las ecuaciones mecánicas de Dirac, que en nuestro caso están representadas por una ecuación de Schrödinger no relativista, están reemplazadas por una ecuación más general, en la cual, además de la energía cinética y potencial también interviene la energía del campo magnético para determinar la función de Schrödinger. Eso significa,

que la energía del campo magnético del sistema, la que en la electrodinámica cuántica forma parte del campo de radiación (fotones transversales virtuales) puede ser aproximadamente representada por un operador que opera sobre la función de Schrödinger. Esta aproximación corresponde a la aproximación casiestacionaria de la teoría clásica, la que ignora la corriente de desplazamiento de Maxwell y los procesos radiactivos. Ella muestra que la teoría cuántica todavía permite tener en cuenta las interacciones magnéticas incluso en casos en los cuales estas interacciones son dominantes, pero que la teoría cuántica de corrientes macroscópicas está afuera del alcance de la teoría de las perturbaciones de la electrodinámica cuántica.

