

CNEA - AC. 4/88

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA

MANUAL DEL CURSO DE METODOLOGIA

Y APLICACION DE RADIOISOTOPOS

INTEGRADORES

CATALINA SIGNORETTA

BUENOS AIRES

- 1988 -

INTEGRADORES

1.0. INTRODUCCION

En determinadas experiencias la variación de actividad es tan rápida que el uso de un escalímetro se torna inconveniente y, a veces, imposible. En tales circunstancias se usa un promediador de frecuencias o integrador (en inglés: "ratemeter").

El integrador es un instrumento que indica la actividad "medida" directamente, a diferencia de un escalímetro en el cual, como se sabe, se acumulan cuentas durante un tiempo prefijado. Tienen en común que ambos se conectan a un detector, amplificador y discriminador. Se puede observar en la Fig. 1 un diagrama en bloque del integrador.

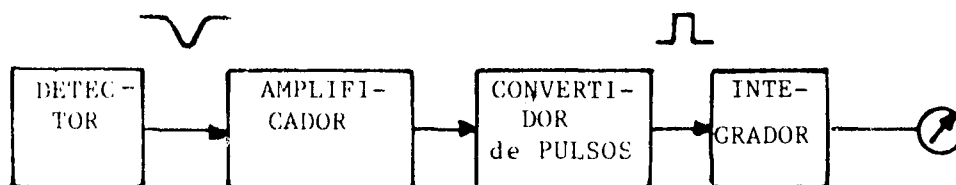


Fig.1-Diagrama en bloque de un sistema de medición de actividad con un integrador

El uso del integrador se impone en aquellos casos donde se miden radionucleídos de períodos muy cortos y/o donde se produce una variación rápida de la actividad debida al uso de radionucleídos como trazadores en procesos dinámicos. (Centellografía lineal, medición de niveles de líquidos, espesores, etc.) Otro uso del integrador es en instrumentos de inspección y monitoraje.

Estos medidores de frecuencia media de pulsos tienen, como parte fundamental de su circuito, un condensador C en paralelo con una resistencia R (ver Fig.2)

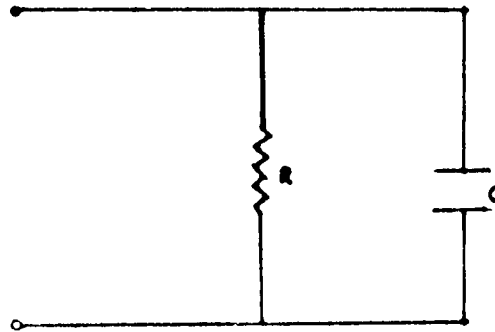


Fig.2-Circuito fundamental de un Integrador.

Cada pulso proveniente del detector suministra al condensador una carga eléctrica constante que, a su vez, se descarga continuamente a través de la resistencia. El voltaje entre el condensador crece hasta un valor de equilibrio y, en estas circunstancias, la velocidad de descarga a través de la resistencia es igual a la velocidad de entrada de las cargas de los pulsos. Si la carga de los pulsos es constante se verá más adelante que el valor del voltaje de equilibrio es:

$$V_e = N \cdot q \cdot R \quad (1)$$

Siendo N: número promedio de pulsos/seg. (ó cuentas /seg.)

Se ve que hay una relación lineal entre V_e y la actividad. Midiendo V_e se tendrá un valor proporcional a la actividad media. El valor de V_e es independiente del capacitor pero, como veremos más adelante, la capacidad afectará la precisión y el tiempo requerido para alcanzar el equilibrio.

Si se calibra el sistema de medición final con un generador de pulsos podrá obtenerse la lectura directamente en cuentas/minuto. En los integradores esto se hace en forma analógica a través de la desviación de la aguja indicadora del instrumento de medida.

2.0. FUNDAMENTOS.

En la Fig. 3 puede observarse el circuito de un integrador más detallado que el de la Fig. 2.

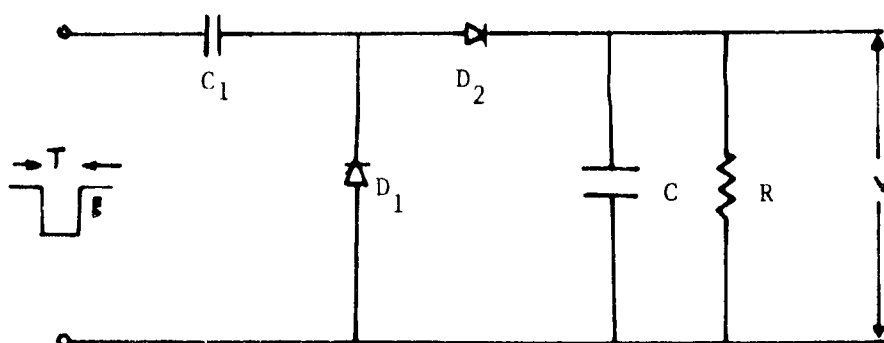


Fig.3-Circuito de un Integrador.

Antes de ingresar al integrador, los pulsos provenientes del detector son convenientemente amplificados y transformados en pulsos cuadrados todos con la misma amplitud (E) y duración (T).

Al entrar un pulso se carga primero el condensador C_1 a través del diodo D_1 hasta la tensión E . Cuando el impulso finaliza su ingreso vuelve a cero la tensión de entrada y se "cierra" el diodo D_1 "habilitándose" entonces el diodo D_2 con lo que se produce la llegada de carga al condensador C (se descarga el condensador C_1 en el C).

Por cada pulso proveniente del detector se suministra al condensador C una cantidad de carga eléctrica constante q que se incorpora a la carga Q de C. La carga así inyectada escapa continuamente a través de la resistencia R produciéndose la circulación de una corriente eléctrica y generando en sus extremos una diferencia de potencial V . La carga sobre el condensador puede leerse continuamente, ya sea por la lectura de la diferencia de potencial entre el condensador a través de un voltímetro, o por la lectura de la corriente eléctrica a través de la resistencia,

2.1. CARGA DEL CONDENSADOR EN EL EQUILIBRIO

Sea N el número medio de pulsos por unidad de tiempo que llegan a la entrada del integrador obedeciendo a una distribución de Poisson y provenientes de una fuente radiactiva de actividad constante.

Consideremos que la carga Q del condensador C es cero a $t=0$. El número de pulsos promedio que ingresan durante un intervalo de tiempo t y $t + dt$ será $N \cdot dt$ y, por lo tanto, el incremento de carga en el condensador será $q \cdot N \cdot dt$.

Debido a que la pérdida de carga a través de la resistencia sigue una ley exponencial, en un tiempo posterior t_0 el incremento de carga habrá decaído a:

$$dq = q \cdot N \cdot e^{-\frac{(t_0 - t)}{RC}} \cdot dt \quad (2)$$

Por lo tanto la carga promedio del condensador (Q_m) en el tiempo t_0 será:

$$Q_m(t_0) = \int_0^{t_0} q \cdot N \cdot e^{-\frac{(t_0 - t)}{RC}} \cdot dt \quad (3)$$

O sea:

$$Q_m(t_0) = q \cdot N \cdot RC \left(1 - e^{-\frac{t_0}{RC}} \right) \quad (4)$$

Si el tiempo t_0 transcurrido es mucho mayor que RC ($t_0 \gg RC$) se alcanzará un equilibrio y la carga promedio del condensador será, a los fines prácticos, constante (siempre y cuando se mantenga constante la velocidad de entrada de los pulsos, o sea, la actividad de la fuente radiactiva).

De la expresión (4) se deduce para $t_0 \gg RC$:

$$Q_{me}(t_0 \gg RC) = q \cdot N \cdot RC \quad (5)$$

Si se hace una analogía con el decaimiento radiactivo ($A \rightarrow N$ o $A = \frac{N}{\tau}$ y por lo tanto $N = A \cdot \tau$) puede considerarse que cada pulso tiene una vida media RC en el circuito integrador.

Se ve entonces que, en el equilibrio, la diferencia de potencial a través del condensador es:

$$V_e = \frac{Q_{me}}{C} = q \cdot N \cdot R \quad (6)$$

y que resulta independiente de C. Por lo tanto, en el equilibrio la carga promedio del condensador es constante y la corriente que pasa a través de la resistencia viene dada por:

$$i = \frac{V_{me}}{R} = q \cdot N \quad (7)$$

3.0. ESTADISTICA DE LOS INTEGRADORES

3.1. OBSERVACIONES INDIVIDUALES SIMPLES

Si se hace una observación de la carga en el equilibrio el valor medio esperado será Q_{me} , pero las observaciones individuales simples estarán distribuidas alrededor de Q_{me} con una cierta desviación standard.

Debido a que el número de pulsos que llegan al integrador obedece

la ley de Poisson, la desviación standard correspondiente al ingreso de n pulsos será $\sqrt{n}$. Por lo tanto la desviación standard de la carga proporcionada al integrador en un intervalo de tiempo t y $t + dt$ será $q\sqrt{Ndt}$.

Si la lectura se realiza un tiempo t_0 después, la desviación típica hará una contribución de:

$$q \cdot N \cdot dt \cdot e^{-\frac{(t_0 - t)}{RC}} \quad (8)$$

a la desviación standard de Q_m .

Todas las desviaciones standard provenientes de distintos intervalos son independientes y, por propagación de errores, el cuadrado de la desviación típica de la lectura será igual a la suma de los cuadrados de las desviaciones individuales. Por lo tanto la varianza total $\sigma^2(Q)$ de Q en el tiempo t_0 será:

$$\begin{aligned} \sigma^2(Q) &= \int_0^{t_0} q^2 \cdot N \cdot e^{-\frac{2(t_0 - t)}{RC}} dt \\ &= \frac{1}{2} q^2 \cdot N \cdot RC \cdot e^{-\frac{2t_0}{RC}} \quad (9) \end{aligned}$$

y para $t_0 \gg RC$

$$\sigma^2(Q) = \frac{1}{2} q^2 \cdot N \cdot RC \quad (10)$$

0 sea

$$\sigma(Q) = q \cdot \sqrt{\frac{N \cdot RC}{2}} \quad (11)$$

Por lo tanto el error relativo será:

$$\frac{\sigma(Q)}{Q_m} = \frac{1}{\sqrt{2N \cdot RC}} \quad (12)$$

Y el error probable relativo:

$$E = \frac{0,6745}{\sqrt{2 N \cdot RC}} \quad (13)$$

Un criterio común para integradores es usar el porcentaje del error probable:

$$\% E = \frac{0,675 \times 100}{\sqrt{2 N \cdot RC}} \quad (14)$$

Este parámetro establece que el 50 % de las observaciones producirán valores entre los límites definidos por la siguiente ecuación:

$$Q_m \pm 0,675 \sigma (50\%) \quad (15)$$

A partir de la expresión (14) puede construirse un gráfico de %E en función de la velocidad media de llegada de pulsos ($\text{cuentas}/\text{min.}$), para distintos valores de RC. (Ver fig. 4)

3.2. DESVIACION STANDARD DE OBSERVACIONES CONTINUAS.

En un integrador la lectura se hace a través de las fluctuaciones de la aguja de un amperímetro. Si, a su vez, el equipo se conecta a un registrador gráfico la información la dará una "lapicera" que registra gráficamente las fluctuaciones de la aguja del amperímetro. Si se hace un registro durante un tiempo finito T se tendrán observaciones continuas de Q que corresponden a un infinito número de lecturas simples.

Se puede demostrar que la desviación standard correspondiente a

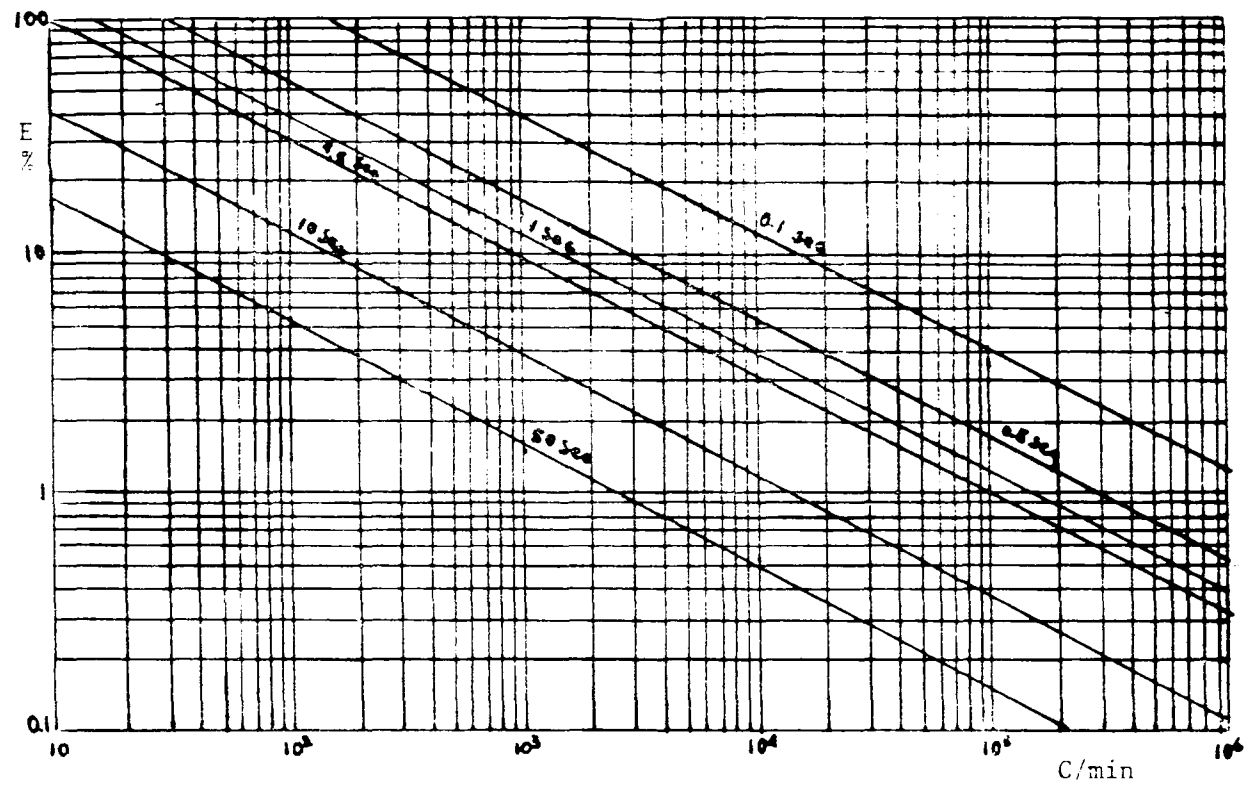


Fig.4-Error probable en función de la actividad (c/min).

observaciones continuas $\sigma(T)$ está relacionada con la desviación simple (Q) por la siguiente expresión:

$$\frac{\sigma(T)}{\sigma(Q)} = \left\{ 2 \frac{RC}{T} \left[1 - RC - (1 - e^{-\frac{T}{RC}}) \right] \right\}^{1/2} \quad (16)$$

Si $T \gg RC$

$$\frac{\sigma(T)}{\sigma(Q)} = 2 \frac{RC}{T} \quad (17)$$

Como $\sigma(Q) = q \cdot \left(\frac{N \cdot RC}{2} \right)^{1/2}$, operando en la expresión (17) se llega a:

$$\sigma(T) = \frac{q \cdot N \cdot RC}{\sqrt{TN}} \quad (18)$$

Y como $Q = q \cdot N \cdot RC$, reemplazando en (18) se obtiene:

$$\frac{\sigma(T)}{Q} = \frac{1}{\sqrt{N \cdot T}} \quad (19)$$

que es equivalente a la ya vista en estadística para una larga medición:

$$\frac{\sigma_B}{B} = \frac{1}{\sqrt{B}} = \frac{1}{\sqrt{A_B \cdot t_B}} \quad (20)$$

(Siendo B: número de cuentas acumuladas en un tiempo t_B).

4.0. TIEMPO DE EQUILIBRIO.

La ecuación (4):

$$Q_m(t_o) = q.N.RC \left(1 - e^{-\frac{t_o}{RC}} \right)$$

muestra que el acercamiento al equilibrio viene dado por una curva similar a la del crecimiento de la hija, con una vida media RC , a partir de un radionucleído de período largo (el condensador puede compararse con la hija, y la fuente radiactiva, generadora de los pulsos eléctricos, con la madre). En la práctica se acepta que el equilibrio se ha alcanzado cuando la carga $Q_m(t_o)$ difiere del valor Q_{me} en menos de un error probable $E = 0,6745 \sigma(Q)$ ocasionado por fluctuaciones estadísticas. O sea, "hay equilibrio" cuando:

$$Q_{me} - Q_m(t_o) = 0,6745 \sigma(Q) \quad (21)$$

El tiempo a partir del cual puede considerarse que se ha alcanzado el equilibrio (t_e) viene dado por:

$$t_e = RC(0,394 + \frac{1}{2} \ln^2 N.RC) \quad (22)$$

El valor de la lectura en cualquier tiempo (t_o) viene dado por:

$$Q_m(t_o) = q.N.RC \left(1 - e^{-\frac{t_o}{RC}} \right) \quad (a)$$

o sea:

$$Q_m(t_o) = q.N.RC - q.N.RC \cdot e^{-\frac{t_o}{RC}} \quad (b)$$

reordenando:

$$q.N.RC - Q_m(t_o) = q.N.RC \cdot e^{-\frac{t_o}{RC}} \quad (c)$$

Como $q.N.RC$ es el valor de la lectura en el equili-

brío, se ve que el término $q.N.RC. e^{-\frac{t_o}{RC}}$ indica en cuanto difiere del equilibrio el valor de la lectura en un tiempo t_o cualquiera. Si se acepta que este valor debe ser menor o igual que el error probable para considerar al "sistema" en equilibrio, $t_{(o)} = t_{(e)}$ cuando se cumple:

$$q.N.RC e^{-\frac{t_o}{RC}} = 0,6745 \sigma(Q) \quad (d)$$

Como $\sigma(Q) = q \cdot \frac{N \cdot RC}{2}^{\frac{1}{2}}$, reemplazando en (d) se tiene:

$$e^{-\frac{t_e}{RC}} = \frac{0,6745}{(2N.RC)^{1/2}} \quad (e)$$

o sea:

$$e^{\frac{t_e}{RC}} = \frac{(2N.RC)^{1/2}}{0,6745} \quad (f)$$

Con lo que se llega a:

$$\frac{t_e}{RC} = \ln \frac{(2N.RC)^{1/2}}{0,6745} = \frac{1}{2} \ln 2N.RC - \ln 0,6745 \quad (g)$$

como $\ln 0,6745 = -0,394$ reordenando (g) se obtiene:

$$t_e = RC \left(\frac{1}{2} \ln 2 N.RC + 0,394 \right)$$

En la Fig. 5(a) se muestra un gráfico en papel semilogarítmico a partir del cual se puede obtener el tiempo que debe transcurrir para alcanzar el equilibrio, según el criterio adoptado, para distintos valores de RC. Para los mismos fines puede utilizarse el gráfico de la Fig. 5(b).

A los fines prácticos suele considerarse que se alcanzó el equili-

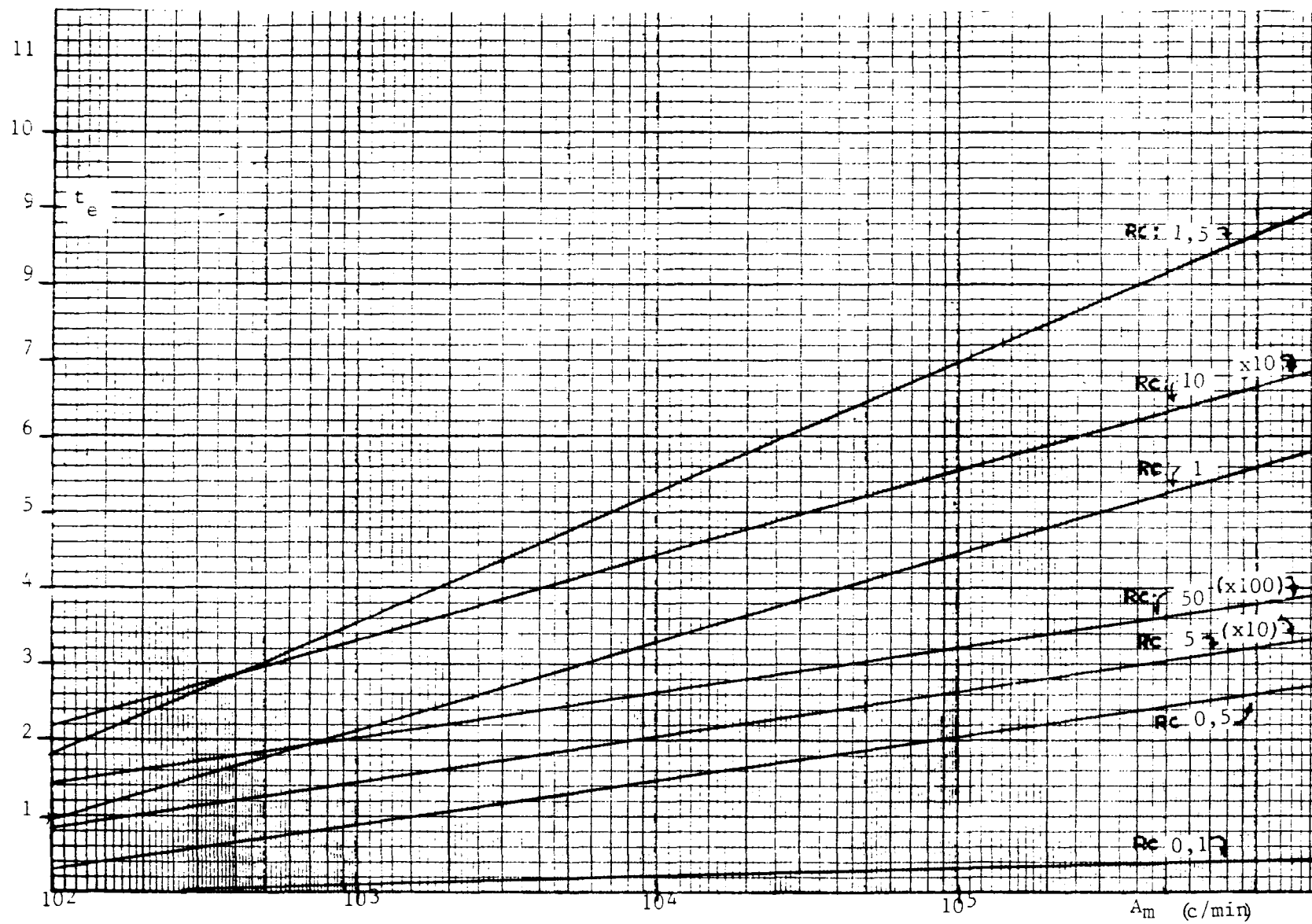


Fig.5 (a)- Curva para obtener el tiempo de equilibrio.

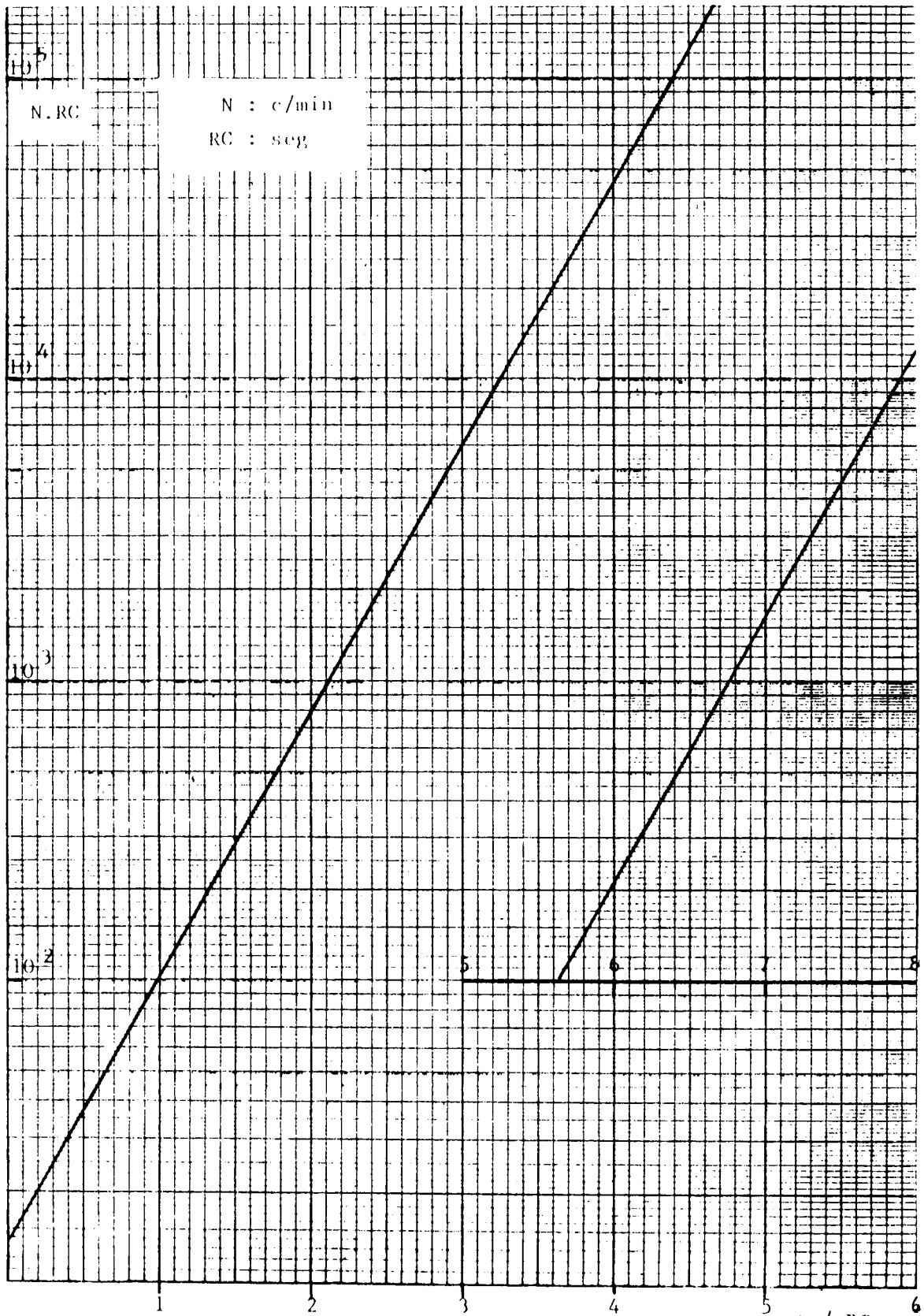


Fig.5 (b)- Curva para obtener el tiempo de equilibrio. t_e / RC

brio cuando $\approx 5RC$.

5.0. MEDICIONES DINAMICAS.

El factor exponencial $(1 - e^{-\frac{t_0}{RC}})$ de la ecuación (4) es equivalente al de la expresión que da la actividad de la hija que se obtiene a partir de un radionucleído de período muy largo. En efecto, como ya se ha visto, en ese caso la actividad de la hija en función del tiempo viene dada por la siguiente expresión:

$$\Lambda_2 = \Lambda_{10} (1 - e^{-\Lambda_2 t}) \quad (23)$$

Por otro lado, como:

$$\Lambda_2 = \frac{N_2}{\mathcal{Z}_2}, \text{ reemplazando en (21) se tendrá:}$$

$$N_2 = \Lambda_{10} \mathcal{Z}_2 (1 - e^{-\Lambda_2 t}) \quad (24)$$

En el equilibrio $\Lambda \mathcal{Z}_2$ representa el número de átomos presentes de la hija, por lo tanto el factor $N \cdot RC$ de la expresión (4) es equivalente al número de átomos de la hija de vida media igual a RC .

La expresión (4) es válida, para el caso de radionucleídos de vida media lo suficientemente grande como para considerar constante la frecuencia de entrada "de pulsos al integrador".

Si la fuente radiactiva posee una vida media pequeña $\mathcal{Z}$, la frecuencia de pulsos en cualquier tiempo t_0 será $N e^{-t_0/\mathcal{Z}}$. Teniendo en cuenta las analogías enunciadas se puede concluir que el valor $Q_m(t_0)$ esperado en el condensador en el tiempo t_0 será:

$$Q_m(t_0) = q \cdot N \cdot RC \frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{Z} - RC} (e^{-\frac{t_0}{\mathcal{Z}}} - e^{-\frac{t_0}{RC}}) \quad (25)$$

que es equivalente a la ecuación que da la actividad de la hija a partir de un radionucleído de período no muy grande:

$$A_2 = \frac{T_1}{T_1 - T_2} A_{1,0} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \quad (26)$$

En efecto, la expresión (25) puede escribirse como sigue:

$$C_2 A_2 = C_2 A_{1,0} \frac{C_1}{C_1 - C_2} (e^{-\frac{t}{C_1}} - e^{-\frac{t}{C_2}}) \quad (27)$$

Después de un tiempo suficientemente largo (en la práctica se acepta t_0 7 RC) la carga media dada por la expresión (24), alcanza el equilibrio y, a partir de allí, se observará una disminución exponencial igual a la de la señal de entrada. Por lo tanto, la posición de la aguja del amperímetro y el registro gráfico variarán de acuerdo con la variación de actividad de la fuente radiactiva.

6.0. INTERPRETACION DE LOS RESULTADOS.

Los controles de un equipo Integrador son distintos de los de un escalímetro. Hay un selector para RC (llamada CONSTANTE DE TIEMPO) y uno para el Rango o Sensibilidad.

El control del Rango permite cambiar la escala del medidor y registrador de forma tal que la actividad correspondiente al fondo de escala (o a una división) sea mayor o menor. (Se modifica el rango variando la R del circuito eléctrico).

Los errores estadísticos aparecerán como fluctuaciones de la aguja del amperímetro, y cuando se tiene un registro gráfico determinan un área que es dividida en dos partes iguales por la $Q_m(t_0)$. Como $Q_m(t_0)$ es directamente proporcional a la frecuencia de llegada de pulsos, en adelante se hablará de $A_m(t_0)$ y A_m .

Estas fluctuaciones se superponen a los cambios de la A_m debida a

las variaciones de la actividad de la muestra y corresponden al número de divisiones que se desplaza la aguja del amperímetro o lapicera del registrador.

Si se observa una fuente de actividad constante, y se desea expresar el resultado como $A_m \pm 2\sigma$ el valor de la A_m estará en la mitad de la franja que corresponde al 95,5% de los registros. (Ver Fig.6). El valor de la A_m es, en este caso, 5.400 c/min. o sea 90 c/seg.

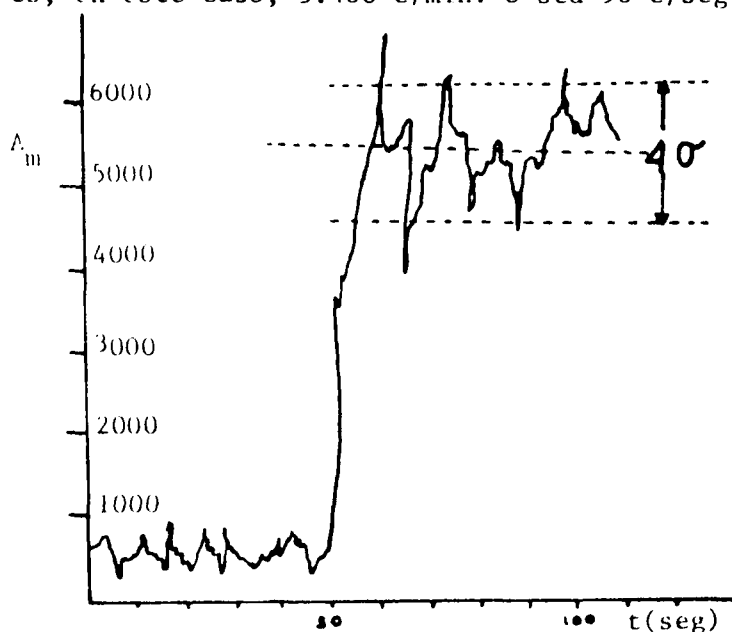


Fig.6- Registro de la actividad con un Integrador y Registrador gráfico (RC : 1 seg ; Vel. del Registrador : 4cm/min)

Como
$$\frac{\sigma A_m}{A_m} = \frac{1}{\sqrt{2 A_m RC}}$$

resulta

$$\sigma A_m = \frac{5.400 \text{ c/min.}}{\sqrt{2 \times 90 \text{ c/seg.} \times 1 \text{ seg.}}} = 402,5 \text{ c/min.}$$

Por lo tanto la observación se expresará:

$$5.400 \text{ c/min.} \pm 805 \text{ c/min. (95,5\%)}$$

O sea, la lectura estará entre 4.595 y 6.205 c/min. el 95,5% del tiempo.

Pueden calcularse los límites de deflexión de la aguja en número de divisiones correspondientes al papel registrador de la siguiente manera:

Si el papel tiene 100 divisiones y el rango es de 10.000 c/min. la sensibilidad es de 100 c/div., por lo tanto a 4σ (en el ejemplo $4\sigma = 3.220$ c/min.) le corresponden 32,2 divisiones.

En la fig.7 , se muestra la observación de la misma fuente radiactiva pero con una constante de 5 seg. (la RC. se modifica variando la C del circuito eléctrico). Se ve que las fluctuaciones han disminuído en magnitud. Para estas mediciones resulta:

$$\sigma A_m = \frac{5.400 \text{ c/min.}}{\sqrt{2 \times 90 \frac{\text{c}}{\text{seg}} \times 5 \text{ seg.}}} = 180 \text{ c/min.}$$

Por lo tanto la observación se expresará:

5.400 c/min $\pm$ 360 c/min.

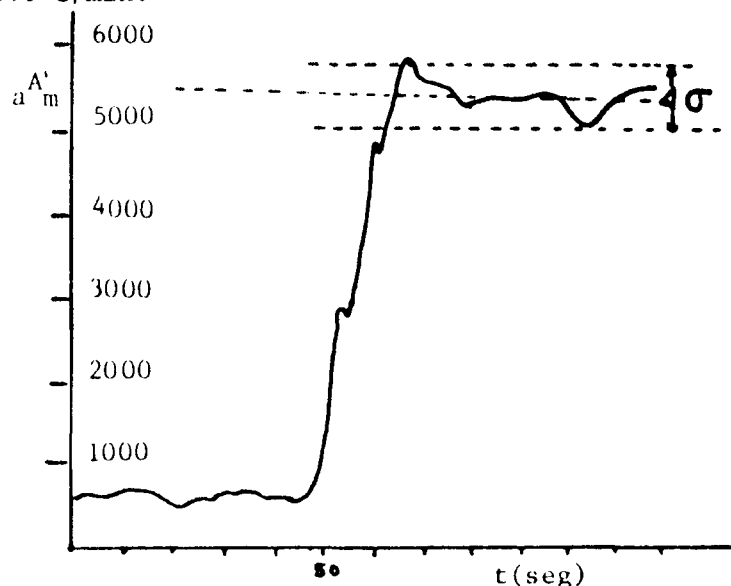


Fig.7- Registro de la actividad con un Integrador y Registrador gráfico (RC : 5 seg ; Vel. del Registrador : 4 cm/min)

Si en lugar de medir una fuente de 5.400 c/min de actividad media se mide otra de 54.000 c/min con una RC de 1 seg. se obtiene lo mostrado en la fig. 8. En este caso resulta:

$$\sigma A_m = \frac{54.000 \text{ c/min.}}{\sqrt{2 \times 900 \text{ c/seg.} \times 1 \text{ seg.}}} = 1.272,8 \text{ c/min.}$$

La banda dentro de la cuál se producen las fluctuaciones es mayor. (El 95,5% del tiempo la aguja del registrador fluctuará dentro de 50,9 divisiones si el rango es de 100.000 c/min.).

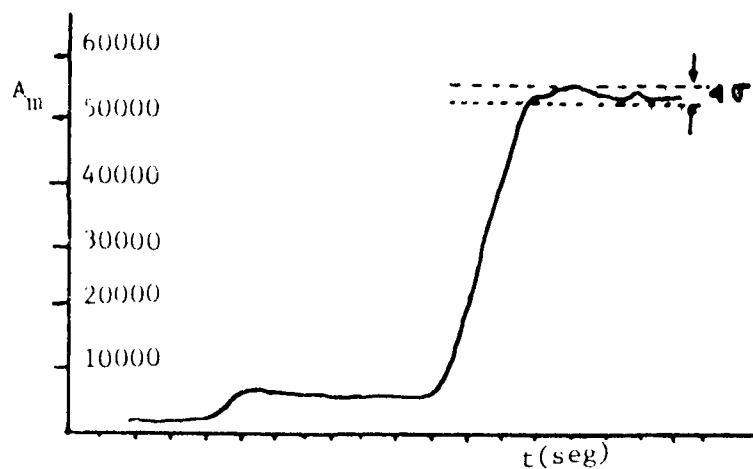


Fig. 8- Registro de la actividad con un Integrador y Registrador gráfico (RC : 1 seg ; Vel del Registrador : 4 cm/min)

Para comparar estadísticamente dos observaciones es conveniente recurrir al coeficiente de variación. Por lo tanto de la Fig. 6 y de la Fig. 8 se llega a los siguientes resultados:

$$\text{Fig. 6: } \frac{A_m}{A_m} \times 100 = \frac{402,5}{5.400} \times 100 = 7,45\%$$

$$\text{Fig. 8: } \frac{A_m}{A_m} \times 100 = \frac{1.095}{40.000} \times 100 = 2,7\%$$

Puntualizando: se ve que la estadística mejora cuando se usa una RC. grande y cuando las muestras presentan mayor actividad, conclusión que está implícita en la expresión (12).

7.0. CONCLUSIONES FINALES

En todos los casos las condiciones experimentales determinan el error aceptable.

Con lo ya visto se puede comparar el uso del integrador con el del escalímetro.

La expresión (12)

$$\frac{\sigma A_m}{A_m} = \frac{1}{\sqrt{2 A_m RC}}$$

nos indica que se obtendrá la misma precisión con escalímetro si en éste el tiempo de lectura es prefijado en $t = 2RC$. Para ello es suficiente recordar la siguiente ecuación:

$$\frac{\sigma A_B}{A_B} = \frac{\sqrt{\frac{A_B}{B}}}{A_B}$$

que reordenada matemáticamente, da:

$$\frac{\sigma A_B}{A_B} = \frac{1}{\sqrt{A_B t_B}}$$

Como en la mayoría de los integradores la RC. no supera a los pocos minutos (en algunos ni llega al minuto) hay una limitación en el total de cuentas determinadas por una sola lectura de forma tal que cuando la actividad es baja la precisión también es baja. En estos casos es preferible

usar un equipo convencional aunque si se usa un integrador es posible mejorar la precisión obteniendo un registro gráfico durante un tiempo T conveniente; esto es equivalente a obtener el valor medio de varias lecturas hechas con un escalímetro con un tiempo prefijado bajo.

El integrador es el sustituto ideal en aquellas experiencias donde se producen variaciones de actividad más o menos rápidas. En esos casos las fluctuaciones deben ser menores que los cambios observados porque de lo contrario ellas los enmascararían. La disminución de las fluctuaciones se logra, como se ha visto, usando una RC. grande que, por otro lado, produce un aumento del tiempo de equilibrio o de respuesta. Esto es importante ya que si el tiempo de respuesta es mayor que el tiempo en el que tienen lugar los cambios relevantes en la actividad, éstos no serán registrados. Si la actividad es suficientemente alta no hay mayor problema porque se seleccionará la RC adecuada a la velocidad de los cambios de actividad; si la actividad es baja puede aumentarse la precisión usando un detector de alta eficiencia y si esto no es posible deberá sacrificarse la precisión para evitar la pérdida de información.