

## MICROCIRCUITOS SUPERCONDUCTORES

Arturo López Dávalos  
Centro Atómico Bariloche\*

I. Introducción

En los dos últimos años se ha despertado un gran interés tanto teórico como experimental, en el estudio de sistemas superconductores que pueden ser considerados microcircuitos.

Por un lado se han desarrollado experimentos en sistemas superconductores inhomogéneos obtenidos por coevaporación de In y Ge sobre vidrios. De esta forma se logran láminas de 2000 Å de espesor.<sup>1</sup> Para diferentes muestras se determina que hay un umbral de percolación, que se logra cuando el componente metálico alcanza una concentración de 15% en volumen como predice la teoría.<sup>2</sup> De esta manera se obtienen circuitos superconductores con estructuras ramificadas aleatorias, que además del problema de la percolación presentan interés por tratarse de estructuras con múltiples "loops" y ramas sueltas, cuyo efecto sobre las propiedades superconductoras se quiere determinar. Experimentalmente se mide la resistividad, que da información sobre el problema de percolación y se trata de relacionar con el campo crítico superconductor  $H_{c2}$ .

Otro grupo de experimentos se ocupa de redes superconductoras ordenadas, de hasta 20.000 juntas Josephson. Estas estructuras se generan por litografía de Nb sobre Si y constituyen verdaderos sistemas ordenados de juntas Josephson.<sup>3</sup> Aquí los problemas que se estudian son de tipo puramente superconductor. La estructura puede pensarse como una red cuadrada donde en cada sitio hay un grano superconductor de volumen finito unido a sus vecinos por contacto débiles de tipo Josephson. Al enfriar se detectan claramente dos temperaturas de transición. Una primera en la que cada grano se hace superconductor pero de modo que la fase del

-----

\* Comisión Nacional de Energía Atómica.

parámetro de orden, de un sitio al otro no guarda correlación. Es semejante a un sistema de espines en un plano (Modelo X-Y). Hay una segunda temperatura de transición más baja que la anterior, en la cual la información consigue pasar por los vínculos débiles de las junturas Josephson y se establece una correlación de fase en toda la muestra.

La teoría<sup>4,5,6,7</sup> que vamos a exponer aquí pretende estudiar el campo crítico máximo de estos sistemas, tanto ordenados como desordenados. El estudio del campo crítico máximo ha sido de utilidad anteriormente en superconductores impuros, por su relación con la resistividad. En los microcircuitos los campos críticos máximos son interesantes de por sí y además su estudio es más sencillo que el de otras propiedades por las siguientes razones:

- a) Si hay una transición de fase de segundo orden se puede usar la teoría de Landau-Ginzburg fenomenológica de la superconductividad en su forma linealizada, lo que facilita la matemática del problema.
- b) En estos estudios se desprecian las fluctuaciones.
- c) Las uniones de la red superconductora se tratan como hilos de diámetro despreciable  $d \ll \xi$ , donde  $\xi$  es la longitud de coherencia dependiente de temperatura.

El problema teórico queda reducido así a una red o circuito superconductor constituido por alambres unidimensionales. El interés teórico en estas configuraciones radica en que:

- a) Se pueden tener configuraciones superconductoras múltiplemente conexas en presencia de campo magnético, lo que permite estudiar arreglos múltiples de Bohm-Aharonov donde se dan los efectos de interferencia y difracción.
- b) En el límite de campo crítico máximo se tiene una teoría linealizada en la que los efectos de desorden pueden incluirse fácilmente. A diferencia del problema de percolación, en este caso el efecto de las ramas no conectadas es importante.

- c) En redes ordenadas, como veremos, se pueden presentar estructuras de vórtices que son en general inconmensuradas con la red subyacente. Existe la posibilidad de que los términos no lineales de la teoría de L.G. establezcan una dada estructura conmensurada o den lugar a transiciones conmensurado-inconmensurado.

## II. Teoría

La teoría fenomenológica de la superconductividad debida a Landau-Ginzburg, supone la existencia de un parámetro de orden complejo  $\psi(x)$  cuyo módulo cuadrado  $|\psi|^2$  es proporcional al número de electrones superconductores. Este parámetro de orden satisface una ecuación diferencial semejante a la de Schrödinger lo cual no es totalmente fortuito ya que  $\psi(x)$  puede también pensarse como la función de onda (de normalización macroscópica) de los pares superconductores.

En presencia de un campo magnético la ecuación de Landau-Ginzburg es

$$(i\vec{\nabla} + 2\pi/\phi_0 \vec{A})^2 \psi - \frac{1}{\xi^2} \psi + \frac{2m\beta}{\hbar^2} |\psi|^2 \psi = 0 \quad (1)$$

donde  $\xi(t) = \xi_0 (1-t)^{-1/2}$  es la longitud de coherencia de Landau-Ginzburg;  $t=T/T_c$  es la temperatura reducida;  $\phi_0 = ch/2e$  es el cuanto de flujo;  $\beta$  es un parámetro independiente de la temperatura y  $\vec{A}$  el potencial vector.

La ecuación (1) se complementa con la expresión cuántica para la corriente

$$\vec{j} = \left(-\frac{eh}{2m}\right) [\psi^*(i\vec{\nabla} + \frac{2\pi}{\phi_0} \vec{A}) \psi + c.c.] \quad (2)$$

que se relaciona con  $\vec{A}$  a través de las ecuaciones de Maxwell. En la teoría linealizada, válida en el borde del

diagrama de fases superconductor  $|\psi|$  es infinitesimalmente pequeño y  $\vec{A}$  es entonces sólo el potencial vector del campo aplicado.

En esta aproximación es lícito despreciar el término cúbico de (1). La solución de (1) a lo largo de un "alambre" superconductor puede ponerse en ese caso

$$\psi(\ell) = e^{i\gamma_{a\ell}} [\psi_a \sin(L-\ell) + \psi_b e^{-i\gamma_{ab}} \sin\ell] / \sin L \quad (3)$$

donde  $\psi_a$  y  $\psi_b$  son los parámetros de orden en los extremos de las ramas; las longitudes están normalizadas por la longitud de coherencia y

$$\gamma_{a\ell} = \frac{2\pi}{\phi_0} \int_a^\ell \vec{A}(\ell') \cdot d\ell' \quad (4)$$

es una integral curvilínea a lo largo de ab. La corriente a lo largo de ab es en general

$$J_{ab} = \left(\frac{eh}{m\xi}\right) |\psi_a| |\psi_b| \sin(\beta - \alpha - \gamma_{ab}) / \sin L \quad (5)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son las fases en a y b.

Puede advertirse que (5) es semejante a la expresión para la corriente de Josephson entre dos superconductores separados por una unión débil. En nuestro caso la probabilidad de pasaje por efecto túnel es proporcional a  $(1/\sin L)$ .

Para un circuito dado de  $n$  nodos se satisfacen las leyes de Kirchhoff que en este caso especial toman la forma siguiente:

- 1) Primera Ley de Kirchhoff. Suponiendo que la suma de cada uno de los términos que hacen la corriente cuántica (2), sobre todas las ramas que convergen a un nodo se anule, se obtiene una condición sobre las derivadas de  $\psi(\ell)$

$$\sum_n \left[ i \frac{\partial}{\partial \ell} + \frac{2\pi}{\phi_0} A(\ell) \right] \psi_n(\ell) \Big|_{\ell=0} = 0 \quad (6)$$

donde la suma es sobre todos las ramas que se unen en un dado nodo.

- 2) Segunda Ley de Kirchhoff. Implica que la suma de los  $\gamma_{ab}$  sobre todas las ramas de un circuito es igual al flujo magnético concatenado.

$$\sum_{\{ab\}} \gamma_{ab} = \gamma = 2\pi \phi / \phi_0 \quad (7)$$

### Condiciones de compatibilidad

Reemplazando (3) en (6) se encuentran las relaciones de compatibilidad que deben satisfacer los parámetros de orden en los nodos de un circuito

$$\sum_n \left[ -\psi_a \cotg L_{an} + \psi_n e^{-i\gamma_{an}} / \sin L_{an} \right] = 0 \quad (8)$$

Para un circuito de N nodos, éstas son N ecuaciones lineales homogéneas. La condición para que el sistema tenga solución es que el determinante se anule. Esto lleva a una relación  $f(H,T)=0$  que da el diagrama de fases.

### III. Aplicaciones

Las condiciones de compatibilidad y por tanto los diagramas de fase pueden ser obtenidos para una gran cantidad de circuitos, más o menos complicados.

Para estudiar el efecto de un brazo sobre un anillo, de Gennes consideró el circuito de la figura 1, que llamó lasso.

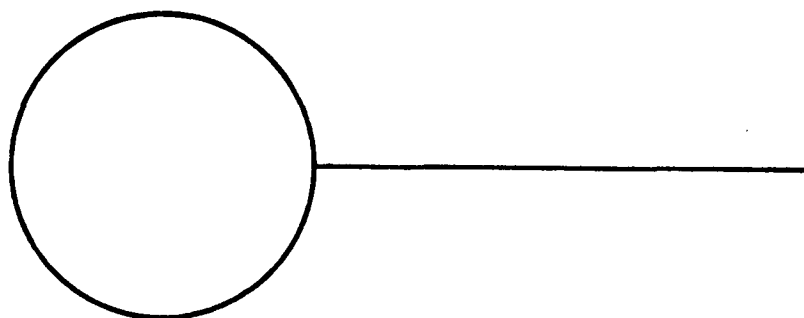


Fig. 1 Lasso (Lazo)

El diagrama de fases es periódico en  $\phi/\phi_0$  y para el primer período se tiene el resultado de la Fig. 2 (con  $L=2\pi R$ )

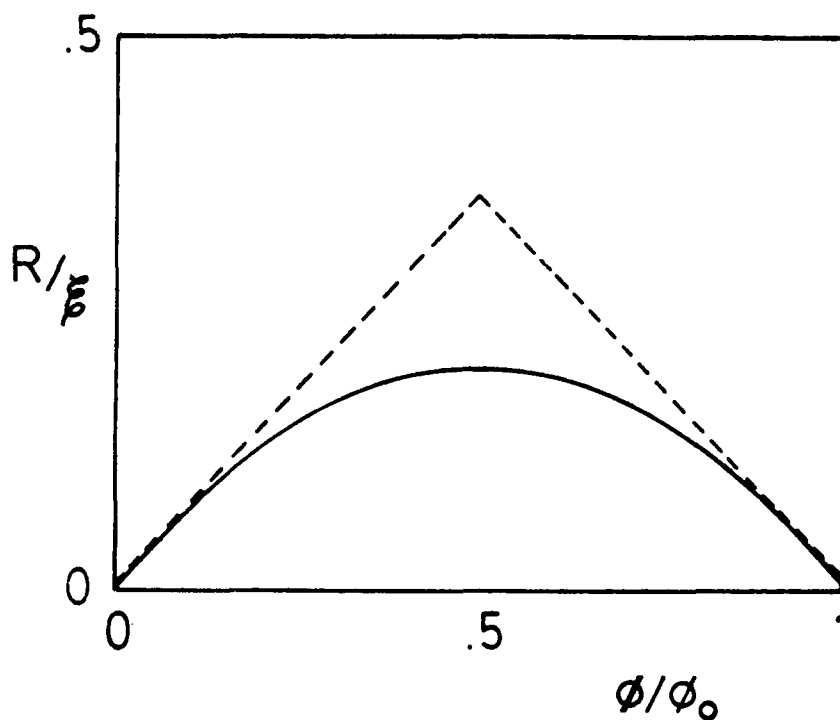


Fig. 2 Diagrama de Fases del Lasso

La línea punteada corresponde a un anillo simple. Nótese que la ordenada representa  $\sqrt{1-T/T_c}$ . Se ve que el efecto del brazo es reforzar la superconductividad del anillo (la temperatura crítica sube en la zona  $\phi/\phi_0 \sim 0.5$ ).

La Fig. 3 representa otro circuito simple, llamado boleadora, que consiste en dos lazos unidos por el extremo.

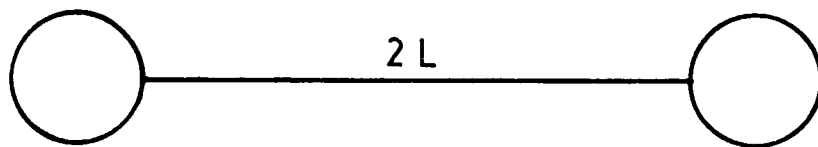


Fig. 3 Boleadora

Para  $R_1=R_2$  se tiene una boleadora simétrica. En ese caso el diagrama de fases es indistinguible de aquel del lazo. El parámetro de orden, en la configuración más favorable, tiene un máximo en el centro del brazo que en ambos anillos, y al cortar el sistema en dos se tienen dos mitades en cada una de las cuales se satisfacen las condiciones de contorno.

### Red cuadrada

Uno de los sistemas más interesantes que pueden estudiarse, por la variedad y riqueza de comportamiento es la red cuadrada. Tomando un sistema cartesiano de ejes en las direcciones principales de la red, el potencial vector de un campo perpendicular puede escribirse  $A_x=0$ ,  $A_y=Hx$ ,  $A_z=0$ . De esta forma las ecuaciones de compatibilidad resultan (8)

$$-4\cos a \cdot \psi_{nm} + \psi_{n+1,m} + \psi_{n-1,m} + e^{i\gamma n} \psi_{n,m+1} + e^{-i\gamma n} \psi_{n,m-1} = 0 \quad (9)$$

donde  $\gamma = 2\pi Ha^2/\phi_0$ . La invariancia traslacional del sistema sugiere que se proponga una solución de la forma

$$\psi_{nm} = f_q(n) e^{iqm} \quad (10)$$

con lo cual el sistema (9) es equivalente a

$$[-4\cos a + 2\cos(\gamma n + q)] f_q(n) + f_q(n+1) + f_q(n-1) = 0 \quad (11)$$

Si identificamos  $4\cos a = \epsilon$  con la energía de un electrón, este sistema de ecuaciones corresponde a la aproximación "tight-binding" en un potencial  $V(n) = 2\cos(\gamma n + q)$ . Las características del espectro han sido discutidas por Hofstadter, Aubrey, Azbel y otros.<sup>8</sup> Las propiedades que en el problema electrónico se asocian con el espectro corresponden a propiedades del diagrama de fases (H,T) del problema superconductor. La cuestión de la distribución espacial de las amplitudes no ha sido resuelto en ninguno de los dos casos y tiene sumo interés porque está relacionado con problemas de localización y de conmensurabilidad.

Como ese problema es complejo, hemos encarado el estudio de algunas versiones "parciales" de la red cuadrada, es decir franjas infinitas en un sentido pero de ancho finito en la otra dirección.

### Escalera

Esta es una franja simple como se indica

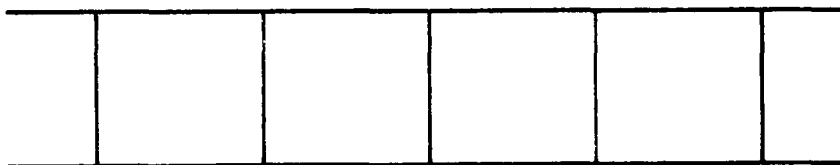


Fig. 4 Escalera

para la cual las ecuaciones de compatibilidad son

$$\begin{aligned}
 3 \cos \ell \psi_n^\uparrow - e^{i\gamma} \psi_{n-1}^\uparrow - e^{-i\gamma} \psi_{n+1}^\uparrow - \psi_n^\downarrow &= 0 \\
 3 \cos \ell \psi_n^\downarrow - e^{-i\gamma} \psi_{n-1}^\downarrow - e^{i\gamma} \psi_{n+1}^\downarrow - \psi_n^\uparrow &= 0
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Proponiendo una solución de la forma  $\psi_n \sim e^{iqn}$  el sistema (11) se reduce a uno de  $2 \times 2$ .

De la solución de ese sistema de  $2 \times 2$  se obtienen los autovectores y autovalores. Respecto al diagrama de fases se advierte que existe un valor crítico del flujo por cuadrado  $\phi_1$  tal que si  $\phi < \phi_1$  la solución corresponde a  $q=0$ , mientras que si  $\phi > \phi_1$  la solución corresponde a un valor finito de  $q$  dado por

$$\cos q = \cos \gamma \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \gamma\right)^{1/2}
 \tag{12}$$

$\phi_1$  resulta igual a  $0.215 \phi_0$ . Esto significa que para  $\phi < \phi_1$  la superconductividad en la escalera se condensa en un modo uniforme. El diagrama de fases tiene el aspecto que se indica en la Fig. 5.

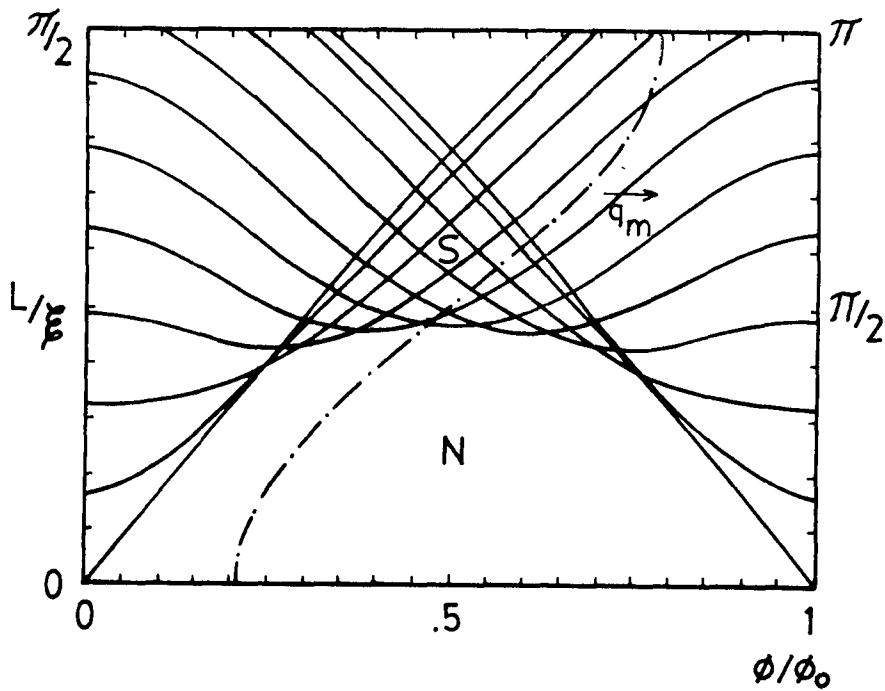


Fig. 5 Diagrama de fases de la escalera. También se muestra el valor de  $q$  que domina.

El valor de  $q$  que domina a cada temperatura está fijado por (12) y no es necesariamente conmensurado con la estructura subyacente. Lo que ocurre físicamente es que para  $\phi < \phi_1$  las corrientes corren solamente por los alambres longitudinales de la escalera y pueden pensarse como corrientes de apantallamiento (á la Meissner). Para  $\phi > \phi_1$ , que es el campo de "primera penetración de flujo" no es energéticamente favorable mantener esa situación, que implica seguir aumentando la corriente en las ramas longitudinales, como se ve en la Fig. 6. Por eso para  $\phi > \phi_1$  aparecen corrientes en las ramas transversales, que implican una penetración de vórtices en la estructura superconductora.

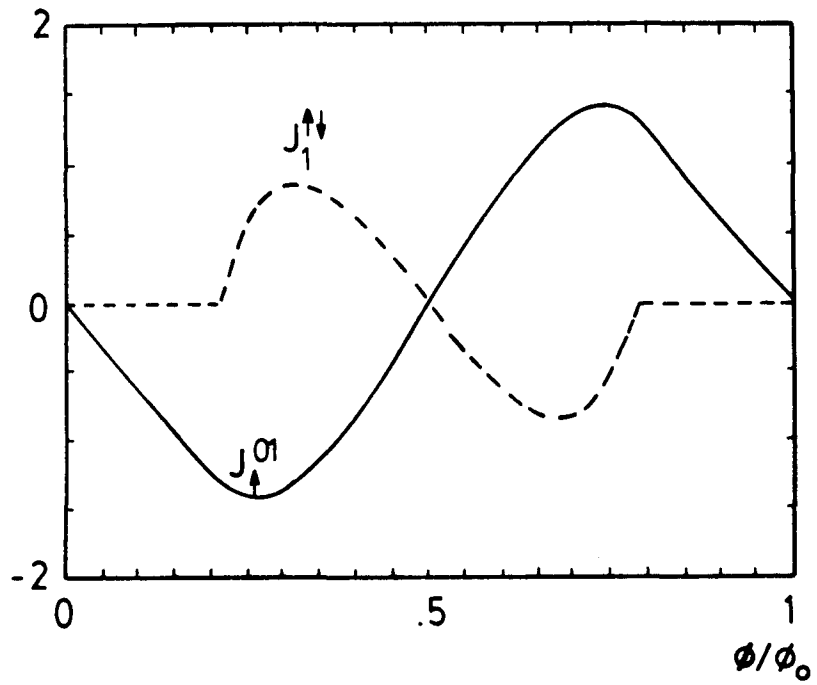
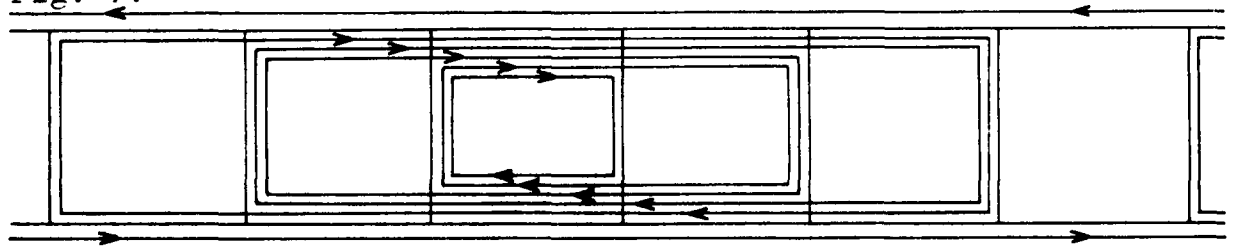
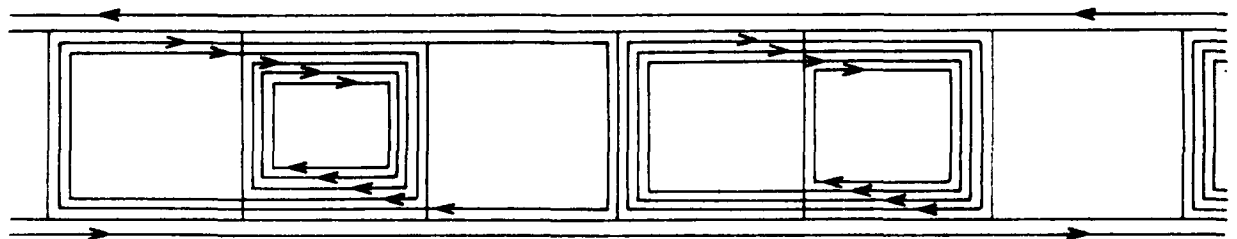


Fig. 6 Corrientes en las ramas longitudinales (línea llena) y transversales (línea punteada).

La distribución de corrientes se da como se indica en la Fig. 7.



a)  $\phi/\phi_0 = .255$   $\lambda/2 = 5.65$



b)  $\phi/\phi_0 = .382$   $\lambda/2 = 2.74$

Fig. 7 Vórtices en la escalera.

También se han estudiado escaleras múltiples de tres franjas y de 20, 30 y 40. En el caso de tres, la estructura de vórtices es la de la Fig. 8.

En general se advierte que para  $N$  creciente, el valor de  $\phi_1$  decrece hacia cero, de modo que en la red cuadrada no hay un régimen de condensación uniforme.

En este momento se estudia la posibilidad de que los términos no lineales de las ecuaciones de L.G. tiendan a estabilizar una estructura conmensurada, la que puede aparecer en el borde del diagrama de fases o más adentro en la zona superconductora.

### Referencias

1. G. Deutscher, A. Grawe y S. Alexander, Phys. Rev. Lett. 48, 1497 (1982).
2. D. Thouless, en Ill-condensed matter (Ed. R. Balian, R. Maynard y G. Toulouse) North Holland - Amsterdam (1979).
3. S. Voss y W. Webb, Phys. Rev. B25, 3446 (1982).
4. P.G. de Gennes, Comptes rendus 292, series II, 279 (1981)  
P.G. de Gennes, Comptes rendus 292, series II, 9 (1981).
5. S. Alexander, preprint (1981).
6. H. Fink, A. López y R. Maynard, Phys. Rev. B 1982 (en prensa).
7. J. Simonin, D. Rodríguez y A. López, preprint (1982).  
M. Lubensky, R. Rammal y G. Toulouse, preprint (1982).
8. D.R. Hofstadter, Phys. Rev. B14, 2239 (1976).