REPUBLICA ARGENTINA

PUBLICACIONES

DE LA

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA

INFORME Nº 2
(FISICA TEORICA)

CUANTIFICACION DE CAMPOS DE MASA NULA

PARTE II

CAMPOS FERMIONICOS

POR

C. G. BOLLINI

BUENOS AIRES

1958

REPUBLICA ARGENTINA

PUBLICACIONES

DE LA

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA

INFORME N° 2

(FISICA TEORICA)

CUANTIFICACION DE CAMPOS DE MASA NULA

PARTE II

CAMPOS FERMIONICOS

POR

C. G. BOLLINI

BUENOS AIRES

1958

CUANTIFICACION DE CAMPOS DE MASA NULA

PARTE II

CAMPOS FERMIONICOS

POR C. G. BOLLINI

---

1. *Introducción*

En el formalismo de Rarita-Schwinger [1] un campo fermiónico de espín $s + \frac{1}{2}$ está representado por un espinor tensorial $\Psi_{\nu_1 \ldots \nu_s}$ que posee s índices tensoriales completamente simétricos y un índice espinorial que no será escrito explícitamente.

Si este campo fermiónico corresponde a una partícula de masa nula, satisface entonces las ecuaciones (1)

$$\gamma_\mu \partial_\mu \Psi_{\nu_1 \ldots \nu_s} = 0 \tag{1.1}$$

$$\gamma_{\nu_1} \Psi_{\nu_1 \ldots \nu_s} = 0 \tag{1.2}$$

Las matrices γ_μ satisfacen las relaciones usuales

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\, \delta_{\mu\nu} \tag{1.3}$$

La ecuación (1.1) es la ecuación de campo propiamente dicha, mientras que (1.2) es la condición suplementaria que reduce el número de componentes independientes de Ψ a $2s + 2$, que es el número de orientaciones posibles de una partícula de espín $s + \frac{1}{2}$.

Nuestra intención es considerar la (1.2) como vínculo entre las componentes del tensor espinor de campo y cuantificar a este último extrayendo previamente las coordenadas libres del mismo. La cuantificación resultante será entonces compatible con las condiciones suplementarias.

(1) W. RARITA, J. SCHWINGER: *Phys. Rev.* **60**, 61 (1941).

Para conseguir el fin propuesto, utilizaremos un procedimiento paralelo al ya seguido en la parte anterior. Parte ésta a la que en adelante nos referiremos simplemente con I.

Multiplicando la (1.2) con $\gamma_\mu \partial_\mu$ y teniendo en cuenta (1.1) y (1.3) deducimos

$$\begin{aligned} 0 = \gamma_\mu \partial_\mu \gamma_{\nu_1} \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s} &= (2\, \delta_{\mu\nu_1} - \gamma_{\nu_1} \gamma_\mu)\, \partial_\mu \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s} \\ &= 2\, \partial_{\nu_1} \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s} - \gamma_{\nu_1} \gamma_\mu \partial_\mu \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s} \\ &= 2\, \partial_{\nu_1} \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\partial_{\nu_1} \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s} = 0 \tag{1.4}$$

Así mismo, multiplicando por γ_{ν_2} tendremos

$$\begin{aligned} 0 = \gamma_{\nu_2} \gamma_{\nu_1} \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s} &= (2\, \delta_{\nu_1 \nu_2} - \gamma_{\nu_1} \gamma_{\nu_2})\, \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s} \\ &= 2\, \Psi_{\nu_1 \nu_1 \dots \nu_s} - \gamma_{\nu_1} \gamma_{\nu_2} \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s} \end{aligned}$$

es decir

$$\Psi_{\nu_1 \nu_1 \nu_3 \dots \nu_s} = 0 \tag{1.5}$$

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) implican por lo tanto que el tensor espinor de campo es de divergencia y traza nulas. (1.4) y (1.5) son similares a las ecuaciones suplementarias que se presentan para espín entero (cfr. I (1.2) y I (1.3)). No obstante, (1.2) es aún más restrictiva que el par (1.4) y (1.5), no pudiendo ser deducida de éstas.

Por ese motivo, si bien las líneas generales son aquí las mismas que en I, existirán diferencias específicas que aparecerán en el tratamiento.

2. *Descomposición del espinor de campo*

Partiendo del tensor espinor $\Psi_{\nu_1 \dots \nu_s}$ que satisface (1.1) y (1.2) vamos a definir por recurrencia (cfr. I (2.6), I (2.7)) nuevos tensores espinores

$$\Psi^{(0)} = n_{\nu_1} \dots n_{\nu_s} \Psi_{\nu_1 \dots \nu_s} \tag{2.1}$$

$$\Psi^{(0)}_{\nu_1 \dots \nu_s} = \partial^{-s}\, \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_s} \Psi^{(0)} \tag{2.2}$$

$$\Psi^{(r)}_{\nu_1 \dots \nu_r} = n_{\nu_{r+1}} \dots n_{\nu_s} \left(\Psi_{\nu_1 \dots \nu_s} - \sum_{t=0}^{r-1} \Psi^{(t)}_{\nu_1 \dots \nu_s} \right) \tag{2.3}$$

$$\Psi^{(r)}_{\nu_1 \dots \nu_s} = \partial^{-(s-r)} \partial_{\nu_{r+1}} \dots \partial_{\nu_s} \Psi^{(r)}_{\nu_1 \dots \nu_r} + \text{sim.} \tag{2.4}$$

Donde n_ν es cualquier vector unitario de tiempo $n_\nu n_\nu = -1$. $\partial = n_\nu \partial_\nu$ y ∂^{-1} es el operador inverso de ∂. « sim » significa términos necesarios para hacer que el miembro de la derecha sea simétrico.

Es evidente que todos estos espinores satisfacen la (1.1) y, salvo $\Psi^{(0)}$ (que carece de índices tensoriales), también la (1.2).

Tenemos además lo siguiente :

$$n_{\nu_1} \Psi^{(1)}_{\nu_1} = n_{\nu_1} n_{\nu_2} \ldots n_{\nu_s} (\Psi_{\nu_1 \ldots \nu_s} - \Psi^{(0)}_{\nu_1 \ldots \nu_s})$$

y puesto que de (2.2) deducimos

$$n_{\nu_1} \ldots n_{\nu_s} \Psi^{(0)}_{\nu_1 \ldots \nu_s} = \Psi^{(0)}$$

mediante (2.1) encontraríamos que :

$$n_{\nu_1} \Psi^{(1)}_{\nu_1} = 0$$

Suponiendo ahora que también

$$n_{\nu_{r-1}} \Psi^{(r-1)}_{\nu_1 \ldots \nu_{r-1}} = 0$$

y multiplicando (2.3) por n_{ν_r} vemos que

$$n_{\nu_r} \Psi^{(r)}_{\nu_1 \ldots \nu_r} = n_{\nu_r} \ldots n_{\nu_s} \left(\Psi_{\nu_1 \ldots \nu_s} - \sum_{t=0}^{r-2} \Psi^{(t)}_{\nu_1 \ldots \nu_s} - \Psi^{(r-1)}_{\nu_1 \ldots \nu_s} \right)$$

$$= n_{\nu_r} \ldots n_{\nu_s} \left(\Psi_{\nu_1 \ldots \nu_s} - \sum_{t=0}^{r-2} \Psi^{(t)}_{\nu_1 \ldots \nu_s} \right) - n_{\nu_r} \ldots n_{\nu_s} \Psi^{(r-1)}_{\nu_1 \ldots \nu_s}$$

Pero de la (2.4) deducimos que

$$n_{\nu_r} \ldots n_{\nu_s} \Psi^{(r-1)}_{\nu_1 \ldots \nu_s} = \Psi^{(r-1)}_{\nu_1 \ldots \nu_{r-1}}$$

(los términos « sim » no contribuyen por la suposición efectuada).

Y tomando ahora en cuenta la (2.3) para $r-1$ vemos que

$$n_{\nu_r} \Psi^{(r)}_{\nu_1 \ldots \nu_r} = \Psi^{(r-1)}_{\nu_1 \ldots \nu_{r-1}} - \Psi^{(r-1)}_{\nu_1 \ldots \nu_{r-1}} = 0 \qquad (2.5)$$

y por ello tenemos también

$$n_{\nu_{r+1}} \ldots n_{\nu_s} \Psi^{(r)}_{\nu_1 \ldots \nu_s} = \Psi^{(r)}_{\nu_1 \ldots \nu_r} \qquad (2.6)$$

Por último si hacemos $r=s$ en la (2.3) y despejamos el espinor de campo

$$\Psi_{\nu_1 \ldots \nu_s} = \sum_{t=0}^{s} \Psi^{(t)}_{\nu_1 \ldots \nu_s} \qquad (2.7)$$

que constituye una descomposición del tensor espinor de campo en $s+1$ tenso-espinores del mismo rango que satisfacen (1.1) y (1.2) además de (2.6) y (2.5).

3. *Matrices de polarización transversal*

Tomaremos ahora dos operadores de derivación (cf. I (3.1)) tales que

$$\begin{aligned} n_\nu\alpha_\nu &= 0 & n_\nu\beta_\nu &= 0 \\ \alpha_\nu\partial_\nu &= 0 & \beta_\nu\partial_\nu &= 0 \\ \alpha_\nu\alpha_\nu &= 1 & \beta_\nu\beta_\nu &= 1 \\ & & \alpha_\nu\beta_\nu = 0 & \end{aligned} \tag{3.1}$$

(estos « vectores de polarización » no son únicos). Mediante ellos construíremos operadores matriciales definidos por

$$\Gamma_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu\gamma\cdot\alpha\gamma\cdot\beta \tag{3.2}$$

(En adelante pondremos por ej.: $\gamma_\mu\alpha_\mu = \gamma\cdot\alpha$)

$$\Gamma_{\nu_1\ldots\nu_r} = \Gamma_{\nu_1}\ldots\Gamma_{\nu_r} \tag{3.3}$$

Se cumplen las siguientes relaciones

$$n_\nu\Gamma_\nu = 0; \qquad \partial_\nu\Gamma_\nu = 0 \quad \text{y} \quad \gamma_\nu\Gamma_\nu = 0 \tag{3.4}$$

La primera y la segunda surgen de las propiedades (3.1) de α_ν y β_ν. La última se deduce de

$$\gamma\cdot\alpha\gamma\cdot\alpha = \gamma\cdot\beta\gamma\cdot\beta = 1$$

y

$$\gamma\cdot\alpha\gamma\cdot\beta = -\gamma\cdot\beta\gamma\cdot\alpha$$

ya que

$$\begin{aligned} \gamma_\nu\Gamma_\nu &= \gamma\cdot\alpha + \gamma\cdot\beta\gamma\cdot\alpha\gamma\cdot\beta \\ &= \gamma\cdot\alpha - \gamma\cdot\alpha\gamma\cdot\beta\gamma\cdot\beta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Además se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma_\nu\Gamma_\nu &= \alpha_\nu\alpha_\nu + \beta_\nu\beta_\nu\gamma\cdot\alpha\gamma\cdot\beta\gamma\cdot\alpha\gamma\cdot\beta \\ &= 1 - \gamma\cdot\alpha\gamma\cdot\alpha\gamma\cdot\beta\gamma\cdot\beta \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Gamma_\nu\Gamma_\nu = 0 \tag{3.5}$$

El vector Γ_ν conmuta consigo mismo y con $\gamma\,.\,\partial$. En efecto

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu\Gamma_\nu &= (\alpha_\mu + \beta_\mu\gamma\,.\,\alpha\,\gamma\,.\,\beta)\,(\alpha_\nu + \beta_\nu\gamma\,.\,\alpha\,\gamma\,.\,\beta) \qquad (3.6)\\ &= \alpha_\mu\Gamma_\nu + \beta_\mu\alpha_\nu\gamma\,.\,\alpha\,\gamma\,.\,\beta + \beta_\mu\beta_\nu\gamma\,.\,\alpha\,\gamma\,.\,\beta\,\gamma\,.\,\alpha\,\gamma\,.\,\beta\\ &= \Gamma_\nu\alpha_\mu + \Gamma_\nu\beta_\mu\,\gamma\,.\,\alpha\,\gamma\,.\,\beta\\ &= \Gamma_\nu\Gamma_\mu\end{aligned}$$

y por ser

$$\begin{aligned}\gamma\,.\,\alpha\,\gamma\,.\,\partial &= -\,\gamma\,.\,\partial\,\gamma\,.\,\alpha\\ \gamma\,.\,\beta\,\gamma\,.\,\partial &= -\,\gamma\,.\,\partial\,\gamma\,.\,\beta\end{aligned}$$

tenemos

$$\Gamma_\mu\gamma\,.\,\partial = \gamma\,.\,\partial\,.\,\Gamma_\mu \qquad (3.7)$$

Todas estas relaciones nos demuestran que los tensores matriciales $\Gamma_{\nu_1 \ldots \nu_r}$ dados por la (3.3) son simétricos, de traza nula y perpendiculares a n_ν, ∂_ν y γ_ν.

$$\left.\begin{aligned}\delta_{\nu_1\nu_2}\,\Gamma_{\nu_1 \ldots \nu_r} &= 0\\ \partial_{\nu_1}\,\Gamma_{\nu_1 \ldots \nu_r} &= 0\\ n_{\nu_1}\,\Gamma_{\nu_1 \ldots \nu_r} &= 0\\ \gamma_{\nu_1}\,\Gamma_{\nu_1 \ldots \nu_r} &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (3.8)$$

La matriz $\Gamma_{\nu_1 \ldots \nu_r}$ será denominada matriz de polarización transversal de rango r.

Un vector cualquiera, χ_μ, que sea perpendicular a n_μ y ∂_μ puede ser escrito del siguiente modo :

$$\chi_\mu = (\alpha_\mu\alpha_\nu + \beta_\mu\beta_\nu)\,\chi_\nu$$

puesto que α_μ y β_μ son los vectores de base del espacio normal a n_μ y ∂_μ. Si además es $\gamma_\mu\chi_\mu = 0$, entonces :

$$\gamma_\mu\chi_\mu = 0 = \gamma\,.\,\alpha\,\alpha_\nu\chi_\nu + \gamma\,.\,\beta\,\beta_\nu\chi_\nu$$

multiplicando por $\gamma\,.\,\alpha$

$$\begin{aligned}0 &= \gamma\,.\,\alpha\,\gamma\,.\,\alpha\,\alpha_\nu\chi_\nu + \gamma\,.\,\alpha\,\gamma\,.\,\beta\,\beta_\nu\chi_\nu\\ &= \alpha_\nu\chi_\nu + \gamma\,.\,\alpha\,\gamma\,.\,\beta\,\beta_\nu\,\chi_\nu\\ &= 0 \qquad\qquad \therefore\end{aligned}$$

$$\Gamma_\nu\chi_\nu = 0 \qquad (3.9)$$

Es decir que operando sobre un vector χ_ν, perpendicular a n_ν, ∂_ν y γ_ν, se tiene que

$$\gamma\cdot\alpha\,\gamma\cdot\beta\,\beta_\nu = -\,\alpha_\nu \tag{3.10}$$

Poniendo ahora

$$\widetilde{\Gamma}_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu\,\gamma\cdot\beta\,\gamma\cdot\alpha \tag{3.11}$$

encontramos

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu\widetilde{\Gamma}_\nu &= (\alpha_\mu + \beta_\mu\,\gamma\cdot\alpha\,\gamma\cdot\beta)\,(\alpha_\nu + \beta_\nu\,\gamma\cdot\beta\,\gamma\cdot\alpha) \\ &= \alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\mu\beta_\nu\,\gamma\cdot\beta\,\gamma\cdot\alpha + \beta_\mu\alpha_\nu\,\gamma\cdot\alpha\,\gamma\cdot\beta + \\ &+ \beta_\mu\beta_\nu\,\gamma\cdot\alpha\,\gamma\cdot\beta\,\gamma\cdot\beta\,\gamma\cdot\alpha \\ &= \widetilde{\Gamma}_\nu\alpha_\mu + \alpha_\nu\beta_\mu\,\gamma\cdot\alpha\,\gamma\cdot\beta + \beta_\nu\,\gamma\cdot\beta\,\gamma\cdot\alpha\,\beta_\mu\,\gamma\cdot\alpha\,\gamma\cdot\beta \\ &= \Gamma_\mu\widetilde{\Gamma}_\nu = \widetilde{\Gamma}_\nu\Gamma_\mu\end{aligned} \tag{3.12}$$

Cuando se aplica a un vector χ_μ, perpendicular a n_μ, ∂_μ y γ_μ, vale (3.9) y por lo tanto

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu\widetilde{\Gamma}_\nu &= \alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\mu\beta_\nu\,\gamma\cdot\beta\,\gamma\cdot\alpha + \beta_\mu\alpha_\nu\,\gamma\cdot\alpha\,\gamma\cdot\beta + \beta_\mu\beta_\nu \\ &= \alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\mu\alpha_\nu + \beta_\mu\beta_\nu + \beta_\mu\beta_\nu \\ &= 2\,(\alpha_\mu\alpha_\nu + \beta_\mu\beta_\nu)\end{aligned}$$

Ello significa que

$$\tfrac{1}{2}\,\Gamma_\mu\widetilde{\Gamma}_\nu\chi_\nu = \chi_\mu \tag{3.13}$$

Es decir que un espinor χ_μ con las propiedades supuestas, puede ser expresado en función de un espinor simple χ definido por

$$\chi = \tfrac{1}{2}\,\widetilde{\Gamma}_\nu\chi_\nu$$

y entonces

$$\chi_\nu = \Gamma_\nu\chi$$

Extendiendo ahora la propiedad (3.12) para las matrices de polarización de rango superior al primero, tenemos:

$$\frac{1}{2^r}\,\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_r}\,\widetilde{\Gamma}_{\nu_1 \dots \nu_r}\,\chi_{\nu_1 \dots \nu_r} = \chi_{\mu_1 \dots \mu_r} \tag{3.14}$$

Donde

$$\widetilde{\Gamma}_{\nu_1 \dots \nu_r} = \widetilde{\Gamma}_{\nu_1} \dots \widetilde{\Gamma}_{\nu_r} \tag{3.15}$$

y $\chi_{\nu_1 \dots \nu_r}$ satisface las mismas condiciones que $\Gamma_{\nu_1 \dots \nu_r}$ en todos sus índices.

Nótese, por último, que $\widetilde{\Gamma}_\nu$ sigue siendo (como Γ_ν), perpendicular a n_ν y ∂_ν. Pero en contraposición con la última de (3.4) tenemos ahora

$$\widetilde{\Gamma}_\nu \gamma_\nu = 0 \tag{3.16}$$

4. *Coordenadas del campo*

La identidad (3.14) nos permite ahora expresar todos los espinores tensoriales dados por la (2.3) en función de un espinor simple que extraemos mediante :

$$\Psi^{(r)} = 2^{-r}\, \widetilde{\Gamma}_{\nu_1 \dots \nu_r} \Psi^{(r)}_{\nu_1 \dots \nu_r} \tag{4.1}$$

Siendo entonces

$$\Psi^{(r)}_{\nu_1 \dots \nu_r} = \Gamma_{\nu_1 \dots \nu_r} \Psi^{(r)} \tag{4.2}$$

De esta manera se ha conseguido que $\Gamma_{\nu_1 \dots \nu_r}$ lleve sobre sí la responsabilidad del cumplimiento de todas las condiciones auxiliares impuestas sobre el tensor espinor $\Psi^{(r)}_{\nu_1 \dots \nu_r}$. Esto es: completa simetría, nulidad de traza, ortogonalidad con relación a n_ν, ∂_ν y γ_ν. Por su parte, el espinor simple $\Psi^{(r)}$ debe satisfacer solamente (cf. (3.6)) la ecuación de campo

$$\gamma \,.\, \partial\, \Psi^{(r)} = 0 \tag{4.3}$$

sin condición suplementaria alguna.

Hemos logrado entonces extraer $s + 1$ coordenadas (espinoriales) libres, $\Psi^{(r)}$, las que mediante (2.2), (2.4), (2.7) y (4.2) nos permiten caracterizar completamente el estado del campo, de manera compatible con las condiciones suplementarias.

5. *Espinores adjuntos*

Los espinores (4.1) son espinores simples de Dirac, y sus adjuntos se definen ([2])

$$\overline{\Psi^{(r)}} = \Psi^{(r)*} A \tag{5.1}$$

Donde el asterisco indica el conjugado transpuesto. Convendremos ahora que la operación de conjugación no afecta la unidad ima-

([2]) J. M. Jauch y F. Rohrlich : *The Theory of Photons and Electrons*, Addinson-Wesley, pág. 53, 1955.

ginaria que aparece en la cuarta componente de los vectores a causa de la métrica indefinida. Conjugando y transponiendo la ecuación (4.3) tenemos

$$\Psi^{(r)*}\gamma^{*}\,.\,\partial = 0 \tag{5.2}$$

(En expresiones como la que antecede, se entiende que los vectores de derivación operan hacia la izquierda).

La matriz A está ligada con γ_{μ}^{*} mediante

$$\gamma_{\mu}^{*} = -\,A\gamma_{\mu}A^{-1}; \qquad A^{*} = A \tag{5.3}$$

Por lo tanto (5.2) se convierte en

$$-\,\Psi^{(r)*}\,.\,A\gamma\,.\,\partial A^{-1} = -\,\overline{\Psi^{(r)}}\,\gamma\,.\,\partial A^{-1} = 0$$

es decir

$$\overline{\Psi^{(r)}}\,\gamma\,.\,\partial = 0 \tag{5.4}$$

que es la ecuación adjunta de la (4.3).

La matriz conjugada transpuesta de (3.2) es

$$\begin{aligned}\Gamma_{\nu}^{*} &= \alpha_{\nu} + \beta_{\nu}\gamma^{*}\,.\,\beta\,\gamma^{*}\,.\,\alpha = \alpha_{\nu} + \beta_{\nu}A\gamma\,.\,\beta A^{-1}A\gamma\,.\,\alpha A^{-1}\\ &= \alpha_{\nu} + \beta_{\nu}A\gamma\,.\,\beta\gamma\,.\,\alpha A^{-1} = A\,(\alpha_{\nu} + \beta_{\nu}\gamma\,.\,\beta\,\gamma\,.\,\alpha)\,A^{-1}\end{aligned}$$

y por la definición (3.10)

$$\Gamma_{\nu}^{*} = A\widetilde{\Gamma}_{\nu}A^{-1} \tag{5.5}$$

Análogamente tenemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{*} &= (\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu})^{*} = \Gamma_{\nu}^{*}\Gamma_{\mu}^{*} = A\widetilde{\Gamma}_{\nu}A^{-1}A\widetilde{\Gamma}_{\mu}A^{-1} = A\widetilde{\Gamma}_{\nu}\widetilde{\Gamma}_{\mu}A^{-1}\\ &= A\widetilde{\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu}}A^{-1} = A\widetilde{\Gamma}_{\mu\nu}A^{-1}\end{aligned}$$

y en general

$$\Gamma_{\nu_1\ldots\nu_r}^{*} = A\widetilde{\Gamma}_{\nu_1\ldots\nu_r}A^{-1} \tag{5.6}$$

Tomando ahora la conjugada transpuesta de (4.2)

$$\Psi_{\nu_1\ldots\nu_r}^{(r)*} = \Psi^{(r)*}\,\Gamma_{\nu_1\ldots\nu_r}^{*} = \Psi^{(r)*}\,A\widetilde{\Gamma}_{\nu_1\ldots\nu_r}A^{-1}$$

$$\Psi_{\nu_1\ldots\nu_r}^{(r)*} = \overline{\Psi^{(r)}}\,\widetilde{\Gamma}_{\nu_1\ldots\nu_r}A^{-1}$$

y poniendo

$$\overline{\Psi^{\cdot(r)}_{\nu_1 \dots \nu_r}} = \Psi^{\cdot(r)}_{\nu_1 \dots \nu_r} A$$

Deducimos

$$\overline{\Psi^{\cdot(r)}_{\nu_1 \dots \nu_r}} = \overline{\Psi^{\cdot(r)}}\, \widetilde{\Gamma}_{\nu_1 \dots \nu_r} \qquad (5.7)$$

Este espinor satisface entonces la ecuación adjunta

$$\Psi^{\cdot(r)}_{\nu_1 \dots \nu_r}\, \gamma \,.\, \partial = 0$$

El espinor adjunto de (2.4) es simplemente:

$$\overline{\Psi^{\cdot(r)}_{\nu_1 \dots \nu_s}} = \Psi^{\cdot(r)*}_{\nu_1 \dots \nu_s} A \qquad (5.8)$$

$$= \partial^{-(s-r)}\, \partial_{\nu_{r+1}} \dots \partial_{\nu_s}\, \overline{\Psi^{\cdot(r)}_{\nu_1 \dots \nu_r}} + \text{sim}$$

Y la descomposición adjunta de (2.7) queda expresada por

$$\overline{\Psi^{\cdot}}_{\nu_1 \dots \nu_s} = \sum_0^s \overline{\Psi^{\cdot(t)}_{\nu_1 \dots \nu_s}} \qquad (5.9)$$

6. *Transformaciones de Gauge* ([3])

Si un tensor espinor simétrico $\chi_{\nu_1 \dots \nu_{s-1}}$ satisface

$$\gamma \,.\, \partial \chi_{\nu_1 \dots \nu_{s-1}} = 0$$

$$\gamma_{\nu_1}\, \chi_{\nu_1 \dots \nu_{s-1}} = 0$$

entonces

$$\Psi^{\cdot}_{\nu_1 \dots \nu_s} = \partial_{\nu_s}\, \chi_{\nu_1 \dots \nu_{s-1}} + \text{sim} \qquad (6.1)$$

también las satisface.

La transformación

$$\Psi^{\cdot}_{\nu_1 \dots \nu_s} \to \Psi^{\cdot}_{\nu_1 \dots \nu_s} + \Psi^{\cdot}_{\nu_1 \dots \nu_s} \qquad (6.2)$$

es una transformación de Gauge.

Si se efectúa la descomposición de $\chi_{\nu_1 \dots \nu_{s-1}}$, análoga a la (2.7) tendremos

$$\chi_{\nu_1 \dots \nu_{s-1}} = \sum_{t=0}^{s-1} \chi^{(t)}_{\nu_1 \dots \nu_{s-1}}$$

y por consiguiente

([3]) Véase también: J. S. De Wett: *Phys. Rev.* **58**, 236 (1940).

$$\Psi^{\bullet}_{\nu_1 \dots \nu_s} = \sum_{t=0}^{s-1} \Psi^{\bullet (t)}_{\nu_1 \dots \nu_s}$$

El tensor espinor $\Psi^{\bullet}_{\nu_1 \dots \nu_s}$ posee entonces sólo s espinores simples como componentes libres, careciendo de una componente completamente transversal:

$$\Psi^{\bullet (s)}_{\nu_1 \dots \nu_s} = 0$$

Por ese motivo la transformación (6.2) modifica s de los espinores libres del tensor espinor de campo, dejando el espinor completamente transversal $\Psi^{\bullet (s)}$, sin modificación. Esto significa que si se impone el requerimiento de la invariancia de gauge de la teoría, entonces el tensor espinor de campo sólo posee un espinor realmente libre y éste es el dado por

$$\Psi^{\bullet (s)} = \frac{1}{2^s} \widetilde{\Gamma}_{\nu_1 \dots \nu_s} \Psi^{\bullet}_{\nu_1 \dots \nu_s}$$

7. *Cuantificación*

Los $s+1$ espinores simples $\Psi^{\bullet (r)}$, son coordenadas libres del campo que satisfacen la ecuación de Dirac (para una partícula sin masa). Impondremos sobre ellas las relaciones de anti-conmutación

$$\{ \Psi^{\bullet (r)} (x), \ \overline{\Psi^{\bullet (r')}} (x') \} = i \delta^{rr'} \gamma . \partial D (x - x') \tag{7.1}$$

donde

$$\delta^{rr'} = 0 \quad \text{si} \quad r \neq r'$$

y

$$\delta^{rr} = \varepsilon^r \quad \text{(no necesariamente 1)}$$

ε^r será denominado el peso de la r-ésima coordenada libre*.

De (4.2), (5.7) y (7.1) deducimos

$$\{ \Psi^{\bullet (r)}_{\mu_1 \dots \mu_r} (x), \ \overline{\Psi^{\bullet (r')}_{\nu_1 \dots \nu_{r'}}} (x') \} = \{ \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_r} \Psi^{\bullet (r)} (x), \ \overline{\Psi^{\bullet (r')}} (x') \widetilde{\Gamma}_{\nu_1 \dots \nu_{r'}} \}$$

$$= \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_r} \{ \Psi^{\bullet (r)} (x), \ \overline{\Psi^{\bullet (r')}} (x') \} \widetilde{\Gamma}_{\nu_1 \dots \nu_{r'}} =$$

$$= i \delta^{rr'} \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_r \nu_r} \gamma . \partial \widetilde{\Gamma}_{\nu_1 \dots \nu_{r'}} D (x - x')$$

$$\{ \Psi^{\bullet (r)}_{\mu_1 \dots \mu_r} (x), \ \overline{\Psi^{\bullet (r')}_{\nu_1 \dots \nu_{r'}}} (x') \} = i \delta^{rr'} \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_r} \widetilde{\Gamma}_{\nu_1 \dots \nu_r} \gamma . \partial D (x - x') \tag{7.2}$$

* El peso de una coordenada libre depende de la manera en que ésta aparece en el Lagrangiano.

Utilizando ahora (2.4) y (5.8)

$$\{ \Psi^{\bullet(r)}_{\mu_1 \dots \mu_s}(x),\ \overline{\Psi}^{\bullet(r')}_{\nu_1 \dots \nu_s}(x') \} = i\delta^{rr'}\, \Gamma^{(r)}_{\mu_1 \dots \mu_s ;\, \nu_1 \dots \nu_s}\, \gamma \,.\, \partial\, D(x-x') \qquad (7.3)$$

Siendo

$$\Gamma^{(r)}_{\mu_1 \dots \mu_r ;\, \nu_1 \dots \nu_s} = (\partial^{-(s-r)}\, \partial_{\mu_{r+1}} \dots \partial_{\mu_s} \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_r} + \text{sim}) \qquad (7.4)$$

$$(\partial^{-(s-r)}\, \partial_{\nu_{r+1}} \dots \partial_{\nu_s} \widetilde{\Gamma}_{\nu_1 \dots \nu_r} + \text{sim})$$

Por último, según (2.7) y (5.8)

$$\{ \Psi^{\bullet}_{\mu_1 \dots \mu_s}(x),\ \overline{\Psi}^{\bullet}_{\nu_1 \dots \nu_s}(x') \} = i\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_s ;\, \nu_1 \dots \nu_s}\, \gamma \,.\, \partial\, D(x-x') \qquad (7.5)$$

Donde hemos puesto

$$\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_s ;\, \nu_1 \dots \nu_s} = \sum_{r=0}^{s} \varepsilon^r\, \Gamma^{(r)}_{\mu_1 \dots \mu_s ;\, \nu_1 \dots \nu_s} \qquad (7.6)$$

La (7.5) son las relaciones de anticonmutación buscadas. Ellas son compatibles con las condiciones suplementarias.

8. *Ejemplo*

Para espín $\frac{3}{2}$, el campo está representado por un vector espinor $\Psi^{\bullet}_{\nu}$, cuya descomposición (2.7) es

$$\Psi^{\bullet}_{\nu} = \Psi^{\bullet(0)}_{\nu} + \Psi^{\bullet(1)}_{\nu}$$

$$\Psi^{\bullet(0)}_{\nu} = \partial^{-1}\, \partial_{\nu} \Psi^{\bullet(0)}$$

$$\Psi^{\bullet(0)} = n_{\nu} \Psi^{\bullet}_{\nu}$$

$$\Psi^{\bullet(1)}_{\nu} = \Gamma_{\nu} \Psi^{\bullet(1)}$$

$$\Psi^{\bullet(1)} = \tfrac{1}{2}\, \widetilde{\Gamma}_{\nu} \Psi^{\bullet}_{\nu} = \alpha_{\nu} \psi_{\nu}$$

Por lo tanto

$$\Psi^{\bullet}_{\nu} = \partial^{-1}\, \partial_{\nu} \Psi^{\bullet(0)} + \Gamma_{\nu} \Psi^{\bullet(1)}$$

es la expresión explícita que pone al vector espinor de campo en función de las coordenadas libres $\Psi^{\bullet(0)}$ y $\Psi^{\bullet(1)}$.

Las relaciones de anticonmutación son :

$$\{ \Psi^{\bullet(0)}(x),\ \overline{\Psi}^{\bullet(0)}(x') \} = i\, \varepsilon^0\, \gamma \,.\, \partial\, D(x-x')$$

$$\{ \Psi^{\bullet(1)}(x),\ \overline{\Psi}^{\bullet(1)}(x') \} = i\, \varepsilon^1\, \gamma \,.\, \partial\, D(x-x')$$

$$\{ \Psi_\mu(x), \quad \bar{\Psi}_\nu(x') \} = i\,\Gamma_{\mu;\nu}\,\gamma\,.\,\partial\, D(x-x')$$

$$\Gamma_{\mu;\nu} = \varepsilon^0\,\Gamma^0_{\mu;\nu} + \varepsilon^1\,\Gamma^1_{\mu;\nu}$$

$$\Gamma^0_{\mu;\nu} = \partial^{-2}\,\partial_\mu\partial_\nu\,; \qquad \Gamma^1_{\mu;\nu} = \Gamma_\mu\widetilde{\Gamma_\nu}$$

$\Gamma^1_{\mu;\nu}$ es completamente independiente de la elección particular de los vectores α_μ y β_μ. En efecto

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{\mu;\nu} &= (\alpha_\mu + \beta_\mu\gamma\,.\,\alpha\,\gamma\,.\,\beta)\,(\alpha_\nu - \beta_\nu\gamma\,.\,\alpha\,\gamma\,.\,\beta)\\ &= \alpha_\mu\alpha_\nu + \beta_\mu\beta_\nu + (\alpha_\mu\beta_\nu - \alpha_\nu\beta_\mu)\,\gamma\,.\,\beta\,\gamma\,.\,\alpha\\ &= \alpha_\mu\alpha_\nu + \beta_\mu\beta_\nu + \tfrac{1}{2}(\alpha_\mu\beta_\nu - \alpha_\nu\beta_\mu)\,(\alpha_\rho\beta_\sigma + \alpha_\sigma\beta_\rho)\,\gamma_\sigma\gamma_\rho\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}(\alpha_\mu\beta_\nu - \alpha_\nu\gamma_\mu)\,(\alpha_\rho\beta_\sigma - \alpha_\sigma\beta_\rho) &= \alpha_\mu\alpha_\rho\beta_\nu\beta_\sigma + \alpha_\nu\alpha_\sigma\beta_\mu\beta_\rho - \alpha_\mu\alpha_\sigma\beta_\nu\beta_\sigma - \alpha_\nu\alpha_\rho\beta_\mu\beta_\sigma\\ &= \alpha_\mu\alpha_\rho\,(\alpha_\nu\alpha_\sigma + \beta_\nu\beta_\sigma) - \alpha_\mu\alpha_\rho\alpha_\nu\alpha_\sigma +\\ &\quad + \beta_\mu\beta_\rho\,(\alpha_\nu\alpha_\sigma + \beta_\nu\beta_\sigma) - \beta_\mu\beta_\rho\beta_\nu\beta_\sigma -\\ &\quad - \alpha_\mu\alpha_\sigma\beta_\nu\beta_\rho - \alpha_\nu\alpha_\rho\beta_\mu\beta_\sigma\\ &= (\alpha_\mu\alpha_\rho + \beta_\mu\beta_\rho)\,(\alpha_\nu\alpha_\sigma + \beta_\nu\beta_\sigma) - (\alpha_\mu\alpha_\sigma + \beta_\mu\beta_\sigma)\,.\\ &\quad (\alpha_\nu\alpha_\rho + \beta_\nu\beta_\rho)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{\mu;\nu} &= (\alpha_\mu\alpha_\nu + \beta_\mu\beta_\nu) + \tfrac{1}{2}(\alpha_\mu\alpha_\rho + \beta_\mu\beta_\rho)\,(\alpha_\nu\alpha_\sigma + \beta_\nu\beta_\sigma)\,\gamma_\sigma\gamma_\rho\\ &\quad - \tfrac{1}{2}(\alpha_\mu\alpha_\sigma + \beta_\mu\beta_\sigma)\,(\alpha_\nu\alpha_\rho + \beta_\nu\beta_\rho)\,\gamma_\sigma\gamma_\rho\\ &= (\alpha_\mu\alpha_\nu + \beta_\mu\beta_\nu) + \tfrac{1}{2}(\alpha_\mu\alpha_\rho + \beta_\mu\beta_\rho)\,(\alpha_\nu\alpha_\sigma + \beta_\nu\beta_\sigma)\,\gamma_\sigma\gamma_\rho -\\ &\quad - \tfrac{1}{2}(\alpha_\mu\alpha_\sigma + \beta_\mu\beta_\sigma)\,(\alpha_\nu\alpha_\rho + \beta_\nu\beta_\rho)\,\,(2\delta_{\sigma\rho} - \gamma_\rho\gamma_\sigma)\\ &= (\alpha_\mu\alpha_\nu + \beta_\mu\beta_\nu) + \tfrac{1}{2}(\alpha_\mu\alpha_\rho + \beta_\mu\beta_\rho)\,(\alpha_\nu\alpha_\sigma + \beta_\nu\beta_\sigma)\,\gamma_\sigma\gamma_\rho -\\ &\quad - (\alpha_\mu\alpha_\nu + \beta_\mu\beta_\nu) + \tfrac{1}{2}(\alpha_\mu\alpha_\sigma + \beta_\mu\beta_\sigma)\,(\alpha_\nu\alpha_\rho + \beta_\nu\beta_\rho)\,\gamma_\rho\gamma_\sigma\\ &= (\alpha_\mu\alpha_\rho + \beta_\mu\beta_\rho)\,(\alpha_\nu\alpha_\sigma + \beta_\nu\beta_\sigma)\,\gamma_\sigma\gamma_\rho\end{aligned}$$

Y teniendo presente que puede ponerse (cf. I (.))

$$\alpha_\mu\alpha_\nu + \beta_\mu\beta_\nu = \delta_{\mu\nu} - \partial^{-2}\,\partial_\mu\partial_\nu - \partial^{-1}\,(\partial_\mu n_\nu + n_\mu\partial_\nu)$$

Además, $\Gamma^1_{\mu;\nu}$ opera sobre $\gamma\,.\,\partial\, D\,(x-x')$ y se cumple que

$$\gamma\,.\,\partial\,\gamma\,.\,\partial\, D\,(x-x') = \partial_\mu\partial_\mu\, D\,(x-x') = 0$$

Por ello podemos poner

$$(\alpha_\mu \alpha_\varrho + \beta_\mu \beta_\varrho)\,\gamma_\varrho = (\delta_{\mu\varrho} - \partial^{-2}\,\partial_\mu \partial_\varrho - \partial^{-1}\,(\partial_\mu n_\varrho + n_\mu \partial_\varrho))\,\gamma_\varrho$$
$$= \gamma_\mu - \partial^{-1}\,\partial_\mu \gamma\,.\,n$$

$$\Gamma^1_{\mu\,;\,\nu} = (\alpha_\nu \alpha_\sigma + \beta_\nu \beta_\sigma)\,\gamma_\sigma\,(\gamma_\mu - \partial^{-1}\,\partial_\mu \gamma\,.\,n)$$
$$= (\gamma_\nu - \partial^{-2}\,\partial_\nu\,\gamma\,.\,\partial - \partial^{-1}\,\partial_\nu \gamma\,.\,n - \partial^{-1}\,n_\nu \gamma\,.\,\partial)\,(\gamma_\mu - \partial^{-1}\,\partial_\mu \gamma\,.\,n)$$
$$= \gamma_\nu \gamma_\mu - \partial^{-1}\,\partial_\mu \gamma_\nu \gamma\,.\,n - \partial^{-2}\,\partial_\nu \gamma\,.\,\partial \gamma_\mu + \partial^{-3}\,\partial_\mu \partial_\nu \gamma\,.\,\partial\,\gamma\,.\,n -$$
$$- \partial^{-1}\,\partial_\nu \gamma\,.\,n \gamma_\mu - \partial^{-2}\,\partial_\nu \partial_\mu - \partial^{-1}\,n_\nu \gamma\,.\,\partial \gamma_\mu + \partial^{-2}\,n_\nu \partial_\mu \gamma\,.\,\partial\,.\,\gamma\,.\,n$$
$$= \gamma_\nu \gamma_\mu - \partial^{-1}\,(\partial_\mu \gamma_\nu \gamma\,.\,n + \partial_\nu \gamma\,.\,n \gamma_\mu) - 2\,.\,\partial^{-2}\,\partial_\nu \partial_\mu + 2\,\partial^{-2}\,\partial_\mu \partial_\nu -$$
$$- \partial^{-2}\,\partial_\nu \partial_\mu - 2\,\partial^{-1}\,n_\nu \partial_\mu + 2\,\partial^{-1}\,n_\nu \partial_\mu$$

$$\Gamma^1_{\mu\,;\,\nu} = \gamma_\nu \gamma_\mu - \partial^{-2}\,\partial_\mu \partial_\nu - \partial^{-1}\,(\partial_\mu \gamma_\nu \gamma\,.\,n + \gamma\,.\,n\,\partial_\nu \gamma_\mu)$$

Con esta expresión resulta

$$\Gamma_{\mu\,;\,\nu} = (\varepsilon^0 - \varepsilon^1)\,\partial^{-2}\,\partial_\mu \partial_\nu + \varepsilon^1 \gamma_\nu \gamma_\mu - \varepsilon^1 \partial^{-1}\,(\gamma\,.\,n \partial_\nu \gamma_\mu + \partial_\mu \gamma_\nu \gamma\,.\,n)$$

$$\Gamma_{\mu\,;\,\nu} = \varepsilon^1 \left[\left(\frac{\varepsilon^0}{\varepsilon^1} - 1\right)\partial^{-2}\,\partial_\mu \partial_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu - \partial^{-1}\,(\gamma\,.\,n \partial_\nu \gamma_\mu + \partial_\mu \gamma_\nu \gamma\,.\,n)\right]$$