

VARIABLE COMPLEJA Y EL ANALISIS DE
TRANSFERENCIA DE CALOR EN CIERTOS
ELEMENTOS DE REACTORES NUCLEARES

por

Patricio A.A. Laura

INSTITUTO DE MECÁNICA APLICADA
8111 - Base Naval Puerto Belgrano

y

Gustavo Sánchez Sarmiento

CENTRO ATOMICO BARILOCHE
8400 Río Negro.

ARGENTINA

Resumen.

Se obtiene una solución aproximada del problema estacionario de conducción de calor en una barra de sección poligonal regular (I) en el caso de generación de calor en un subdominio (II) de sección circular. A su vez esta región está rodeada por un cilindro circular (III) de características térmicas que difieren de las de (I) y (II).

La solución analítica brinda valores que están en excelente concordancia con resultados obtenidos mediante el método de elementos finitos.

Introducción

En un trabajo reciente /1/ se realizó una revisión de algunas metodologías analíticas aproximadas desarrolladas por los autores y colaboradores para la resolución de la ecuación de conducción de calor aplicables a geometrías complejas que se presentan comúnmente en algunos dispositivos y componentes de reactores nucleares.

Tales metodologías analíticas están basadas en técnicas de transformación conforme.

En el presente trabajo, extensión de /2/, se determina el campo término estacionario en una barra prismática compuesta, con generación de calor uniforme en el núcleo cilíndrico central estando éste rodeado por varias capas concéntricas de materiales de diversas conductividades. Las predicciones analíticas son comparadas con valores obtenidos mediante el método de elementos finitos existiendo muy buen acuerdo entre ambas metodologías.

Este problema presenta interés en tecnología nuclear, en particular para transferencia térmica en macroceldas constituidas por un elemento combustible nuclear inmerso en un moderador en el caso en que éste es construido en varias capas. El modelo también es de interés en ciertas situaciones de la bioingeniería /3/.

Consideremos el sistema termomecánico que se muestra en la Figura 1 y donde el fenómeno térmico de transferencia de calor es gobernado por las siguientes ecuaciones:

Subdominio I

$$k_1 \nabla^2 T = -\dot{S} \quad (0 \leq R \leq R_1) \quad (1)$$

donde $\dot{S}$ constituye el calor generado por unidad de volumen y tiempo.

Subdominio II

$$k_2 \nabla^2 T = 0 \quad (R_1 \leq R \leq R_2) \quad (2)$$

Subdominio III

$$k_3 \nabla^2 T = 0 \quad (R \geq R_2) \quad (3)$$

$$T[L(x,y) = 0] = T_0 \quad (4)$$

donde $L(x,y) = 0$ es la relación funcional que define el perímetro del dominio en cuestión.

En la sección siguiente se presenta una solución analítica aproximada del problema para el caso en que R_1/a_p ,

$R_2/a_p \ll 1$.

La solución puede ser extendida fácilmente si hay varias "capas" que rodean al núcleo.

Solución Analítica Aproximada

Sea el sistema mostrado en la Figura 1. En el caso en que $R_1 \ll a_p$, es razonable introducir la aproximación:

$$T(R, \phi) \Big|_{R=R_1} = T_1 \quad (5)$$

donde T_1 es una constante que será determinada posteriormente. En rigor se tiene que $T(R_1, \phi) = g(\phi)$, pero ha sido demostrado en la Referencia 2 que en el caso en que el sistema termomecánico está constituido por dos materiales, la aproximación (5) conduce a muy buena precisión en la determinación del campo térmico.

Por consiguiente, la solución del sistema diferencial (1) y (5) está dada por la expresión:

$$T = T_1 + \frac{\dot{S}}{4k_1} (R_1^2 - R^2) \quad (6)$$

y el flujo calórico, para $R = R_1$, es:

$$\dot{q}_1 = -k_1 \left. \frac{dT}{dR} \right|_{R=R_1} = \frac{\dot{S}_1 R_1}{2} \quad (7)$$

En los subdominios II y III el problema térmico es definido por las ecuaciones (2) y (3), las condiciones de borde simplificadas (5) y la aproximación:

$$T(R_1 \phi) \Big|_{R=R_2} = T_2 \quad (8)$$

donde T_2 es un parámetro constante a ser evaluado luego.

Ha sido demostrado en la Referencia 5 que la transformación aproximada de los subdominios II y III en el plano z en anillos circulares en el plano ξ (ver Figura 2) puede ser lograda fácilmente si:

$$R_1/a_p ; R_2/a_p \ll 1 \quad (9)$$

Dominios poligonales regulares son transformados en un círculo unitario en el plano ξ mediante la relación funcional

$$z = a_p \cdot A_s \sum_{j=0}^{\infty} a_{1+j} s^{1+j} ; a_1=1 \quad (10)$$

donde s es el orden del polígono y los parámetros A_s y a_{1+j} están tabulados en la literatura /4/.

Tomando $|\xi| \ll 1$, uno tiene:

$$z \approx a_p \cdot A_s \cdot \xi \quad (11)$$

y, por consiguiente:

$$|z| = R_1 \approx a_p \cdot A_s \cdot r_1 \quad (12a)$$

$$|z| = R_2 \approx a_p \cdot A_s \cdot r_2 \quad (12b)$$

Suponiendo un contacto térmico perfecto entre los subdominios I, II, y III se tiene que el flujo térmico total está dado por:

$$q = \dot{S} \pi R_1^2 \quad (13)$$

En el plano ξ se tiene:

$$q = -k_2 \cdot 2\pi \cdot r \cdot \frac{dT}{dr} \quad (14)$$

y, por consiguiente:

$$q \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -2\pi k_2 (T_2 - T_1) \quad (15)$$

Por otra parte, en el subdominio III resulta:

$$q = -k_3 \cdot 2\pi \cdot r \cdot \frac{dT}{dr} \quad (16)$$

y se obtiene así:

$$q \int_{r_2}^1 \frac{dr}{r} = -2\pi k_3 (T_0 - T_2) \quad (17)$$

De las expresiones (15) y (17) se elimina T_2 resultando en definitiva:

$$T_1 = T_0 + \frac{1}{2\pi} q \left(\frac{1}{k_3} \ln \frac{1}{r_2} + \frac{1}{k_2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \quad (18)$$

Substituyendo (18) en (6) resulta, para el subdominio I:

$$\frac{T - T_0}{\frac{\dot{S} R_1^2}{k_1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{k_3} \ln \frac{a_p}{R_2} A_s + \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{R}{R_1} \right)^2 \right] \quad (19)$$

Integrando la expresión (14) entre r_1 y r resulta, para el subdominio II:

$$q \int_{r_1}^r \frac{dr}{r} = q \ln \frac{r}{r_1} = -2\pi k_2 (T - T_1) \quad (20)$$

de la cual se llega fácilmente a:

$$\frac{T - T_0}{\frac{S R_1^2}{k_1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{k_3} \ln A_s \frac{a_p}{R_2} + \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) - \frac{1}{2} \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{R}{R_1} \quad (21)$$

En forma similar, integrando a la expresión (16) entre r y l , se obtiene:

$$q \ln \frac{l}{r} = - 2 \pi k_3 (T_0 - T) \quad (22)$$

y efectuando las necesarias substituciones resulta:

$$\frac{T - T_0}{\frac{S R_1^2}{k_1}} = \frac{1}{2} \frac{k_1}{k_3} \ln \frac{l}{r} \quad (23)$$

Es importante aclarar que en el caso de la expresión (23) no resulta posible utilizar la simplificación (11).

Resultados Numéricos

En el caso de una configuración cuadrada, tal como se muestra en la Figura 1, la función transformación aproximada es /6/:

$$z = (1.080\xi - 0.1104\xi^5 + 0.0470\xi^9 - 0.0275\xi^{13} + 0.0189\xi^{17} - 0.0141\xi^{21} + 0.0111\xi^{25} - 0.0093\xi^{29} + 0.0079\xi^{33} - 0.0069\xi^{37} + 0.0064\xi^{41} - 0.0059\xi^{45} + 0.0055\xi^{49} - 0.0055\xi^{53} + 0.0055\xi^{57} - 0.0057\xi^{61} + 0.0066\xi^{65} - 0.0065\xi^{69} + 0.0040\xi^{73} - 0.0010\xi^{77}) a_p \quad (24)$$

La Tabla 1 contiene valores de la variable $(T-T_0)/(\frac{S R_1^2}{k_1})$ en función de R/a_p para $\theta=0, \pi/4$ para el caso en que $k_1/k_3 = \frac{1}{2}$; $k_1/k_2 = \frac{1}{5}$; $R_2/R_1 = \frac{5}{4}$ y $\frac{a_p}{R_2} = 2$.

Los resultados analíticos son comparados con valores obtenidos mediante el método de elementos finitos (ver Figura 3).

El acuerdo es excelente desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas y aún en el caso en que a_p/R_2 es relativamente pequeño ($a_p/R_2 = 2$ en el caso en consideración).

La concordancia es también muy buena en el caso de los resultados que se muestran en la Tabla 2.

Se concluye que nuevamente el método de transformación conforme, en una formulación aproximada, ha permitido la solución de un problema relativamente complejo de una manera muy simple y precisa.

$\theta = 0$			$\theta = \pi/4$		
R/a _p	Expr. Anal.	Elem. Fin.	R/a _p	Expr. Anal.	Elem. Fin.
0	0.46454	0.4657	0	0.46454	0.4657
0.036360	0.46247	0.4634	0.036359	0.46247	0.4634
0.072730	0.45628	0.4571	0.072733	0.45628	0.4571
0.10910	0.44594	0.4467	0.10909	0.44594	0.4467
0.14550	0.43146	0.4322	0.14552	0.43146	0.4321
0.18180	0.41290	0.4136	0.18187	0.41290	0.4135
0.21820	0.39015	0.3908	0.21821	0.39015	0.3908
0.25450	0.36334	0.3640	0.25456	0.36334	0.3639
0.29090	0.33232	0.3329	0.29090	0.33232	0.3329
0.32730	0.29716	0.2976	0.32725	0.29716	0.2977
0.36360	0.25797	0.2582	0.36359	0.25797	0.2584
0.40000	0.21454	0.2141	0.39994	0.21454	0.2148
0.43330	0.20654	0.2060	0.43331	0.20654	0.2069
0.46670	0.19912	0.1983	0.46669	0.19912	0.1995
0.50000	0.19223	0.1912	0.50007	0.19223	0.1927
0.53570	0.17374	0.1738	0.56526	0.16377	0.1629
0.57140	0.15715	0.1573	0.63060	0.13747	0.1367
0.60710	0.14145	0.1415	0.69593	0.11425	0.1136
0.64290	0.12646	0.1265	0.76127	0.093687	0.09305
0.67860	0.11217	0.1121	0.82647	0.075551	0.07493
0.71430	0.098431	0.09837	0.89180	0.059563	0.05893
0.75000	0.085170	0.08509	0.95714	0.045632	0.04498
0.78570	0.072308	0.07222	1.0225	0.033671	0.03297
0.82140	0.059778	0.05968	1.0877	0.023653	0.02288
0.85710	0.047517	0.04743	1.1530	0.015515	0.01463
0.89290	0.035422	0.03536	1.2183	0.0092474	0.00822
0.92860	0.023537	0.02349	1.2835	0.0046811	0.00366
0.96430	0.011743	0.01172	1.3489	0.0014187	0.00091
1	0	0	1.4142	0	0

TABLA N° 1 - Valores de $(T-T_0)/(S \cdot R_1^2/k_1)$
 $(\frac{k_1}{k_3} = \frac{1}{2} ; \frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{5} ; \frac{R_2}{R_1} = \frac{5}{4} ; \frac{a_P}{R_2} = 2)$

$$\theta = 0$$

$$\theta = \pi/4$$

R/a _p	Expr. Anal.	Elem. Fin.	R/a _p	Expr. Anal.	Elem. Fin.
0	1.0820	1.0816	0	1.0820	1.0816
0.040000	1.0720	1.0703	0.039994	1.0720	1.0703
0.080000	1.0420	1.0398	0.080002	1.0420	1.0398
0.12000	0.99204	0.9895	0.12000	0.99204	0.9895
0.16000	0.92204	0.9191	0.15995	0.92204	0.9192
0.20000	0.83204	0.8274	0.19997	0.83204	0.8276
0.23330	0.67803	0.6751	0.23335	0.67803	0.6750
0.26670	0.54423	0.5421	0.26672	0.54423	0.5422
0.30000	0.42658	0.4249	0.29995	0.42658	0.4253
0.33500	0.38988	0.3882	0.35567	0.37063	0.3690
0.37000	0.35660	0.3551	0.41139	0.32244	0.3210
0.40500	0.32627	0.3249	0.46711	0.28057	0.2793
0.44000	0.29837	0.2972	0.52283	0.24368	0.2426
0.47500	0.27252	0.2714	0.57855	0.21086	0.2099
0.51000	0.24840	0.2474	0.63427	0.18145	0.1805
0.54500	0.22576	0.2249	0.68999	0.15499	0.1541
0.58000	0.20439	0.2036	0.74571	0.13114	0.1303
0.61500	0.18410	0.1834	0.80143	0.10966	0.1088
0.65000	0.16476	0.1641	0.85715	0.090371	0.08955
0.68500	0.14622	0.1456	0.91287	0.073134	0.07230
0.72000	0.12838	0.1279	0.96859	0.057860	0.05698
0.75500	0.11113	0.1107	1.0242	0.044515	0.04359
0.79000	0.094377	0.09398	1.0799	0.032998	0.03199
0.82500	0.078041	0.07771	1.1356	0.023328	0.02220
0.86000	0.062041	0.06177	1.1913	0.015491	0.01420
0.89500	0.046305	0.04610	1.2471	0.0093970	0.00799
0.93000	0.030763	0.03062	1.3028	0.0048051	0.00355
0.96500	0.015351	0.01528	1.3585	0.0013646	0.00089
1.0000	0	0	1.4142	0	0

TABLA N° 2 - Valores de $(T-T_0)/(S R_1^2/k_1)$

$$\left(\frac{k_1}{k_3} = \frac{2}{3} ; \frac{k_1}{k_2} = 2 ; \frac{R_2}{R_1} = \frac{3}{2} ; \frac{a_p}{R_2} = \frac{10}{3} \right)$$

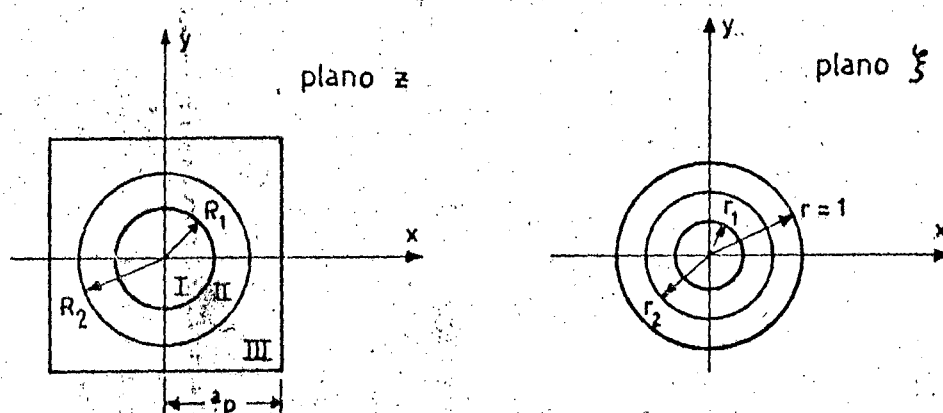
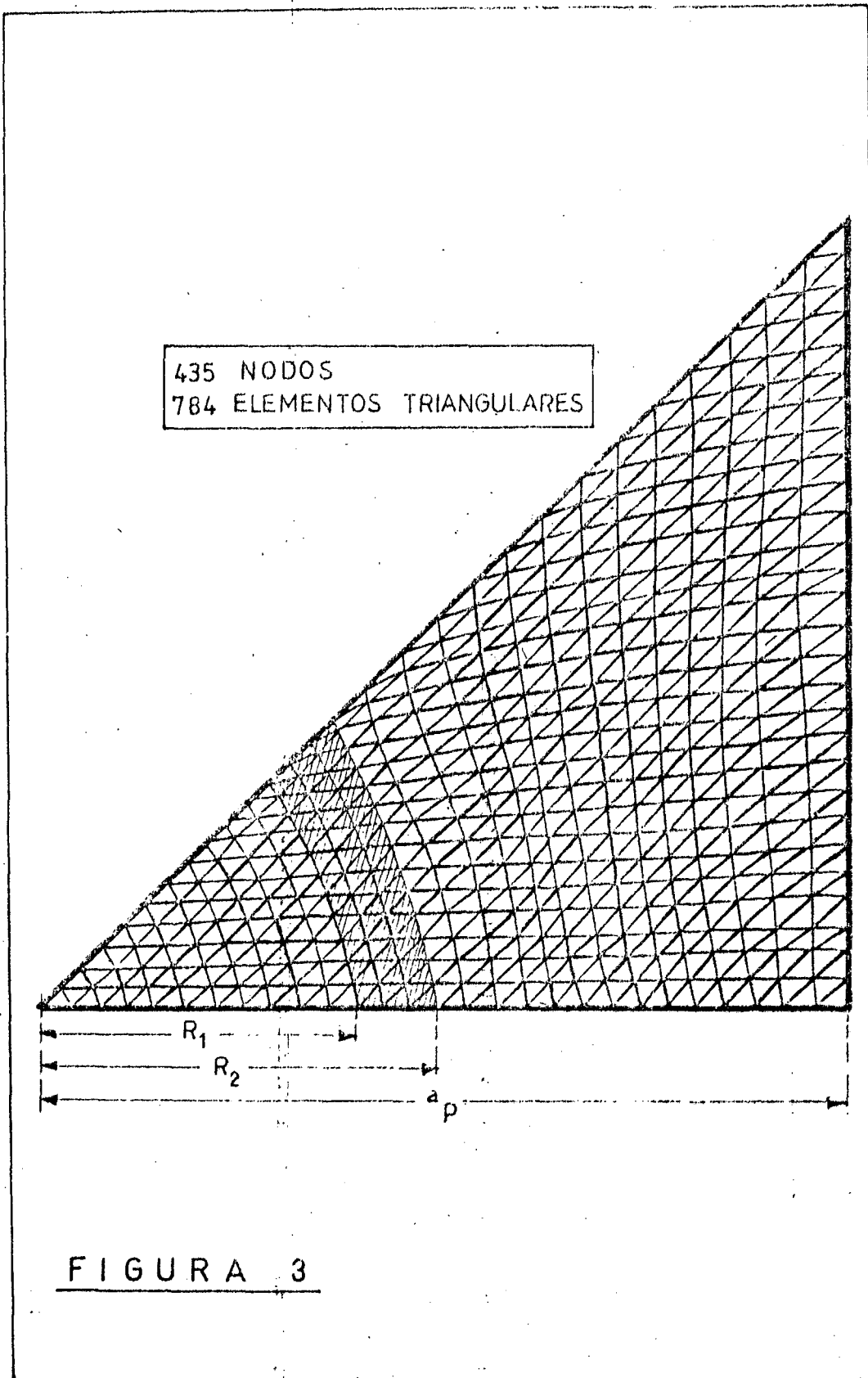


FIGURA 2



Referencias

1. P.A.A.Laura, G.Sánchez Sarmiento, F.Basombrío y R.Gutiérrez, Séptima Reunión Científica de Tecnología Nuclear, San Rafael, Mendoza, Argentina (Nov.1978).
2. P.A.A.Laura y G.Sánchez Sarmiento - Temperature Distribution in a Composite Prismatic Rod in the Case of Heat Generation in the Circular, Cylindrical Concentric Core; International Journal of Heat and Mass Transfer. (1978).
3. R.C.Scagrove, Biomedical Applications of Heat and Mass Transfer, The Iowa State University Press, Ames, Iowa (1971).
4. P.A.A.Laura and E.A.Susemihl "Determination of Heat Flow Shape Factors for Hollow Regular Polygonal Prisms". Nuclear Engineering and Design 25, 409-412, (1973).
5. P.A.A.Laura y G.Sánchez Sarmiento, "Analytical Determination of Heat Flow Shape Factors for a Certain Type of Composite, Prismatic Bars of Doubly Connected Cross Section", Nuclear Engineering and Design, 50, 379-385 (1978):
6. P.A.A.Laura y A.J.Faulstich Jr., "An Application of Conformal Mapping to the Determination of the Natural Frequency of Membranes of Regular Polygonal Shape". Proc. of the Ninth Midwestern Mechanics Conference, hold at the University of Wisconsin, Madison, Wisconsin August 16-18, 1965.