



C.N.E.A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº 1	AÑO 1966

01.66.02



"Sobre un antiguo problema y la Termodinámica Relativista"

Luis Másperi

1966

Sobre un antiguo problema y la Termodinámica Relativista.-

Luis Másperi

Centro Atómico Bariloche (C.N.E.A.), é
Instituto de Física "Dr. J.A.Balseiro" (U.N.C.y C.N.E.A.).-

RESUMEN

Se muestra que el impulso transversal, utilizado en la explicación del problema relativista de una escuadra tensionada, es necesario para la conservación del impulso de un sistema aislado. Además, se observa la conveniencia de adoptar la ley de transformación de la temperatura $T = T^0 \sqrt{1 - \beta^2}$ para el cálculo de ejemplos concretos, como así también para la obtención del tensor de energía-impulso y del balance de entropía de medios continuos en presencia de flujo de calor.-

1. INTRODUCCION

El problema de cómo explica un observador en movimiento el equilibrio de una escuadra que, en su referencial de reposo, tiene brazos iguales y está sometida a fuerzas también iguales, fué propuesto por Tolman en 1909. La explicación mediante la existencia de un impulso transversal al movimiento de un medio continuo

$$g_y = \frac{1}{c^2} u t_{xy} \quad (1)$$

donde g_y es la densidad de impulso según y , u la velocidad, según x , del medio continuo y t_{xy} la tensión de corte, figura en muchos textos de relatividad ¹⁾.

De modo análogo, las relaciones entre la temperatura T^0 de un sistema en reposo y el calor que recibe Q^0 , con las correspondientes magnitudes vistas desde un referencial en movimiento,

$$Q = Q^0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad ; \quad T = T^0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (2)$$

fueron establecidas por Einstein, Planck y Von Laue en los primeros años de la relatividad.

Todas las cuestiones anteriores fueron aceptadas sin discusión durante más de medio siglo, hasta que en los últimos años algunos autores han puesto en duda su validez.

Primeramente Ott²⁾, redefiniendo calor y trabajo, obtuvo

las leyes de transformación

$$Q = Q^0 / \sqrt{1 - \beta^2} \quad ; \quad T = T^0 / \sqrt{1 - \beta^2} \quad (3)$$

Luego Arzeliès³⁾ pretendió explicar el problema de la es-
cuadra sin necesidad del impulso transversal, al que no atri-
buye realidad física.

El mismo autor⁴⁾ y Gamba⁵⁾ llegaron a las mismas expresio-
nes de Ott³⁾, además de otras ecuaciones de los medios conti-
nuos diferentes de las usuales, pero con otras consideracio-
nes.

Enseguida Kibble⁶⁾ aclaró que las variaciones de magnitu-
des (por ej. energía) calculadas por Arzeliès y Gamba para
el referencial en movimiento eran las transformadas de las
del reposo, lo que en general no coincide con lo que ve un
observador en movimiento. Así restableció la validez de las
antiguas expresiones para los medios continuos (entre otras
el impulso transversal), pero él también aceptó las transfor-
maciones de Ott para calor y temperatura como más lógicas.

Finalmente Pathria⁷⁾ mostró que si un sistema de partícu-
las sin interacción satisfacía tanto en el referencial de re-
poso como en el en movimiento la distribución de Fermi (o
la de Bose), la relación de las temperaturas debía ser la an-
tigua ley(2)y, debido a la invariancia de la entropía, lo
mismo para el calor. Hay que notar que, para que se cumpla

lo anterior, la división entre calor y trabajo debe quedar fijada.

El propósito de estas notas, más que agregar cosas nuevas, es el de aclarar algunos conceptos. De lo que sigue se desprenderá que:

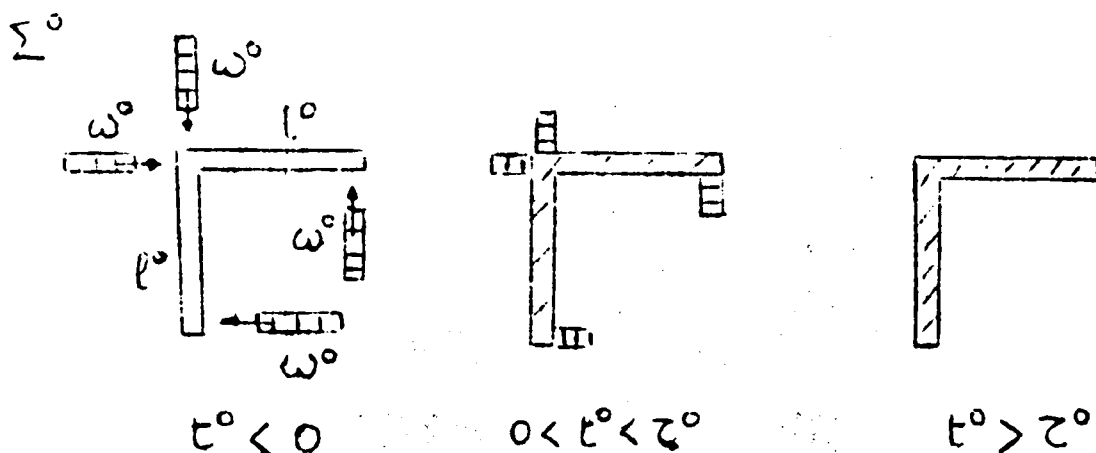
- a) Modificando adecuadamente el problema de la escuadra se ve la necesidad de introducir el impulso transversal en el medio continuo a fin de que se conserve el impulso del sistema aislado total.
- b) La división entre calor y trabajo consistente con que este último sea el producido por todas las fuerzas exteriores, cualquiera sea su origen, es la que lleva a la antigua ley de transformación de temperatura reafirmada por Pathria. En cuanto al calor, la antigua ley resulta necesariamente válida sólo cuando $\delta Q = T dS$ pero no en el caso general.
- c) De la observación que las fuerzas que acompañan a un flujo de calor no transforman necesariamente igual que las fuerzas puramente mecánicas, puede construirse un tensor de energía-impulso para el medio continuo en este caso general. De esto se deducen leyes de transformación para calor y temperatura acordes con lo dicho antes, y puede obtenerse un balance relativista de entropía análogo al clásico.

2. PROBLEMA DE LA ESCUADRA

Vamos a plantear las cosas de una manera algo diferente de la tradicional con el fin, por un lado, de estudiar la evolución temporal de un sistema aislado y, por otro, de analizar un primer caso de transformación del calor.

Vista desde el referencial Σ^0 de reposo la experiencia se desarrolla como sigue:

Cuatro haces electromagnéticos iguales y de la misma frecuencia ω^0 inciden simultáneamente en el instante $t^0 = 0$ sobre la escuadra de brazos iguales, siendo absorbidos totalmente por ésta al cabo de un tiempo τ^0 .



Durante el intervalo $0 < t^0 < \tau^0$ se tendrá una situación semejante a la del problema en su forma tradicional con fuerzas mecánicas; de no haber interesado el análisis termodinámico, podría haberse reproducido exactamente la versión mecánica suponiendo la escuadra totalmente reflectora en vez de totalmente absorbente. Por simplicidad no consideraremos, en este ejemplo, deformación ni flujo de calor en el interior

de la escuadra.

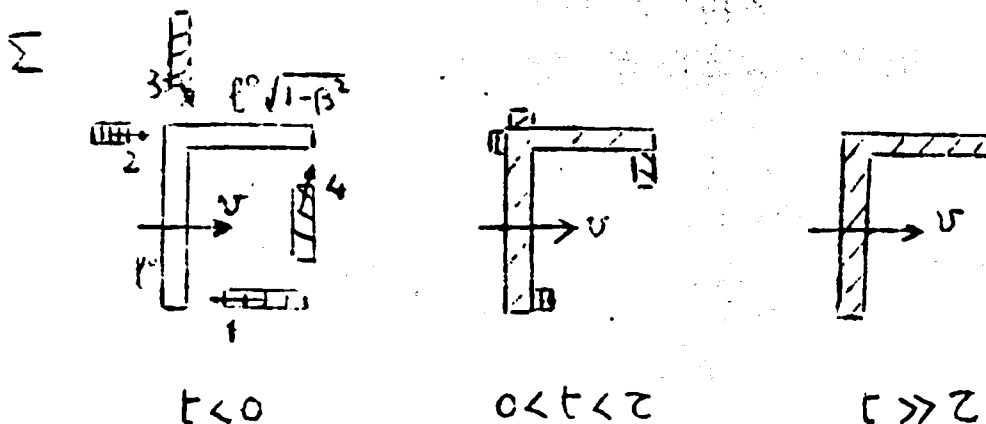
El equilibrio de la escuadra se mantiene en todo instante y, puesto que los haces no realizan trabajo, si cada haz contiene, por así decir, N fotones, la 1.^a ley de la termodinámica aplicada a la escuadra es

$$Q^0 = \Delta E_s^0 = 4 N \hbar \omega^0 \quad (4)$$

Ahora vamos a observar la experiencia desde el referencial Σ en el que la escuadra se mueve con velocidad v : Las frecuencias y vectores de onda de los cuatro haces serán ahora

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega^0 \frac{(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \omega_2 = \omega^0 \frac{(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \omega_3 = \omega_4 = \frac{\omega^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ k_{y_4} &= -k_{y_3} = \frac{\omega^0}{c} ; k_{x_4} = k_{x_3} = \frac{\beta}{c} \frac{\omega^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Si consideramos el sistema aislado constituido por la escuadra y los haces, deberá tenerse un cuadrivector energía-impulso que se conserva durante el proceso.



Si lo calculamos para el tiempo $t < 0$ se tendrá

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{4 N \hbar \omega^0}{\sqrt{1-\beta^2}} + M c^2 \\ G_x &= 4 N \hbar \frac{\beta}{c} \frac{\omega^0}{\sqrt{1-\beta^2}} + M v_x \quad G_y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

donde M es la masa de la escuadra.

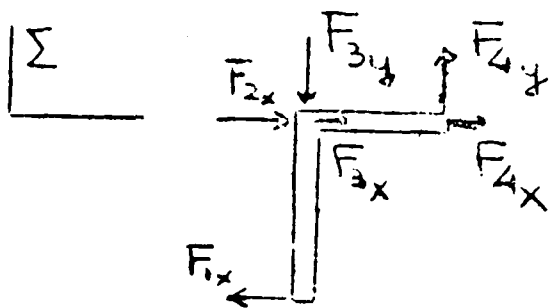
Es fácil ver que en $\sum$, los haces 1, 2 y 3 comienzan a ser absorbidos para $t=0$, mientras que el 4 recién lo hace $t = \frac{\beta}{c} \frac{\ell^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ seg. después. Por lo tanto, para un instante t en el que los cuatro haces están aplicados, si n es el número de fotones absorbidos por unidad de tiempo en cada haz, la escuadra habrá absorbido nt fotones 1, 2 y 3 pero sólo $n(t - \frac{\beta}{c} \frac{\ell^0}{\sqrt{1-\beta^2}})$ fotones 4.

Si queremos ahora verificar la conservación del cuadrivector energía-impulso se puede ver que, teniendo en cuenta el aumento de masa de la escuadra, los valores de E y G_x coinciden con los calculados anteriormente. En cambio es inmediato que el impulso según y de la parte electromagnética no es ahora nulo, y por lo tanto es necesario asignar a la escuadra un impulso transversal

$$G_{sy} = -n \frac{\beta}{c^2} \ell^0 \frac{\hbar \omega^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (7)$$

para mantener el valor nulo del G_y total.

Por otra parte si calculamos las fuerzas aplicadas sobre la escuadra en el estado intermedio:



$$\left. \begin{aligned} F_{1x} &= -n \frac{\hbar \omega^0}{c} \frac{(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} ; F_{2x} = n \frac{\hbar \omega^0}{c} \frac{(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ F_{3x} &= F_{4x} = n \frac{\beta}{c} \frac{\hbar \omega^0}{\sqrt{1-\beta^2}} ; F_{4y} = -F_{3y} = n \frac{\hbar \omega^0}{c} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

la cupla respecto del origen de Σ es

$$M_z = n \frac{\hbar \omega^0}{c} \frac{\beta(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (9)$$

y, puesto que se debe cumplir

$$M_z = \frac{dL_{S_z}}{dt} \quad (10)$$

es fácil ver que el término positivo de (9) iguala el incremento de L_{S_z} que corresponde al aumento de masa de la escuadra (supuesto distribuido uniformemente), mientras que el término negativo proviene del impulso transversal.

Naturalmente, después que todos los haces han sido absorbidos, no hay más ni fuerzas, ni tensiones, ni impulso transversal.

Finalmente, analicemos el balance termodinámico desde Σ : Durante el proceso total la energía cedida a la escuadra es:

$$\Delta E_S = 4N \hbar \omega^0 / \sqrt{1-\beta^2} \quad (11)$$

mientras que el trabajo de las fuerzas exteriores resulta ser

$$-W = 4 \beta^2 N \hbar \omega^0 / \sqrt{1 - \beta^2} = v \Delta G_S \quad (12)$$

Por lo tanto, de la 1a. ley

$$Q = \Delta E_S + W = 4 N \hbar \omega^0 \sqrt{1 - \beta^2} = Q^0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (13)$$

o sea que se obtiene la ley de transformación tradicional(2).

A todo esto, y como base para futuros resultados, es importante notar lo siguiente:

De la misma manera como en un referencial en reposo la ecuación termodinámica fundamental se escribe

$$T^0 dS^0 = dE^0 + p^0 dV^0, \quad (14)$$

para un referencial en movimiento, si se define el trabajo como el realizado por todas las fuerzas externas cualquiera sea su origen, resulta

$$TdS = dE + pdV - v dG \quad (15)$$

cuya justificación deriva de que, para un proceso infinitamente lento reversible

$$\delta Q_r = TdS \quad ; \quad \delta W_r = pdV - v dG \quad (16)$$

Naturalmente, la expresión (15), al igual que (14), vale para cualquier proceso; se entiende que los valores de p y T que se deben introducir son los de equilibrio, es decir los que alcanzaría el sistema después de suficiente tiempo de

haberse producido cada intercambio infinitesimal con el medio ambiente.

Es fácil ver que, utilizando las leyes usuales para medios continuos, la expresión (15) es simplemente la transformada de Lorentz de la (14) si la temperatura T transforma según (2).

Es evidente que siempre es posible redefinir el calor y trabajo de modo de mantener la misma variación de energía. Si la entropía, magnitud a la que se atribuye significado definido, se relaciona con este nuevo calor de la manera usual, aparecerá una nueva temperatura T' diferente de la anterior. Es claro que de esta manera puede obtenerse para calor y temperatura cualquier ley de transformación.

Si en particular se sigue a Ott y Kibble se obtiene la ecuación termodinámica

$$T' dS = dE + p dV - \frac{\beta^2 V}{(1 - \beta^2)} dp \quad (15')$$

que proviene de suponer para un proceso reversible

$$\delta Q'_r = T' dS ; \delta W'_r = p dV - \frac{\beta^2 V}{(1 - \beta^2)} dp \quad (16')$$

Se ve que también (15') es la transformada de (14) siempre que T' , y por lo tanto $\delta Q'_r$, satisfaga la ley (3).

Sin embargo, estas definiciones tienen el inconveniente que no es claro cómo debe calcularse el trabajo en un proceso general y parecen incompatibles con la ley de Newton,

lo que hace que no pueda construirse el tensor de energía-impulso ni el balance de entropía de la forma natural que se verá más adelante. Por estas razones, todo lo que sigue será consistente con (15) y (16).

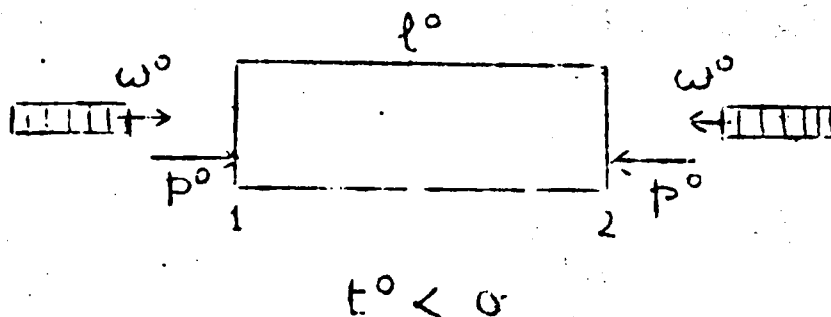
Volviendo al ejemplo anterior, por no haber variación de volumen, teniendo en cuenta (12), resulta

$$Q^0 = \int T^0 dS^0 \quad ; \quad Q = \int T dS \quad (17)$$

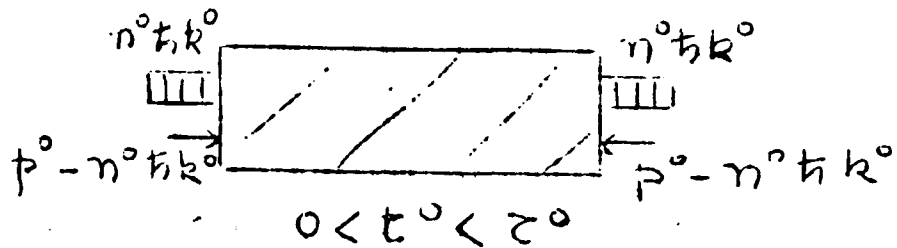
3. FLUIDO CALENTADO A PRESION CONSTANTE

Ahora vamos a tratar la termodinámica de un proceso más complicado en el que se produce variación de volumen. Vamos a describirlo en el referencial Σ^0 en el que el sistema antes y después del proceso, está en reposo:

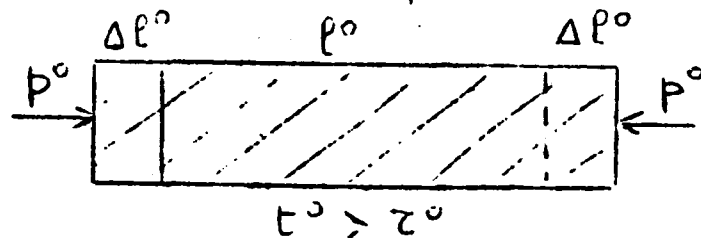
Consideramos un recipiente que contiene un fluido cuya presión P_0 es equilibrada en las dos tapas 1 y 2, de sección unitaria y móviles, por fuerzas mecánicas.



En el instante $t^0 = 0$ dos haces electromagnéticos iguales y de la misma frecuencia inciden simultáneamente en 1 y 2 siendo absorbidos totalmente por las tapas y ejerciendo al mismo tiempo una presión $p_e^0 = n^0 \hbar k^0$, donde n^0 es el número de fotones absorbidos por unidad de tiempo. Puesto que el fluido se calienta y se expande, la velocidad u^0 de los puntos 1 y 2 puede no ser constante por lo que n^0 tampoco; para asegurar que la expansión es a presión constante, suponemos que las fuerzas mecánicas en cada instante son tales que, agregadas a las electromagnéticas, mantienen el valor inicial p^0 .



Cuando los haces han sido absorbidos totalmente, la presión mecánica vuelve al valor inicial p^0 .



En resumen:

Absorción comienza en 1	$t_1^0 = 0$	$x_1^0 = 0$
Absorción comienza en 2	$t_2^0 = 0$	$x_2^0 = l^0$

$$\begin{array}{lll} \text{Absorción termina en 1} & t_1^0 = 0 & x_1^0 = -\Delta z^0 \\ \text{Absorción termina en 2} & t_2^0 = \tau^0 & x_2^0 = t^0 + \Delta t^0 \end{array}$$

La variación de energía del recipiente proviene de la absorción de los haces y del trabajo de las fuerzas mecánicas, es decir

$$\Delta E^0 = 2\hbar\omega^0 \left(N + \int_0^{\tau^0} n^0(t^0) \frac{u^0(t^0)}{c} dt^0 \right) - 2p^0 \Delta t^0 \quad (18)$$

donde N es el número total de fotones de cada haz.

Puesto que el trabajo realizado por el sistema es

$$W^0 = 2p^0 \Delta t^0 \quad (19)$$

el calor recibido resulta ser, de la 1ª ley,

$$Q^0 = 2\hbar\omega^0 \left(N + \int_0^{\tau^0} n^0(t^0) \frac{u^0(t^0)}{c} dt^0 \right) \quad (20)$$

De (14), y por ser la presión externa en cada instante igual a la de equilibrio del sistema, resulta

$$Q^0 = \int T^0 dS^0 \quad (21)$$

Analicemos ahora el proceso desde un referencial Σ en el que el sistema antes y después tiene la velocidad v :

$$\begin{array}{lll} \text{Absorción comienza en 1} & t_1 = 0 & ; x_1 = 0 \\ \text{Absorción comienza en 2} & t_2 = \frac{\beta}{c} (t^0 / \sqrt{1-\beta^2}) & ; x_2 = t^0 / \sqrt{1-\beta^2} \\ \text{Absorción termina en 1} & t_1 = (\tau^0 - \frac{\beta}{c} \Delta t^0) / \sqrt{1-\beta^2} & ; x_1 = \frac{-\Delta t^0 + v\tau^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \text{Absorción termina en 2} & t_2 = \frac{\tau^0 + \frac{\beta}{c} (t^0 + \Delta t^0)}{\sqrt{1-\beta^2}} & ; x_2 = \frac{t^0 + \Delta t^0 + v\tau^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{array}$$

De esta tabla se ve inmediatamente que, considerando la absorción de dos haces infinitesimales, el número de fotones absorbidos por unidad de tiempo en las dos caras es

$$n_1(t_1) = n^0(t^0) \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\left(1 - \beta \frac{u^0(t^0)}{c}\right)} ; \quad n_2(t_2) = n^0(t^0) \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\left(1 + \beta \frac{u^0(t^0)}{c}\right)} \quad (22)$$

Ahora podemos calcular las presiones electromagnéticas, teniendo en cuenta el efecto Doppler, obteniéndose

$$p_{e1}(t_1) = \frac{(1+\beta)}{\left(1 - \beta \frac{u^0(t^0)}{c}\right)} p_e^0(t^0) ; \quad p_{e2}(t_2) = \frac{(1-\beta)}{\left(1 + \beta \frac{u^0(t^0)}{c}\right)} p_e^0(t^0) \quad (23)$$

y, puesto que las presiones mecánicas son iguales en los dos referenciales

$$p_{m1}(t_1) = p_{m2}(t_2) = p^0 - p_e^0(t^0) \quad (24)$$

Las presiones totales serán

$$\left. \begin{aligned} p_1(t_1) &= p^0 + \beta \frac{(1+u^0/c)}{(1 - \beta u^0/c)} p_e^0(t^0) \\ p_2(t_2) &= p^0 - \beta \frac{(1+u^0/c)}{(1 + \beta u^0/c)} p_e^0(t^0) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Notamos ahora en condiciones de calcular el trabajo realizado por el sistema, el cual consta de varias contribuciones: las realizadas en los puntos 1 y 2 durante la absorción de los haces, utilizando la tabla anterior, resultan ser

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= p^0 \frac{(\Delta p^0 - v z^0)}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \int_0^{z^0} \frac{(1+u^0/c)(u^0-v)}{(1-\beta u^0/c)} p_e^0 dt^0 \\ W_2 &= p^0 \frac{(\Delta p^0 + v z^0)}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \int_0^{z^0} \frac{(1+u^0/c)(u^0+v)}{(1+\beta u^0/c)} p_e^0 dt^0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Además hay que tener en cuenta que durante el tiempo entre la llegada de un haz a 1 y el otro a 2, este punto realiza trabajo contra la presión mecánica p^0 ; lo mismo sucede, pero ahora el trabajo es recibido por el sistema, en el punto 1 durante el intervalo entre la terminación del primer haz y la del segundo. Es decir

$$\left. \begin{aligned} W_2' &= p^0 \beta^2 \ell^0 / \sqrt{1-\beta^2} \\ W_1' &= - p^0 \beta^2 (\ell^0 + 2 \Delta \ell^0) / \sqrt{1-\beta^2} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

En definitiva, sumando las cuatro contribuciones, se obtiene:

$$W = 2 p^0 \Delta \ell^0 \sqrt{1-\beta^2} - \frac{2 v \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \int_0^{z^*} \frac{(1+u^0/c)(1-u^0^2/c^2)}{(1-\beta^2 u^0^2/c^2)} p_e^0 dt^0 \quad (28)$$

De manera análoga se calcula la energía recibida por el sistema, que corresponde a la energía electromagnética absorbida y al trabajo de las fuerzas mecánicas, incluyendo el que da lugar a (27); el resultado es:

$$\Delta E = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[2N\hbar\omega^0 + 2 \int_0^{z^0} p_e^0 u^0 dt^0 - 2p^0 \Delta l^0 (1-\beta^2) \right] \quad (29)$$

Aplicando $Q = \Delta E + W$ se obtiene la expresión del calor

$$Q = \frac{2\hbar\omega^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[N + (1-\beta^2) \int_0^{z^0} \frac{\eta^0 u^0/c}{(1-\beta^2 \frac{u^0^2}{c^2})} dt^0 - \beta^2 \int_0^{z^0} \frac{\eta^0 (1-u^0^2/c^2)}{(1-\beta^2 \frac{u^0^2}{c^2})} dt^0 \right] \quad (30)$$

que, comparada con (20), muestra que

$$Q \neq Q^0 \sqrt{1-\beta^2} \quad (31)$$

Este resultado no está en desacuerdo con lo obtenido por Landau. En efecto, de la ecuación termodinámica diferencial (15), se obtiene, para el caso presente

$$T dS = \Delta E + p^0 \Delta V - v \Delta G \quad (32)$$

puesto que p^0 es la presión de equilibrio del sistema que alcanzaría éste después de cada proceso infinitesimal. Por otra parte, el trabajo será en general

$$W \neq p^0 \Delta V - v \Delta G \quad (33)$$

que depende de las presiones exteriores durante el proceso.

Consecuentemente, de la 1.ª ley, y teniendo en cuenta (32) y

(33):

$$Q \neq \int T dS \quad (34)$$

por lo que, si la temperatura transforma de una cierta manera, el calor no tiene porque hacerlo igual.

vamos a ver qu , en cambio, la expresión $\int T dS$ sí transforma de la manera esperada:

Sabemos que

$$\Delta V = 2 \Delta e^0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (35)$$

En el intercambio de impulso hay una parte electromagnética

$$\Delta G_e = 2 N \hbar \frac{\omega_0}{c} \beta / \sqrt{1 - \beta^2} \quad (36)$$

y otra mecánica:

$$\Delta G_m = \int p_{1m}(t_1) dt_1 - \int p_{2m}(t_2) dt_2 \quad (37)$$

que, aplicando (24), da

$$\Delta G_m = \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \int_0^{z^0} \frac{u^0(t^0)}{c} p_e^0(t^0) dt^0 \quad (38)$$

Por lo tanto, aplicando (32), se obtiene

$$\int T dS = 2 \hbar \omega^0 \left(N + \int_0^{z^0} n^0(t^0) \frac{u^0(t^0)}{c} dt^0 \right) \sqrt{1 - \beta^2} \quad (39)$$

o sea, comparando con (20)

$$\int T dS = \sqrt{1 - \beta^2} \int T^0 dS^0 = \sqrt{1 - \beta^2} Q^0 \quad (40)$$

lo que se ve que, suponiendo la invariancia de la entropía, esencial es la ley de transformación de la temperatura.

4. TENSOR ENERGÍA-IMPULSO EN PRESENCIA DE FLUJO DE CALOR.

Se ha visto en los ejemplos anteriores que las fuerzas que transmiten calor no transforman igual que las fuerzas mecánicas. Esto lleva a pensar que si se incluye el flujo de calor en las leyes de conservación de energía-impulso de un medio continuo se deberá obtener, entre otras cosas, leyes de transformación para las tensiones diferentes de las de fuerzas mecánicas divididas por superficies.

El tratamiento que sigue tiene algún parecido con el de Landau⁸⁾.

Si consideramos las leyes de conservación de energía e impulso de un volumen de medio continuo material de densidad ρ velocidad $\vec{u}$ y sometido a fuerzas superficiales $\vec{N}$ y flujo de calor $\vec{q}$,

$$\left. \begin{aligned} c^2 \frac{d}{dt} \int \rho d\vec{r} &= \int N_i u_i d\sigma - \int q_i n_i d\sigma \\ \frac{d}{dt} \int q_i d\vec{r} &= \int N_i d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

que no son más que la 1.ª ley de la termodinámica y la ley de Newton respectivamente, introduciendo las tensiones se

llega a:

$$\left. \begin{aligned} c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (c^2 \rho \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{E} + \vec{q}) &= 0 \\ \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{g} \vec{u} + \vec{E}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Si ahora definimos la densidad de impulso como

$$\vec{g} = \rho \vec{u} + \frac{1}{c^2} \vec{u} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c^2} \vec{q} \quad (43)$$

e imponemos la validez de las leyes de conservación (42) para todos los referenciales, podemos introducir un tensor

$$\left. \begin{aligned} T^{ij} &= t_{ij} + g_i u_j & i, j &= 1, 2, 3 \\ T^{0i} &= T^{i0} = c g_i & i &= 1, 2, 3 \\ T^{00} &= c^2 \rho \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

que es formalmente igual al correspondiente a ausencia de calor⁹⁾.

Como ejercicio, podemos calcular la relación entre las magnitudes correspondientes a un referencial genérico y las vistas desde uno en reposo respecto a un volumen elemental material. En este último referencial se tendrá, para el elemento en reposo,

$$T^{ij} = t_{ij} ; T^{0i} = T^{i0} = \frac{1}{c} q_i ; T^{00} = c^2 \rho^0 \quad (45)$$

Para el referencial en el que el elemento en consideración se mueve según x con velocidad u resulta

$$\left. \begin{aligned} p &= \left(p^0 + \frac{u^2}{c^4} t_{xx}^0 + 2 \frac{u}{c^2} q_x^0 \right) / \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \\ p_{xx} &= \left[u p^0 + \frac{u}{c^2} t_{xx}^0 + \left(1 + \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{1}{c^2} q_x^0 \right] / \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \\ p_{xy} &= \left(\frac{u}{c^2} t_{xy}^0 + \frac{1}{c^2} q_y^0 \right) / \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ t_{xx} &= t_{xx}^0 + \frac{u}{c^2} q_x^0 ; \quad t_{xy} = \left(t_{xy}^0 + \frac{u}{c^2} q_y^0 \right) / \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ q_x &= q_x^0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) ; \quad q_y = q_y^0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

De (46) se ve que, tal como se esperaba, el flujo de calor incluye en la ley de transformación de las tensiones. Por otra parte la fórmula de transformación de $\vec{q}$ es consistente con la definición como calor que atraviesa la unidad de superficie en la unidad de tiempo. Naturalmente esto no está en contradicción con lo dicho en relación con (34) que se refería a calor total recibido por un sistema con expansión.

5. BALANCE DE ENTROPIA

Para hallar una ecuación válida en cada punto partimos de ρ y expresamos las diferentes propiedades

$$m = \int \rho n d\vec{r} ; \quad E = \int e n d\vec{r} ; \quad V = \int v n d\vec{r} ; \quad \vec{G} = \int \vec{g} n d\vec{r} \quad (47)$$

donde ρ , e , φ y $\vec{\gamma}$ son magnitudes por partícula material
 n es número de partículas por unidad de volumen.

Puesto que evidentemente se cumple

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u}) = 0 \quad (48)$$

es fácil obtener

$$\rho \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{de}{dt} + p \frac{d\varphi}{dt} - \vec{u} \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{dt} \quad (49)$$

... las ecuaciones de conservación (42) y (48) resulta

$$\left. \begin{aligned} n \frac{de}{dt} &= - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot \bar{\bar{t}} + \vec{q}) \\ n \frac{d\vec{\gamma}}{dt} &= - \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{t}} \\ n \frac{d\varphi}{dt} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

que, reemplazadas en (49), dan

$$\rho \frac{d\rho}{dt} = - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{q}}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \vec{q} \cdot \vec{\nabla} \rho - \frac{1}{\rho} \bar{\bar{t}} : \vec{\nabla} \vec{u} + \frac{p}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (51)$$

... si descomponemos el tensor de tensiones de la forma

$$\bar{\bar{t}} = p \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{r}} \quad (52)$$

$$\rho \frac{d\rho}{dt} = - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{q}}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \vec{q} \cdot \vec{\nabla} \rho - \frac{1}{\rho} \bar{\bar{r}} : \vec{\nabla} \vec{u} \quad (53)$$

...justamente la forma de un balance de entropía análogo al clásico¹⁰⁾, si llamamos flujo de entropía a

$$\vec{J}_S = \vec{q} / T \quad (54)$$

...producción de entropía por unidad de volumen

$$G = -\frac{1}{T^2} \vec{q} \cdot \nabla T - \frac{1}{T} \vec{F} : \nabla \vec{u} \quad (55)$$

...que se ve que la irreversibilidad proviene de la existencia de gradientes de temperatura y de velocidad.

Finalmente la relación de flujos y fuerzas deberá ser tal que $G \geq 0$.

REFERENCIAS

- 1) E. M. L. R.C., 1934, Relativity, Thermodynamics and Cosmology. (Oxford: Clarendon Press), § 38.
- 2) J. L. L. H., 1963, Zeitschrift für Physik 175, 70-104.
- 3) J. L. L. H., 1965, Nuovo Cimento 35, 783-91.
- 4) J. L. L. H., 1965, Nuovo Cimento 35, 792-804.
- 5) J. L. L. H., 1965, Nuovo Cimento 37, 1792-4.
- 6) J. L. L. H., 1966, Nuovo Cimento 41, 72-85.
- 7) J. L. L. H., 1966, Proceedings of the Phys.Soc. 88, 791-9.
- 8) J. L. L. H., 1959, Fluid Mechanics (Permon Press), § 127.
- 9) E. M. L. R.C., op. cit., § 37.
- 10) S. R. S.R., 1959, Non-Equilibrium Thermodynamics, Rendiconti della Scuola "Enrico Fermi".

+ + +

...a la Srta. H. Klenk la excelente copia del manuscrito.