

Anal. Acad. Nac. Cs. Ex. Fís. Nat. Buenos Aires, Tomo 34, 1982

TEORIA DE CATEGORIAS EN BIOLOGIA RELACIONAL *

*Carlos A. Leguizamón ***

Biomatemática. Departamento de Matemática.
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, U.B.A.,
y Gerencia de Investigaciones.
Comisión Nacional de Energía Atómica.

1. Sobre los orígenes de la Biomatemática

La primera aplicación del razonamiento matemático para la comprensión del fenómeno biológico se debe al famoso matemático Leonard Euler, quien en 1775 desarrolló un trabajo sobre la actividad cardiovascular, y que versó sobre lo que en esencia ahora es conocido como la "teoría del reservorio elástico" (Euler, 1862).

Gregor Mendel (1950) establece en el siglo diecinueve una original simbología para individualizar características fenotípicas en determinados tipos de experimentos de reproducción en biología. Sus elementales símbolos (genes) de la forma Aa, Bb, etc., fueron parte de un hito de la biología teórica de aquel tiempo, y la base, para que J. H. Woodger, utilizando los recursos de la lógica, definiera un álgebra combinada para expresiones del tipo

$$p_1 W_1 + p_2 W_2 + \dots + p_n W_n$$

las que interpretaban las características de la descendencia.

Estas expresiones fueron usadas por los genetistas desde los tiempos de Mendel, y allí cada p_i identifica un número racional positivo y cada W_i un conjunto (conjunto de vidas según Woodger 1952). Desde estos orígenes, el álgebra combinada resultó ser la requerida para conectar el álgebra de conjuntos de Boole y la de los números racionales.

* Conferencia pronunciada el 29 de octubre de 1981 en las Sesiones Científicas "Abel Sánchez Díaz" sobre La Matemática y las otras Ciencias.

** Miembro de la Carrera del Investigador Científico y Tecnológico del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

Una teoría de genética matemática fue elaborada a partir de los primeros años del presente siglo, y en esa tarea, sentaron bases los desarrollos de J. B. S. Haldane (1924); R. A. Fisher (1930) y S. Wright (1949); quienes, con su trabajo, permitieron la comprensión de la genética de la evolución.

Un trabajo seminal en el campo del estudio de las formas cercanamente relacionadas fue hecho por D'Arcy Thompson (1917). Entusiasma el hecho dado por la potencialidad del método para descubrir diversas incógnitas biológicas (Thompson mismo descubrió la ubicación del caballo *Parahippus* dentro de las líneas de evolución de la especie) a partir de una elemental concepción matemática como lo es la deformación de coordenadas del plano o del espacio donde se inscriben la sucesión de formas biológicas en estudio.

En 1925 apareció el primer libro que ensayó el estudio de la biología como un todo, desde el punto de vista matemático. Sin embargo, su autor, A. Lotka, es más conocido por las ecuaciones que impuso para estudiar la interacción de especies. Este trabajo fue seguido por el de V. Volterra (1931) en similares análisis, y ambos nombres son usados para identificar las ecuaciones diferenciales a partir de las cuales muchos y muy variados desarrollos han seguido, y son, aún hoy tema importante del análisis biomatemático.

Estos, juntos a otros esfuerzos aislados, fueron coronados por la actividad descollante de un científico, Nicolás Rashevsky, quien entendiendo la individualidad de la disciplina, consiguió constituir el primer cuerpo asociado de investigadores para lograr tal fin. Eso ocurrió en la Universidad de Chicago, en los Estados Unidos de América, en 1935. Hoy, y aún antes de su deceso acaecido en 1972, Rashevsky es considerado como el padre de la Biomatemática.

Rashevsky formó los primeros investigadores en el área, favoreció la consagración de muchos de ellos a través de las obtenciones de los respectivos doctorados en Biología Matemática, dio origen a *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, primer publicación científica en el tema, y fundó la *Society for Mathematical Biology*, entidad que agrupa a científicos de la especialidad de diversas regiones.

Rashevsky escribió un libro clásico en el área: *Mathematical Biophysics: Physico-Mathematical Foundations of Biology*, y ya en su título se observa la influencia de la física en los desarrollos del autor. En realidad, el autor fue un físico, en graduación y pensamiento; aunque hubo ocasiones variadas en las cuales prescindió de tal ciencia.

En el presente momento la Biomatemática parece haber logrado un lugar entre las otras disciplinas a través de la individualidad de sus fun-

damentos. La Biomatemática entiende de Matemática y Biología, pero no significa la simple suma de ambas ciencias.

La Biomatemática tiene un objetivo: entender mejor la biología mediante el uso de la herramienta matemática. Esa matemática debe ajustarse a principios, que aunque en desarrollos todavía, pretenden definir la argumentación lógica sobre la cual se conforman todos y cada uno de los más variados aspectos de la biología. Entender así a esta disciplina no implica un papel secundario para la matemática. Muy por el contrario, es también objetivo de la Biomatemática encontrar nueva matemática que interprete fielmente el fenómeno biológico. No en vano se encuentra que brillantes formalizaciones matemáticas de los procesos biológicos, sufren, con frecuencia, el impedimento de utilizar más específicos aspectos de la rama matemática originalmente utilizada, cuando, correlativamente la propia mayor introducción en las partes elementales que hacen al fenómeno biológico lo exige.

Todo lo anterior también requiere una adicional aclaración. Sería tan erróneo, en sentido biomatemático, proseguir con los desarrollos de esa nueva matemática descubierta (porque dejaría de hacerse Biomatemática), como tratar de comprobar biológicamente lo que la Biomatemática, con utilización de su argumentación matemática, pronostica o aporta como teórica realidad biológica.

2. Biología Relacional y Teoría de Categorías

Aunque N. Rashevsky (1960 y 1972) ha nominado a J. H. Woodger como el padre de la Biología Relacional, especialmente por su muy importante trabajo de 1937 relacionado con la axiomatización de la Biología (Woodger, 1937), el primero debe ser reconocido como el científico que hizo los más grandes y continuos esfuerzos para obtener el progreso de esta particular forma de analizar los sistemas biológicos.

Rashevsky comenzó por llamar a esta rama de la Biomatemática como Biología Topológica (Rashevsky, 1954) y es precisamente en ese trabajo que se obtiene la preclara interpretación de la Biología como un todo, lo que es dado a través del Principio del Mapeo Biotopológico. Este Principio fue posteriormente nominado como el Principio del Epimorfismo Biológico (Rashevsky, 1960 y 1961) y finalmente se lo conoce como Principio de Invariancia Relacional (Rashevsky, 1968).

La Biología Relacional considera el comportamiento cualitativo de los sistemas, o sea, cómo los diferentes constituyentes o partes bajo análisis son estructuralmente arreglados; es decir, interesan las actividades funcionales de los organismos.

La esencia de esta clase de pensamiento es dada por el Principio, y mediante éste los organismos se relacionan a través de sus propiedades naturales. Así por ejemplo, son propiedades de un organismo unicelular las propiedades P_s (sensitividad a un estímulo externo), P_e (conducción de la excitación), P_m (movimiento ordenado), P_a (absorción), P_r (reproducción), P_{me} (metabolismo), etc.. Es evidente que un simple digrafo del tipo,

$$P_s \rightarrow P_e \rightarrow P_m$$

relaciona las propiedades de un organismo simple, en el cual su movimiento es producido después de la excitación de un nervio y la correspondiente conducción del impulso.

Rashevsky interpretó el hecho estableciendo que similares relaciones de precedencias entre propiedades de un organismo primordial se daban para otros sistemas biológicos de nivel superior, aunque lógicamente existiendo una especialización de propiedades. Las posibilidades de esa especialización es analizada con la teoría de grafos dirigidos (Rashevsky, 1960). Así entonces, las propiedades de los organismos dentro de una misma línea evolutiva pueden ser mapeadas, y así se pueden intuir posibilidades de existencia de determinadas propiedades en organismos de ubicación intermedia de la dada línea de evolución.

En ese sentido, con similar criterio podría deducirse que “hay organismos superiores en los cuales los movimientos intestinales son afectados por estímulos visuales”, como se tiene si

$$P_s \rightarrow P_e \rightarrow P_m$$

de un organismo simple, es interpretado por

$$P_{sv} \rightarrow P_e \rightarrow P_{m(d)}$$

en un organismo superior, donde P_{sv} : estímulo visual y $P_{m(d)}$: movimiento intestinal (el hecho de vomitar es precedido por el estímulo visual dado bajo la observación de cosas desagradables).

Con similares desarrollos, Rashevsky logra el grafo

$$P_{su} \rightarrow P_{ig} \rightarrow \dots \rightarrow P_{mlo} \rightarrow P_{me(ant)}$$

que implica que estímulos físicos como la luz, el calor, etc. (P_{su}) podrían producir anticuerpos ($P_{me(ant)}$). Por el mismo razonamiento, Rashevsky deduce que algunas plantas podrían producir anticuerpos desde sus estímulos físicos.

Utilizando la simple consecuencia de un ciclo en un digrafo, es dable observar cómo Rashevsky supo “leer” ese ciclo, con sentido biológico. Una parte de las propiedades de las células es interpretada a través de: C: contacto con la comida, I: ingestión en la vacuola digestiva, D: digestión de la comida, E: excreción de lo indigerible, A: absorción de la comida digerida en el protoplasma de la célula, S_b : síntesis de varias partes de la célula, D_{es} : síntesis de enzimas digestivas, S_{de} : secreción de enzimas digestivas dentro de la vacuola digestiva (donde se ponen en contacto con la comida ingerida y la digestión D resulta). El diagrama respectivo sería entonces:

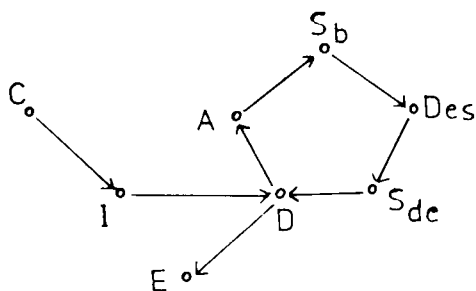


FIG. 1

De esta manera Rashevsky enuncia una lógica propiedad de todo organismo: “a fin de que la comida pueda ser asimilada y el cuerpo del organismo sintetizado, el organismo debe estar ya presente”.

En definitiva, el Principio de Invariancia Relacional se expresa diciendo: “aunque existan diferencias cuantitativas entre todos los organismos todos ellos son invariantes con respecto a algunas relaciones cualitativas”.

El Principio se constituye en el argumento básico de interpretación del pensamiento bajo el cual se desarrolla la Biología Relacional. Así, a través de esta rama de la Biomatemática los sistemas se analizan por la interrelación de sus funciones y no por la estructura químico-física que las conforman.

Ya que interesan los aspectos cualitativos de los sistemas y no los específicos cuantitativos, entonces surge un tipo de matemática utilizable del tipo de las teorías de conjuntos, grafos, relaciones, topología, y de hecho teoría de categorías, entre otras.

Los desarrollos no necesariamente tienen que vincular el Principio, y tampoco quedar sujetos a los análisis del sistema biológico exclusiva-

mente. En ese contexto, aquí se mencionarán algunas de las aplicaciones de categorías a los sistemas de metabolismo-reparación en células ($M-R$) de Rosen, y los desarrollos derivados por C. A. Leguizamón en los sistemas biológicos, ambientales y de transferencias obtenibles entre esos dos sistemas. Ajenos a estas líneas de estudio, pero dentro del análisis de aspectos relacionales por teoría de categorías se encuentran los trabajos de I. Baianu y sus asociados (Baianu, 1970; 1971 a; 1971 b; 1980; Baianu y Marinescu, 1968; Baianu y Scripcariu, 1973 y Comorosan y Baianu, 1969); y aplicando categorías pero a otros sistemas biológicos y ambientales se tienen los trabajos de T. Kitagawa y M. Eytan (Kitagawa, 1977 y 1981 y Eytan, 1981).

La Teoría de Categorías fue creada por Samuel Eilemberg y Saunders Mc Lane (1945). Con la ayuda de los conceptos abstractos de “objetos”, “morfismos”, “ley de composición” para los morfismos, y un conjunto de axiomas impuestos sobre estos elementos, es posible definir el concepto de categoría (Bucur y Deleanu, 1968; Mc Lane, 1971; Mitchell, 1965; Pareigis, 1970; Tondeur, 1965; entre otros).

Un conjunto de afirmaciones y una modalidad operativa han sido dados por esta nueva rama matemática, de tal manera que no sólo las representaciones por categorías de cualquier proceso o sistema tiene todas las bondades de la argumentación propia de esta teoría, sino que como otras ramas de la matemática pueden ser interpretadas como una categoría, entonces la imposición de las representaciones biológicas y ambientales como tales, admiten adicionalmente, un espectro amplio de muy variados recursos matemáticos.

De acuerdo a lo anterior, resulta entonces interesante destacar cómo operar con los sistemas y con los medios matemáticos disponibles a través de la teoría de categorías:

a) Directamente obtener nuevas propiedades del sistema representado por medio de nuevos desarrollos teóricos en categorías, que se obtendrían sobre la base de las propiedades de la categoría de representación que el propio sistema ha impuesto.

b) Buscar significativamente útiles desarrollos obtenidos por la teoría misma (definiciones, lemas, proposiciones, teoremas, etc.) y aplicarlos al sistema representado.

c) Operar sobre la estructura matemática representando el sistema biológico o ambiental en estudio; y después de encontrar nuevas propiedades, expresar la estructura resultante como una categoría. Luego continuar la búsqueda según los criterios a y b anteriores, o bien conectar esta categoría con otras representando otros sistemas en interrelación con el primero.

d) Obtener nuevas propiedades del sistema inicialmente representado como una categoría, trabajando sobre la rama matemática impuesta sobre la categoría teórica original.

e) Obtener nuevos conceptos o desarrollos en teoría de categorías y en otras ramas matemáticas impuestas como tales, a través de conceptos matemáticos equivalentes a específicos y exactos conceptos revelados por los fenómenos biológicos y ambientales que han sido representados por categorías.

Las simples menciones que siguen sobre teoría de categorías resultarán de interés para las posteriores aplicaciones.

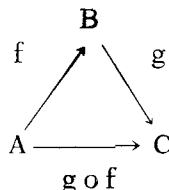
Una categoría C consiste de:

1. Una clase, familia o colección de objeto $[C]_c$ tales como $A, B, C, \dots$

2. Una clase, familia o colección de morfismos $[f]_c$ tal que para cada par $\langle A, B \rangle$ de objetos, un conjunto $[A, B]_c$ de morfismos desde A hasta B es asignado (a veces vacío):

$$(f : A \rightarrow B \text{ o } A \xrightarrow{f} B)$$

3. Una ley de composición tal que para cada par de morfismos $\langle f, g \rangle$ con $f \in [A, B]_c$; $g \in [B, C]_c$; y el dominio de g es igual al codominio de f ; existe sólo un morfismo $g \circ f \in [A, C]_c$ denominada la composición de f y g .

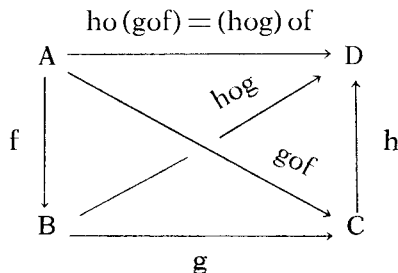


4. Un morfismo identidad 1_A para cada objeto $A \in [C]_c$

$$(1_A : A \rightarrow A \text{ o } 1_A \in [A, A]_c)$$

y de los siguientes axiomas:

Axioma C 1: Si $f \in [A, B]_c$; $g \in [B, C]_c$ y $h \in [C, D]_c \Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$; es decir que la composición es asociativa.



Axioma C 2: Si $f \in [A, B]_C \Rightarrow f \circ 1_A = f$ y $1_B \circ f = f$, esto significa que el morfismo identidad de cada objeto se comporta como una identidad para la operación de composición.

Las siguientes categorías son muy comunes:

Set: (objetos: todos los conjuntos pequeños, morfismos: el conjunto de todas las funciones entre ellos).

Grp: (objetos: todos los grupos pequeños, morfismos: todos los homomorfismos de grupos).

Cat: (objetos: todas las categorías pequeñas, morfismos: todos los funtores).

Rel: (objetos: todos los conjuntos pequeños, morfismos: las relaciones binarias entre ellos).

Ens: (objetos: todos los conjuntos; morfismos: el conjunto de todos los mapeos entre conjuntos).

Top: (objetos: espacios topológicos pequeños, morfismos: mapeos continuos).

Una subcategoría C' de C es una categoría que cumple las siguientes condiciones:

a) $[C]_{C'} \subset [C]_C$; y $[A, B]_{C'} \subset [A, B]_C$ para cada $A, B \in [C]_{C'}$ o

b) $[C]_{C'} = [C]_C$; y $[A, B]_{C'} \subset [A, B]_C$ para cada $A, B \in [C]_{C'}$.

C' es una subcategoría plena de una categoría cuando se cumple

$$[C]_{C'} \subset [C]_C \text{ y } [A, B]_{C'} = [A, B]_C$$

para todo par de objetos $A, B \in [C]_{C'}$.

Los funtores son los elementos de la teoría de categorías que se utilizan para comparar categorías entre sí.

Un funtor covariante F entre dos categorías B y C

$$F : B \rightarrow C$$

consiste en:

a) Un mapeo objeto F asignando a cada objeto $B \in [B]_B$ un objeto $F(B) \in [C]_C$ identificado por

$$B \in [B]_B \rightarrow F(B) \in [C]_C$$

para todo $B \in [B]_B$.

b) Una familia de mapeos de morfismos asignando a cada morfismo $f \in [A, B]_B$ un morfismo $F(f) \in [F(A), F(B)]_C$, para todo $A, B \in [B]_B$ identificado por

$$f \in [A, B]_B \rightarrow F(f) \in [F(A), F(B)]_C$$

para todo $A, B \in [B]_B$, y además, los siguientes axiomas son cumplimentados:

Axioma $F 1$:

$$F(1_A) = 1_{F(A)} \text{ para todo } A \in [B]_B$$

Axioma $F 2$:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \text{ para todo } f \in [A, B]_B$$

y $g \in [B, C]_B$, y para todo $A, B, C \in [B]_B$.

Un funtor contravariante es definido en la misma forma, con la excepción del axioma $F 2$, el cual es reemplazado por el axioma $F 3$.

Axioma $F 3$:

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g) \text{ para todo } f \in [A, B]_B \\ g \in [B, C]_B \text{ y para todo } A, B, C \in [B]_B$$

Dados los funtores L y R entre las mismas categorías B y C

$$L : B \rightarrow C \\ R : B \rightarrow C$$

una **transformación natural** (morfismo funtorial también)

$$\eta : L \rightarrow R$$

es una función asignada a cada objeto $B \in [B]_B$ un morfismo

$$\eta_B : L(B) \rightarrow R(B)$$

en C , de tal manera que todo morfismo

$$f : B \rightarrow B' \text{ en } B$$

produce un diagrama conmutativo en C como

$$\begin{array}{ccc} L(B) & \xrightarrow{L(f)} & L(B') \\ \eta_B \downarrow & & \downarrow \eta_{B'} \\ R(B) & \xrightarrow{R(f)} & R(B') \end{array}$$

Cuando esto es cumplimentado, también es dicho que

$$\eta_B : L(B) \rightarrow R(B)$$

es natural en B.

Los morfismos $\eta_A, \eta_B, \eta_C, \dots$, etc., son llamados los componentes de la transformación natural.

Si existen dos transformaciones naturales

$$\eta : L \rightarrow R$$

y

$$\rho : R \rightarrow S$$

entonces la composición:

$$\rho \circ \eta : L \rightarrow S$$

es también una transformación natural.

Lema de Yoneda:

Dado el diagrama:

$$F_{h_A} : C \rightarrow \text{Ens}$$

donde:

C : es una categoría pequeña.

Ens : es la categoría de todos los conjuntos.

F : es un funtor covariante.

h_A : es un funtor de morfismos covariantes, donde:

a) para $A, B \in [C]_C$, $h_A(B) = [A, B]$.

b) Si $\alpha \in [A, B]_C$ y $\beta \in [B, C]_C$

$$h_A(\beta)(\alpha) = \beta \circ \alpha$$

entonces, es cumplimentado que:

1) $\phi^a : h_A \rightarrow F$ es una transformación natural.

2) La asignación

$$\xi : a \in F(A) \rightarrow \phi^a \in [h_A, F],$$

es una biyección.

Una **adjunción** desde una categoría χ a una categoría A es el triplete,

$$\langle F, G, \varphi \rangle : \chi \rightarrow A$$

donde F y G son funtores

$$\chi \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} A$$

donde φ es una función la cual asigna a cada par de objetos $X \in \chi$ y $A \in A$ una biyección:

$$\varphi = \varphi_{X,A} : [F X, A]_A \cong [X, G A]_X$$

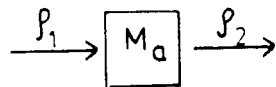
la cual es natural en X y en A .

3. Principales desarrollos

3.1. *Sistemas $M-R$ de metabolismo-reparación en células.*

Siguiendo con otro trabajo relacional hecho en biología, Robert Rosen (Rosen, 1958 a) estudió el sistema celular a través de su actividad metabólica (M) (la cual toma lugar en la parte citoplasmática de la célula) y las funciones reparadoras (R) de las unidades básicas del proceso metabólico, las que conciernen a las básicas funciones nucleares.

Para estudiar estos sistemas ($M-R$), el sistema metabólico M fue concebido como un sistema de entrada y salida, con dos elementos definidos llamados componentes y sus entradas y salidas, los que son organizados como lo muestra la figura 2.



M_a : Componente

p_1 y p_2 : entrada y salida de M_a

FIG. 2

En una forma natural, algunas salidas de un componente pueden ser entradas de otros, dando diagramas en bloque como lo demuestra la figura 3.

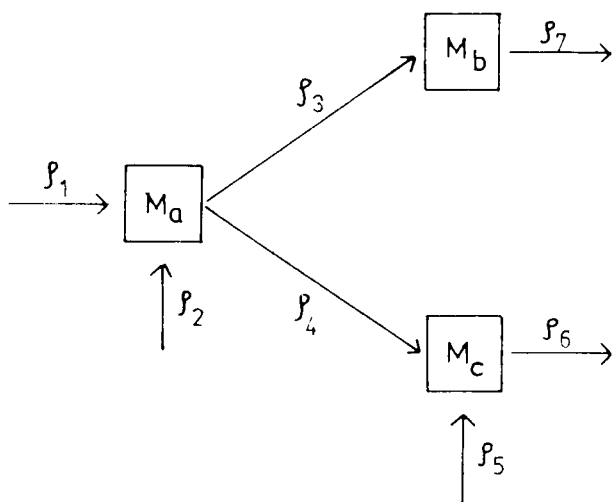


Diagrama en bloque

FIG. 3

Estos diagramas en bloque fueron reformulados en términos de un nuevo tipo de diagrama llamado diagrama en bloque abstracto (Rosen, 1958b). La figura 4 muestra un ejemplo de esto último, correspondiente al diagrama en bloque de la figura 3.

Aunque estos diagramas son originalmente concebidos para la representación del sistema metabólico, ellos pueden también ser usados para cualquier sistema de entrada y salida. Así, incrementando su uso, ellos fueron adoptados para cualquier expresión relacional general de un sistema biológico general M (Rosen, 1972 y Leguizamón, 1975 a).

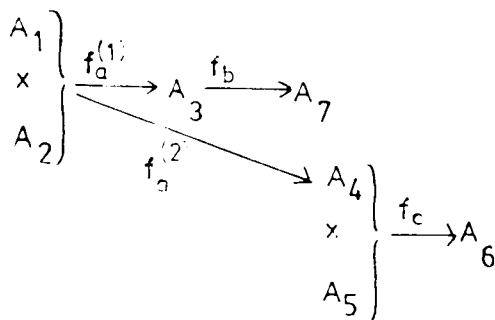


FIG. 4

Cuando los diagramas son así concebidos, los componentes pueden ser vistos como partes concretas de un sistema biológico (órganos, partes de órganos, un sitio para transferencias dadas), o como representaciones abstractas de relaciones entre salidas definidas desde una entrada dada [por ejemplo, una reacción química en la cual uno o más reactivos (entradas) dan lugar a un producto definido (salida)].

Visto el otro elemento de estos diagramas, que es, las entradas y salidas de los componentes, es importante notar que los objetos como A_1 y A_2 en la figura 4 son debidos a dos entradas físicas las cuales son distinguidas debido a sus llegadas al componente M_n por vía independiente.

Objetos de la forma A_i puede ser vistos como conjuntos de la forma

$$A_i = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Aunque ellos pueden ser analizados desde un punto de vista abstracto, Rosen los consideró como materiales de entrada y materiales de salida de los componentes. Así, cada elemento $a_i \in A_i$ define una materia dada, tal que el total del conjunto representa todas las diferentes clases de materia que constituye la entrada o salida física A_i .

Debe ser observado que la operación producto cartesiano expresa el ligamento entre dos o más entradas de un componente.

Científicos de extracción biológica pueden encontrar útil las aplicaciones de estos diagramas dadas por (Comorosan y Platica, 1967) los cuales representaron la biosíntesis proteica como sistemas $M-R$.

En (Rosen, 1958b) la teoría de categorías es introducida para el estudio de los sistemas biológicos $M-R$, diciendo principalmente que una colección de objetos $\{A_i\}$ y una colección de morfismos $\{f\}$ en una categoría, comprenden un diagrama en bloque abstracto de M si las siguientes condiciones son cumplimentadas:

- Si A es un objeto de la colección, y A es de la forma $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$, entonces A_i pertenece a la colección, para $1 \leq i \leq m$.
- Si $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ y existen morfismos f_i en la colección tal que $r(f_i) \subseteq A_i$ para cada i , entonces para cualquier morfismo g en la colección tal que $d(g) \subseteq A$, lo siguiente es obtenido:

$$d(g) \cap [r(f_1) \times r(f_2) \times \dots \times r(f_m)] \neq \phi$$

De la misma manera desarrollos para otros sistemas introducen diagramas en el campo de las categorías en forma similar.

Rosen concibió al sistema M con las siguientes propiedades: éste es conectado; ningún componente M funciona si no tiene todas sus entradas; y los componentes M tienen un tiempo de vida finito. Por esta última razón el sistema R es formado por componentes R_i cuyas actividades consisten en re-establecer su respectivo componente M_i . Además cada R_i es determinado por un subconjunto definido de un conjunto de salidas desde el sistema M . Basándose en estas definiciones, fue dicho que “un componente M_i es re-establecido si no alimenta a su reparador R_i , aún indirectamente”. Esto es así, ya que si M_i es inhibido, su reparador R_i , no siendo afectado, puede repararlo.

Esto fue usado para probar (Rosen, 1958a) que “cualquier sistema $M - R$ tiene por lo menos un componente el cual no puede ser re-establecido”, y aún más, si “un sistema $M - R$ tiene sólo un componente el cual no es restablecible entonces la inhibición de aquel componente anula el total del sistema”. En este último caso, aquel componente es llamado central. Como Rosen remarcó, cuando menor es el número de componentes no restablecibles, mayor es la probabilidad de que el sistema pueda ser destruido, debido a que la posibilidad de centralización se acrecienta. El caso alternativo es el dado por aquellos sistemas con más componentes no restablecibles, tal que si ellos son dañados, el sistema entero puede escapar de ser inhibido (la centralización puede ser menor que en el caso previo), y las funciones pueden ser parcialmente cumplimentadas por un restante subsistema.

Estos resultados, obtenidos teóricamente a través de teoremas y corolarios son abiertos a un nuevo panorama experimental, no sólo con el propósito de confirmar descubrimientos en sistemas particulares, sino también para continuar la investigación relacional a través de experimentos diseñados inspirados por esta nueva filosofía.

Es común representar el más simple sistema $M - R$ como:

$$\begin{array}{c} f \quad \phi_r \quad \beta_b \\ A \rightarrow B \rightarrow H(A, B) \rightarrow H[B, H(A, B)] \end{array}$$

donde

$f \in H(A, B)$ es el comportamiento de un componente metabólico $H(A, B)$.

$\phi_i \in H[B, H(A, B)]$ es un comportamiento del componente reparador $H[B, H(A, B)]$.

$\beta_b \in H[H(A, B), H[B, H(A, B)]]$ es el comportamiento de un nuevo componente denominado componente de replicación $H[H(A, B), H[B, H(A, B)]]$.

Los componentes de replicación fueron matemáticamente deducidos (Rosen, 1959) como emergiendo desde la misma estructura matemática en la cual componentes metabólicos y reparadores fueron basados.

Como Eilenberg y McLane (1945) lo establecieron, cualquier categoría abstracta C puede ser inmersa como una subcategoría de la categoría Ens de todos los conjuntos (Rosen, 1958b).

De esta forma, los objetos de C pueden ser interpretados como conjuntos ordinarios, y los morfismos de C como conjuntos ordinarios de mapeos. De esta forma, los recursos usuales de teoría de conjuntos, esto es, uniones, intersecciones, inclusiones, productos cartesianos, etc., tendrán sentido en la arbitraria categoría C .

La obtención de un diagrama en bloque abstracto para todo el sistema $M - R$, se obtiene a través de similares reglas que aquellas usadas para el sistema M . De esta forma, cada componente R_i estará determinado por mapeos del tipo ϕ_{fi} donde:

$$\phi_{fi} \in H\left[\prod_{k \in K} B_k, H(A, B)\right] \quad (K = 1, 2, \dots, m)$$

tal que $\prod_{k \in K} B_k$ es el producto cartesiano de m B_k conjuntos que representan salidas ambientales del sistema metabólico M .

Desde lo anterior, un diagrama en bloque abstracto para un sistema $M - R$ consistirá de los siguientes datos:

- Un diagrama en bloque abstracto del sistema metabólico M .
- Un conjunto de mapeos de reparación ϕ_{fi} en correspondencia biyectiva con los mapeos metabólicos f_i de M .
- Productos del tipo $\prod_{k \in K} B_k$ siendo dominios de los ϕ_{fi} , así co-

mo las inyecciones de tipo $i_k: B_k \rightarrow \prod_{k \in K} B_k$.

- d) Conjuntos del tipo $H(A,B)$ los que contienen los rangos de los mapeos de reparación ϕ_n .

De esta forma, mediante una axiomatización trivial, es posible obtener como antes, una categoría $M-R$ que represente los respectivos diagramas en bloque abstractos, la que a su vez, y siguiendo a lo expresado anteriormente, puede ser interpretada como una subcategoría C_0 de la categoría Ens de todos los conjuntos.

La axiomatización por la cual los diagramas en bloque abstractos pueden ser interpretados bajo la estructura de categorías, no ha determinado de por sí una limitación en el número de objetos y el número de morfismos de la categoría arbitraria C_0 en la cual el sistema $M-R$ de referencia ha quedado inmerso. Esto induce al muy interesante análisis de reconocer las condiciones por las cuales un morfismo arbitrario f de una categoría C_0 pueda ser reconocido como un componente metabólico de un sistema $M-R$ que a su vez es representado por C_0 .

De hecho, este tipo de problemas es fuertemente dependiente de la *estructura de la categoría*, que de hecho, obedece a una topología de interconexión emergente de las condiciones de operación del sistema $M-R$.

Aún cumpliendo estas condiciones de operación, las diferentes interconexiones entre los componentes metabólicos y el distinto número y tipo de salidas metabólicas que constituyen el ingreso a los componentes de reparación, hacen que la variedad de posibles sistemas $M-R$ sea muy amplia.

Más aún, la categoría arbitraria C_0 puede contener toda la variabilidad posible, de tal modo que la topología evidenciada desde la estructura de C_0 , permitirá calificar, en abstracto, el tipo de biología bajo análisis. Así, distintas y no equivalentes categorías C_0 , determinarían distintas abstractas interpretaciones de los tipos de biología en juego. Esto, sea dicho, como una argumentación sostenida por la hipótesis de la no única existencia de la Biología por nosotros conocida y, lógicamente, sustentada.

Definición: Una secuencia $A_1, A_2, A_3, \dots$ de objetos en una categoría C_0 es llamada *normal*, si ningún par A_i, A_{i+1} se repite infinitamente en la secuencia.

Definición: La categoría C_0 es llamada *normal*, si para cualquier secuencia normal de objetos en C_0 , la secuencia asociada

$$H(A_1, A_2), H(A_2, A_3), H(A_3, A_4), \dots$$

contiene solamente un número finito de conjuntos vacíos.

Lema: Si C_0 es *normal* y posee infinitamente muchos objetos, entonces para cada objeto $X \in [C]_{C_0}$ corresponde al menos un objeto $Z \in [C]_{C_0}$ tal que

$$[Z, X]_{C_0} \neq \phi.$$

Prueba: Sea Z_1, Z_2, Z_3 una secuencia de objetos dos a dos distintos en C_0 . Al considerar la secuencia

$$Z_1, X, Z_2, X, Z_3, X, \dots$$

ésta es una secuencia normal, desde lo cual sigue $[Z_i, X] \neq \phi$ desde la normalidad de la categoría.

Teorema: Si C_0 es una categoría normal, entonces cualquier morfismo $\alpha \in [X, Y]_{C_0}$, $X, Y \in [C]_{C_0}$ puede ser inmerso como un mapeo metabólico de un sistema $M-R$ existente en C_0 .

Prueba: Se parte considerando que existe un mapeo metabólico

$$f : A_1 \rightarrow B_1$$

en C_0 el cual no puede ser inmerso en un sistema $M-R$ de C_0 . Si es así, entonces debe tenerse:

$$H[B_1, H(A_1, B_1)] = \phi \quad (1)$$

Sin embargo, por el lema anterior, sabemos que existirá al menos un objeto $B_2 \in [C]_{C_0}$ que cumplirá

$$H[B_2, H(A_1, B_1)] \neq \phi$$

Sin embargo, si se tiene que $\Phi_f \in H[B_2, H(A_1, B_1)]$, el par $\{f, \Phi_f\}$ no determinará un sistema $M-R$. No obstante ésto, desde el lema mismo se tiene que B_2 tendrá al menos un objeto $A_2 \in [C]_{C_0}$ tal que

$$H(A_2, B_2) \neq \phi$$

Suponiendo que

$$g \in H(A_2, B_2)$$

e involucrando nuevamente al lema, para el objeto $H(A_2, B_2)$ se tendrá

$$H[B_3, H(A_2, B_2)] \neq \phi$$

donde B_3 no puede ser reemplazado por B_2 por cuando hemos partido que el mapeo original

$$f : A_1 \rightarrow B_1$$

es un mapeo metabólico que no puede ser inmerso en un sistema $M - R$, ya que si fuese $B_3 = B_2$ entonces sí se tendría el sistema $M - R$ dado por

$$\{f, \Phi_r, g, \Phi_g\}$$

y siendo $\Phi_g \in H(B_2, H(A_2, B_2))$.

Entonces, para esta prueba debería tenerse

$$H[B_2, H(A_2, B_2)] = \phi \quad (2)$$

Siendo $B_3 \neq B_2$, entonces por el lema, y para B_3 se tendrá:

$$H(A_3, B_3) \neq \Phi$$

Siendo

$$h \in H(A_3, B_3)$$

y como $f: A_1 \rightarrow B_1$ pertenece a un sistema metabólico, entonces para el sistema $M - R$ podría existir

$$\Phi_h \in H[B_3, H(A_3, B_3)]$$

y así también existiría

$$\{f, \Phi_r, g, \Phi_g, h, \Phi_h\}$$

Sin embargo, siguiendo con la suposición de la prueba, realmente debe ser:

$$H[B_3, H(A_3, B_3)] = \phi \quad (3)$$

Siguiendo, con el proceso, e invocando al Lema, para el objeto $B_4 \neq B_3$ que hace

$$H[B_4, H(A_3, B_3)] \neq \phi$$

podemos tener en C_0 el objeto A_1 bajo el cual

$$H(A_1, B_1) \neq \phi$$

y así proseguir infinitas veces, obteniendo los objetos A_n, B_n de una manera similar.

Ahora bien, si se considera la secuencia

$$B_1, H(A_1, B_1), B_2, H(A_2, B_2), B_3, H(A_3, B_3), \quad (4)$$

(lo cual es una secuencia de pares disjuntos de objetos en C_0) al ser la categoría C_0 normal, existirá entonces para la secuencia solamente un número finito de conjuntos vacíos. Además, como $H(A_1, B_1), H(A_2, B_2), H(A_3, B_3), \dots$, existen; al menos se tendrá

$$H[B_2, H(A_2, B_2)] \neq \phi$$

lo cual contradice (2) anterior que fue obtenido al partir con la suposición que $f: A_1 \rightarrow B_1$ no podía ser inmerso en un sistema $M-R$ de C_0 .

Como esto puede darse para (1) y (3), y en sí, para todos ellos (1), (2) y (3) juntos, entonces, se cumple que cualquier mapeo en C_0 puede ser inmerso como un mapeo metabólico de un sistema $M-R$.

Ahora bien, bajo la secuencia (4) el sistema M sería no conectado. Luego, para un M conectado, como lo sería para el diagrama en bloque

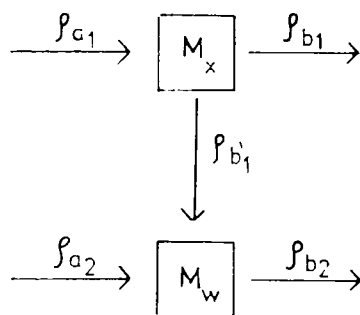


FIG. 5

con un diagrama en bloque abstracto

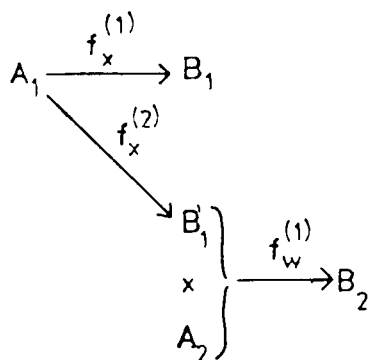


FIG. 6

se tendría entonces, como secuencia a considerar

$$B_1, H(A_1, B_1), B'_1, H(A_1, B'_1), B_2, H(B'_1 \times A_2, B_2) \quad (5)$$

La secuencia (5) bajo el mismo criterio de análisis implementado para la secuencia (4) nos permite cumplir con la tesis del teorema, para M siendo conectado.

Corolario: Cualquier familia finita de mapeos $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ en una categoría normal C_0 puede ser inmersa en un sistema $M - R$ existente en C_0 .

Los resultados anteriores son debidos a Robert Rosen (1962 y 1972) y como él lo dice, no representan una panacea pero sí favorecen un incipiente conocimiento sobre el número y distribución de los morfismos, es decir la topología de interconexión entre objetos de la categoría C_0 .

Es no trivial, por ejemplo, indagar el tamaño mínimo de una categoría C_0 para que, obtenido un morfismo metabólico f dado en C_0 , se verifique el sistema $M - R$ en el cual se encuentra f inmerso y se logre entonces el número de objetos correspondientes al sistema reparador; y así, desde ese número, se cuantite entonces el tamaño de la categoría. Si ese morfismo es $f \in H(A, B)$ y si además se tiene $H[B, H(A, B)] = \phi$, entonces, la reparación desde un objeto X en $H[X, H(A, B)] \neq \phi$ involucrará un mayor o menor tamaño de C_0 que en definitiva depende del número de conjuntos de morfismos vacíos en C_0 .

Adicionalmente, se puede tener una adicional "cuantificación" del tamaño de los sistemas $M - R$, en el siguiente sentido: así, si es dado un sistema $M - R$, en C_0 , identificado por Ω_1 , entonces se podrá tener un morfismo $\alpha \in [f]_{C_0}$ con $\alpha \in \Omega_1$, de tal manera que el conjunto de morfismos $[\alpha, \Omega_1]$ pueda ser inmerso en otro sistema $M - R$ identificado por Ω_2 existente en C_0 .

Si N_1 y N_2 son los números de distintos morfismos en Ω_1 y Ω_2 , entonces, puede ser posible preasignar un entero k tal que siempre se cumpla:

$$N_2 - N_1 > k$$

El valor k puede ser tomado arbitrariamente grande de acuerdo a la selección de la categoría C_0 que se pretende. Es entonces fácil comprobar que la relación entre la estructura de la categoría C_0 y un valor para k provee importante información acerca del tipo de sistemas $M - R$ construibles en C_0 . Lógicamente, esto es dependiente de la distribución de los conjuntos de morfismos vacíos en C_0 .

De hecho, categorías C_0 no equivalentes entre sí darán lugar a diferentes clases de sistemas $M - R$. Esto implica, en biología abstracta, que la clase de sistemas unicelulares relacionamente distintos dependen de la naturaleza de la categoría del discurso.

La teoría de autómatas debe sus orígenes a los trabajos de Turing (1936) y Post (1936), quienes trabajando independientemente, establecieron las bases teóricas para máquinas cuya producción de salidas (o resultados) son dependientes de un adecuado y finito programa que responde a determinadas entradas.

Esta tan sucinta y abstracta caracterización pone en evidencia el paralelismo conceptual que existe con los sistemas $M - R$ de metabolismo-reparación; por cuanto éstos, ponen en juego determinados comportamientos para sus componentes que dan lugar a determinadas salidas debidas al ingreso de entradas específicas.

Robert Rosen ha sido quien primero reconociera las similitudes entre sendas teorías y expresando los sistemas $M - R$ como autómatas (Rosen, 1964 a, b y 1966), ha logrado un mayor conocimiento sobre las características de la representación, sobre la estructura algebraica de las categorías involucradas; y en definitiva, sobre los sistemas biológicos para los cuales las teorías han sido construidas.

Un autómata (Arbib, 1969) es generalmente definido como una 5-upla,

$$\Delta = [S, M, N, \delta, \lambda]$$

donde:

S: es el conjunto de los estados de Δ .

M: es el conjunto finito de entradas.

N: es el conjunto finito de salidas.

$\delta: M \times S \rightarrow S$: la función para el siguiente estado.

$\lambda: M \times S \rightarrow N$: la función para la siguiente salida.

Se dice que Δ es un autómata finito, si S es finito.

Bajo la definicinó de Δ , se tiene entonces que si para el tiempo t, Δ se encuentra en un estado $s_i \in S$ y recibe una entrada $m_i \in M$, entonces en el tiempo $t+1$ se encontrará en el estado $\delta(s_i, m_i)$ y tendrá lugar la salida $\lambda(s_i, m_i)$.

Como fue dicho antes, el más simple de los sistemas $M-R$ $\{f, \phi_r\}$ es dado por el diagrama

$$\begin{array}{c} f \quad \phi_r \\ A \rightarrow B \rightarrow H(A, B) \end{array}$$

donde $f \in H(A, B)$; y $\phi_r \in H[B, H(A, B)]$,

tal que f y ϕ_r representan determinados comportamientos del total de comportamientos dados por sus componentes respectivos $H(A, B)$ y $H[B, H(A, B)]$.

Rosen (1964 a), a quien se deben los presentes desarrollos, hubo realizado la siguiente identificación:

$$\begin{array}{l} S = H(A, B) \\ M = A \\ N = B \end{array}$$

$$\delta: S \times M \rightarrow S = \delta(f, a) = \phi_r[f(a)]; a \in A$$

$$\lambda: S \times M \rightarrow N = \lambda(f, a) = f(a)$$

Considerando el sistema $M-R$ $\{f, g, \phi_r, \phi_k\}$, donde:

$$\begin{array}{l} f \in H(A, B) \quad ; \quad g \in H(C, D) \\ \phi_r \in H[B \times D, H(A, B)] \quad \phi_k \in H[B \times D, H(C, D)] \end{array}$$

se pueden hacer las siguientes identificaciones:

$$\begin{array}{l} S = H(A, B) \times H(C, D) \\ M = A \times C \\ N = B \times D \end{array}$$

$$\begin{aligned}\delta: S \times M \rightarrow S &= \delta[(f, g), (a, c)] = \\ &= \phi_f[(f(a), g(c)), \phi_g[f(a), g(c)]] \\ \lambda: S \times M \rightarrow N &= \lambda[(f, g)(a, c)] = [f(a), g(c)]\end{aligned}$$

Procediendo de una manera general, sea el sistema $M-R$ del tipo $[f_1, f_2, \dots, f_n; \phi_{f_1}, \phi_{f_2}, \dots, \phi_{f_n}]$; donde $f_i \in H(A_i, B_i)$ y $\phi_{f_i} \in H[\pi_i, B_i, H(A_i, B_i)]$ con las identificaciones

$$\begin{aligned}S &= \pi_i H(A_i, B_i) \\ M &= \pi_i A_i \\ N &= \pi_i B_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta: S \times M \rightarrow S &= \delta(f_1, f_2, \dots, f_n), (a_1, a_2, \dots, a_n) = \\ &= \phi_{f_1}[(f_1(a_1), f_2(a_2), \dots, f_n(a_n))], \\ &\quad \phi_{f_2}[(f_1(a_1), f_2(a_2), \dots, f_n(a_n))], \dots, \\ &\quad \phi_{f_n}[(f_1(a_1), f_2(a_2), \dots, f_n(a_n))] \\ \lambda: S \times M \rightarrow N &= \lambda(f_1, f_2, \dots, f_n), (a_1, a_2, \dots, a_n) = \\ &= [f_1(a_1), f_2(a_2), \dots, f_n(a_n)].\end{aligned}$$

La categoría de autómatas fue introducida por Rosen (1966) y Cazanescu (1967), independientemente uno de otro.

Siguiendo al trabajo previamente citado, debe decirse que si

$$\Delta = [S, M, N, \delta, \lambda] \text{ y } \Delta' = [S', M', N', \delta', \lambda']$$

son dos autómatas; entonces, un homomorfismo

$$\psi: \Delta \rightarrow \Delta'$$

es definido como un triplete de mapeos

$$\psi = [\psi_1, \psi_2, \psi_3]$$

de tal manera que:

$$\psi_1: S \rightarrow S'; \quad \psi_2: M \rightarrow M'; \quad \psi_3: N \rightarrow N'$$

determinan que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} S \times M & \xrightarrow{\delta} & S \\ \psi_1 \times \psi_2 \downarrow & & \downarrow \psi_1 \\ S' \times M' & \xrightarrow{\delta'} & S' \end{array}$$

FIG. 7

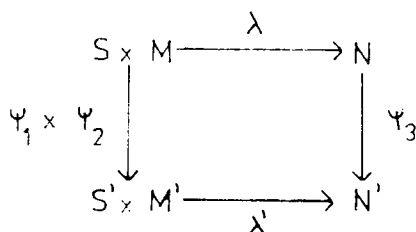


FIG. 8

Sobre la base de esta definición, debida a Glushkov (1961), el siguiente teorema a ser probado, brinda importantes adicionales elementos algebraicos para el análisis de los sistemas $M - R$.

Teorema: Sea C una categoría de conjuntos la cual es cerrada bajo el functor producto cartesiano; es decir, si $A, B \in [C]_c$, entonces $P(A, B) \in [C]_c$; y si f, g son mapeos en

$$[f]_c, \text{ entonces lo es } f \times g.$$

Entonces la totalidad de autómatas cuyos estados, conjuntos de entradas y conjuntos de salidas son objetos en C , y cuyas funciones para el estado siguiente y cuyas funciones de salida son mapeos en C ; determinan una categoría $A(C)$ cuando $H(\Delta, \Delta')$ es tomado como el conjunto de todos los homomorfismos $\Delta \rightarrow \Delta'$ definidos como antes.

Prueba: Deben ser probadas tres cosas:

- a) El homomorfismo $i_\Delta : \Delta \rightarrow \Delta$ es definido por el triplete (i_s, i_M, i_N) en la categoría C , que en definitiva identifican al mapeo identidad, y cuyas propiedades de cancelación derecha e izquierda es trivial. Así, para cada autómata Δ definido sobre C , se puede encontrar un mapeo identidad $i_\Delta \in H(\Delta, \Delta)$.
- b) Debe demostrarse que la composición de dos homomorfismos

$$\psi : \Delta \rightarrow \Delta' \text{ y } \psi' : \Delta' \rightarrow \Delta''$$

es de nuevo un homomorfismo

$$\psi' \circ \psi : \Delta \rightarrow \Delta''$$

Suponiendo Δ y Δ' como antes, y $\Delta'' = [S'', M'' N'', \delta'',$

$\lambda'']$, y ψ como antes y $\psi' = [\psi'_1, \psi'_2, \psi'_3]$ siendo

$$\psi'_1 : S' \rightarrow S''; \psi'_2 : M' \rightarrow M''; \psi'_3 : N' \rightarrow N''$$

entonces el resultado propuesto se cumple desde los diagramas conmutativos de las figuras 9 y 10.

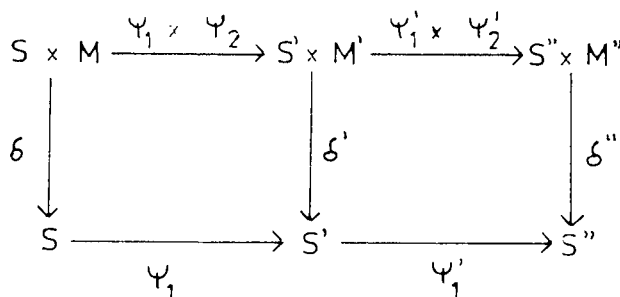


FIG. 9

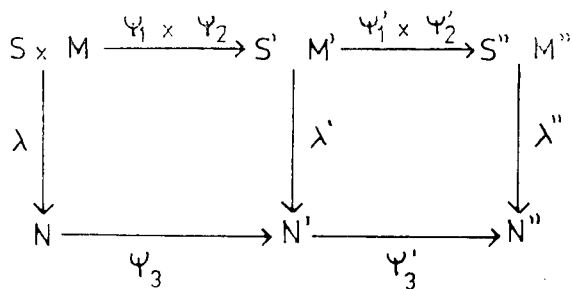


FIG. 10

Se debe tener en cuenta que

$$(\psi'_1 \times \psi'_2) \circ (\psi_1 \times \psi_2) = (\psi'_1 \circ \psi_1 \times \psi'_2 \circ \psi_2)$$

- c) Debe ser probado que la composición de homomorfismos es asociativa, lo cual sigue desde la asociatividad de la composición de los mapeos en C .

Formalizados los autómatas Δ bajo la estructura de una categoría A (C) impuesta sobre una categoría cartesiana cerrada de conjuntos C , interés conocer (Rosen, 1966) si dado que $\psi : \Delta \rightarrow \Delta'$ es un homomorfismo de autómatas, y si Δ es inducido por un sistema $M-R$ entonces debe Δ' igualmente ser inducido por un sistema $M-R$.

Expresado en otra forma, la intención fue probar si la imagen homeomórfica de un sistema $M-R$ es de nuevo un sistema $M-R$.

La respuesta ha sido afirmativa, y de inmediato ha seguido que la totalidad de autómatas inducidos por los sistemas $M-R$ sobre una categoría C es una subcategoría de $A(C)$.

Para ello, las condiciones (en sí restricciones) fueron impuestas sobre ψ tal que su triplete representativo ha resultado con las siguientes propiedades: ψ_1 sobreyectivo y ψ_2 y ψ_3 inyectivos.

Desarrollos posteriores de Michael Arbib (1966) produjeron una extensión mórfica de estos resultados, llevando a ψ_2 a una condición menos fuerte, es decir ψ_2 sobreyectivo, tal que aún así, los objetivos perseguidos se siguen cumpliendo.

Teorema: (Rosen, 1966) Si Δ es un autómata inducido por un sistema $M-R$ del tipo

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\phi f} H(A, B)$$

y si $\psi = [\psi_1, \psi_2, \psi_3]$ es un homomorfismo $\Delta \rightarrow \Delta'$ tal que ψ_1 es sobreyectivo y ψ_2 y ψ_3 son inyectivos, entonces Δ' es inducido por un sistema $M-R$.

Prueba: Si $\Delta' = [S', M', N', \delta', \lambda']$ debe ser inducido por un sistema $M-R$ del tipo

$$\Delta' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{\Phi_{f'}} H(A', B')$$

entonces debe ser hallada una correspondencia

$$\gamma : S' \rightarrow H(A', B')$$

que cumpla

$$a) \quad \lambda'(\gamma(s'), a') = \gamma(s')(a') \quad s' \in S', a' \in A'$$

b) se debe encontrar un $f'_0 \in H(A', B')$ y un mapeo

$$\Phi_{f'_0} : B' \rightarrow H(A', B') \text{ tal que}$$

$$\gamma'(\gamma(s'), a') = \Phi_{f'_0}(\gamma(s')(a'))$$

La definición de γ es inherente a que $\psi : \Delta \rightarrow \Delta'$ es un homomorfismo ya que Δ es inducido por el sistema

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\Phi f} H(A, B)$$

Al definirse el homomorfismo ψ se ha dado un mapeo $\psi_1 : H(A, B) \rightarrow S'$ el cual asocia con cada mapeo $g \in H(A, B)$, un estado $\psi_1(g) \in S'$.

En el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ \psi_2 \downarrow & & \downarrow \psi_3 \\ A' & \xrightarrow{g'} & B' \end{array}$$

la flecha de trazos $g' : A' \rightarrow B'$ indica un mapeo que si existe, hace al diagrama conmutativo, y así si g' existe, entonces se tiene una correspondencia

$$g \rightarrow g'$$

con $g' = \gamma[\psi_1(g)]$

De aquí, resultan las condiciones para γ :

- 1) Desde que se deseará que todo estado de S' sea asociado con un mapeo en $H(A', B')$, es requerido que el mapeo ψ_1 sea sobreyectivo.
- 2) El mapeo g' del diagrama anterior es definido cuando ψ_2 es inyectivo.

Ahora será probado que estas dos condiciones son satisfechas, lo que resulta que el mapeo γ es bien definido. Dos lemas son incluidos en esta demostración:

Lema: Si $a \in A$ y $g \in H(A, B) \Rightarrow \lambda'(\psi_1(g), \psi_2(a)) = \gamma \circ \psi_1(g)(\psi_2(a))$

Prueba: Desde la conmutatividad del diagrama de la figura 8, tomando $S = H(A, B)$; $M = A$ y $N = B$ se tiene:

$$\lambda'[\psi_1(g), \psi_2(a)] = \psi_3[\lambda(g, a)] = \psi_3[g(a)]$$

Pero desde el diagrama anterior se tiene que:

$$g' \circ \psi_2(a) = \gamma \circ \psi_1(g) [\psi_2(a)] = \psi_3 [g(a)]$$

y de ahí resulta el lema, que es la condición a establecida anteriormente.

Lema: Si $g \in H(A, B)$; $a \in A \Rightarrow \delta' [\gamma \circ \psi_1(g), \psi_2(a)] = \Phi_{r'_0} [\gamma \circ \psi_1(g), \psi_2(a)]$.

Prueba: Considerando el diagrama de la figura 11 que debe ser conmutativo, el mapeo

$$\Phi_{r'_0} : B' \rightarrow H(A', B')$$

debe satisfacer la condición b.

Así, la existencia del mapeo $\Phi_{r'_0}$, es obtenida cuando ψ_3 es inyectivo. (De esta manera se cumple la tercer restricción sobre ψ .)

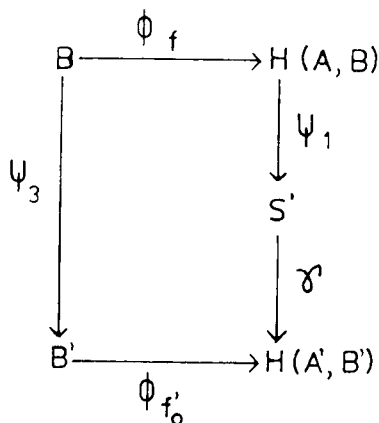
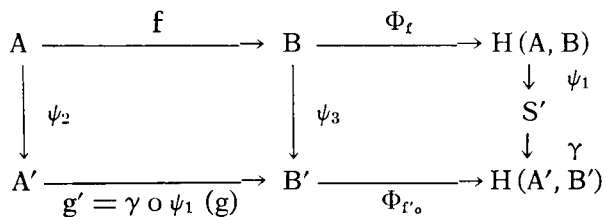


FIG. 11

Asumiendo que el mapeo indicado $\Phi_{r'_0}$, existe, se debe considerar entonces el siguiente diagrama conmutativo



donde $g \in H(A, B)$ y $a \in A$.

Se tiene que

$$(\gamma \circ \psi_1) [\phi_t(g(a))] = \phi_{t \circ} [\gamma \circ \psi_1(g) (\psi_2(a))]$$

A su vez, desde la figura 7, al reemplazar ψ_1 por $\gamma \circ \psi_1$ se tiene:

$$\delta' [\gamma \circ \psi_1(g), \psi_2(a)] = [(\gamma \circ \psi_1) (\phi_t(g(a)))]$$

y comparando estos dos resultados, se tiene que

$$\delta' [\gamma \circ \psi_1(g), \psi_2(a)] = \phi_{t \circ} [(\gamma \circ \psi_1(g) (\psi_2(a)))]$$

que prueba el lema, y de hecho, la condición b.

Todos los anteriores resultados juntos, prueban el teorema.

Desde que la composición de dos mapeos sobreyectivos es de nuevo sobreyectiva y desde que la composición de dos mapeos 1-1 es de nuevo 1-1, entonces sigue que si se define $A_1(C)$ como una categoría dada por:

- 1) Los objetos de $A_1(C)$ son los mismos que los de $A(C)$.
- 2) Si $\Delta, \Delta' \in A_1(C)$, entonces la definición de los mapeos $H_1(\Delta, \Delta')$ consistirá de solamente aquellos homomorfismos $\psi = [\psi_1, \psi_2, \psi_3]$ tal que ψ_1 es sobreyectivo y ψ_2 y ψ_3 son inyectivos, entonces la categoría $A_1(C)$ es una subcategoría de $A(C)$.

Desde el teorema anterior sigue inmediatamente que:

Corolario: La totalidad de los sistemas $M-R$ sobre una categoría de autómatas son una subcategoría de la asociada categoría $A_1(C)$.

Esto surge, por cuanto no todos los autómatas representables por $A_1(C)$ son sistemas $M-R$.

Los sistemas $M-R$ también fueron analizados por Ion Baianu (1973) aplicando teoría de categorías. Este investigador concluye que "cualquier sistema proyectivo en la categoría $M-R(C)$ de sistemas $M-R$ generales sobre una categoría cartesiana cerrada C tiene un límite proyectivo".

3.2. *La introducción de los conceptos de energía en las representaciones relacionales biológicas*

Una nueva visión de la Biología Relacional fue dada desde criterios teóricos que interpretasen con el lenguaje de las cate-

gorías las formalizaciones de los sistemas a través de los conceptos de materia y energía [Leguizamón, 1975 a y (a)].

Más aún, esa visión no fue entendida como parcializada a los sistemas biológicos (M) (Leguizamón, 1975 a, Leguizamón, 1976), sino a éstos y sus medios ambientes (E) (Leguizamón, 1975 b); a pares de estas dos clases de sistemas (M-E) a través de la caracterización de sus transferencias (T) (Leguizamón, 1977 a), y al conjunto de todos estos sistemas (M, E y T) a través del nuevo sistema bio-ambiental (K) (Leguizamón, 1977 b).

Consecuencias de estos estudios fueron las definiciones de las sucesivas categorías biológicas M_α , M_α , M_β y M_γ ; la categoría ambiental E, la categoría de los sistemas de transferencias T y la categoría bio-ambiental K. En estos términos, todos los nuevos sistemas no fueron solamente estudiados por cada categoría individual que caracterizase a cada sistema en un estado en un tiempo dado, sino que adicionalmente, fueron entendidos nuevos aspectos de dinámica evolutiva por medio de cadenas de sucesivos sistemas, los que aportaron nuevos puntos de vista para el análisis. Así se aplicaron los funtores, que compararon categorías sucesivas y dieron la base para la definición de nuevos conceptos, como el de estabilidad ambiental [Leguizamón (b), (c), (d), (e) y (f)].

La formalización abstracta de los sistemas metabólicos M de Rosen fueron usados para representar genéricamente a los sistemas biológicos de tal forma que el diagrama en bloque abstracto de la figura 12 se expresó como el dado por la figura 13 (Leguizamón, 1975 a).

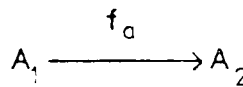


FIG. 12

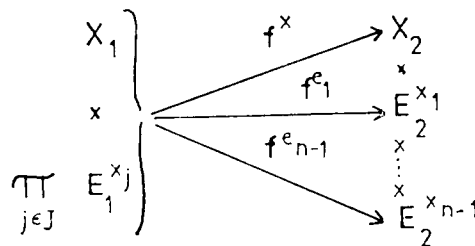


FIG. 13

El original conjunto de naturaleza abstracta A_i

$$A_i = [a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^n]$$

fue entendido bajo la n-upla de factores

$$X_i \times \prod_{j \in J} E_i^{x_j} \quad (j \in J, J = 1, 2, \dots, n-1)$$

donde:

$$X_i = [x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^m]: \text{conjunto material}$$

$$E_i = [e_j]: \text{conjunto energético}$$

Cada elemento $x_i^k \in X_i$ ($k \in K, K = 1, 2, \dots, m$) representa una dada **naturaleza física material**, la que es vista como “una dada materia para definidos valores de las variables de estado: presión, temperatura, volumen y composición y con una precisa conformación geométrica” [Leguizamón, (a)].

El concepto de energía fue impuesto a través de dos simples caracterizaciones: energía intrínseca y energía extrínseca. La energía intrínseca fue definida como estrictamente equivalente a la naturaleza física material de referencia y con un valor asignado dependiente de la transformación energética de ésta hasta valores standard de ella o de otras materias sin valor energético para posterior aprovechamiento biológico.

La energía extrínseca fue definida a través de los conjuntos unitarios $E_i^{x_j} = [e_j]$ y fue concebida como

- i) sólo inherente a la naturaleza física material de referencia;
- ii) con un número de energías extrínsecas no constante o fijo para la naturaleza física material de referencia;
- iii) con la posibilidad de continuidad, entre los diferentes valores energéticos asignados para energías extrínsecas;
- iv) con una lábil unión con la naturaleza física material de referencia.

Una similar extensión de los conceptos es dado para los originales abstractos comportamientos f_a de los componentes $H(A_1, A_2)$. Así se tiene:

f_a^{ej} : comportamiento energético.

f_a^x : comportamiento material.

Los nuevos diagramas abstractos material-energéticos como los dados por la figura 13, fueron entonces formalizados a través de una nueva categoría de los sistemas biológicos M_α .

La construcción de un funtor isomórfico

$$F_\alpha : M \rightarrow M_\alpha$$

sirvió para facilitar la interpretación de todo desarrollo abstracto dado en M con un equivalente criterio dado en M_α pero en términos de la materia y de la energía.

El lema de Yoneda abrió numerosos e interesantes nuevos desarrollos en el tema. Fue aplicado (Leguizamón, 1976) a diagramas del tipo de la figura 14.

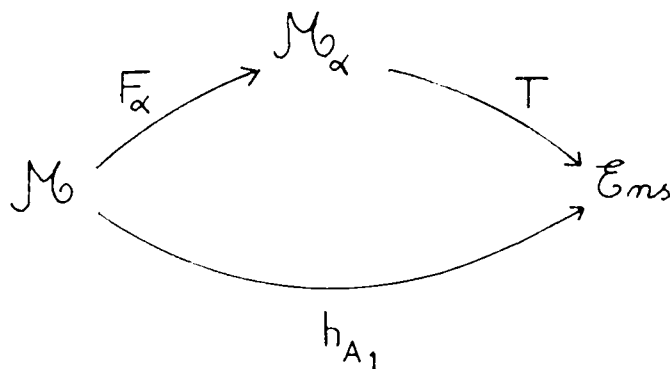


FIG. 14

A través de esa figura, el conjunto A_1 corresponde a todas las entradas de un componente $H(A_1, A_2)$ como ha sido expuesto por la figura 12. El ingreso $a_1^k \in A_1$, es, por ejemplo, transformado en el elemento $a_2^k \in A_2$ por medio del comportamiento $f_a \in H(A_1, A_2)$. El elemento a_1^k debe ser visto en Ens como

$$s_1 \in S = T \circ F_\alpha(A_1) = T(X_1 \times \prod_{j \in J} E_2) E_1^{xj})$$

lo que individualiza la transformación natural

$$\phi^{s_1^k} \in [h_{A_1}, T \circ F_\alpha]$$

de tal forma que para $A_2 \in [A]_M$ se tiene:

$$\phi_{A_2}^{s_1^k}(f_a) = T \circ F_\alpha(f_a)(s_1^k) = s_2^k \in S_2 = T(X_2 \times \prod_{j \in J} E_2^{xj})$$

Por el mismo lema de Yoneda se tiene la biyección

$$\xi : s_1^k \in T \circ F_\alpha(A_1) \rightarrow \phi_{s_1^k}^k \in [h_{A_1}, T \circ F_\alpha]$$

que pone en correspondencia 1-1 cada elemento de la entrada al componente $H(A_1, A_2)$ (porque para cada $a_1 \in A_1$ se tiene $\langle x_1, e_1, e_2, \dots, e_{n_1-1} \rangle \in X_1 \times \prod_{j \in J} E_1^{x_j}$ y $s_1^k \in S_1$ es su imagen)

con la respectiva transformación natural $\phi_{s_1^k}^k$. Esto significa, en otras palabras, que **cada ingreso al componente es identificado por sus posibilidades de realización dadas a través del comportamiento actuando sobre la entrada y del resultado respectivo de esa realización**. Así en términos de la componente

$\phi_{s_2^k}^k$ de la transformación natural se tiene:

$$\phi_{s_2^k}^k \in [h_{A_1}(A_2), T \circ F_\alpha(A_2)]$$

que significa: " $\phi_{s_2^k}^k$ aplicado sobre un elemento f_a del dominio

$[A_1, A_2]_M$ (conjunto en *Ens*), determina un elemento $s_2^k \in S_2 = T(X_2 \times \prod_{i \in J} E_2)$ donde cada s_2^k es la imagen de la n -upla

$$\langle x_2, e_1, e_2, \dots, e_{n_2-1} \rangle$$

que expresa el carácter material energético de la realización del comportamiento f_a aplicado sobre la entrada a_1 ".

A pesar de la redundancia, una forma más didáctica para expresar todo lo anterior sería:

$$[a_1^k] \xrightarrow[\text{biyección}]{\theta} [f_a, \langle m, e \rangle]$$

a_1^k : un tipo de entrada a A_1 .

f_a : comportamiento de transformación.

$\langle m, e \rangle$: característica material-energética, de la realización del comportamiento de transformación.

De esta manera, se logra la individualización de distintas entradas a un componente.

Resulta ilustrativo mencionar que los presentes resultados provienen de un manejo de la teoría de categorías en el sentido b mencionado anteriormente.

Una simple pero significativa pregunta para el desarrollo de la Biología Relacional fue formulada a continuación de la aplicación del lema (Leguizamón, 1976) ¿No podría tenerse una biyección del tipo

$$[\hat{a}_1^k] \xrightarrow[\text{biyección}]{\theta'} [\hat{f}_a, \langle o, e \rangle]$$

tal que $\langle o, e \rangle$ represente una realización exclusivamente energética del ingreso?

En términos de los diagramas abstractos material-energéticos $\langle o, e \rangle$ debió ser visto como el producto cartesiano

$$1^{x_2} \times \prod_{j \in J} E_2^{x_j} \quad (j \in J, J = 1, 2, \dots, n_2 - 1)$$

que se obtuvo al considerar las biyecciones

$$\begin{aligned} X_i \times 1^{x_i} &\xrightarrow{\lambda x} X_i \xrightarrow{\rho x} 1^{x_i} \times X_i \\ E_i^x \times 1^{E_i^x} &\xrightarrow{\lambda e} E_i^x \xrightarrow{\rho e} 1^{E_i^x} \times E_i^x \end{aligned}$$

donde 1^{x_i} y $1^{E_i^x}$ fueron designados como conjuntos unitarios del tipo:

$1^{x_i} = [x_o]$: conjunto teórico material de naturaleza física material cero.

$1^{E_i^x} = [e_o]$: conjunto teórico energético de energía extrínseca cero.

$$x_o = e_o = O \text{ (el ordinal cero).}$$

Así, por lo anterior se tiene

$$\begin{aligned} \lambda_x \langle x_i, O \rangle &= x_i = \rho_x \langle O, x_i \rangle \\ \lambda_e \langle e_i, O \rangle &= e_i = \rho_e \langle O, e_i \rangle \end{aligned}$$

La definición de dos nuevos comportamientos fue la inmediata consecuencia:

$f_a^{x^o} : [r(f_a^{x_o}) = 1^x]$: comportamiento teórico material

$f_a^{e^o} : [r(f_a^{e_o}) = 1^{E^x}]$: comportamiento teórico energético

Las posibilidades de tener biyecciones del tipo de θ' aportó dos interesantes descubrimientos en relación con la formalización relacional de los sistemas biológicos:

- i) ingresos adicionales al componente original, tal que dichos ingresos provean transformaciones exclusivamente energéticas; y
- ii) un nuevo diagrama abstracto material-energético y correspondiente a nueva categoría $M_{\alpha'}$ que considera también objetos energéticos exclusivamente.

Entonces, para cumplir con el lema en el sentido de θ' se dieron diagramas como el de la figura 15, entre otros posibles

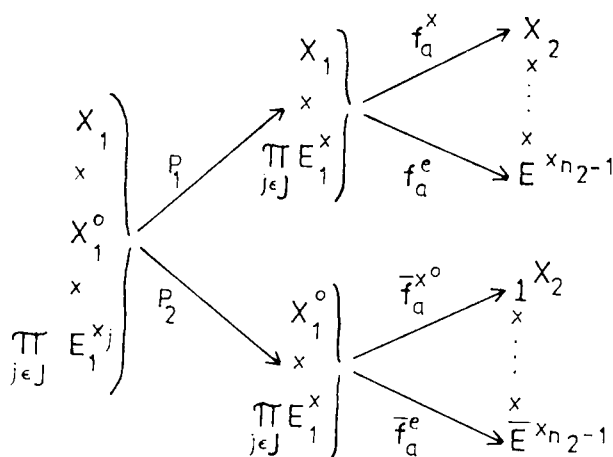


FIG. 15

En ese diagrama, X_1^o es el nuevo ingreso a considerar emergente de los desarrollos teóricos, y a través del cual, el producto

$$1^{X_2} \times \prod_{j \in J} E^{x_2}$$

es posible. Ese *ingreso adicional* no necesariamente debe corresponder a materias, sino que también puede ser visto como adicional energía extrínseca E_0^x ligada al producto $X_1 \times \prod_{j \in J} E^x$ original.

La aplicación del lema de Yoneda se hace entonces para diagramas del tipo

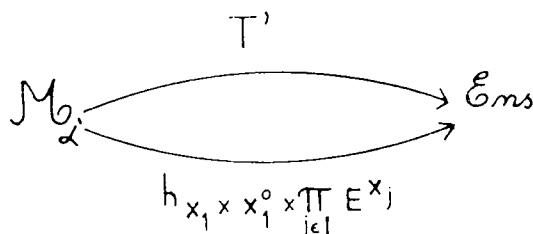


FIG. 16

y las identificaciones surgen de las componentes respectivas de la transformación natural ϕ^* :

$$\phi_{x_2} \times \prod_{j \in J} E_2^{x_j} \text{ y } \phi_1 x_2 \times \prod_{j \in J} E_2^{x_j}$$

Otra derivación de la biyección θ' del lema de Yoneda fue dada a través de la definición de las *evoluciones energéticas*. Simples transferencias de energías fueron estipuladas teóricamente e interpretadas como debidas a la mera presencia de un *elemento donante* y un *elemento receptor*, sin que con anticipación pueda establecerse el vehículo o las condiciones inherentes a la representación y por las cuales el proceso tiene lugar. Las evoluciones energéticas fueron expresadas (Leguizamón, 1976) entre componentes, entre entradas y/o salidas, y entre ambas clases anteriores.

Adicionalmente, fueron concebidos diagramas especiales donde nuevos componentes se producen por ingresos y egresos exclusivamente dados por evoluciones energéticas. Todos estos nuevos desarrollos se incluyeron en una derivada categoría M_β , la que a su vez pasó a ser M_γ (Leguizamón, 1977a) cuando los conjuntos del tipo $X_i \in [X]_{M\beta}$ siendo

$$X_i = [x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^m]$$

fueron dados por el producto

$$X_i^1 \times X_i^2 \times \dots \times X_i^m$$

tal que cada conjunto X_i^j define una única naturaleza física material cuya cantidad surge de la cardinalidad del conjunto.

3.3. La representación relacional del ambiente y la nueva definición de estabilidad por categorías ambientales

El origen de las nuevas ideas interpretando a la Biología Relacional en términos del significado conceptual de la materia y la energía dados a los desarrollos matemáticos, fue obtenido a través de la teoría relacional para los sistemas ambientales (Leguizamón, 1975b), aunque la cronología de aparición de los trabajos no lo muestre así.

La teoría del medio ambiente E fue ideado para sistemas no vivientes, ya que las estructuras de las respectivas categorías ambientales debían dar información exclusiva de aquel tipo de concepción. De hecho, la estructura biológica obtenida por categorías M_γ pueden ser parte de los verdaderos ambientes por simple aplicación sobre una o más M_γ , de funtores de inclusión [Leguizamón (f)].

Cada sistema ambiental E fue concebido como el único sistema interrelacionado con un sistema biológico M dado, de tal forma que, existiendo cualquier otro sistema W, el diagrama de interrelaciones respectivo es

$$M \rightleftharpoons E \rightleftharpoons W$$

De esta forma, el diagrama ambiental que empieza a definir cada E es obtenido partiendo de unidades ambientales B_a definidas por el dominio o rango de transferencias con M. Las unidades identifican una única naturaleza física material (Y_i) asociada de un determinado número de energías extrínsecas $E_i^{j,J}$ ($j \in J$, $J = 1, 2, \dots, n-1$) por medio de la operación producto cartesiano

$$(Y_i \times \prod_{j \in J} E_i^j)$$

Adicionalmente se definen unidades del tipo B_b que surgen de comportamientos con unidades de tipo B_a . Las unidades B_c tienen en cuenta similares naturalezas físicas materiales y energías extrínsecas que aquéllas que definieron las unidades B_a y B_b . Las unidades B_d representan la unión de unidades B_a y B_c o bien B_b y B_c ; y las unidades B_e son unidades teóricas definidas por cada unidad B_c .

Transcribiendo un simple ejemplo de (Leguizamón, 1975 b) se tiene que: si no todo el total de dos reactivos R_1 y R_2 de una reacción química dan el producto P_3 y éste es transferido al sistema biológico M, entonces el diagrama ambiental respectivo es el dado por la figura 17.

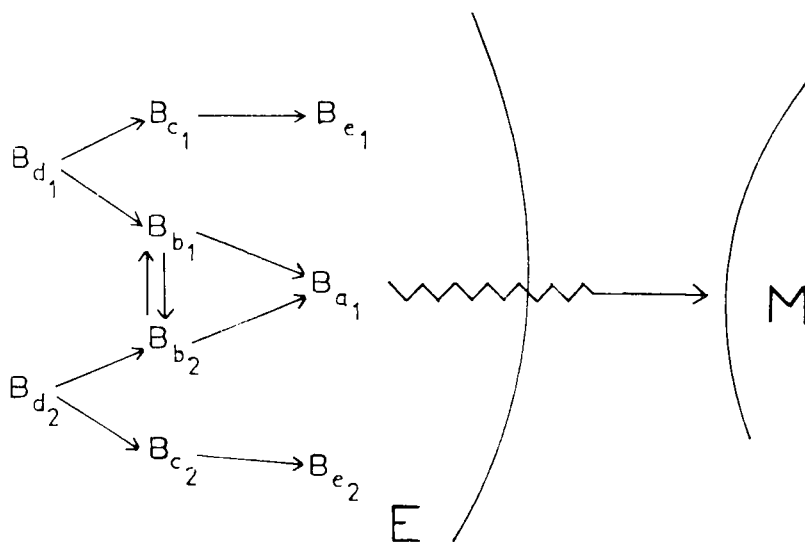


FIG. 17

Una simple axiomatización lleva este tipo de diagramas a ser representado por categorías.

Los primeros desarrollos (teoremas 1, 2 y 3 de Leguizamón, 1975 b) en relación a éstas determinan:

- i) toda categoría ambiental tiene al menos dos objetos;
- ii) categorías ambientales discretas suelen ser una excepción.

La mayoría de los análisis comenzaron a tener en cuenta la sucesión de sistemas ambientales, que surgen, por definición del sistema ambiental, debido a la sucesión de sistemas biológicos. Así resultó la definición de sistema biológico estático ambientalmente, cuando para una sucesión de estadios

$$M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots \rightarrow M_n$$

se tiene una sucesión de categorías ambientales

$$E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \dots \rightarrow E_n$$

tal que cada $E_j (j \in J, J = 1, 2, \dots, n)$ tiene definida:

- a) Los objetos correspondientes a unidades ambientales transferidas desde M_i a E_i ($i \leq j, i \in J$) y los objetos estando conectados a éstas; y
- b) los objetos correspondientes a unidades ambientales que serán transferidas desde E_k hacia M_k ($k \geq j, k \in J$) y los objetos estando conectados a los anteriores.

El análisis de la sucesión de categorías ambientales fue favorecido por el uso de funtores entre categorías. Con éstos y teniendo en cuenta que los objetos son identificados por la dupla <naturaleza física material-energías extrínsecas>, o bien por la dupla equivalente <energía intrínseca-energías extrínsecas>, fue definido un nuevo criterio de estabilidad de sistemas [Leguizamón, (b), (c), (d), (e) y (f)].

Este tipo de estabilidad fue interpretada a través del criterio de constancia de los objetos, que es la constancia de las materias y las energías extrínsecas que los definen.

La **estabilidad de un sistema ambiental** E_i es dada por el número n de veces que el endofuntor isomórfico $K^{(i)}$ es compuesto desde el dominio inicial dado por la subcategoría núcleo E_i^o hasta la subcategoría $E_{i+n}^{o(i)}$ de la subcategoría núcleo E_{i+n}^o del sistema E_{i+n} [Leguizamón, (c)].

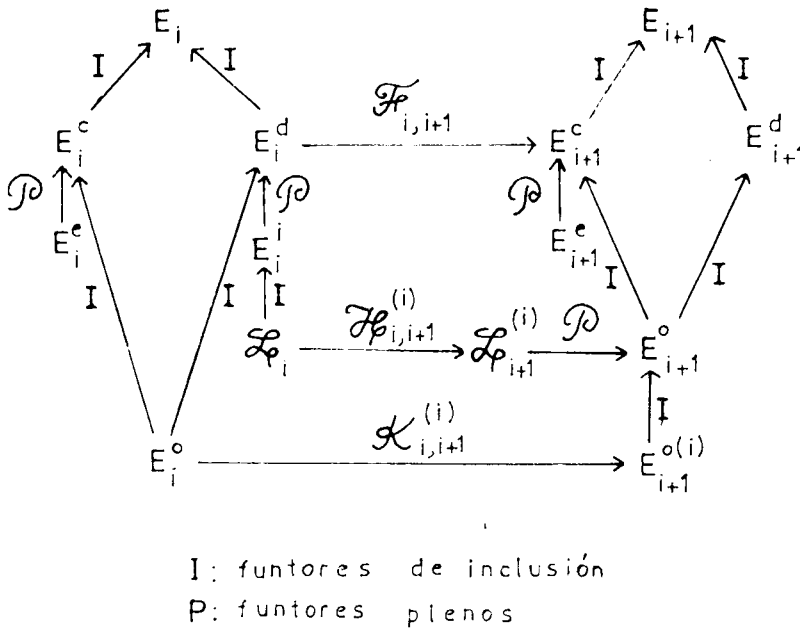


FIG. 18

Un segundo criterio de estabilidad es dado por el **aporte del sistema E_i a la estabilidad de la cadena ambiental**. Es dicho

que el aporte es m cuando la composición de m endofuntores isomórficos $H^{(i)}$ son dados a partir de la subcategoría contribución L_i hasta la subcategoría plena $L_{i+m}^{(i)}$ de E_{i+m}^o del sistema E_{i+m} .

A estas definiciones siguen diversos desarrollos, los que pueden encontrarse en la bibliografía citada. De particular interés puede ser el teorema 4 dado en Leguizamón (e). Ese teorema caracteriza a una subestructura B_n de E_n^o , la cual ha sido identificada como la más predecesoramente constituida, y se la denomina centro de estabilidad. Se prevee que las propiedades matemáticas resultantes en y en torno de B_n , darán las bases para las estabilidades de los sistemas. El teorema expresa: "Si una sucesión de sistemas biológicos estáticos ambientalmente

$$M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots \rightarrow M_n$$

define una sucesión de categorías ambientales

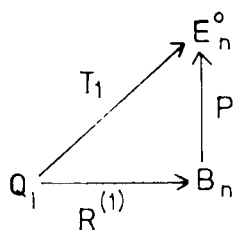
$$E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \dots \rightarrow E_n$$

tal que:

- a) Las transferencias de orientación desde los sistemas biológicos a los sistemas ambientales son material-energética idénticas.
- b) Todo objeto $G \in [G]_{E_n^o}$ y $\in [G]_{B_n}$ no tiene endo-objetos $\hat{G} \in [G]_{E_1^o}$

entonces el centro de estabilidad B_n (siendo isomórfico a una subcategoría Q_1 de E_1) es una subcategoría plena y reflectiva de la subcategoría núcleo $E_n^{o''}$.

La prueba del teorema reside en comprobar cómo las condiciones biológico-ambientales dan lugar a las condiciones matemáticas por las cuales B_n resulta ser una subcategoría plena y reflectiva de E_n . Esas condiciones matemáticas tienen conexión con algunos de los más importantes desarrollos sobre funtores adjuntos tal que sobre la base del diagrama de la figura 19



P : funtor pleno

R : endofuntor isomórfico

FIG. 19

se obtiene que T_1 es un funtor equivalente y que además es parte de la equivalencia adjunta

$$\langle S_1, T_1, \eta, 1 \rangle : E_n \rightarrow Q_1$$

Importantes observaciones relacionadas con la estabilidad y la variable tiempo surgen del teorema. Es dable observar que equivalencias del tipo

$$T_i : Q_i \rightarrow E_n^o \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

completan toda la estructura E_n^o y como las Q_i son isomórficas entre sí, entonces para todo par de sucesiones biológica y ambiental **reales** es indistinguible el **centro de estabilidad**. En otras palabras, eso significa que la **variable tiempo** es inconsistente para definir cuál es la estructura más predecesoramente constituida, porque las estructuras Q_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) son indiferenciables.

Así, extendiendo los desarrollos a sistemas sucesivos a E_n donde similares condiciones se cumplen sobre la base de una eliminación azarosa de alguna estructura Q_i y el ingreso de

otra similar (Q_n para E_{n+1}^o) se tendrá entonces sucesiones de pares de sistemas biológicos y ambientales de estabilidad permanente durante un determinado tiempo (imposible decir infinita). En otros términos, estas líneas teóricas podrían aportar incipientes criterios para explicar la existencia de sistemas biológicos de milenaria constancia [Leguizamón, (e)].

4. Verificación experimental de algunos desarrollos teóricos

Sorin Comorosan y sus colaboradores (Comorosan, 1974, 1975, 1976; Comorosan et al., 1970, 1972 y otros trabajos) han descubierto importantes nuevos aspectos en los sistemas enzima-sustrato, los cuales son principalmente dados por un incremento en las velocidades de reacción enzimáticas cuando un sustrato S es irradiado con bajas energías durante determinados tiempos efectivos del tipo $5k$ ($k = 1, 2, \dots$) segundos. Confirmaciones de estos hallazgos han sido obtenidos por otros autores (Bass y Crisan, 1973; Goodwin et al., 1975; Sherman et al., 1973 y por Grisolia, 1975).

De estos descubrimientos es importante mencionar lo siguiente:

a) La transferencia de una "perturbación" (Comorosan et al., 1970) desde un sustrato irradiado S_1 (donante) a otro no irradiado S_2 (receptor) produce el incremento de la velocidad de reacción enzimática de S_2 (par citidina-xantina).

b) Una nueva clase de transición de S a S^* ha sido detectada sobre moléculas orgánicas irradiadas con energías de longitudes de ondas de $\lambda = 546$ nm, y de otras longitudes de ondas cercanas λ , a través de la interacción con macromoléculas biológicas. Así, para sustratos S irradiados por tiempos definidos exactos, tiempos de irradiación eficiente t_k ($k = 1, 2, \dots, n$) con un valor constante τ entre cada par sucesivo de ellos fueron encontrados. De esta forma, los valores $t_m = t_1$ y τ son nuevos parámetros macroscópicos enzimáticos, los cuales son altamente específicos del sustrato, de la enzima, y del origen biológico de ésta (Comorosan et al., 1972 b; Comorosan, 1976).

c) La transición S a S^* , comienza a decaer en 100 min cuando la solución química está a 2°C y comienza a decaer en 55 min cuando la temperatura es de 30°C (Comorosan, 1974).

d) No se han observado diferencias significativas en la individualización de las materias S y S^* por medio de la aplicación de las técnicas de la espectroscopía infrarroja y resonancia magnética nuclear.

En base a estas reglas, dos importantes propiedades fueron desarrolladas (Comorosan, 1975):

Propiedad 1: Para todo tiempo de irradiación una transición S a S^* es inducida en el sustrato.

Propiedad 2: Para un sustrato S dado dos (o más) tiempos diferentes de irradiación inducen estados preservados independientemente.

Todos estos resultados experimentales fueron suficientemente sugestivos para correlacionarnos con muchos de los desarrollos 3.2. anteriores. Principalmente la no diferencia significativa entre S y S^* como

expuesto por **d**, permitió intuir a S^* como determinado por la misma materia S pero adicionado por las energías extrínsecas debidas a las irradiaciones sucesivas.

$$\underbrace{X_1 \times E_1^{x_0} \times \prod_{k \in K} \left(\prod_{j_k \in J_k} E_1^{x_{j_k}} \right)}_{S^*}$$

$K: 1, 2, \dots, r$ (irradiaciones)

$J_k: j_1, j_2, \dots, j_{s_k}$

FIG. 20

Los aspectos **a** y **c** anteriores son interpretados como dando validez a la propiedad iv) de las energías extrínsecas. De idéntica manera cuando en **b** se expresa que t_m y τ son dependientes del sustrato, esto también cumple entonces con la propiedad **a** de las energías extrínsecas.

Como el efecto no es sólo privativo de una $\lambda = 546$ nm, sino que también se tiene para amplios rangos del espectro visible y dando los mismos parámetros t_1 y τ ; entonces esto se correlaciona con la propiedad iii) de las energías extrínsecas.

El producto de la figura anterior interpreta a la propiedad 2 en el sentido de la propiedad ii) de las energías extrínsecas.

Los efectos de "perturbación" dados por **a**) han sido interpretados como en principio confirmativos de las "evoluciones energéticas".

Teniendo en cuenta la confirmación de los desarrollos teóricos dados a través de tan importantes resultados experimentales, los desarrollos se siguieron, aportándose recíprocas consecuencias biológicas y matemáticas.

Las consecuencias biológicas fueron inherentes a la limitación de la propiedad 1 anterior, diciéndose que esta propiedad es viable para "todo finito tiempo de irradiación perteneciente a una sucesión temporal finita de irradiaciones" (Leguizamón y Giménez, 1980). Esto se obtiene desde el hecho que el producto de energías extrínsecas de la figura 20 no puede ser de infinitos factores por cuanto es imposible, bajo los criterios asociados de energía intrínseca-energías extrínsecas,

reunir para cualquier sustrato dado una infinita energía. Siendo esto así, esto aporta otra adicional interesante alternativa: la posibilidad de un número η_s de energías extrínsecas asociadas dependientes del tiempo de irradiación (Leguizamón, 1981).

Las consecuencias matemáticas fueron más que interesantes. Los resultados experimentales dieron validez al **producto cartesiano** en la representación de los distintos ingresos a los componentes, por lo menos en el sentido de las experiencias de Comorosán. Puede observarse que se verifica la anulación de ciertas biyecciones θ' del tipo

$$\prod_{k \in K} \left(\prod_{j \in J_k} E^{x_j}_k \right) \xrightarrow{\theta'} \prod_{k' \in K'} \left(\prod_{j' \in J_{k'}} E^{x_{j'}}_{k'} \right)$$

FIG. 21

donde $J_k (k \in K)$ y $J_{k'} (k' \in K')$ son dos diferentes particiones del producto de conjuntos energéticos que representan distintas irradiaciones del sustrato, cuando en una de ellas se irradia con un tiempo t_k [obteniéndose una velocidad de reacción $v(t_k)$] y en la otra tal tipo de tiempos no existe [obteniéndose la velocidad de reacción standard $v(s)$]. En otras palabras, no se puede asociar indiscriminadamente un dado número de factores, y entonces, queda inhibida la posibilidad de ciertas asociatividades, lo que está de acuerdo con la elección de la operación producto cartesiano. Esto de por sí constituye un importante paso en la afirmación del camino matemático elegido para la formalización de los ingresos en las representaciones relacionales abstractas.

RESUMEN

Se hace mención de los primeros desarrollos que fueron conformando a la Biomatemática, ensayándose una definición de la misma según su estado actual. Se exponen las bases de la Biología Relacional y el progreso de su conocimiento a través de las aplicaciones más interesantes de la teoría de categorías. Conceptos de materia, energía intrínseca, energías extrínsecas, estaticidad biológica, estabilidad ambiental y otros relacionados con la variable tiempo, son analizados.

BIBLIOGRAFIA

- ARBIB, M.: 1966, "Categories of $M - R$ Systems". Bull. Math. Biophys., 28:511-517.
 ARBIB, M.: 1969, "Theories of Abstract Automata". New Jersey: Prentice Hall.
 BAIANU, I.: 1970, "Organismic Supercategories II. On Multistable Systems". Bull. Math. Biophys., 32:539-561.

- BAIANU, I.: 1971 a, "Organismic Supercategories and Qualitative Dynamics of Systems". Bull. Math. Biophys., 33:339-354.
- BAIANU, I.: 1971 b, "Categories, Functors and Automata Theory". The Fourth International Congress L.M.P.S. Bucharest. August-September.
- BAIANU, I.: 1973, "Some Algebraic Properties of $M-R$ Systems". Bull. Math. Biol., 35:213-217.
- BAIANU, I.: 1980, "Natural Transformation of Organismic Structures". Bull. Math. Biol., 42:431-446.
- BAIANU, I. y MARINESCU, M.: 1968, "Organismic Supercategories I. Proposals for a General Unitary Theory of Systems". Bull. Math. Biophys., 30:625-635.
- BAIANU, I. y SCRIPCARIU, D.: 1973, "On Adjoint Dynamical Systems". Bull. Math. Biophys., 35:475-485.
- BUCUR, I. y DELEANU, A.: 1968, "Introduction to the Theory of Categories and Functors". London, N. York y Sydney: John Wiley & Sons.
- CAZANESCU: 1967, "On the category of Abstract Sequential Automata". An. Univ. Bucharest. Math. and Mechanical Series, 16(I):31-37.
- COMOROSAN, S. y PLATICA, O.: 1967, "On the Biotopeology of Protein Biosynthesis". Bull. Math. Biophys., 29:665-675.
- COMOROSAN, S. y BAIANU, I.: 1969, "Abstract Representations of Biological Systems in Supercategories". Bull. Math. Biophys., 31:59-70.
- EILEMBERG, S. y MAC LANE, S.: 1945, "General Theory of Natural Equivalences". Trans. Am. Math. Soc., 58:231-294.
- EULER, L.: 1862, "Opera Postuma II. Principia pro Motu Sanguinis per Arterias Determinando". Petersbourgo, Rusia.
- EYTAN, M.: 1981, "Protein-Synthesis Via Deduction-Categories". VIII^o Congrès International de Biologie Math matique, Paris, Francia.
- FISHER, R. A.: 1930, "The Genetic Theory of Natural Selection". Oxford, Clarendon.
- GLUSHIKOV, B.: 1961, "The Abstract theory of Automata". Russian Mathematical Surveys, 16:1-53.
- HALDANE, J. B. S.: 1924, "A Mathematical Theory of Natural and Artificial Selection". Oxford, Clarendon.
- KITAGAWA, T.: 1977, "The Structure of Generalized Relational Ecosphere Based Upon Paired Categories". Autumn Meeting of Japanese Math. Soc. October 10th.
- KITAGAWA, T.: 1981, "Mathematical Formulation of Generalized Relative Ecosphere of Local Time-Spaces". VII^o Congrès International de Biologie Math matique. Paris, Francia.
- LEGUIZAMÓN, C. A.: 1975 a, "Concept of Energy in Biological Systems". Bull. Math. Biol., 37:565-572.
- LEGUIZAMÓN, C. A.: 1975 b, "A theory For Environmental Systems". Bull. Math. Biol., 37:675-689.
- LEGUIZAMÓN, C. A.: 1976, "Other Developments Regarding the Concept of Energy in Biological Systems". Bull. Math. Biol., 38:547-563.
- LEGUIZAMÓN, C. A.: 1977 a, "Transfers Between Biological and Environmental Systems". Bull. Math. Biol., 39:397-406.
- LEGUIZAMÓN, C. A.: 1977 b, "The Bio-environmental Systems and the Realizability of Pre-biological Systems". Bull. Math. Biol., 39:407-413.
- LEGUIZAMÓN, C. A.: (a) "Las Energías Intr nseca y Extr nseca en la Representación Relacional de los Sistemas Biológicos". Ciência e Cultura (aprobado para publicación).
- LEGUIZAMÓN, C. A.: (b) "About Category-Relational Representations of Biological and Environmental Systems for Emerging Concepts on Environmental Stability". Fascículo (aprobado para publicación).
- LEGUIZAMÓN, C. A.: (c) "Environmental Stability". Revue de Bio-Mathématique (aprobado para publicación).
- LEGUIZAMÓN, C. A.: (d) "Consequences of the Variability of Morphisms Sets on Categorical Environmental Stability". Revue de Bio-Math matique (aprobado para publicación).
- LEGUIZAMÓN, C. A.: (e) "Center of Stability for Relational Environmental Systems". Revue de Bio-Math matique (aprobado para publicación).
- LEGUIZAMÓN, C. A.: (f) "Stability for Environmental Relational Systems" (enviado para publicación).
- LEGUIZAMÓN, C. A. y GIMÉNEZ, J. C.: 1980, "Concept of Energy in Biological Systems and the Effects of Irradiations of Low Energies on Enzyme-Substrate Systems". Bull. Math. Biol., 42:161-172.

- LEGUIZAMÓN, C. A.: 1981, (Comunicación personal a Sorin Comorosan).
- LOTKA, A. J.: 1925, "Elements of Physical Biology". Baltimore: Williams & Wilkins.
- MAC LANE, S.: 1971, "Categories for the Working Mathematician". N. York, Heidelberg y Berlin: Springer-Verlag.
- MENDEL, G.: 1950, "Letters to Carl Nägeli. 1866-1873". Genetics, 35 (Suppl., "The Birth of Genetics"), 1-29.
- MITCHELL, B.: 1965, "Theory of Categories". N. York y London: Academic Press.
- PAREIGIS, E. L.: 1970, "Categories and Functors". N. York y London: Academic Press.
- POST, E. L.: 1936, "Finite Combinatory Processes-Formulation I". J. Symbolic Logic 1., 105-125.
- RASHIEVSKY, N.: 1938, "Mathematical Biophysics". Chicago: Chicago University Press.
- RASHIEVSKY, N.: 1954, "Topology and Life, In Search of General Mathematical Principles in Biology and Sociology". Bull. Math. Biophys., 16:317-348.
- RASHIEVSKY, N.: 1960, "Mathematical Biophysics. Physico-Mathematical Foundations of Biology". New York: Dover Publications.
- RASHIEVSKY, N.: 1961, "Mathematical Principles in Biology and Their Applications". Springfield, Illinois: Charles C Thomas Publisher.
- RASHIEVSKY, N.: 1968, "Neurocybernetics as a Particular Case of General Regulatory Mechanisms in Biological and Social Organisms". Concepts de l'Age de la Science, 3:243-258.
- RASHIEVSKY, N.: 1972, "Organismic Sets". Grosse-Pointe Park, Michigan: J. M. Richards Lab.
- ROSEN, R.: 1958 a, "A Relational Theory of Biological Systems". Bull. Math. Biophys., 20:245-260.
- ROSEN, R.: 1958 b, "The Representation of Biological Systems from the Standpoint of the Theory of Categories". Bull. Math. Biophys., 20:317-342.
- ROSEN, R.: 1959, "A Relational Theory of Biological Systems II". Bull. Math. Biophys., 21:109-127.
- ROSEN, R.: 1962, "A Note on Abstract Relational Biologies". Bull. Math. Biophys., 24:31-38.
- ROSEN, R.: 1964 a, "Abstract Biological Systems as Sequential Machines". Bull. Math. Biophys., 26:103-111.
- ROSEN, R.: 1964 b, "Abstract Biological Systems as Sequential Machines II: Strong Connectedness and Reversibility". Bull. Math. Biophys., 26:239-246.
- ROSEN, R.: 1966, "Abstract Biological Systems as Sequential Machines III: Some Algebraic Aspects". Bull. Math. Biophys., 28:141-148.
- ROSEN, R.: 1972, "Foundations of Mathematical Biology". Vol. II. N. York: Academic Press.
- THOMPSON, D'A. W.: 1917, "On Growth and Form". Cambridge: University Press.
- TONDEUR, P.: 1965, "Categorías y Funtores". Cursos y Seminarios de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, U.B.A.
- TURING, A. M.: 1936, "On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungs Problem". Proc. London Math. Soc. Ser., 2-42; 230-265.
- VOLTERRA, V.: 1931, "Lecons sur la Théorie mathématique de la lutte pour la vie". Paris: Gauthier-Villars.
- WOODGER, J. H.: 1937, "The Axiomatic Method in Biology". Cambridge: Cambridge University Press.
- WOODGER, J. H.: 1952, "Biology and Language". Cambridge University Press.
- WRIGHT, S.: 1949, Adaptation and Selection in "Genetics, Paleontology and Evolution" (G. L. Jepsen, G. G. Simpson y E. Mayr, editores). Princeton: Princeton University Press.