

REPUBLICA ARGENTINA
COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
Dependiente de la Presidencia de la Nación
GERENCIA DE DESARROLLO
Departamento de Materiales

APUNTE COMPLEMENTARIO PARA EL CURSO DE
DEFECTOS EN CRISTALES

Dra. Ana Maria MONTI

Reimpresión

Buenos Aires

1987

ELASTICIDAD

Todos los materiales estructurales poseen, en cierto grado, la propiedad de elasticidad; esto es, si fuerzas externas que producen deformación de una estructura no exceden un cierto límite, la deformación desaparece al retirar las fuerzas. Supondremos para lo que sigue cuerpos perfectamente elásticos, esto es, retoman su forma inicial completamente una vez que se han quitado las fuerzas. No consideraremos la estructura molecular de tales cuerpos.

Supondremos que la materia de un cuerpo elástico es homogénea y continuamente distribuida sobre su volumen, de modo que cualquier elemento de volumen del cuerpo, por pequeño que sea, posee las mismas propiedades físicas específicas que el cuerpo. Para simplificar la discusión se supondrá que el cuerpo es isótropo, esto es, las propiedades elásticas son las mismas en todas las direcciones.

En general, los materiales estructurales no cumplen estas condiciones. Por ejemplo, cuando el acero es estudiado con un microscopio, se ve que consta de cristalitas diferentes distribuidos con varias orientaciones, esto es, el material dista de ser homogéneo. Sin embargo, la experiencia enseña que las soluciones de la teoría de la elasticidad basadas en las suposiciones de homogeneidad e isotropía pueden ser apli-

cadadas a estructuras de aceros con gran exactitud. La explicación de este hecho reside en el tamaño de los cristales; éstos son muy pequeños, generalmente hay millones de ellos en 1 cm^3 de acero. Mientras las propiedades elásticas de un monocristal pueden ser muy distintas en diferentes direcciones, los cristales están generalmente distribuidos al azar y las propiedades elásticas de grandes trozos de metal representan promedios de las propiedades de los cristales. Por lo tanto, si las dimensiones geométricas que definen la forma de un cuerpo son grandes en comparación con las dimensiones de un monocristal, la suposición de homogeneidad puede ser usada con gran exactitud y, si los cristales están orientados al azar, el material puede ser tratado como isótropo.

Cuando, debido a ciertos procesos tecnológicos tales como el laminado, una cierta orientación de los cristales prevalece en un metal, las propiedades elásticas de éste son diferentes en diferentes direcciones y se debe considerar la condición de anisotropía.

Tensiones

La Fig. 1 representa un cuerpo en equilibrio. Bajo la acción de fuerzas externas $F_1, \dots, F_6$ se originarán fuerzas internas entre las partes del cuerpo. Para estudiar la magnitud de dichas fuerzas en cualquier punto O, imaginemos al cuerpo dividido en dos partes, A y B, por una sección

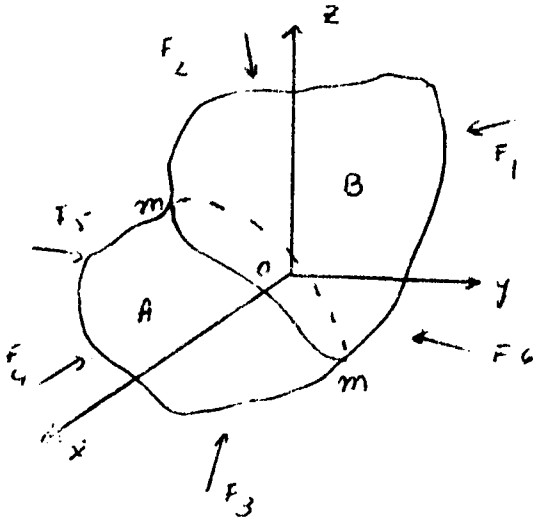


Fig. 1

te B sobre el material de la parte A. Se supondrá que estas fuerzas están continuamente distribuidas sobre el área mm de la misma manera que la presión hidrostática está continuamente distribuida sobre la superficie sobre la cual actúa. Las magnitudes de tales fuerzas son definidas generalmente por su "intensidad", esto es, por la cantidad de fuerza por unidad de área de la superficie sobre la cual actúa. La intensidad de las fuerzas interiores así definidas es llamada "tensión".

En el caso general planteado en la Fig. 1 la tensión no está distribuida uniformemente sobre mm . Para obtener la magnitud de la tensión actuando sobre un área pequeña ΔA contenida en la sección mm en torno a "O", suponemos que las fuerzas actuando sobre este área elemental, debido a la

mm que contenga al punto. Consideremos la parte A: ésta está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas externas $F_1, \dots, F_6$ y las fuerzas internas distribuidas sobre la sección mm , las que representan las acciones del material de la parte

acción del material de la parte B sobre el material de la parte A, pueden ser reducidas a una resultante $\int F$. Si se contrae continuamente el área elemental δA , el valor límite de la relación $\int F / \delta A$ da la magnitud de la tensión actuando sobre la sección mm en el punto "0". La dirección de la resultante $\int F$ es la dirección de la tensión. En el caso general, la dirección de la tensión está inclinada con respecto al área δA sobre la cual actúa y generalmente es resuelta con dos componentes: una "tensión normal", perpendicular al área; y una "tensión de corte", actuante en el plano del área δA .

Notación para fuerzas y tensiones

Hay dos clases de fuerzas externas que pueden actuar sobre un cuerpo. Fuerzas distribuidas sobre la superficie del cuerpo, tales como la presión de un cuerpo sobre otro por ejemplo, son llamadas "fuerzas de superficie". Fuerzas distribuidas sobre el volumen de un cuerpo, tales como las gravitacionales, magnéticas, etc., son llamadas "fuerzas de volumen". Las fuerzas de superficie por unidad de área, generalmente resueltas en tres componentes paralelas a los ejes coordenados se indicarán con F_x^S , F_y^S , F_z^S . Las fuerzas de volumen por unidad de volumen se indicarán con F_x^V , F_y^V , F_z^V .

Se usará la letra σ para denotar tensiones norma-

les y z para tensiones de corte. Si se toma un cubo elemental en el punto "0", Fig. 1, con lados paralelos a los ejes coordenados, las notaciones para las componentes de tensión actuando sobre los lados de este elemento y las direcciones tomadas como positivas son indicadas en la Fig. 2. Por ejem

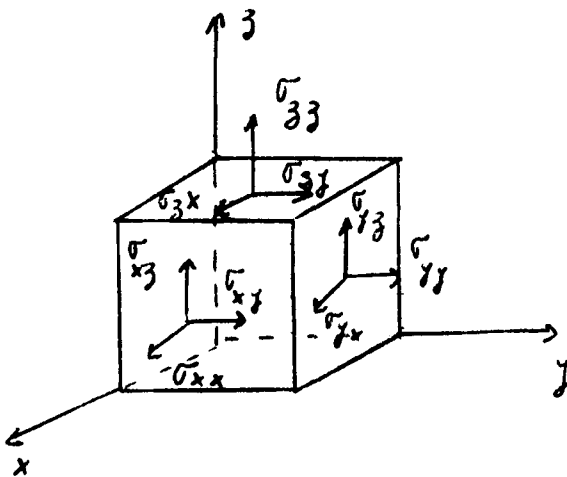


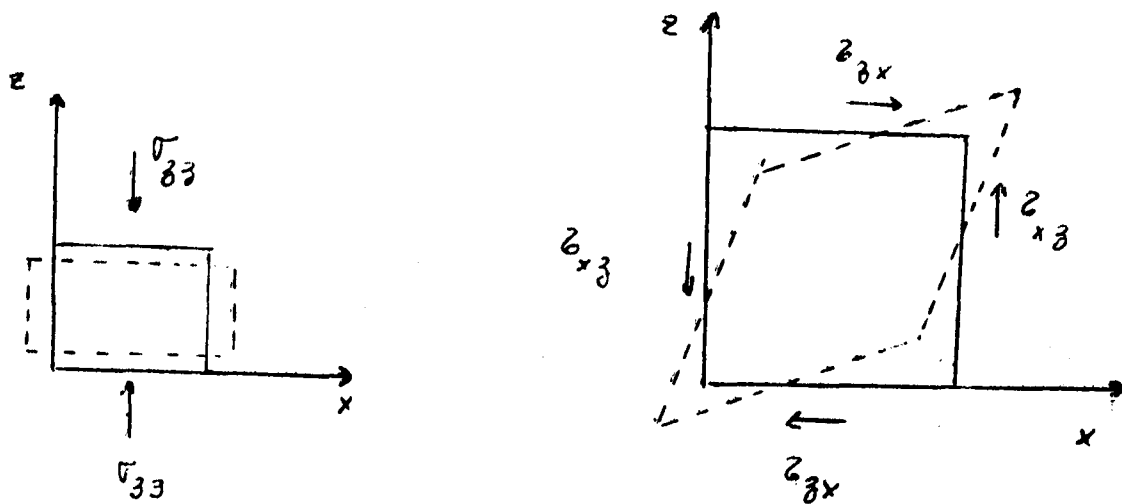
Fig. 2

plo, para las caras del cubo perpendiculares al eje "y" las componentes normales de tensión actuante sobre dichas caras son denotadas por σ_{yy} . Las tensiones normales son tomadas positivas cuando producen tensión y negativas cuando producen compresión.

En el ejemplo, el primer subíndice "y" indica que la tensión actúa sobre un plano normal al eje y, el segundo subíndice "y" indica la dirección de la componente de la tensión.

La misma convención es adoptada para la tensión de corte actuante sobre cada cara, la que es resuelta en dos componentes paralelas a los ejes coordenados. Esto es, el primer subíndice indica la dirección de la normal al plano bajo consideración y el segundo la dirección de la componente de tensión. Las direcciones positivas de las componentes de tensiones de corte sobre cualquier lado del cubo elemental son tomadas como las direcciones positivas de los ejes

coordinados, si una tensión normal sobre el mismo lado tuviera la dirección positiva del eje correspondiente. Si la tensión normal tiene la dirección opuesta al eje positivo, la dirección positiva de las tensiones de corte debe invertirse. Siguiendo tal regla, las direcciones positivas de todas las componentes de tensión actuantes sobre el lado derecho del cubo elemental coinciden con las direcciones positivas de los ejes coordenados. Las direcciones positivas son todas invertidas si consideramos el lado izquierdo del cubo. Como muestra la Fig. 3, las tensiones normales tienden a producir dilataciones o contracciones del cuerpo, mientras que las tensiones de corte tienden a producir distorsiones angulares.



Componentes de tensión

Para describir las tensiones actuantes sobre los seis lados de un elemento cúbico son necesarios tres símbolos σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} para las tensiones normales y sólo tres de los

seis símbolos utilizados para las tensiones de corte. Esta reducción es obtenida por una simple consideración de equilibrio.

Si tomamos los momentos de las fuerzas actuantes sobre el cubo en torno al eje x , por ejemplo, solamente necesitan ser consideradas las tensiones de superficie mostradas en la Fig. 4.

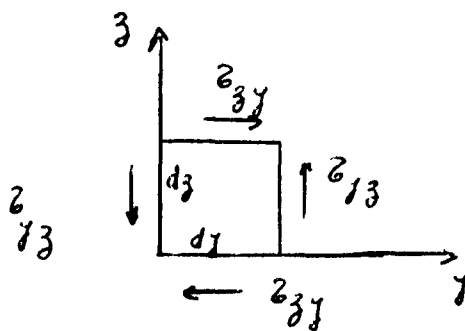


Fig. 4

Fuerzas de volumen, tales como el peso del elemento, pueden despreciarse en este caso, ya que al reducir las dimensiones del elemento tales fuerzas disminuyen como el cubo de la dimensión lineal mientras que las fuerzas de superficie disminuyen como el cuadrado de la dimensión lineal.

Análogamente, los momentos debidos a la no uniformidad de distribución de fuerzas normales son de orden superior a aquellos debidos a fuerzas de corte y no necesitan ser considerados. Además, las fuerzas sobre cada lado pueden considerarse como el área del lado por la tensión en el medio. Denotando las dimensiones del elemento con dx , dy , dz , la ecuación de equilibrio de este elemento, tomando momentos de fuerzas en torno al eje x , es;

$$\tau_{zy} dx dy dz = \tau_{yz} dx dy dz$$

Las otras dos ecuaciones pueden ser obtenidas de la misma manera. Se halla así:

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} ; \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} ; \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} \quad (1)$$

Las seis cantidades σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yz} son suficientes para describir las tensiones actuantes sobre los planos coordenados a través de un punto y son las componentes del tensor de tensiones en el punto.

DEFORMACIONES

Sea un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas exteriores. Luego de la deformación, un punto 0 se habrá desplazado a 0'. El vector $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$ es el campo de desplazamientos del cuerpo. En nuestro estudio nos limitaremos al caso de pequeñas deformaciones.

Consideremos dos puntos próximos 0 y A (Fig. 6). El desplazamiento en la dirección x de 0 será $u_x(x; y; z)$; el de A será:

$$u_x(x + \Delta x; y; z) = u_x(x, y; z) + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x$$

donde por tratarse de pequeñas deformaciones conservamos sólo los términos de primer orden del desarrollo.

Por lo tanto la variación de longitud del segmento

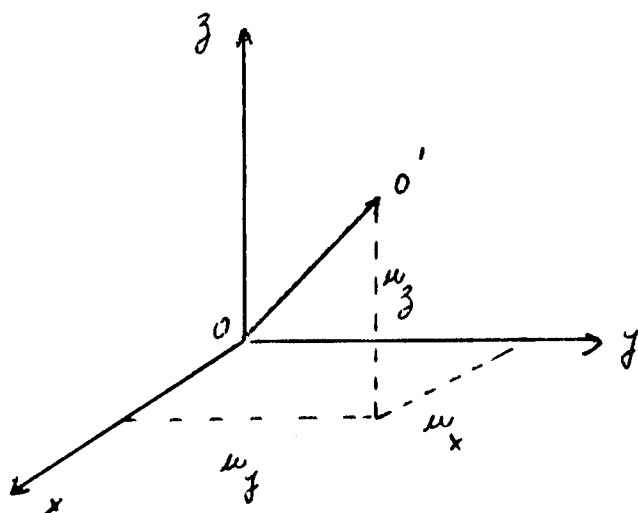


Fig. 5

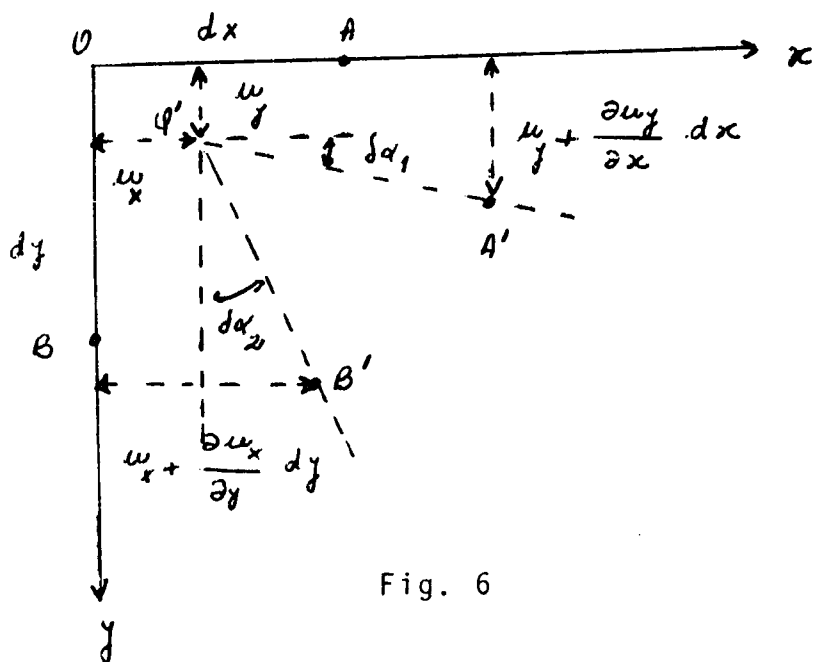


Fig. 6

OA será:

$$u_x(x+dx; y, z) - u_x(x, y, z) = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$$

y la variación de longitud del segmento por unidad de longitud será:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.a)$$

Análogamente, las elongaciones por unidad de longitud en las direcciones y , z serán:

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad ; \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.b)(2.c)$$

Consideremos ahora la distorsión del ángulo entre OA y OB. El desplazamiento de O en la dirección y es:

$u_y(x; y; z)$; el de A será:

$$u_y(x + \Delta x; y; z) = u_y(x; y; z) + \frac{\partial u_y}{\partial x} \Delta x$$

A su vez, el desplazamiento de O en la dirección x es:

$$u_x(x; y; z)$$

y el de B en la misma dirección:

$$u_x(x; y + \Delta y; z) = u_x(x; y; z) + \frac{\partial u_x}{\partial y} \Delta y$$

Debido a estos desplazamientos, el ángulo $\hat{A'O'B'}$ será distinto de $\hat{AOB}$ (que era recto). De la Fig. 6:

$$\tan \delta \alpha_1 = \frac{u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} \Delta x - u_y}{\Delta x} = \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

$$\tan \delta \alpha_2 = \frac{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} \Delta y - u_x}{\Delta y} = \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Debido a que estamos en el estudio de las pequeñas deformaciones, $\delta \alpha_1$ y $\delta \alpha_2$ serán pequeños, y su tangente puede aproximarse al ángulo. O sea que el ángulo inicialmente recto $\hat{AOB}$ se ha distorsionado en:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (4)$$

que es la distorsión angular γ_{xy} entre los planos xz e yz. De la misma forma se obtienen las distorsiones angulares γ_{xz} , γ_{yz} , y quedan definidas las componentes de deformación en términos del campo de desplazamientos $\vec{u}$:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad ; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad ; \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\end{aligned}\tag{5}$$

TENSOR DE DEFORMACIONES

De la definición de deformaciones normales y distorsiones angulares surge que son necesarios dos subíndices (igual que en el caso de las tensiones) para definir las deformaciones en un punto de un sólido. Si se efectúa una rotación del sistema de ejes coordenados, las componentes de deformación no se transformarán como las componentes de un vector, pues es necesario definir dos direcciones (vectores) para definir cada componente de deformación. Por lo tanto, las componentes de deformación se transformarán como el producto de las componentes de dos vectores, lo cual define el carácter tensorial de la deformación. Un breve repaso de la definición de vectores y tensores se da en el Apéndice A.

Pasaremos ahora a deducir de una forma más rigurosa las componentes del tensor de deformaciones.

La Fig. 7 muestra un elemento de volumen dx, dy, dz , en el punto P de radio vector $\vec{r} = (x, y, z)$, que debido a la deformación pasa a un punto P', de radio vector $\vec{r} + \vec{u}$, donde $\vec{u}$ es el desplazamiento definido en la sección anterior.

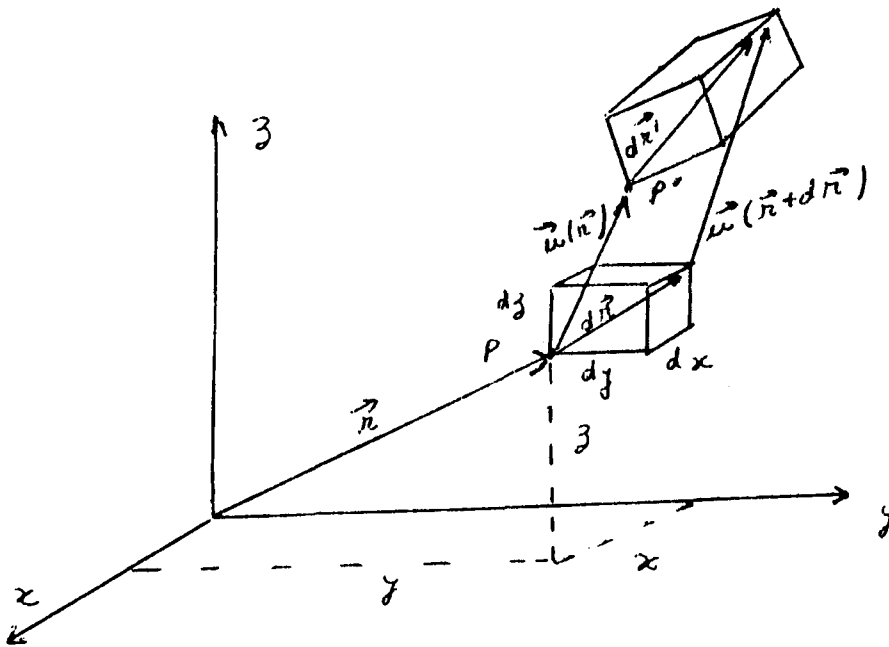


Fig. 7

De la Fig. 7 se ve que:

$$\vec{u}(\vec{r}) + d\vec{r}' = \vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}) + d\vec{r}$$

o sea:

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r}) \quad (6)$$

Escrito, por ejemplo, para la componente x, esto significa

que la longitud dx' luego de la deformación es:

$$dx' = dx + \mu_x (\vec{r} + d\vec{r}) - \mu_x (\vec{r}) \quad (7)$$

Hacemos notar que si durante la deformación ha ocurrido una rotación ^{rigida} del cuerpo (como se muestra en la figura), dx' no será más la longitud de una de las aristas del elemento de volumen deformado, sino la proyección sobre el eje x de la diagonal dr' del cubo elemental deformado. Ya veremos cómo eliminar el efecto de las rotaciones rígidas, que no deben incluirse en la definición de las deformaciones. (7) queda, desarrollando en serie de Taylor y conservando 10^o lo el 1^{er} orden por ser pequeñas deformaciones:

$$dx' = dx + u_x(x+dx; y+dy; z+dz) - u_x(x; y; z)$$

$$dx' = dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \quad (8.a)$$

análogamente:

$$dy' = dy + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz \quad (8.b)$$

$$dz' = dz + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \quad (8.c)$$

que podemos escribir como:

$$\vec{dr'} = \vec{dr} + \vec{dr} \cdot \underline{e} \quad (9)$$

donde los vectores $\vec{dr'}$ tiene componentes dx' , dy' , dz' ; el $\vec{dr}$ componentes dx , dy , dz y el tensor $\underline{e}$ es:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$e_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

En el caso que $\vec{u}$ sea una translación rígida del cuerpo (sin cambio de forma), es decir que las componentes u_x , u_y , u_z sean independientes de la posición, el tensor $\underline{e}$ es evidentemente nulo.

Sin embargo, $\underline{e}$ no es nulo para rotaciones rígidas del cuerpo, tal como adelantamos anteriormente. Como ejemplo, si el estado final surge de una rotación infinitesimal $d\phi$ alrededor del eje z , será:

$$\vec{u} = (\vec{k} \times \vec{r}) d\phi$$

y desarrollando el producto vectorial:

$$\vec{u} = -y d\phi \hat{i} + x d\phi \hat{j}$$

es decir:

$$u_x = -y d\phi$$

$$u_y = x d\phi$$

$$u_z = 0$$

con lo cual el tensor $\underline{e}$ resulta:

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} 0 & d\phi & 0 \\ -d\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es decir que no es nulo.

La necesidad de modificar $\underline{e}$ para lograr un tensor que describa el estado de deformación surge también si analizamos la relación entre las componentes de $\underline{e}$ y las deformaciones normales y distorsiones angulares.

Para considerar las deformaciones normales, consideremos que $\vec{dr}$ en la eq.(9) tiene sólo componente x igual a dl:

$$\vec{dr} = dl \hat{i}$$

El producto $\vec{dr} \cdot \underline{e}$ será entonces:

$$\vec{dr} \cdot \underline{e} = dl \frac{\partial \mu_x}{\partial x} \hat{i} + dl \frac{\partial \mu_y}{\partial x} \hat{j} + dl \frac{\partial \mu_z}{\partial x} \hat{k}$$

y las componentes x de $\vec{dr}'$ luego de la deformación será:

$$dx' = dl + dl \frac{\partial \mu_x}{\partial x} = \left(1 + \frac{\partial \mu_x}{\partial x}\right) dl$$

es decir que, tal como habíamos probado en la sección anterior, $\partial \mu_x / \partial x$ es la deformación por unidad de longitud en la dirección x:

$$\epsilon'_{xx} = \frac{dx' - dl}{dl} = \frac{\partial \mu_x}{\partial x}$$

Para las distorsiones angulares consideremos dos

elementos $\vec{dr}_1 = dl \hat{i}$ y $\vec{dr}_2 = dl \hat{j}$ según los ejes $\underline{x}$ e $\underline{y}$. Luego de la deformación:

$$\vec{dr}_1' = dl \hat{i} + dl \frac{\partial u_x}{\partial x} \hat{i} + dl \frac{\partial u_y}{\partial x} \hat{j} + dl \frac{\partial u_z}{\partial x} \hat{k}$$

$$\vec{dr}_2' = dl \hat{j} + dl \frac{\partial u_x}{\partial y} \hat{i} + dl \frac{\partial u_y}{\partial y} \hat{j} + dl \frac{\partial u_z}{\partial y} \hat{k}$$

El coseno del ángulo θ_{xy} entre los dos elementos luego de la deformación es:

$$\cos \theta_{xy} = \frac{\vec{dr}_1' \cdot \vec{dr}_2'}{|\vec{dr}_1'| |\vec{dr}_2'|} = \frac{(dl)^2 \frac{\partial u_x}{\partial y} (1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}) + \frac{\partial u_y}{\partial x} (1 + \frac{\partial u_y}{\partial y}) + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y}}{(dl)^2}$$

Bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones conservamos sólo términos de primer orden en componentes de $\underline{e}$:

$$\cos \theta_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

Si llamamos γ_{xy} a la distorsión angular sufrida por los elementos $\vec{dr}_1$ y $\vec{dr}_2$ que inicialmente estaban a 90° entre sí:

$$\cos \theta_{xy} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} \right) = \sin \gamma_{xy}$$

y ya que γ_{xy} es pequeño:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = e_{yx} + e_{xy}$$

O sea que las distorsiones angulares están dadas por la suma de las componentes simétricas fuera de la diagonal del tensor $\underline{e}$.

Definimos entonces al tensor de deformaciones $\underline{\epsilon}$

como aquel cuyos elementos $\epsilon_{\alpha\beta}$ son:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (e_{\alpha\beta} + e_{\beta\alpha}) \quad (11)$$

Los elementos diagonales de son las deformaciones normales:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{2} (e_{xx} + e_{xx}) = e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (12)$$

y los elementos fuera de la diagonal la mitad de las distorsiones angulares:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} (e_{xy} + e_{yx}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \gamma_{yz} \end{aligned}$$

De su definición (11) resulta que el tensor de deformaciones es simétrico.

Para terminar, calcularemos la dilatación o cambio de volumen en términos de tensor de deformaciones. Para ello, volvemos a (6) y calculamos el volumen V' luego de la deformación a partir del volumen $V = dx dy dz$ antes de la deformación. Usando las ecs. (8) y conservando sólo los términos en primer orden en $\epsilon_{\alpha\beta}$, es fácil ver que:

$$V' = dx \cdot dy \cdot dz (1 + \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})$$

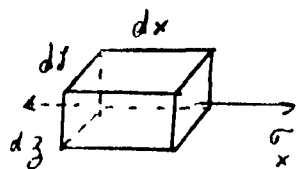
o sea que el cambio relativo de volumen es:

$$\frac{V' - V}{V} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \quad (13)$$

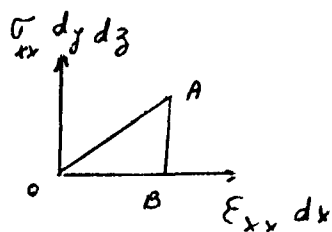
es decir que la traza del tensor de deformaciones da el cambio de volumen.

ENERGIA DE DEFORMACION

Si una barra uniforme es cargada en simple tensión, las fuerzas sobre los extremos hacen una cierta cantidad de trabajo a medida que la barra se alarga. Por lo tanto, si el elemento mostrado en Fig. 8a es sometido a tensiones normales



(8.a)



(8.b)

les σ_{xx} solamente, una fuerza $\sigma_{xx} dy dz$ realizará un trabajo sobre una extensión $\epsilon_{xx} dx$.

La relación entre

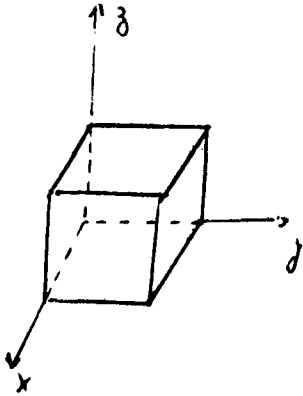
estas dos cantidades durante la carga es representada por una línea recta tal como OA en Fig. 8 b, y el trabajo dW_0 realizado durante la deformación es dado por el área del triángulo OAB, esto es: $dW_0 = 1/2 \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dx dy dz$. Cabe analizar en qué clase de energía es convertido este trabajo.

En el caso de un gas, una compresión adiabática eleva la temperatura. Cuando una barra de acero ordinario es comprimida adiabáticamente hay también una elevación de temperatura aunque muy pequeña. La correspondiente cantidad

de calor es, sin embargo, sólo una pequeña fracción del trabajo realizado por las fuerzas compresivas y puede ser despreciada. Por lo tanto, todo el trabajo realizado es acumulado dentro del elemento como "energía de deformación". El elemento permanece elástico y no es desarrollada energía cinética. Las mismas consideraciones se aplican cuando el elemento tiene los seis componentes de tensión actuando sobre él.

Calcularemos el trabajo dW realizado por las fuerzas exteriores que generan un estado de tensiones $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}$ sobre el elemento de volumen dV_0 para modificar su estado de deformación en $d\epsilon_{\alpha\beta}$. En el campo de la elasticidad dicho trabajo debe quedar almacenado en el cuerpo para que, si se lo descarga, el mismo pueda volver a su estado inicial no deformado. Es decir que, en el dominio de la Elasticidad, no puede haber disipación del trabajo de las fuerzas exteriores en forma de calor.

Consideremos un cuerpo sometido a fuerzas exteriores y analicemos en un cubo elemental dentro del cuerpo el estado de tensiones inducidas en cada cara y el desplazamiento sufrido, debido a las deformaciones inducidas, por cada cara del cubo.



El desplazamiento que sufre la cara x debido al cambio de $de_{\alpha\beta}$ por cambios en el estado de deformaciones será:

$$d\vec{u}|_{cx} = d\vec{r} \cdot d\vec{e}$$

donde: $d\vec{r} = (dx, 0, 0)$

por lo tanto:

$$d\vec{u}|_{cx} = (de_{xx}dx, de_{yx}dx, de_{zx}dx) = (de_{xx}, de_{yx}, de_{zx})dx \quad (14)$$

Las tensiones sobre la cara x son: σ_{xx} ; σ_{xy} ; σ_{xz}

El área de la cara es: $dy dz$.

Por lo tanto la fuerza sobre la cara x debido al estado de tensiones es:

$$\vec{F}|_{cx} = (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}) dy dz \quad (15)$$

El trabajo realizado sobre el cuerpo para modificar su estado de deformación en $de_{\alpha\beta}$ será el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento:

$$\vec{F} \cdot d\vec{u}|_{cx} = (\sigma_{xx} de_{xx} + \sigma_{xy} de_{yx} + \sigma_{xz} de_{zx}) dv_0 = \sum_{\alpha} (\sigma_{x\alpha} de_{\alpha x}) dv_0$$

Procediendo análogamente para las caras y, z resulta:

$$\vec{F} \cdot d\vec{u}|_{cy} = \sum_{\alpha} (\sigma_{y\alpha} de_{\alpha y}) dv_0$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{u}|_{cz} = \sum_{\alpha} (\sigma_{z\alpha} de_{\alpha z}) dv_0$$

Sumando sobre las tres caras y dividiendo por el volumen resulta el trabajo por unidad de volumen realizado por las fuerzas.

exteriores:

$$dW = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (\sigma_{\beta\alpha} de_{\alpha\beta}) \quad (16)$$

Para expresarlo en términos del tensor de deformación $\underline{\underline{\epsilon}}$; (teniendo en cuenta que α y β son mudos):

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\alpha} de_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} de_{\beta\alpha} &= \sigma_{\alpha\beta} (de_{\alpha\beta} + de_{\beta\alpha}) \text{ por simetría de } \underline{\underline{\sigma}} \\ &= \sigma_{\alpha\beta} 2(d\epsilon_{\alpha\beta}) \text{ (por definición)} \\ &= \sigma_{\alpha\beta} (d\epsilon_{\alpha\beta}) + \sigma_{\beta\alpha} (d\epsilon_{\beta\alpha}) \text{ (por simetría de } \underline{\underline{\sigma}} \text{ y de } \underline{\underline{\epsilon}}) \end{aligned}$$

por lo tanto $\boxed{dW = \sum_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\epsilon_{\alpha\beta}} \quad (17)$

Este trabajo almacenado es la densidad de energía de deformación elástica.

Comparando las ecuaciones (16) y (17) vemos que, para el cálculo de la energía, se puede reemplazar el tensor de deformaciones $\underline{\underline{\epsilon}}$ por el tensor de derivadas de desplazamientos $\underline{\underline{e}}$.

Dado el tensor $\underline{\underline{e}}$, podemos siempre escribirlo como suma de un tensor simétrico y otro antisimétrico:

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (e_{\alpha\beta} + e_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2} (e_{\alpha\beta} - e_{\beta\alpha})$$

donde, por la ec. (11), el primer sumando es el tensor de deformaciones (simétrico):

$$e_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (e_{\alpha\beta} - e_{\beta\alpha})$$

Por lo tanto, la componente antisimétrica $1/2(e_{\alpha\beta} - e_{\beta\alpha})$ del

tensor de derivadas de desplazamientos no contribuye al trabajo. Puede probarse que dicha componente antisimétrica describe las rotaciones rígidas del cuerpo; todo el trabajo es debido a las deformaciones y distorsiones y no a desplazamientos y rotaciones rígidas del cuerpo.

LEY DE HOOKE GENERALIZADA

Es un hecho experimental que, para pequeñas deformaciones, existe una relación lineal entre tensiones y deformaciones. El rango de tensiones aplicadas para el cual esta linealidad se mantiene depende del material, temperatura, tratamientos térmicos, etc. ...

La linealidad entre tensiones y deformaciones se escribe:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma\delta} c_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta} \quad (18)$$

que es la llamada ley de Hooke generalizada. El tensor $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ de 4º orden es el tensor de constantes elásticas. Las constantes elásticas dependen del material, temperatura, irradiación, etc. ...

La simetría de los tensores de tensiones y deformaciones traen como consecuencia simetrías en el tensor de constantes elásticas.

Por ser: $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$

$$\epsilon_{\gamma\delta} = \epsilon_{\delta\gamma}$$

deberá ser:

$$\boxed{c_{\alpha\beta\gamma\delta} = c_{\beta\alpha\gamma\delta} = c_{\alpha\beta\delta\gamma} = c_{\beta\alpha\delta\gamma}} \quad (19)$$

El trabajo por unidad de volumen dado por la ec. (17) puede escribirse:

$$dw = \sum_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} d\epsilon_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} c_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta} d\epsilon_{\alpha\beta} \quad (20)$$

El cambio de energía libre de Helmholtz para el cambio de deformación $d\epsilon_{\alpha\beta}$ será:

$$dA = -S dT + \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} c_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta} d\epsilon_{\alpha\beta}$$

Si la deformación es reversible e isotérmica:

$$dA = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} c_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta} d\epsilon_{\alpha\beta}$$

O sea que:

$$c_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial^2 A}{\partial \epsilon_{\gamma\delta} \partial \epsilon_{\alpha\beta}} \quad (21)$$

A es una función de estado y dA un diferencial total exacto. Por lo tanto (21) es independiente del orden de derivación, es decir:

$$\boxed{c_{\alpha\beta\gamma\delta} = c_{\gamma\delta\alpha\beta}} \quad (22)$$

Las relaciones de simetría (19) y (22) hacen que de las 81 constantes elásticas $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$, sólo 21 sean independientes. Veremos más adelante que ese número se reduce más a medida que aumenta la simetría del sólido.

La ley de Hooke generalizada permite integrar la densidad de energía elástica. Integrando la ecuación (20) hasta un estado de deformación $\underline{\underline{\epsilon}}$ se tiene:

$$\left[w = \frac{1}{2} \int_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\epsilon} c_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} \int_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\sigma} \sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\delta} \right] \quad (23)$$

que es la energía de deformación elástica por unidad de volumen de un sólido que sometido a un estado de tensiones $\underline{\underline{\sigma}}$ alcanzó un estado de deformaciones $\underline{\underline{\epsilon}}$.

NOTACION DE VOIGT

La simetría de los tensores de tensiones, deformaciones y constantes elásticas permite pasar a una notación más compacta.

En la notación de Voigt, los tensores de tensiones y deformaciones se escriben formalmente con un solo subíndice, con lo cual toman la apariencia de vectores, y el tensor de 4° orden de constantes elásticas se escribe con dos subíndices, es decir, formalmente como un tensor de 2° orden. Debe insistirse en que se trata de una notación; las tensiones, por ej., son elementos de un tensor de 2° orden. Esto significa que ante rotación del sistema de coordenadas se transforman como los productos de dos coordenadas; en un enfoque más simplista, una tensión no queda definida por "intensidad y dirección", sino por "intensidad y dos direcciones:"

la dirección de la fuerza y la de la normal al plano sobre el cual actúa".

El cambio de notación introducido por Voigt es el siguiente:

$$\begin{aligned} xx &\rightarrow 1 \\ yy &\rightarrow 2 \\ zz &\rightarrow 3 \\ zy/yz &\rightarrow 4 \\ xz/zx &\rightarrow 5 \\ xy/yx &\rightarrow 6 \end{aligned}$$

De esta forma, el tensor de tensiones se convierte en:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

En la notación de Voigt se utiliza la distorsión angular $\gamma_{\alpha\beta}$ en lugar de $\epsilon_{\alpha\beta}$. Es decir que para las deformaciones (recordar ecs. (12)):

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 2\epsilon_6 & 2\epsilon_5 \\ 2\epsilon_6 & \epsilon_2 & 2\epsilon_4 \\ 2\epsilon_5 & 2\epsilon_4 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ 2\epsilon_4 \\ 2\epsilon_5 \\ 2\epsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

El tensor de 4° de orden de constantes elásticas se escribe ahora formalmente como un tensor de 2° orden; las relaciones de simetría (19) y (22) hacen que dicho tensor sea simétrico.

En la notación de Voigt la ley de Hooke generalizada, ec. (18), se escribe:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (24)$$

REDUCCION DE CONSTANTES ELASTICAS POR SIMETRIA

En general, según muestra la ec. (24), hay 21 constantes elásticas independientes. Ese número se reduce cuando el sólido posee simetría.

Por ej., sea un cristal cúbico. Tomemos los ejes cartesianos de modo que coincidan con los ejes cúbicos. En un cristal cúbico, las direcciones x - y - z son indistinguibles. Por lo tanto:

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= C_{22} = C_{33} \\ C_{44} &= C_{55} = C_{66} \\ C_{12} &= C_{13} = C_{23} \end{aligned} \right\} \text{ por ser indistinguibles los ejes } x, y, z.$$

En una simetría cúbica, cambiar el signo de una de las distorsiones angulares, por ej. γ_{yz} , no puede cambiar el valor de la correspondiente tensión de corte σ_{yz} (recordar que la simetría cúbica es invariante ante el cambio de signo de una de las coordenadas, por ej. $y \rightarrow -y$). Por lo tanto:

$$C_{14} = C_{15} = C_{16} = C_{45} = C_{46} = C_{56} = 0 \quad \text{porque es invariante un cambio de signo de una coord. por ej. } y \rightarrow -y$$

El tensor de constantes elásticas para un cristal cúbico resulta entonces tener sólo 3 elementos independientes: $C_{11} - C_{12} - C_{44}$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Un sólido isótropo posee, además de todas las simetrías del cúbico, la invariancia ante cualquier rotación de coordenadas.

Consideremos un estado de deformación donde sólo ϵ_{xx} es no nulo. La ec.(25) lleva a:

$$\sigma_{xx} = C_{11} \epsilon_{xx} \quad (26)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = C_{12} \epsilon_{xx}$$

y todas las demás tensiones nulas.

Hagamos ahora una rotación de coordenadas de 45° alrededor del eje (Fig. 9). La matriz de transformación de coordenadas es (ver Apéndice):

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

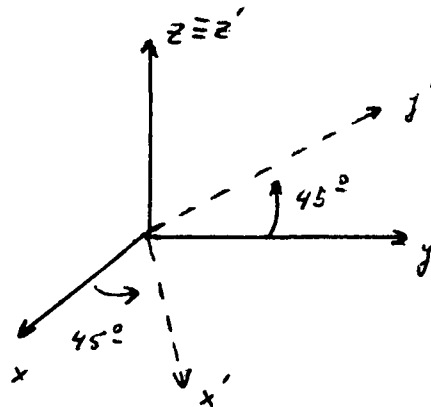


Fig. 9

Las componentes de los tensores $\underline{\underline{\sigma}}$ y $\underline{\underline{\epsilon}}$ se transforman como los productos de coordenadas. Es decir:

$$\epsilon'_{ij} = \sum_{l,m} R_{il} R_{jm} \epsilon_{lm} = R_{i1} R_{j1} \epsilon_{xx}$$

y

$$\epsilon'_{xy} = R_{11} R_{21} \epsilon_{xx} = -\frac{1}{2} \epsilon_{xx} \quad (27)$$

Para las tensiones:

$$\sigma'_{ij} = \sum_{l,m} R_{il} R_{jm} \sigma_{lm} = R_{i1} R_{j1} \sigma_{xx} + R_{i2} R_{j2} \sigma_{yy} + R_{i3} R_{j3} \sigma_{zz}$$

y

$$\sigma'_{xy} = R_{11} R_{21} \sigma_{xx} + R_{12} R_{22} \sigma_{yy} + \underbrace{R_{13} R_{23} \sigma_{zz}}_0$$

Usando (26): $\sigma'_{xy} = -\frac{1}{2} \sigma_{xx} + \frac{1}{2} \sigma_{yy} = -\frac{1}{2} c_{11} \epsilon_{xx} + \frac{1}{2} c_{12} \epsilon_{xx} = \frac{1}{2} (c_{12} - c_{11}) \epsilon_{xx}$
 y usando (27) $\sigma'_{xy} = (c_{11} - c_{12}) \epsilon'_{xy}$ (28)

Pero en un sólido isótropo nada debe cambiar ante una rotación de ejes. En particular, las constantes elásticas deberían ser las mismas, y escribiendo la ley de Hooke generalizada en el sistema rotado debería ser:

$$\sigma'_{xy} = 2 c_{44} \epsilon'_{xy} \quad (29)$$

Comparando (28) con (29): $\boxed{2c_{44} = c_{11} - c_{12}}$ (30)

Es decir que en un cuerpo isótropo hay sólo dos constantes elásticas independientes.

De (24), el tensor de constantes elásticas resulta para un sólido isótropo:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

y la ley de Hooke generalizada, escrita en componentes:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= c_{11} \epsilon_{xx} + c_{12} (\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \\
 \sigma_{yy} &= c_{11} \epsilon_{yy} + c_{12} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) \\
 \sigma_{zz} &= c_{11} \epsilon_{zz} + c_{12} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \\
 \sigma_{xy} &= \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \gamma_{xy} \\
 \sigma_{xz} &= \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \gamma_{xz} \\
 \sigma_{yz} &= \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \gamma_{yz}
 \end{aligned} \tag{32}$$

Las ecs. (32) pueden escribirse en términos de módulos elásticos más familiares.

Se define como módulo de Young a la relación entre tensión y deformación en un ensayo uniaxial. De Fig. 10:

$$\boxed{E = \sigma_{zz} / \epsilon_{zz}} \tag{33}$$

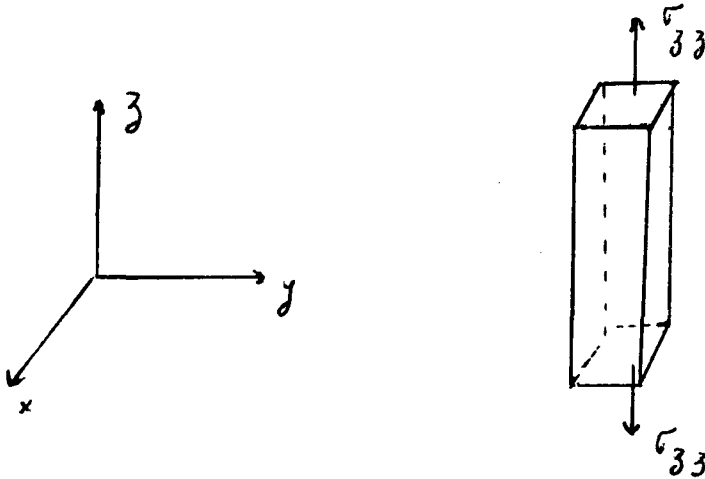


Fig. 10

La elongación en la dirección axial producirá una contracción en las direcciones transversales. Se define como módulo de Poisson a la relación entre deformación transversal y axial:

$$\nu = - \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} = - \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}} \quad (34)$$

el signo negativo es a fin de que ν sea positivo, pues las deformaciones axial y transversal tendrán signos opuestos.

De las definiciones, y usando las ecs(32) se obtiene la relación entre las constantes elásticas y los módulos elásticos:

$$E = C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{11} + C_{12}} \quad (35)$$

$$\nu = \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}}$$

y las relaciones inversas:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{E}{1+\nu} \quad \frac{1-\nu}{1-2\nu} \\ c_{12} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ c_{44} &= \frac{c_{11}-c_{12}}{2} = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (36)$$

Se define como módulo de corte G a la relación entre la tensión corte y la distorsión angular correspondiente. Por unidad de volumen realizado por las fuerzas.

$$G = c_{44} = \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \quad (37)$$

Habíamos deducido que el cambio de volumen de un sólido está dado por la traza $\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$ del tensor de deformaciones. De la ley de Hooke generalizada para un sólido isótropo (ecs.(32)), se ve que la traza de $\underline{\epsilon}$ está asociada a la traza de $\underline{\sigma}$:

$$\boxed{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}} = \text{tr}(\underline{\sigma}) = (c_{11} + 2c_{12})(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) = \boxed{(c_{11} + 2c_{12}) \text{tr}(\underline{\epsilon})} \quad (38)$$

O sea que los cambios de volumen se producen por la traza de $\underline{\sigma}$; un estado de tensiones tal que la traza de $\underline{\sigma}$ sea nula no produce cambio de volumen en un cuerpo elástico.

La presión hidrostática p está dada por la traza del tensor de tensiones:

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (39)$$

El signo negativo es a fines de mantener la convención de

que presiones positivas significan compresión. El 1/3 surge de la definición de presión en un fluido; en tal caso:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$$

y la expresión (39) resulta consistente.

Se define como compresibilidad k a la relación entre el cambio relativo de volumen y la presión:

$$k = - \frac{\Delta V/V}{p} \quad (40)$$

donde el signo negativo es debido a que presiones positivas (compresiones) producen disminución de volumen.

De (38) es:

$$k = \frac{-(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})}{\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})} = \frac{3}{\frac{C_{11} + 2C_{12}}{C_{11} + 2C_{12}}} \quad (41)$$

y usando (36):

$$k = \frac{3(1-\nu)}{E} \quad \text{COMPRESIBILIDAD}$$

Finalmente, se define como módulo de volumen B a la inversa de la compresibilidad k:

$$B = \frac{1}{k} = \frac{E}{3(1-\nu)}$$

ACLARACION SOBRE OTROS SISTEMAS DE COORDENADAS ORTOGONALES

Dependiendo de la simetría del problema, puede resultar conveniente usar otros sistemas de coordenadas ortogonales

nales que no sean el cartesiano.

No vamos a entrar en el problema de la transformación a otros sistemas de coordenadas. Sin embargo, queremos recordar que, tal como lo indica su nombre, en todos los sistemas ortogonales los versores son perpendiculares entre sí. En la Fig. 11 se muestran los versores de los sistemas cilíndrico y esférico.

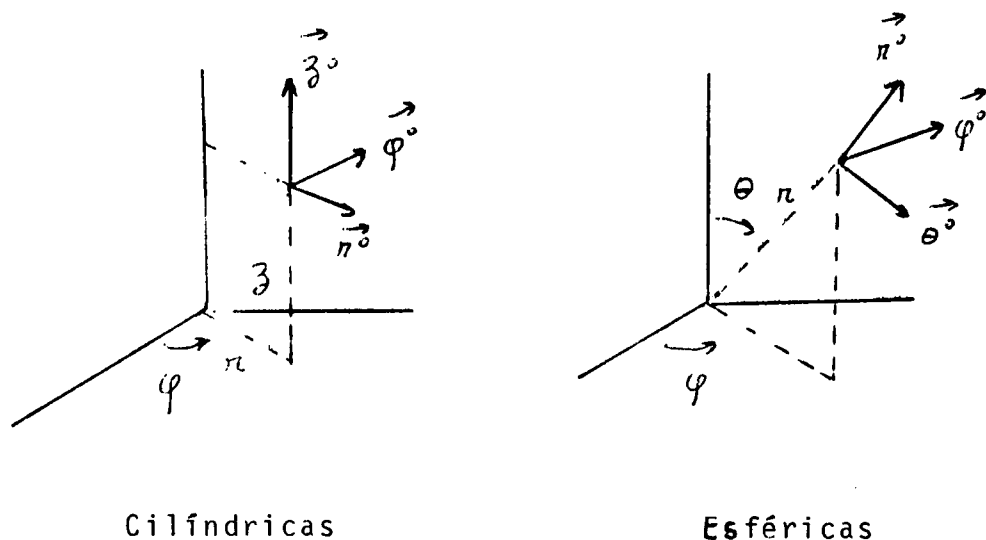


Fig. 11

La diferencia entre los sistemas curvilíneos ortogonales y el cartesiano es que en los primeros los versores son funciones de la posición.

Ley de Hooke para medios isótropos

Resumiendo lo visto, la ley de Hooke en término de E y ν queda:

$$\sigma_{xx} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\epsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\epsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) \right]$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\epsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \right]$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

$$\sigma_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx}$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz}$$

o bien:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right]$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right]$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right]$$

$$\sigma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

$$\sigma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx}$$

$$\sigma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}$$

SOLUCION DE PROBLEMAS EN MECANICA DEL CONTINUO

Se debe notar que la ley de Hooke no basta para resolver un problema en mecánica del continuo. En un problema se conoce, por ejemplo, el sistema de fuerzas actuantes sobre un cuerpo de geometría y constantes elásticas conocidas y se busca conocer el estado de tensión-deformación del cuerpo o sea los tensores $\underline{\sigma}$ y $\underline{\epsilon}$ en cada punto del cuerpo. Pero la ley de Hooke no es una ley fundamental de la Física sino una ecuación constitutiva de los sólidos elásticos. Sirve para determinar $\underline{\epsilon}$ si $\underline{\sigma}$ es conocido o viceversa.

En realidad las leyes que describen un cuerpo en mecánica del continuo son las ecuaciones de equilibrio y las relaciones de compatibilidad.

Las ecuaciones de equilibrio establecen que en cada elemento de volumen hay equilibrio entre las fuerzas exteriores aplicadas y las fuerzas interiores debidas a la deformación (tensiones). Veamos cómo se obtienen dichas ecuaciones. Por el momento hemos considerado las tensiones en un punto en un sólido elástico. Consideremos ahora la variación de las tensiones a medida que cambia la posición del punto. Estudiaremos entonces las condiciones de equilibrio de un pequeño paralelepípedo rectangular con lados $\delta x, \delta y, \delta z$; tomamos en cuenta los pequeños cambios de las

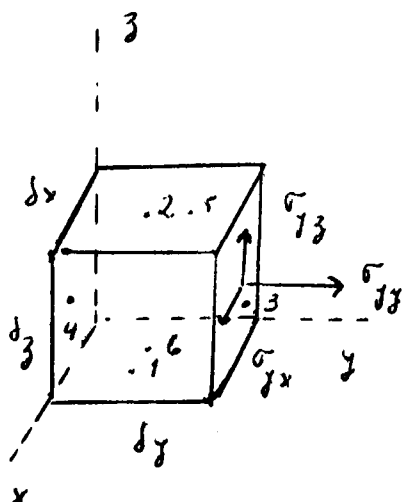


Fig. 12

componentes de tensión debido a un pequeño incremento δx , δy , δz en las coordenadas. Si el punto medio en las caras x es llamado 1 y 2, debemos distinguir entre el valor de σ_{xx} en 1 y su valor en 2. Para calcular la fuerza que actúa sobre el elemento consideramos los lados muy pequeños y la fuerza es ob-

tenida multiplicando la tensión en el centro de una cara por el área de la misma. Debemos considerar además la fuerza que actúa sobre el volumen del cuerpo, por ejemplo fuerzas eléctricas o gravitatorias, (la que para los estudios anteriores no fue considerada por ser una pequeña cantidad de orden superior) ya que es del mismo orden de magnitud que los términos debidos a variaciones de las componentes de tensión. Si f_x , f_y , f_z denotan las componentes de esta fuerza por unidad de volumen, la ecuación de equilibrio obtenida sumando todas las fuerzas actuando sobre el elemento en la dirección x es:

$$[(\sigma_{xx})_1 - (\sigma_{xx})_2] \delta y \delta z + [(\sigma_{yx})_3 - (\sigma_{yx})_4] \delta x \delta z + [(\sigma_{zx})_5 - (\sigma_{zx})_6] \delta x \delta y + f_x \delta x \delta y \delta z = 0$$

Las otras dos ecuaciones de equilibrio para las direcciones y, z son obtenidas de manera análoga. Luego de dividir por el elemento de volumen ($\delta x \delta y \delta z$) y de tomar el límite para

una disminución del mismo encontramos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \boxed{\sum_{\alpha} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}} + f_{\beta} = 0} \\ \text{ecuación de equilibrio} \end{array} \quad (42)$$

Estas ecuaciones deben ser satisfechos en todos los puntos a través del volumen del cuerpo. Las tensiones varían en el volumen del cuerpo y muy cerca de la superficie ellas deben estar en equilibrio con las fuerzas externas sobre la superficie del cuerpo (esto se expresa matemáticamente mediante tres ecuaciones que plantean el equilibrio en la superficie). Si el problema es determinar el estado de tensiones en un cuerpo sometido a la acción de ciertas fuerzas es necesario resolver las ecuaciones (42) y la solución debe ser tal que satisfaga las condiciones de contorno. Sin embargo, procediendo de dicha manera el problema queda indeterminado estáticamente ya que no se pueden determinar las 6 componentes del tensor $\underline{\sigma}$ a menos que se consideren también las deformaciones elásticas del cuerpo. Debe notarse que las seis componentes de deformación en cada punto del cuerpo están determinadas completamente por las tres funciones u_x , u_y , u_z , que representan las componentes de los desplazamientos. Por lo tanto, las componentes de la deformación no pueden ser tomadas arbitrariamente como funciones de x , y , z , sino que es-

tán sometidas a relaciones que se obtienen por derivación de las relaciones entre deformaciones y desplazamientos. Estas relaciones son llamadas de compatibilidad, son 6 y se obtienen utilizando el hecho que para funciones continuas las derivadas cruzadas son iguales. Expresan matemáticamente la continuidad de los desplazamientos $\vec{u} = \vec{u}(x,y,z)$ o, que en un cuerpo deformado no puede haber agujeros.

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

Ec. de
Compatibilidad.

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

Las condiciones de equilibrio, con las de borde y las de compatibilidad son generalmente suficientes para determinar las componentes de tensiones sin ambigüedad.

Las condiciones de compatibilidad contienen sola-

mente derivadas segundas de las componentes de tensión. Por lo tanto, si las fuerzas externas son tales que las ecuaciones de equilibrio junto a las condiciones de borde pueden ser satisfechas tomando las componentes de tensión ya sea como constantes o como funciones lineales de las coordenadas las ecuaciones de compatibilidad son satisfechas idénticamente y este sistema de tensiones es la correcta solución del problema.

Ondas elásticas en cristales cúbicos

Explicitando la fuerza por unidad de volumen como $\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$ (ρ : densidad del cuerpo) la ecuación de equilibrio en la dirección x es:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}$$

habiendo ecuaciones similares para las direcciones y y z.

Utilizando la ley de Hooke generalizada para un cristal cúbico se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = c_{11} \frac{\partial e_{xx}}{\partial x} + c_{12} \left(\frac{\partial e_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zz}}{\partial x} \right) + c_{44} \left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial z} \right)$$

y utilizando las relaciones entre derivadas del desplazamiento y deformación resulta:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = & c_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \\ & + (c_{12} + c_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

Existen otras dos ecuaciones de movimiento para u_y y u_z que se encuentran a partir de la anterior por simetría. Estas son ecuaciones de equilibrio dinámico, cuando el término a la izquierda es nulo resultan las ecuaciones de equilibrio estático.

Buscamos ahora soluciones sencillas de estas ecuaciones.

Ondas en la dirección [100]

Una solución de (43) está dada por una onda longitudinal:

$$u_x = u_0 \exp [i(kx - \omega t)] \quad (44)$$

con u_x componente x del desplazamiento de la partícula.

Tanto el vector de onda como el movimiento de la partícula tienen la dirección de la arista x del cubo. Aquí $k = 2\pi/d$ es el vector de onda y $\omega = 2\pi\nu$ es la frecuencia angular.

Sustituyendo (44) en (43):

$$\omega^2 \rho = c_{11} k^2$$

de modo que la velocidad ω/k de una onda longitudinal en la dirección [100]:

$$v_s = \nu d = \omega/k = (c_{11}/\rho)^{1/2}$$

Si consideramos una onda transversal, con el vector de onda en la dirección de la arista x del cubo y con el

desplazamiento de la partícula en la dirección y, esto es:

$$u_y = u_{y0} \exp[i(kx - \omega t)]$$

Sustituyendo en la ecuación de equilibrio para la dirección y resulta la relación de dispersión siguiente: $\omega^2 \rho = c_{44} k^2$ y la velocidad ω/k de la onda transversal en dirección $[100]$ es: $v_s = (c_{44}/\rho)^{1/2}$

Utilizando estas relaciones resulta claro cómo determinar constantes elásticas. El método más utilizado es el de impulsos ultrasónicos. En este método se transmite a través del cristal bajo examen un impulso ultrasónico generado mediante un transductor de cuarzo tal que, reflejado en la superficie opuesta del cristal vuelve al transductor. El tiempo transcurrido entre la iniciación y la recepción del impulso se mide mediante métodos electrónicos convencionales. La velocidad del sonido en la muestra se obtiene dividiendo la distancia recorrida por el intervalo de tiempo. Las constantes elásticas de un cristal pueden determinarse así a partir de las velocidades de las ondas, debiéndose excitar la dirección deseada del movimiento de la partícula.

A P E N D I C E

ROTACIONES DE COORDENADAS, VECTORES Y TENSORES

Haremos primero un repaso de rotaciones de sistemas de referencia cartesianos.

En la Fig. A-1 se muestra una rotación en ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ del sistema x, y, z para obtener el sistema x', y', z' .

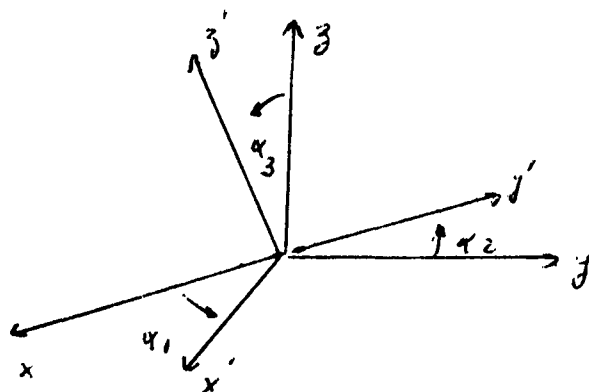


Fig. A-1

Las fórmulas de transformación de coordenadas son:

$$\vec{r}' = R \vec{r} \quad ; \quad x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j \quad (A-1)$$

donde

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

y la matriz de transformación R es:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\hat{x}\hat{x}') & \cos(\hat{y}\hat{x}') & \cos(\hat{z}\hat{x}') \\ \cos(\hat{y}\hat{y}') & \cos(\hat{z}\hat{y}') & \cos(\hat{z}\hat{z}') \\ \cos(\hat{y}\hat{z}') & \cos(\hat{z}\hat{z}') & \cos(\hat{z}\hat{z}') \end{bmatrix} \quad (A-2)$$

La matriz R tiene una serie de propiedades, entre ellas que su inversa R^{-1} es igual a su transpuesta R^t . Recordamos que la matriz transpuesta es la obtenida cambiando filas por columnas, es decir $R_{ij}^t = R_{ji}$; la matriz inversa es tal que multiplicada por la matriz da la matriz identidad, $R^{-1}R = RR^{-1} = E$.

Se define como escalar a una magnitud que permanece invariante bajo una rotación del sistema de coordenadas. Por ejemplo, la densidad de un cuerpo es un escalar (un "número"). Sea la densidad de un cuerpo en el punto P (Fig. A-2) de coordenadas (3;4;5) igual a 5 g/cm^3 ; si ahora cambiamos a un nuevo sistema de coordenadas x', y', z' , donde las coordenadas del punto P (el mismo en el espacio) sean (-1;7;2), su densidad seguirá valiendo 5 g/cm^3 ; es invariante ante un cambio de coordenadas.

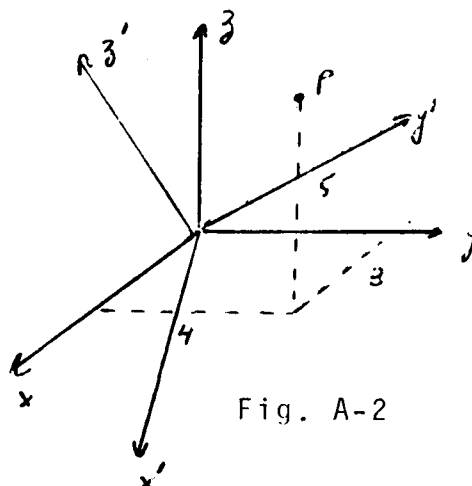


Fig. A-2

Se define como vector a un conjunto de 3 magnitudes (las componentes) tales que, ante una rotación del sistema de coordenadas, se transforman igual que las coordenadas de los puntos.

Por ejemplo, sea la fuerza $\vec{F} = (F_1, F_2)$ de componentes F_1, F_2 referidas al sistema de ejes $x - y$ (Fig. A-3). Si se rotan los ejes a los $x' - y'$, las componentes de F serán distintas, y se obtienen usando las mismas expresiones que dan las coordenadas $x' - y'$ de los puntos. Recordemos que solemos asociar el vector $\vec{F}$ con el punto P , y sus componentes F_1, F_2 a las coordenadas de P en adecuadas unidades; al rotar lo ejes, las nuevas componentes de $\vec{F}$ serán las coordenadas de P en los nuevos ejes.

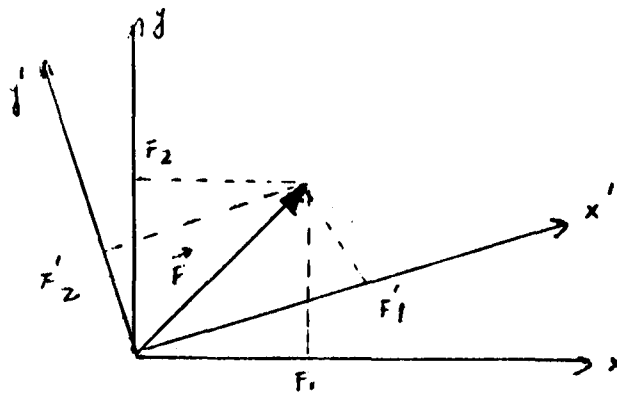


Fig. A-3

De (A-1), la transformación de las componentes v_i de un vector $\vec{v}$ ante una rotación de coordenadas definida

por una matriz R será:

$$v'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} v_j \quad (A-3)$$

Se define como tensor de 2° orden a un conjunto de 9 componentes t_{ij} tales que, ante una rotación del sistema de ejes coordenados, se transforman como los productos de pares de coordenadas.

Es decir, dado el tensor $\underline{t}$ de componentes t_{ij} , si se efectúa un cambio de coordenadas definido por la matriz R, las componentes t'_{ij} del tensor en el nuevo sistema de coordenadas serán:

$$t'_{ij} = \sum_{h=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{ih} R_{jk} t_{hk} \quad (A-4)$$

Físicamente, tendrán carácter tensorial aquellas magnitudes que para su definición requieran dos direcciones. Por ejemplo, los momentos de inercia, donde se requieren dos ejes respecto de los cuales están definidos cada momento de inercia. Ante una rotación de ejes, los momentos de inercia, que contienen los productos de pares de coordenadas (distancias a los ejes), se transformarán como los productos de las coordenadas; es decir, son las componentes de un tensor llamado tensor de inercia.

DEFECTOS PUNTUALES

Vacancias, modelos

Vimos en una sección anterior que el número de vacancias en equilibrio en una red dependía de la energía potencial de formación de este defecto. Discutamos algunas aproximaciones al cálculo de ésta. Si el número de coordinación del cristal es z una primera aproximación va a estar dada por la energía necesaria para romper z uniones, separando un átomo de su ubicación en la red y restablecer $z/2$ para ubicarlo en la superficie del cristal. O sea:

$$U_f^v = z\omega - \frac{z}{2}\omega$$

donde ω es la energía por unión interatómica. Podemos obtener una aproximación de este valor a través del calor latente de sublimación por átomo L_s . Al sublimar un cristal se rompe $zN/2$ uniones (si N es el número de átomos), la energía liberada va a ser:

$$I_s = NL_s = \frac{zN}{2} \omega$$

Comparando las expresiones anteriores resulta: $U_f^v = L_s$

Este valor es un límite superior para la energía de formación; habría que considerar la energía de relajamiento, que incluye la posibilidad que se formen nuevos vínculos en la red.

Otro modelo considera al cristal como un continuo

rígido. Al crearse una vacancia se aumenta el volumen porque un átomo va a la superficie; esto implica un aumento del área superficial del sólido. La energía de formación de este defecto va a estar dada por el producto de la energía por unidad de superficie por este aumento de superficie

$$U_f^v = (S^v - S) \gamma$$

$S^v - S$: superficie debida a un átomo extra en la superficie.

Un tercer modelo consiste en calcular la distorsión provocada en un medio elástico isotrópico infinito por un centro de dilatación en el origen. La vacancia es representada por una cavidad de radio r_0 sobre la cual la tensión superficial produce un desplazamiento δ_0 . Este modelo permite describir cualitativamente una vacancia con δ_0 negativo o una impureza con radio mayor que el parámetro de la red, al igual que un intersticial, con δ_0 positivo.

Si una superficie a distancia r del origen se desplaza radialmente una cantidad $\delta(r)$, una ubicada en $r+a$ va a desplazarse:

$$\delta(r+a) = \delta(r) + a \frac{d}{dr} \delta(r)$$

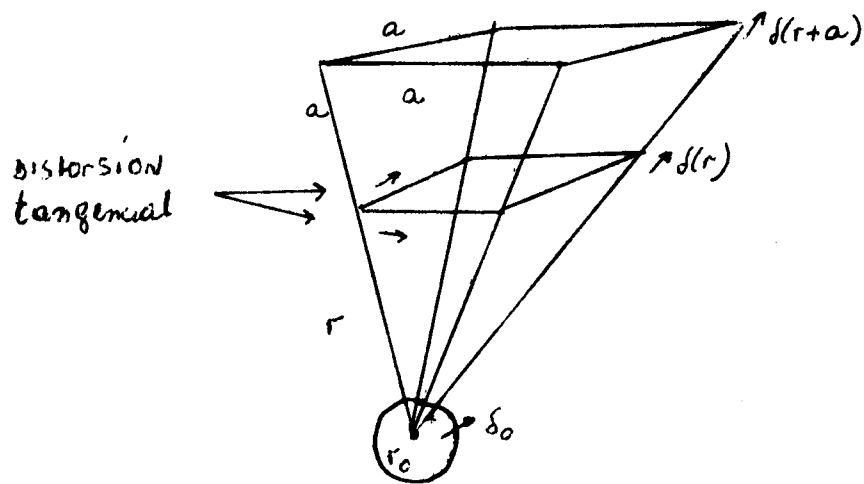
Por lo tanto la distorsión radial va a estar dada por $\frac{d}{dr} \delta(r)$

Para determinar la distorsión tangencial vemos que una superficie esférica en r se desplaza a la posición $r+\delta r$, por lo tanto la circunferencia varía su longitud en:

$$\Delta l = 2\pi(r + \delta(r)) - 2\pi r = 2\pi\delta(r)$$

y la distorsión resulta:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{2\pi\delta(r)}{2\pi r} = \frac{\delta(r)}{r}$$



Como la distorsión total implica un cambio de forma sin cambio de volumen obtenemos la relación entre las distorsiones:

$$\text{distorsión radial} = -2 \times \text{distorsión tangencial}$$

Obteniéndose la ecuación diferencial: $\frac{d}{dr} \delta(r) = -2 \frac{\delta(r)}{r}$

Cuya solución es: $\delta(r) = \delta_0 r_0^2 / r^2$

δ_0 : distorsión a la distancia r_0 . Según el modelo δ_0 se relaciona con la tensión superficial o con las fuerzas generadas por el defecto en sus vecinos cercanos en un modelo discreto.

Modelos más refinados se realizan en una aproximación discreta del cristal; entre estos gran cantidad de cálculos se han realizado en cobre utilizando un potencial de interacción entre pares de átomos. Estos cálculos, aún cuando mucho más sofisticados que los anteriores y proveen no sólo la energía sino también la distorsión provocada en los vecinos del defecto, no han podido hasta el momento incluir la contribución de volumen a la energía, aún cuando publicaciones recientes parecen probar que esta no es importante desde el punto de vista configuracional.

Intersticiales, modelos

Los modelos del intersticial son similares a los de la vacancia discutidos en la sección anterior. La diferencia es que ahora asumimos que un átomo es sacado de la superficie y depositado en el interior del cristal. En el caso de la vacancia la distorsión elástica sólo contribuye del orden de .1 eV a la energía de formación. Como la distorsión provocada por el intersticial es un orden de magnitud mayor que la de la vacancia la energía acumulada va a ser dos órdenes de magnitud en este modelo, o sea aproximadamente 10 eV. Este valor se demuestra experimental y teóricamente que es exagerado, pero la principal contribución a la energía continúa proviniendo de este término.

Aún cuando se han realizado numerosos trabajos

teóricos y experimentales en el tema aún no se posee la certeza de la configuración de equilibrio del intersticial en cobre (f.c.c.). Las configuraciones consideradas estables son, ordenadas de supuesta mayor estabilidad a menor:

- i) intersticialidad ("dumb bell interstitial") en la dirección (100); el átomo extra se acomoda compartiendo espacio con otro de la red, el eje del par se encuentra en la dirección (100).
- ii) intersticial centrado en el cuerpo, ubicado en la posición octaedral (1/2,0,0), que es el espacio abierto más grande en la red f.c.c.
- iii) crowdion: la distorsión debida al átomo extra es compartida por un gran número de átomos en la dirección compacta (110) de la red.

Modelos para intersticiales

Para intersticiales los modelos son similares a los de la vacancia. La diferencia radica en que ahora suponemos que un átomo es sacado de la superficie y depositado en el interior del cristal. En el caso de la vacancia, la distorsión elástica sólo contribuye del orden de 0.1 eV a la energía de formación. Así, en Cu,

$$E_f^V = E_{\text{vínculos}} + E_{\text{elástica}} = (0.9 + 0.1) \text{ eV}$$

esto es, en el caso de la vacancia la mayor parte de la energía se consume en crear el agujero. Dicha energía de defor-

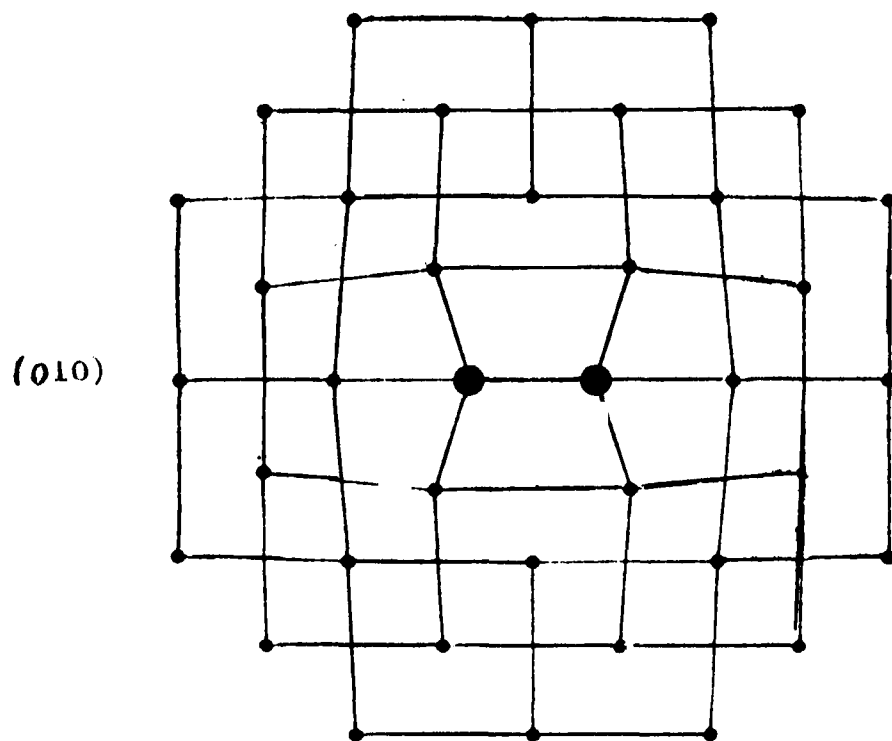
mación elástica se escribe como: $E_{\text{elástica}} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon = \frac{1}{2} \epsilon \cdot \epsilon$ esto es, varía como el cuadrado de la distorsión provocada por el defecto. Como la distorsión que el intersticial produce en la red es un orden de magnitud mayor que la vacancia, la energía elástica de deformación acumulada en la red será dos órdenes de magnitud mayor para el intersticial que para la vacancia, esto es 10 eV. Se demuestra tanto experimental como teóricamente que dicho valor es exagerado. Sin embargo en: $E_f^i = E_{\text{vínculos}} + E_{\text{elástica}}$ la principal contribución proviene del término de deformación.

Impurezas

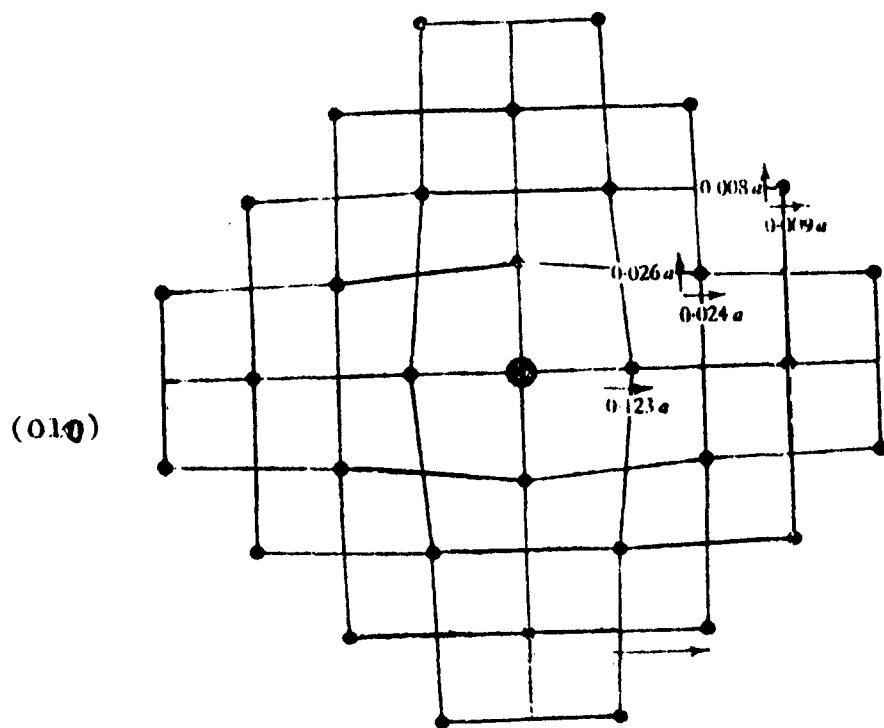
Las impurezas son átomos extraños a la red que se ubican en posiciones sustitucionales o intersticiales. Si el tamaño de la impureza es menor que el de los átomos de la red ésta generalmente se ubica en una posición intersticial. La presencia de estos átomos extraños aún en cantidades ínfimas determina gran parte de las propiedades del material; para dar un ejemplo la presencia de carbono en la fase α del hierro (b.c.c.) es fundamental para la existencia de las fases en que transforma a la aleación y dan origen al aprovechamiento tecnológico.

En una red cúbica centrada en el cuerpo existen dos tipos de intersticios, los octaedros ubicados en la posi

ción $(1/2, 0, 0)$ y los tetraedros en la posición $(1/2, 1/4, 0)$. Aún cuando el volumen correspondiente al segundo tipo de intersticio es mayor que el primero existe la certeza que el C en Fe se halla en la posición octaedral. Esto surge de la composición de mediciones de fricción interna y el parámetro de la red en la transformación martensítica. La distinción no es tan clara en otros sistemas similares como N y O en Fe, Va, Nb y Ta. Aún cuando es creencia general que estos intersticiales son octaedrales no existe evidencia experimental ni teórica suficiente para confirmar esta suposición, es pecialmente para el caso del O.

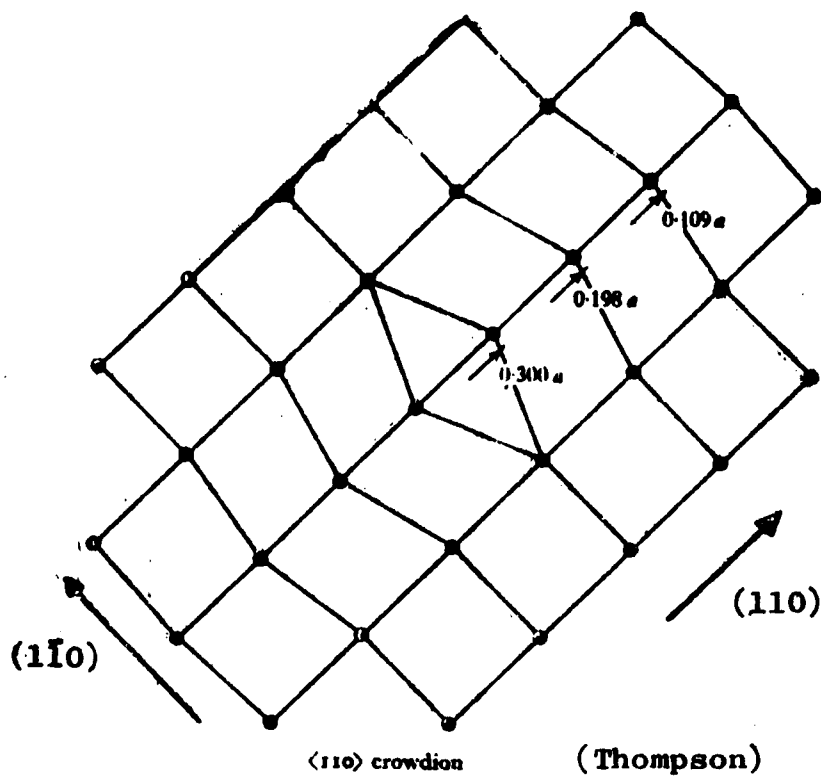


(100)
Intersticialidad (100) Dumb bell (Thompson)



(100)
Intersticial centrado en el cuerpo (Thompson)

16



Producción de defectos puntuales

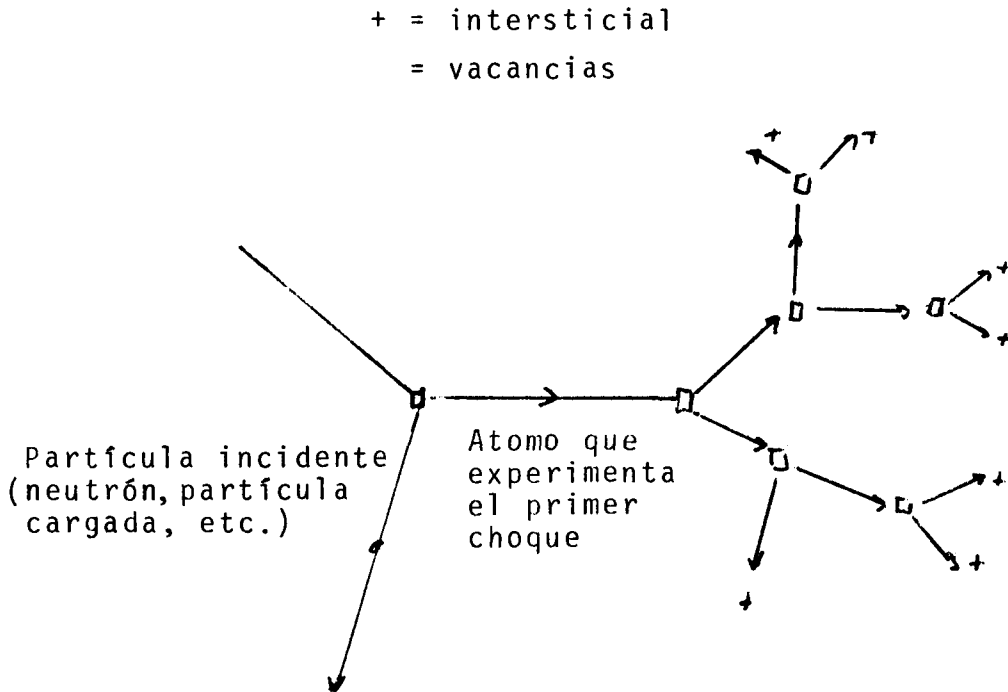
Vimos que el número de defectos en equilibrio a una dada temperatura depende crucialmente de la energía de formación del defecto. ¿Cómo se crean defectos que sobreviven a una dada temperatura en número mayor al equilibrio térmico?. Una forma es por enfriamiento rápido (templado) a partir de una temperatura sensiblemente superior, en la cual el número de defectos en equilibrio es mayor. La rapidez del enfriamiento impide que se alcance el equilibrio a temperaturas intermedias, o sea no hay tiempo para que se produzca una migración del defecto y éste se aniquile, ya sea interactuando con otro defecto puntual (intersticial vacancia) o al ser absorbido por un sumidero mayor en la red como ser dislocaciones, borde de grano, interfase de precipitado, superficie, etc.

Otra forma de generar defectos es por el trabajado mecánico, el cual discutiremos más adelante.

Una tercera forma es el bombardeo del cristal con partículas y la separación de los átomos de su posición de equilibrio debido a la transferencia de energía por las mismas.

Otras fuentes de vacancias son las desviaciones de la estequiometría de ciertos compuestos intermetálicos y

por oxidación.



Esquema de la cascada de colisión

Detección de defectos puntuales

Se describirá la clásica experiencia de Simmons y Balluffi; ésta permite detectar la presencia de defectos puntuales a través de mediciones de la variación de las dimensiones macroscópicas de la muestra y de la variación del parámetro de red.

Sea una muestra perfecta con N átomos; Ω siendo el volumen atómico, ó volumen por sitio de la red.

El volumen de la muestra perfecta es: $v_0 = n \cdot \Omega$

Se crean n vacancias en la muestra: significa que n átomos son distribuidos sobre la superficie original variándose las dimensiones del cuerpo, la densidad, etc. Ello aumentará el volumen v_0 en $(n\Omega)$. Además, dado que el sólido no es rígido, debido a cada vacancia creada hay un cambio $\Delta v'$ en el volumen total como consecuencia de la relajación que se produce. El volumen final será:

$$V = v_0 + n \cdot \Omega + n \Delta v' \quad (0)$$

$$\therefore \Delta V = V - v_0 = n(\Omega + \Delta v')$$

$$\frac{\Delta V}{v_0} = C_v \left(1 + \frac{\Delta v'}{\Omega} \right) \quad (1)$$

(1) puede escribirse en términos medibles ya que, si $v_0 = l^3$ (suponiendo un cubo para la forma exterior de la muestra):

$$\frac{\Delta V}{v_0} = \frac{3 l^2 \Delta l}{l^3} = \frac{3 \Delta l}{l}$$

Reemplazando en (1) resulta:

$$\frac{3 \Delta l}{l} = C_v \left(1 + \frac{\Delta v'}{\Omega} \right) \quad (2)$$

La relación (2) puede escribirse en términos de la variación de parámetro de red a fin de obtener una expresión que permita determinar C_v a partir de mediciones experimentales. Para ello: volviendo a (0), está claro que el volumen por sitio de la red está dado por $\frac{V}{N+n}$ (ya que $(N+n)$ es el número total de sitios), esto es:

$$\frac{V}{N+n} = \frac{(N+n)\Omega + n\Delta V'}{N+n} = \Omega + C_v \Delta V' \quad (3)$$

Además, llamando Ω' al volumen por sitio está claro que:
 $\Omega = \frac{V}{N+n}$. Pero puede escribirse Ω' en términos de volumen atómico Ω , ésto es:

$$\Omega = \Omega + \Delta \Omega \quad (4)$$

donde $\Delta \Omega$ es la variación introducida en el volumen correspondiente a cada sitio por la presencia de las vacancias.

Igualando (3) y (4) por ser la misma definición:

$$\Delta \Omega = C_v \Delta V' \quad (5)$$

Pensando en una celda cúbica con un átomo por celda, ésto es, $\Omega =$ volumen atómico = volumen por sitio :

$$\Omega = a^3 \quad \therefore \quad \frac{\Delta \Omega}{\Omega} = \frac{3 \Delta a}{a}$$

La variación del parámetro de red promedio es medible por rayos X.

Dividiendo por Ω en (5) resulta:

$$\frac{3 \Delta a}{a} = C_v \frac{\Delta V'}{\Omega} \quad (6)$$

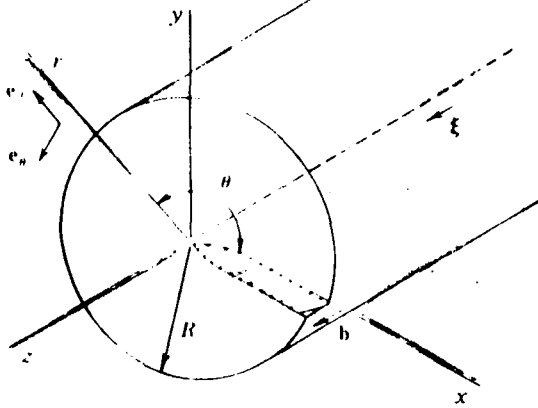
Reemplazando (6) en (2) resulta:

$$C_v = 3 \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} - \frac{\Delta a}{a} \right)$$

Simmons y Balluffi midieron simultáneamente ambos parámetros en Al como función de la temperatura. Ambos crecen debido a la expansión térmica y coinciden dentro del error diferenciando (del orden de $1/10^5$) a bajas temperaturas, a altas temperaturas y dando una medición directa de C_v como función de T.

CAMPOS DE TENSIONES Y DEFORMACIONES DE UNA DISLOCACION DE HELICE

Los severos tratamientos a los cuales son sometidos los cristales generan dislocaciones . A éstas se asocian tensiones y deformaciones dentro del cristal. Derivemos la auto-tensión y los desplazamientos inducidos en el medio por una dislocación de hélice. Consideremos una dislocación de hélice (mano derecha) a lo largo del eje de un cilindro de radio R . El eje z es elegido de modo de coincidir con la línea de la dislocación la cual corresponde a una de tipo Volterra, pudiendo ser producida a partir de un cilindro perfecto por desplazamiento de corte en la dirección z a través del plano xy .



Un circuito de Burgers en torno a línea muestra que la dislocación tiene un vector de Burgers $\underline{b}$.

Como muestra la figura , $u_x = u_y = 0^{(1)}$ y el desplazamiento

$u_z = u_z(x, y)^{(2)}$ es discontinuo en la superficie de corte definida por $y = 0, x > 0$:

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ x > 0}} u_z(x, -\eta) - u_z(x, \eta) = b_z \quad \eta \text{ positivo}$$

Además , dado que la dislocación se extiende una distancia infinita según la dirección z , toda posición a lo largo de la línea de la dislocación es equivalente a cualquier otra; por ello todas las derivadas con respecto a z en las ecuaciones de equilibrio del continuo son nulas.

En el caso de la dislocación de Volterra mostrada en la figura es razonable suponer que en un medio isotrópico el desplazamiento u_z aumenta uniformemente con el ángulo θ para dar la discontinuidad:

$$u_z(r, \theta) = \frac{b\theta}{2\pi} = \frac{b}{2\pi} \lg \left(\frac{y}{x} \right) \quad (3)$$

Obviamente, si un circuito es recorrido alrededor de la línea de la dislocación, u_z cambia en b . Puede observarse que dicha función trigonométrica inversa satisface las ecuaciones de equilibrio del medio, las cuales bajo las condiciones (1) y (2) se reducen a la forma siguiente:

$$\nabla^2 u_z = 0 \quad (4)$$

Utilizando la expresión del campo de desplazamiento debido a una dislocación de hélice se obtienen las deformaciones elásticas correspondientes esto es:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{b}{2\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2)} \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{b}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2)} \quad (5.2)$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = 0 \quad (5.3)$$

En coordenadas cilíndricas las deformaciones elásticas toman las expresiones siguientes:

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{b}{2\pi r} \quad (5.4)$$

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{rz} = 0 \quad (5.5)$$

Las tensiones asociadas con las deformaciones indicadas son:

$$\sigma_{xz} = -\frac{Gb}{2\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2)} \quad (6.1)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{Gb}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2)} \quad (6.2)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0 \quad (6.3)$$

Las que expresadas en coordenadas cilíndricas toman la forma:

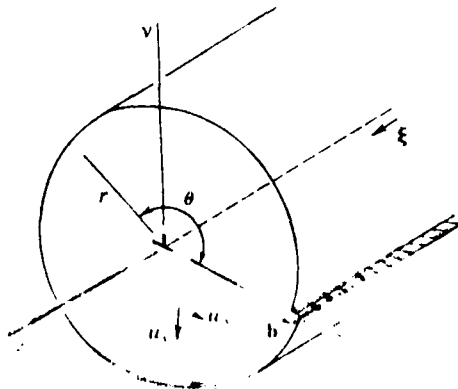
$$\sigma_{\theta z} = \frac{Gb}{2\pi r} \quad (6.4)$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = 0 \quad (6.5)$$

donde, por ejemplo, $\sigma_{\theta\theta}$ es la tensión en la dirección θ actuando sobre un plano radial esto es, un plano normal a e_{θ} (ver figura). Las expresiones (6-i) son debidas a la ley de Hooke siendo G el módulo de corte de elasticidad. Resulta así que el campo de tensiones de una dislocación de hélice no tiene componentes dilatacionales sino componentes de corte solamente, razón por la cual las dislocaciones de hélice sólo interaccionan con deformaciones de corte. Las expresiones en coordenadas cilíndricas indican que tanto las tensiones como las deformaciones se hacen infinitas a medida que r se aproxima a cero. Puesto que la teoría de elasticidad lineal (aplicada en el desarrollo previo) se basa en la suposición que tensiones y deformaciones son pequeñas, las soluciones anteriores dejan de ser válidas en la región cercana a la línea de dislocación, esto es en el núcleo de defecto, considerándose como tal a una región cilíndrica de radio r del orden de $r \approx b$.

CAMPOS DE TENSIONES Y DEFORMACIONES DE UNA DISLOCACION DE BORDE

Una dislocación de borde rectilínea produce deformación plana definida por : $v_z = 0$ y $\frac{\partial v_i}{\partial z} = 0$ siendo la línea de la dislocación coincidente con el eje z . En el presente caso el vector de Burgers es paralelo al eje x y el semiplano extra de átomos yace, por lo tanto, en el plano $x=0$. Con el propósito de hallar el campo de tensiones y el de deformaciones correspondientes a un continuo isotrópico en equilibrio estático en presencia de una dislocación de borde se resuelven las ecuaciones de equilibrio estático del medio, (las que debido a su complejidad no serán desarrolladas aquí) obteniéndose:



$$\sigma_{xx} = - \frac{Gb}{2\pi(1-\nu)} \frac{y(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{Gb}{2\pi(1-\nu)} \frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{Gb}{2\pi(1-\nu)} \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\sigma_{zz} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{-Gb\nu}{\pi(1-\nu)} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

donde ν es el módulo de Poisson.

La expresión del campo de tensiones en coordenadas polares es:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = - \frac{Gb \sin \theta}{2\pi(1-\nu)r}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{Gb \cos \theta}{2\pi(1-\nu)r}$$

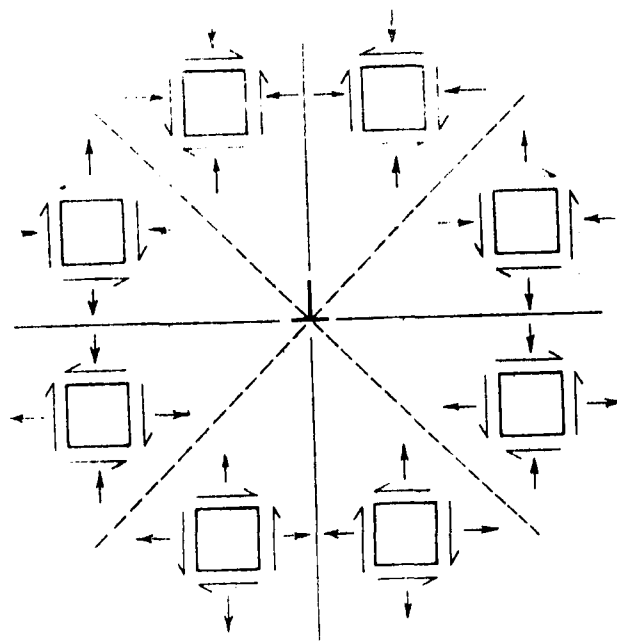
$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = - \frac{Gb \sin \theta}{\pi(1-\nu)r}$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$$

Es interesante notar la existencia de una tensión σ_{zz} actuando en dirección paralela a la de la línea de la dislocación pese a la ausencia de desplazamiento y deformación en dicha dirección.

En la siguiente figura se muestra esquemáticamente la distribución de tensiones en torno a una dislocación de borde, esto es las tensiones ejercidas sobre un cubo elemental ubicado en diferentes posiciones relativas al defecto.

Cabe destacar que, como en el caso de la dislocación de hélice, el campo de tensiones varía inversamente con la distancia al defecto y a diferencia de ella el campo de tensiones de la dislocación de borde presenta también componentes dilatacionales. Por lo tanto, las dislocaciones de borde interactúan con centros de deformación volumétricos así como con deformaciones de corte.



FUERZA SOBRE UNA DISLOCACION

Cuando se aplica un esfuerzo lo suficientemente alto al cristal, las dislocaciones contenidas en él se mueven y producen deformación plástica por desplazamiento. El esfuerzo aplicado hace trabajo sobre el metal y aquel se traduce en el movimiento de dislocaciones habiendo, consecuentemente, una fuerza sobre la dislocación que hace que ésta se mueva.

Usaremos al principio de los trabajos virtuales para calcular la fuerza F , por unidad de longitud de una dislocación, como resultado de una tensión de corte, σ , que actúa en la dirección del vector de Burgers. Como se muestra en la figura 19, la dislocación se mueve en la dirección de W bajo la acción de la tensión. Aunque se mueve en la dirección de la tensión y del vector de Burgers, es más significativo notar que se mueve en el plano de deslizamiento y en la dirección normal a su longitud. Puesto que la fuerza por unidad de longitud es F , la longitud L y la distancia recorrida para atravesar el cristal W , el trabajo efectuado es FLW . Este trabajo es hecho por la tensión σ , actuando sobre el área LW , y la fuerza σLW actúa sobre la distancia b cuando la dislocación atraviesa el cristal. Por lo tanto,

$$FLW = \sigma LWb \quad (1)$$

$$F = \sigma b \quad (2)$$

actuando normalmente a la línea de la dislocación.

La fuerza actuante sobre una dislocación de hélice puede determinarse por el mismo procedimiento. Nuevamente sólo la componente de la tensión de corte, σ , en la dirección del vector de Burgers causa deformación, como se muestra en la figura 21. La dislocación de hélice sin embargo se mueve a ángulo recto respecto al vector de Burgers, esto es, normal a sí misma. Nuevamente se obtiene la ecuación (2). En consecuencia, la ec. (2) da, en general, la fuerza actuante normal a una dislocación forzando a ésta a moverse en el plano de deslizamiento. Y, por lo tanto, en general, los segmentos de dislocaciones sobre los que actúan una tensión de corte sobre el plano de deslizamiento en la dirección del vector de Burgers, se mueven en su plano de deslizamiento en una dirección que es normal a la línea de dislocación.

Dado que arriba se han descripto casos particulares, daremos a continuación una expresión general para la fuerza ejercida sobre una dislocación en presencia de un campo de tensiones. Para ello, sea $\underline{t}$ un versor paralelo a la línea de la dislocación de vector de Burgers $\underline{b}$ el cual tiene una dirección arbitraria. (Dicho vector de Burgers es definido por un circuito de Burgers tomado en torno a la dislocación en la dirección convencional). Dado un sistema de coordenadas ortogonales x, y, z , la fuerza $\underline{F}$ sobre la dislocación está dada por la expresión siguiente derivada por Peach y Koehler:

$$\underline{F} = \underline{t} \wedge \underline{G} \quad (*)$$

donde $\underline{G} = \underline{\sigma} \cdot \underline{b} \quad (**)$

siendo $\underline{\sigma}$ el tensor de tensiones del medio en el cual se encuentra el defecto. Advertir que en (*) hay un producto vectorial y en (**) la contracción de un tensor de 2do. orden con un vector.

La expresión indica, debido al producto vectorial, que la fuerza sobre una dislocación está siempre dirigida normalmente a la línea del defecto.

REGLA DE FRANK

De los cálculos que se han realizado para obtener la energía de una dislocación y cuyos resultados se han discutido más arriba, se puede observar que ésta depende de un solo parámetro que es el vector de Burgers $\underline{b}$. Los demás factores son constantes para un mismo material. Es así que la energía de las dislocaciones es proporcional al cuadrado de sus vectores de Burgers respectivos. Esta regla se utiliza en todos los casos en que es necesario conocer las energías de varias dislocaciones del cristal para deducir sus posibilidades de combinación o disociación.

Aunque la energía de una línea de dislocación larga, de gran radio de curvatura, puede usualmente ser aproximada por el valor dado para la ec. 17, la dislocación puede ocasionalmente tener energías menores dependiendo de su entorno, su longitud y su radio de curvatura. Cuando una dislocación se aproxima a la superficie del cristal, su energía obviamente decrece; por lo tanto dislocaciones cercanas a la superficie son atraídas por ésta.

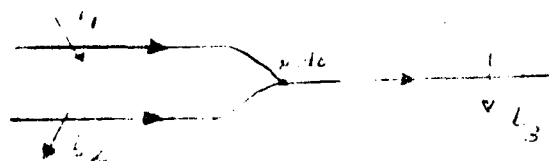
Un anillo de dislocación de radio r tiene un campo de tensiones despreciable a distancias mayores que aproximadamente $2r$ del núcleo debido a la cancelación mutua de las tensiones originadas en los segmentos positivos y negativos de la dislocación. Consecuentemente su energía es aproximadamente:

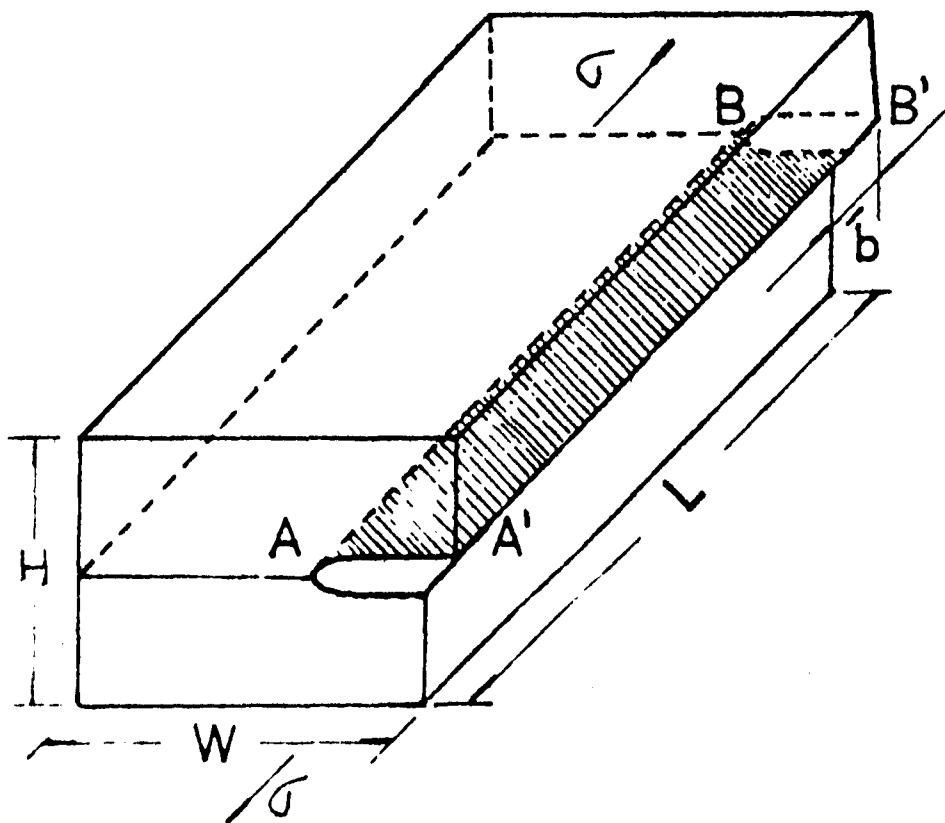
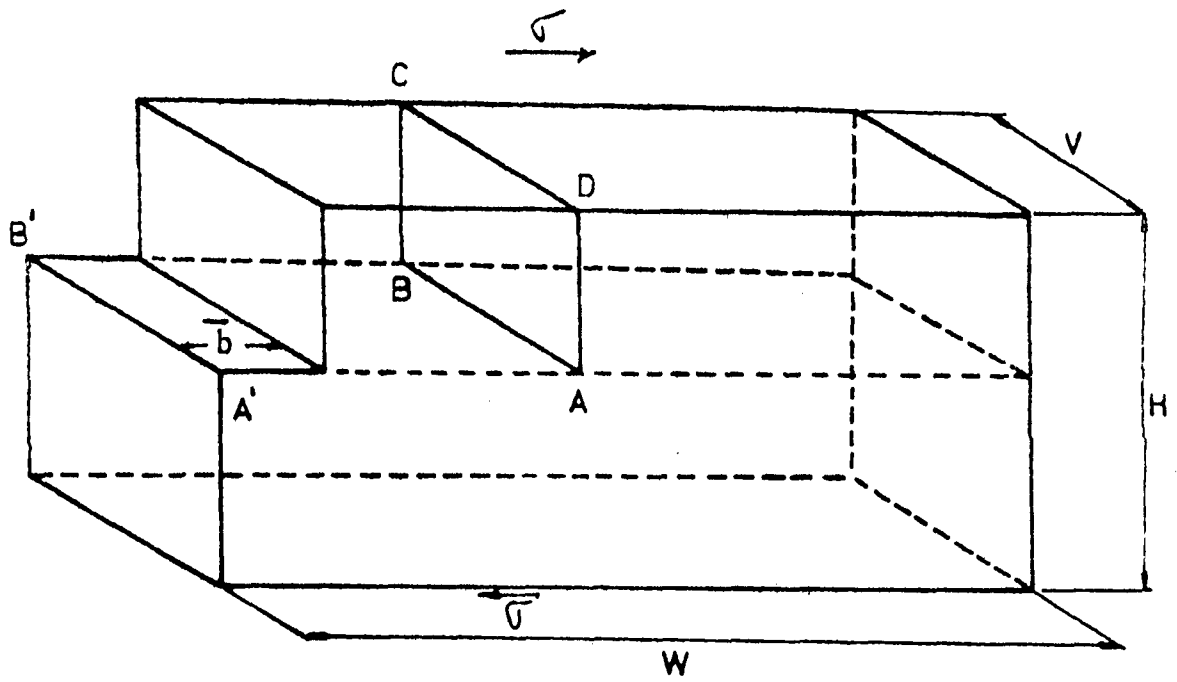
$$2 \pi r \int_r^\infty \frac{Gb^2}{4\pi} \left\{ \ln \frac{2r}{b} + 2 \right\} \quad (20)$$

la cual es apreciablemente menor que la dada por la ec. 17 para una dislocación recta cuando $r \ll r_c$.

Haremos uso de las consideraciones energéticas arriba mencionadas para estudiar la posibilidad de ocurrencia de ciertas reacciones entre dislocaciones, tales como la disociación de una dislocación rectilínea de vector de Burgers $\underline{b}_1$ en dos dislocaciones rectilíneas de vectores de Burgers $\underline{b}_2$ y $\underline{b}_3$ o inversamente, la asociación de estas últimas para dar lugar a la primera.

Para ello, supongamos que las dislocaciones con vectores $\underline{b}_2$ y $\underline{b}_3$ se unen parcialmente dando la de vector de Burgers $\underline{b}_1$. En dicha reacción debe verificarse que : $\underline{b}_1 = \underline{b}_2 + \underline{b}_3$





siendo b_1 , b_2 y b_3 vectores de Burgers permisibles en una red cristalina particular. Antes de la asociación, la energía de deformación en el medio podía aproximarse por: $E_{el} \approx G (b_2^2 + b_3^2)$ y luego de la asociación por:

$$E_{el} \sim G b_1^2. \text{ Evidentemente sólo si } b_2^2 + b_3^2 > b_1^2$$

el medio evoluciona favoreciendo la asociación debido a la reducción de la energía de deformación elástica.

Se debe hacer notar que una expresión más correcta que la anterior implicaría la incorporación del factor $1/(1 - \nu)$ que figura en la expresión de la auto-energía de dislocaciones de borde. De manera análoga a la descripta puede analizarse la posibilidad de disociación de una dislocación desde el punto de vista de energías.

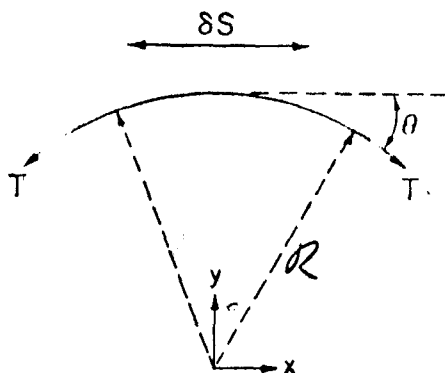
TENSION DE LINEA

Si una dislocación curvada es libre de moverse se enderezará, acortándose de esa manera. Similarmente, un loop de dislocaciones tiende a disminuir su radio y finalmente a desaparecer. En ambos procesos la energía de deformación asociada con la dislocación disminuye. Este comportamiento es análogo al de una burbuja de jabón que procura reducir el área total de su superficie y por lo tanto la energía superficial tanto como le sea posible. Así como se considera que la película de una burbuja de jabón tiene una tensión superficial igual a su energía de superficie por unidad de área, puede considerarse que la dislocación tiene una tensión de línea igual a su auto-energía por unidad de longitud. Dicha tensión de línea T está dada por la expresión aproximada:

$$T \approx \frac{Gb^2}{4\pi} \ln \left(\frac{rc}{b} \right)$$

válida en el caso en que el radio de curvatura de la línea es mayor que las dimensiones del espécimen. El concepto de tensión de línea resulta claro si se piensa en el incremento en energía del defecto por incremento unitario de la longitud de la línea.

Debido a la existencia de la tensión de línea cualquier segmento de dislocación curvada está sometido a una fuerza. Consideremos el segmento de una línea de dislocación curvada mostrada en la figura.



El radio de curvatura del segmento es R y su longitud δS . Ya que la tensión de línea actúa en una dirección tangencial a la línea de dislocación, el segmento sufre una fuerza F_{1y} hacia abajo (según la dirección negativa de y) dada por: $F_{1y} = - 2 (T \sin \theta) \approx 2T\theta$; donde θ es el ángulo entre la tangente a un extremo del segmento y la dirección horizontal x .

Por otro lado, la geometría indica que:

$$2\theta \approx \frac{\delta S}{R}$$

de modo que la fuerza total sobre el segmento curvado, debido a la tensión de línea, es:

$$F_{1y} = - T \frac{\delta S}{R}$$

siendo la fuerza por unidad de longitud F'_{1y} igual a: $F'_{1y} = - \frac{T}{R}$

A fin que la línea de la dislocación esté en equilibrio, debe actuar una fuerza adicional sobre el segmento en la dirección positiva de y . Por otro lado y, a título de ejemplo, como un resultado de la tensión de línea cada segmento de un loop circular de dislocaciones de radio R experimenta una fuerza dirigida radialmente hacia adentro del loop; a fin que el loop no colapse debe aplicarse una fuerza de igual magnitud a aquella pero dirigida radialmente hacia afuera.

Utilizando conceptos anteriores sabemos que, si σ es una tensión aplicada sobre la muestra conteniendo una dislocación, puede aparecer sobre ésta una fuerza dada por la expresión de Peach y Koehler. Supongamos, a fin de simplificar el desarrollo, que las tensiones aplicadas y el carácter de la dislocación sean tales que la fuerza sobre el defecto se encuentre en la dirección positiva de y , siendo su magnitud σb por unidad de longitud de línea de dislocación, en cuyo caso sobre el segmento δS actuará una fuerza F_{2y} dada por:

$$F_{2y} = \sigma \cdot b \cdot \delta S$$

a la que se opondrá la fuerza debida a la tensión de línea. En tal estado la condición de equilibrio estará dada por:

$$F_{1y} + F_{2y} = 0 \quad \text{esto es:}$$

$$T \frac{\delta S}{R} = \sigma b \cdot \delta S$$

Queda relacionada así la tensión de línea con la tensión externa o esfuerzo a ser aplicado para mantener curvada a la dislocación con un radio de curvatura R :

$$\sigma = \frac{T}{b \cdot R}$$

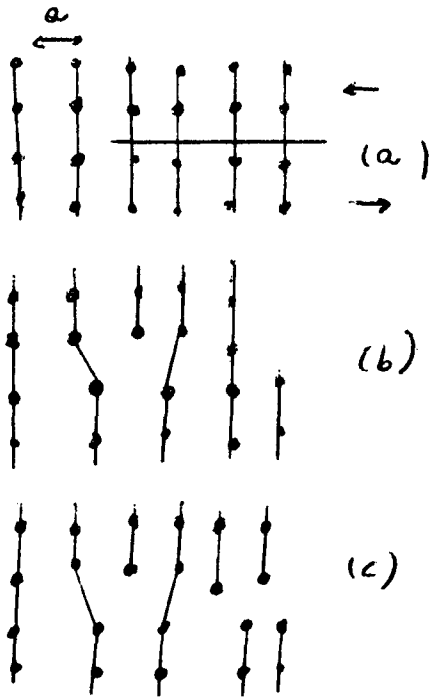
ó bien: $\sigma = \frac{T}{b \cdot R}$ habiendo utilizado la expresión de la tensión de línea derivada de su definición.

Dislocaciones en redes reales

Debemos considerar dislocaciones en redes cristalinas específicas y determinar así qué vectores de Burgers particulares son permitidos en reacciones en dislocaciones. Cada cristal tiene sus propios vectores de Burgers permisibles y sus propias reacciones de dislocaciones; por lo tanto los resultados obtenidos para cada estructura no pueden aplicarse a otros sistemas cristalinos.

Cristales f.c.c.

Se observa experimentalmente que el deslizamiento ocurre sobre los planos (111) a lo largo de las direcciones $[110]$, direcciones de mayor compacidad. Por lo tanto, si nos restringimos a dislocaciones perfectas, los vectores de Burgers posibles más pequeños están según direcciones $[110]$; siendo su longitud la distancia desde el centro de un átomo al centro del átomo siguiente según dicha dirección, esto es: $\vec{b} = a/2 [110]$ y $|\vec{b}| = a/\sqrt{2}$. El término dislocación perfecta significa una dislocación que, a medida que se mueve a lo largo de su plano de deslizamiento, deja a los átomos en posiciones equivalentes a las que ocupaban originalmente. En la figura siguiente se muestra la formación de una dislocación de borde perfecta y una imperfecta en una red cúbica simple. En (a) se muestra el cristal perfecto original con



una superficie de corte; en (b) se ha creado una dislocación perfecta forzando a los átomos sobre un lado del corte a desplazarse en a respecto de los otros; en (c) vemos una dislocación imperfecta que resulta de un desplazamiento relativo $a/2$. A medida que ésta se mueve hacia la izquierda los átomos no se ubican en una configuración equivalente a la original.

Se ha mostrado que $\vec{b} = a/2 [110]$

es el vector de Burgers posible más pequeño de una dislocación perfecta en fcc. El próximo $\vec{b}$ posible sería $\vec{b} = a [100]$. Sin embargo, la cantidad de energía acumulada asociada a tal dislocación es el doble de la energía asociada al $\vec{b} = a/2 [110]$. Se puede imaginar que dislocaciones con la menor auto-energía pueden ser introducidas en el cristal con mayor facilidad y esto, efectivamente, ha sido observado por microscopía electrónica.

Dislocaciones del tipo $a/2 [110]$ que yacen en planos (111) (los más "suaves" y densos de la estructura, esto es, los que menos resistencia ofrecen al movimiento de dislocaciones) pueden disminuir su energía combinándose entre sí o disociándose en nuevas dislocaciones.

2 dislocaciones sobre un mismo plano (111)

Sus vectores $\vec{b}$ posibles son: $\pm \vec{b}_1$ ($\vec{b}_1 = a/2 [01\bar{1}]$); $\pm \vec{b}_2$ ($\vec{b}_2 = a/2 [\bar{1}01]$); $\pm \vec{b}_3$ ($\vec{b}_3 = a/2 [\bar{1}10]$). (Notar que $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ - $\vec{n}$: normal al plano - es la condición para que los vectores de Burgers pertenezcan a dicho plano). Entre las varias combinaciones posibles de dos dislocaciones con distintos $\vec{b}$ hay dos diferentes:

$$\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = a/2 [\bar{1}10] = \vec{b}_3 ; b_1^2 + b_2^2 > b_3^2 \quad (\text{posible})$$

$$\vec{b}_1 - \vec{b}_2 = a/2 [11\bar{2}] = \vec{b}_R ; b_1^2 + b_2^2 < b_R^2 \quad (\text{imposible})$$

Debe notarse que cualquier combinación de dislocaciones perfectas conduce a dislocaciones perfectas.

2 dislocaciones sobre planos (111) diferentes

Supongamos dos dislocaciones sobre planos (111) diferentes; por ejemplo (111) y ($\bar{1}11$). Se supone que son los planos de deslizamiento de cada dislocación, las que son de tipo $a/2 [\bar{1}10]$. Las dislocaciones pueden combinarse en la intersección de los planos. La dirección de la intersección se obtiene haciendo el producto vectorial de las normales a cada plano (ya que la intersección está contenida en ambos planos y es normal a ambas normales) resultando: $[0\bar{1}1]$; resultando obvio por cristalografía. Los vectores de Burgers de una dislocación móvil perfecta sobre el (111) son $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$

o $\vec{b}_3$. Los vectores de una dislocación móvil perfecta sobre el plano $(\bar{1}11)$ son: $\pm \vec{b}_4$ ($\vec{b}_4 = a/2 [101]$); $\pm \vec{b}_5$ ($\vec{b}_5 = a/2 [01\bar{1}]$); $\pm \vec{b}_6$ ($\vec{b}_6 = a/2 [110]$). Notar que $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_5$ son idénticos y tienen además la dirección de la intersección de los planos. Por lo tanto, cuando las dislocaciones con $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_5$ se encuentren en la intersección, sus líneas deberán ser paralelas a ésta, esto es serán de hélice puras. Si dichas dislocaciones son de distinto signo se aniquilarán al combinarse. Si son de igual signo, la combinación de las mismas produciría un incremento en la autoenergía total. Por lo tanto, fuerzas repulsivas mutuas tenderán a mantenerlas separadas.

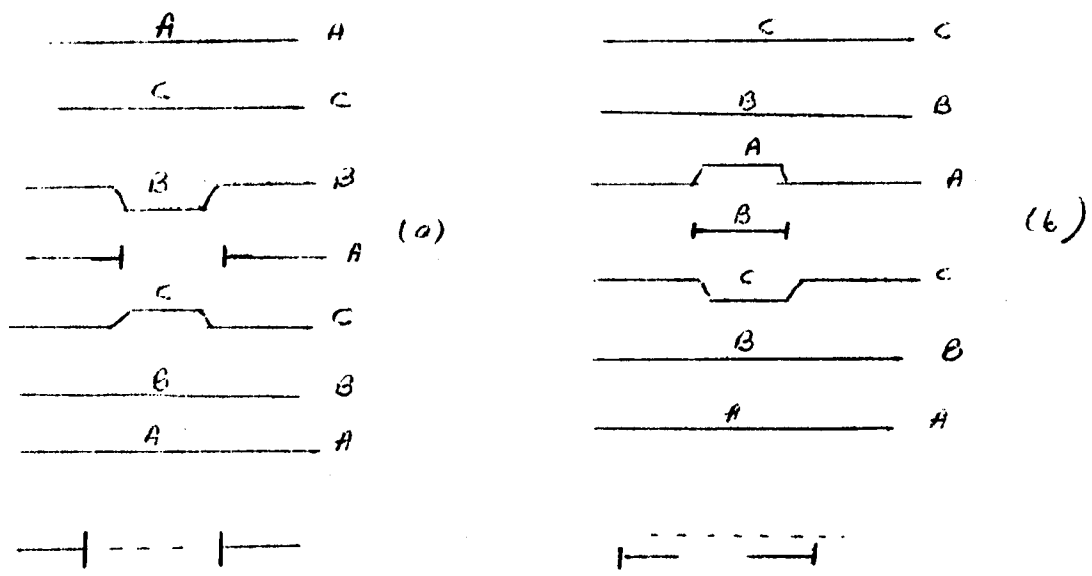
Por otro lado, tomemos la combinación de $\vec{b}_3$ con $\vec{b}_4$. Supongamos que estas dislocaciones se encuentran en la intersección de los planos; la asociación de las mismas daría una dislocación resultante con vector $\vec{b}_R = \vec{b}_3 + \vec{b}_4 = a/2 [01\bar{1}]$; asociación favorable energéticamente. (No interesa analizar el carácter de cada dislocación cuando se encuentran en la intersección; en este caso son mixtas). La dislocación resultante es de borde puro (su $\vec{b}_R$ es perpendicular a la línea de la dislocación que lleva la dirección de la intersección). El plano de deslizamiento de esta dislocación (dado por $\vec{\eta} = \vec{s} \wedge \vec{b}$) es del tipo (100) . Dado que dicho plano (poco denso) no es un plano de deslizamiento, la nueva dislocación es inmóvil y sirve como barrera a otras dislocaciones que se mueven en los planos (111) y $(\bar{1}11)$ hacia la intersección de los mismos. La dislocación resultante descrita es

conocida como barrera de Lomer por ser Lomer quien la propuso. Cottrell señaló que la dislocación inmóvil podría disociarse en dislocaciones imperfectas. Esta nueva barrera es llamada de Cottrell-Lomer. Ambas reacciones son importantes debido a su aplicación en el endurecimiento por trabajado de cristales.

Dislocaciones sésiles de Frank

Es posible crear dislocaciones imperfectas estables en fcc; por ejemplo, las sésiles de Frank. Recordemos que los apilamientos atómicos de máxima compacidad son el ABABAB ó ACACAC (el que da lugar a la estructura hcp) y el ABCABCABC ó ACBACBACB (el que origina la estructura fcc).

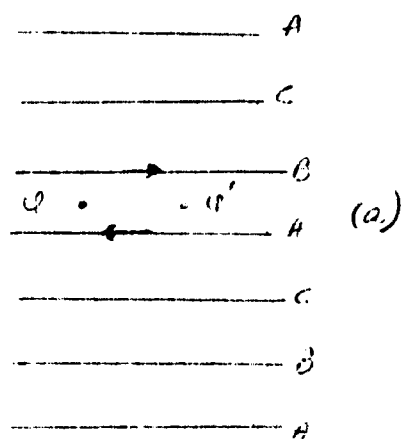
Una dislocación sésil de Frank puede originarse quitando o insertando en la red una porción de plano compacto. Por ejemplo:



S- Frank

D - Frank

En (a) vemos que el quitado de una porción de un plano ha introducido dos dislocaciones de borde puras y de signo opuesto. En (b) se muestra el resultado de insertar una porción de plano compacto; se generan también dos dislocaciones de borde de signos opuestos. Un examen de la secuencia de apilamiento de planos en la región entre dislocaciones muestra que la red contiene ahora una falla de apilamiento. En (a) la secuencia de ABCbCA, leída desde abajo hacia arriba, ha cambiado a ABC/BCA; / indica dónde se ha ubicado la falla en la secuencia. En (b) hay dos fallas de apilamiento en la región entre dislocaciones. La nueva secuencia es: ABC/B/ABCA y es una doble falla. Está ubicada sobre el mismo lado de los semiplanos extras de átomos en tanto que la falla simple lo está sobre el lado opuesto a los semiplanos extras. En la literatura la falla simple es llamada falla intrínseca y la doble extrínseca. Ya que un cristal que contiene una falla es imperfecto, es razonable esperar una energía extra asociada con ella. En una primera aproximación dicha energía es cero, ya que un átomo en la región fallada tiene el mismo número de primeros vecinos que un átomo en una región perfecta. (Dado que en la región fallada la estructura local es hcp, la afirmación anterior proviene del hecho que las estructuras hcp y fcc difieren solamente a partir de los segundos vecinos). La energía asociada con una zona fallada aparece recién en una segunda aproximación cuando se considera el número de los segundos vecinos. El cambio en el número de los segundos vecinos es el mismo tanto si la falla es



de planos ABCABCA (planos compactos (111)) se considera la región del cristal limitada por dos planos, cada uno de ellos normal a los compactos. Uno de los planos contiene la línea 0 y el otro la 0'. Puede pensarse que esta región es dividida en una superior y una inferior por un plano entre

0 y 0'. Desplacemos todos los átomos en la sección superior relativamente a los de la sección inferior. En particular, el desplazamiento es paralelo a los planos compactos de modo tal que los átomos del plano inferior de la sección superior son movidos desde sus posiciones en B a C. En la figura N (2º dibujo) se muestra la apariencia del plano siendo A el plano superior de la región inferior. A lo largo de la Línea 0 se ha creado una fila de sitios B vacantes, los que son parte de la dislocación creada en 0 por el desplazamiento. El desplazamiento también produjo una dislocación de signo opuesto en 0'. Por cristalografía la línea de dislocación yace según la dirección $[1\bar{1}0]$. Su vector de Burgers apunta según $[11\bar{2}]$ y tiene longitud $a/\sqrt{6}$; por lo tanto $\vec{b} = a/6 [11\bar{2}]$ (dislocación parcial de Shockley). Notar que, ya que la dislocación y su vector de Burgers yacen en el plano (111), éste es el plano de deslizamiento de la dislocación. Esto es, parciales de Shockley son móviles sobre el grupo de planos (111). Dicha dislocación es de borde pura. Sin embargo,

DISLOCACIONES PARCIALES DE SCHOCKERY

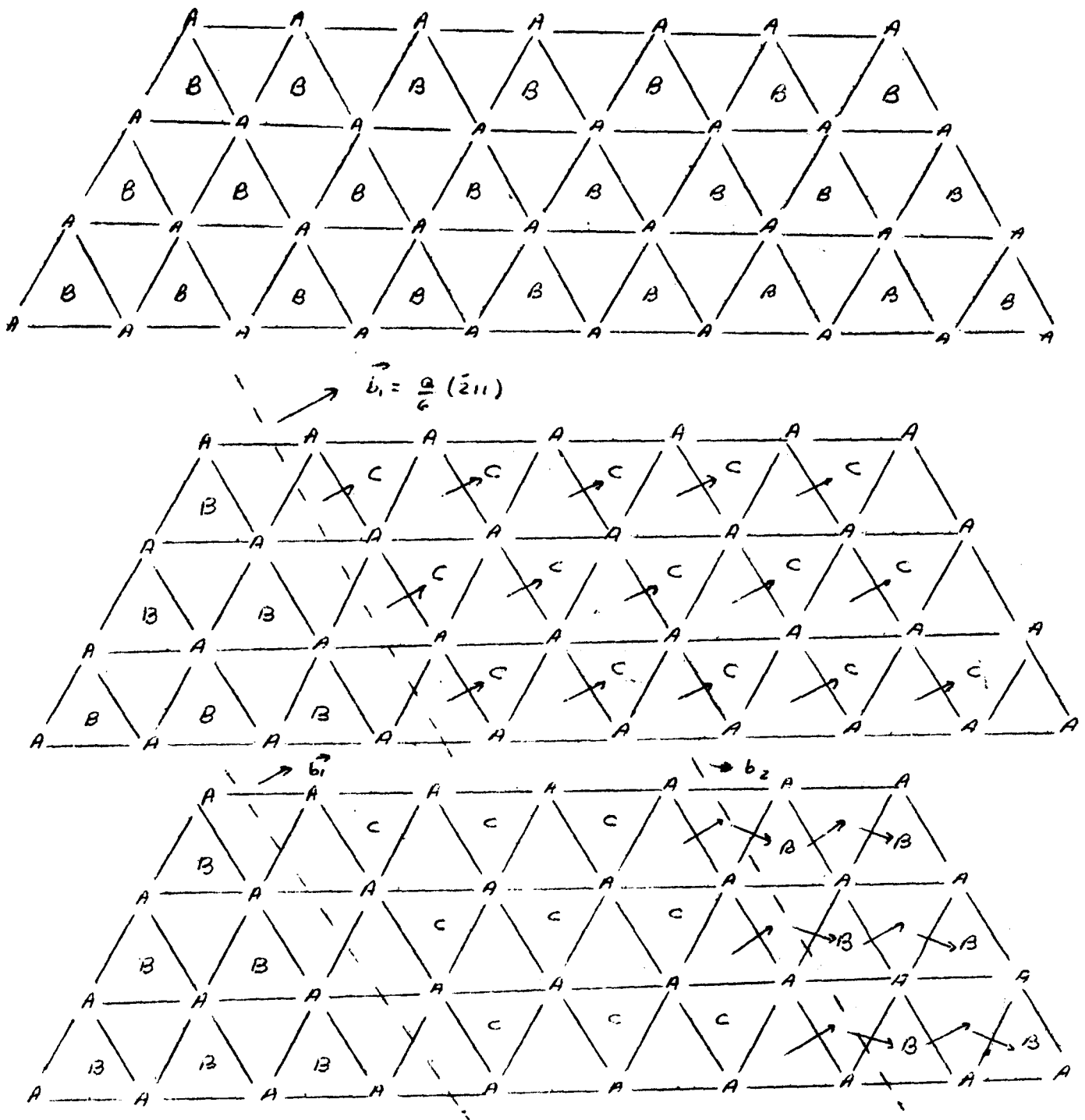


Figura A

simple o doble. Sin embargo, a un orden aún mayor de aproximación aparece una diferencia en energías de ambas fallas pues cambia el número de terceros vecinos. En general, la falla simple es menos energética que la doble. Típicos valores de fallas (presumiblemente simples) en fcc son:

[ergs/cm ²]		El vector de Burgers de dislocaciones S y D de Frank es el mismo. Ya que las dislocaciones se generan agregando o quitando parte de un plano compacto, su vector de Burgers es normal a dicho plano (111) y su longitud es igual al espaciado entre planos (111) adyacentes, esto es $a/\sqrt{3}$. Por lo tanto: $\vec{b} = \frac{a}{\sqrt{3}} [111]$
Au	10	
Ag	29	
Pb	24.5	
Cu	163	
Ni	300	
Al	238	

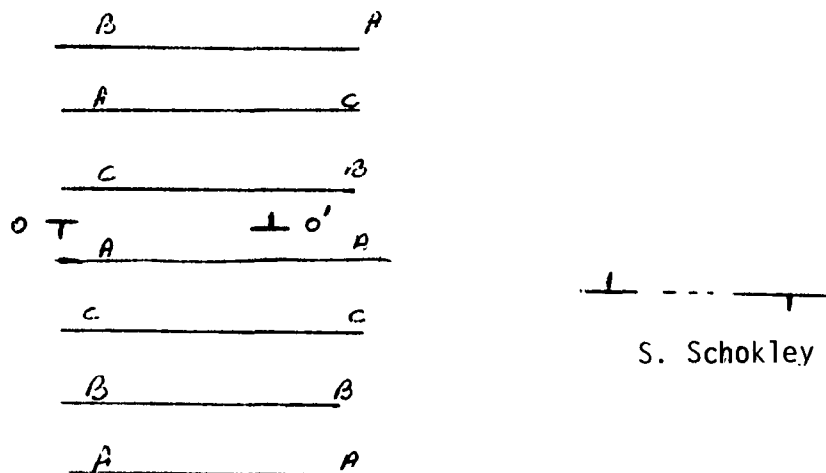
Se debe notar que sería extremadamente difícil mover una dislocación de Frank sobre su plano de deslizamiento, normal al plano (111) y por lo tanto plano no denso. Por ello, una dislocación de Frank es conocida como sésil término que contrasta con el comportamiento de una dislocación móvil, que puede moverse fácilmente sobre un plano de deslizamiento. Cabe notar que una dislocación imperfecta no debe ser sésil necesariamente.

Dislocaciones parciales de Shockley

Estudiaremos dislocaciones móviles imperfectas conocidas como dislocaciones de Shockley. Dada la secuencia

una dislocación de Shockley puede cambiar su orientación con respecto a su vector de Burgers y alterar su carácter de borde a mixta a hélice pura.

El desplazamiento que movió una porción de los átomos sobre un plano desde posiciones B a C también afectó a los átomos de todos los otros planos de la sección superior. En la región entre dislocaciones átomos originalmente en C pasan a A; y A pasa a B. Entre O y O' la secuencia de apilamiento es: ABCA/CABC. Entre las dislocaciones hay una falla de apilamiento. No importa si las dislocaciones cambian o no su orientación o cómo lo hagan, pero siguen conectadas a esta falla. Las generadas son dos parciales simples de Shockley



Reacciones involucrando dislocaciones perfectas e imperfectas

La reacción más importante de este tipo es la diso

ciación de una dislocación perfecta en dos parciales de Shockley. Por cristalografía puede verse que una dislocación perfecta con $\vec{b} = a/2 [\bar{1}01]$ puede disociarse en dos de Shockley con vectores $\vec{b}_2$ y $\vec{b}_3$ tales que:

$$\vec{b}_1 = \frac{a}{2} [\bar{1}01] \rightarrow \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = \frac{a}{6} [\bar{2}11] + \frac{a}{6} [\bar{1}\bar{1}2]$$

El plano de deslizamiento de cada una de las dislocaciones es el (111). Notar que en el caso anterior el par de dislocaciones eran iguales y de signo opuesto, en tanto en el caso presente los vectores de Burgers difieren totalmente.

La diferencia proviene del hecho que en el caso anterior los parciales eran creados en un cristal inicialmente perfecto, y en el presente nos referimos a dos parciales que se originan en la disociación de una dislocación perfecta pre-existente (ver tercer diagrama para comprender físicamente el producto de la reacción). El balance energético indica:

$$b_1^2 = \frac{a^2}{2}, \quad b_2^2 + b_3^2 = \frac{a^2}{3}$$

Por lo tanto, por la regla de Frank, la disociación es favorecida. El hecho que la energía total disminuya implica que las dos parciales se repelerán mutuamente y tenderán a apartarse. Que las fuerzas entre las parciales son repulsivas puede predecirse también a partir de consideraciones sobre sus vectores de Burgers. Pero, por otro lado, a mayor separación mayor será el área fallada y mayor será la energía debida a la falla de apilamiento. Se genera así una fuerza (virtual) debida a la falla como consecuencia de la varia-

ción de la energía de zona fallada ante una variación del área de la zona fallada al alejarse las parciales sobre su plano de deslizamiento. No obstante, se obtiene un espaciado de equilibrio cuando la fuerza ejercida por la falla de apilamiento sobre las parciales es balanceada por la fuerza de interacción entre éstas. El espaciado depende inversamente de la energía de falla de apilamiento y puede ser desde pocos espaciados ^{de 10 a 20} $\sqrt{A_1}$ a 20 o 30 distancias atómicas (acero inoxidable). Una dislocación perfecta podría también disociarse en una de Frank y una de Shockley:

$a/2 [01\bar{1}] \rightarrow a/6 [\bar{2}1\bar{1}] + a/3 [11\bar{1}]$. La suma de los cuadrados de los vectores de Burgers es idéntica al cuadrado del vector de Burgers original. Esta reacción ni aumenta ni disminuye la autoenergía de las dislocaciones. Normalmente la energía adicional asociada a la falla hace que la disociación sea imposible.

Dislocaciones stair-road

Supongamos dos dislocaciones de Shockley sobre planos de deslizamiento diferentes, por ejemplo: en el (111) la de vector de Burgers $\vec{b}_1 = a/6 [\bar{1}2\bar{1}]$ y en el ($\bar{1}11$) la de vector $\vec{b}_2 = a/6 [1\bar{1}2]$. La dislocación que resulte de la asociación de ambos tendrá vector $\vec{b}_R = a/6 [011]$ y estará a lo largo de la línea de intersección de los planos, o sea: $[0\bar{1}1]$. Considerando el producto vectorial del vector tangente a la línea y del vector de Burgers, se obtiene que el plano de deslizamiento de la dislocación resultante (de borde pura)

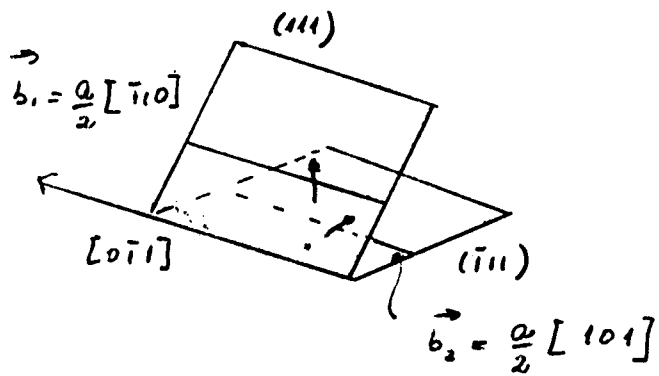
es del tipo (100), ésto es, se trata de una dislocación sessil, conocidas como stair-rod (nombre debido a Navarro). Cuando dos parciales de Shockley sobre planos diferentes se asocian, las fallas de apilamiento asociadas a las dislocaciones originales se unen en la intersección de los planos.

Barra de Cottrell-Lomer:

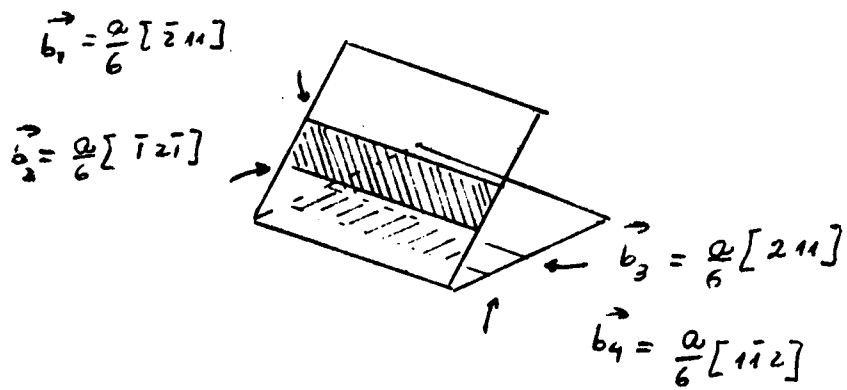
Supongamos dos dislocaciones móviles perfectas en planos densos cada una de las cuales se disocia en parciales de Shockley:

$$\begin{aligned}\vec{b} &\rightarrow \vec{b}_2 + \vec{b}_1 : \frac{a}{2} [\bar{1}10] \rightarrow \frac{a}{6} [\bar{1}2\bar{1}] + \frac{a}{6} [\bar{2}11] \\ \vec{b} &\rightarrow \vec{b}_4 + \vec{b}_3 : \frac{a}{2} [101] \rightarrow \frac{a}{6} [211] + \frac{a}{6} [1\bar{1}2]\end{aligned}$$

Las parciales móviles de vectores $\vec{b}_2$ y $\vec{b}_4$ pueden combinarse en la intersección formando una stair-rod (ver descripción anterior). Se verifica que la energía total de la stair-rod más las dos parciales remanentes es menor que la energía de una barrera de Lomer. La stair-rod (sessil) más las dos parciales son un obstáculo al movimiento de dislocaciones móviles en planos (111) y ($\bar{1}\bar{1}1$). Las tres dislocaciones (más el área fallada) forman la llamada barrera de Cottrell-Lomer.



Barrera de Homer



Barrera de Cottrell-Lomer

