

01.72.76

PLA

A11
01.72

C. N. E. A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
NO 1	AÑO 1972

ACCION DE LOS CAMPOS VECTORIAL Y TENSORIAL
SOBRE EL SPIN

TESIS

ANA M. PLATZECK

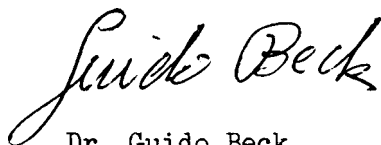
01.72.

ACCION DE LOS CAMPOS VECTORIAL Y TENSORIAL SOBRE EL SPIN

Ana María Platzeck

Centro Atómico Bariloche
Instituto de Física "Dr. José A. Balseiro"
Comisión Nacional de Energía Atómica
Universidad Nacional de Cuyo
Bariloche, Argentina

Tesis presentada ante la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Cuyo, República Argentina, para optar al Título de Doctora en Física.



Dr. Guido Beck

Asesor Científico



Lic. Ana María Platzeck

San Carlos de Bariloche (R.N.)

Argentina

1972

RESUMEN

Mientras que la mecánica clásica de un punto material conduce a ecuaciones de movimiento del tipo:

$$m c^2 \left(\frac{d^2 x^\nu}{d s^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu u^\alpha u^\beta \right) = F^\nu ,$$

la influencia de campos externos sobre otro campo (por ej. partículas cuánticas) origina una variedad de relaciones mucho mayor según el carácter tensorial de los campos en consideración. Esto corresponde, ya que existe relación entre el carácter tensorial y el espín, al hecho de que la acción de un campo externo dado sobre distintas partículas depende del espín de las mismas.

En el presente trabajo se considerará el caso particular de la acción de campos vectoriales (electromagnéticos) y tensoriales de rango dos (gravitatorios) externos sobre un campo espinorial (electrón de Dirac de espín 1/2).

Así como partiendo de la ecuación de Dirac en un campo electromagnético se obtiene una ecuación no relativista que contiene términos de interacción del campo magnético con el impulso angular orbital y con el espín, y de interacción espín-órbita en presencia de un campo eléctrico, se muestra que a partir de la ecuación de Dirac en un campo gravitatorio estacionario y con simetría axial se obtienen términos similares al caso electromagnético: interacción del campo de Coriolis con el impulso angular orbital y con el espín, e interacción espín-órbita, pero las constantes numéricas que multiplican estos términos son diferentes para el caso electromagnético y para el caso gravitatorio.

Se derivan las ecuaciones iterando la ecuación de Dirac con lo que se obtiene una ecuación de segundo grado en t ; poniendo $W = m c^2 + E$, con $E \ll m c^2$ se desprecian términos cuadráticos en E . En este orden se retienen solo los términos dependientes del espín. Se trabaja en coordenadas esféricas y para campos débiles. El tensor métrico utilizado en el caso gravitatorio es de la forma :

$$\xi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + \eta_{00}(r) & 0 & 0 & \eta_{03}(r, \theta) \\ 0 & -(1 - \eta_{00}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2(1 - \eta_{00}) & 0 \\ \eta_{03}(r, \theta) & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta (1 - \eta_{00}) \end{pmatrix}$$

Se calcula en particular el tensor métrico para una esfera de densidad de masa homogénea, que rota con velocidad angular uniforme ; y los potenciales electromagnéticos de una esfera de densidad de carga uniforme y velocidad angular ω . Se hace también una comparación de las ecuaciones clásicas de movimiento de una partícula en un campo gravitatorio y en uno electromagnético.

Definiendo:

$$V = 1/2 m c^2 \eta_{00}$$

$$A_i = - m c^2 \eta_{0i}$$

$$\vec{K} = \text{rot } \vec{A}$$

$$V = e \Phi$$

$$A_i = e A_i$$

$$\vec{K} = \text{rot } \vec{A} = e \vec{H}$$

para el caso gravitatorio y electromagnético respectivamente, los términos de interacción de los campos con el impulso angular orbital y el espín se pueden poner (para campos constantes) de la siguiente manera :

$$\frac{\hbar}{2mc} \vec{K} \cdot (\vec{L} + g \vec{S})$$

y los de interacción espín-órbita :

$$- T \frac{\hbar^2}{2 m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{\sigma} \cdot \vec{L}$$

el resultado obtenido es que mientras que para campos electromagnéticos

$$g = 2 \quad , \quad T = 1/2$$

para campos gravitatorios

$$g = 1 \quad , \quad T = 3/2$$

Esta diferencia en los factores numéricos se atribuye al distinto carácter tensorial de los campos que intervienen.

ACCION DE LOS CAMPOS VECTORIAL Y TENSORIAL SOBRE EL SPIN

I.- INTRODUCCION

1) Dado un espacio Riemanniano, si existe alguna simetría es posible elegir las coordenadas de tal modo que el tensor métrico no dependa de una de ellas. O sea que la existencia de la simetría nos indica una elección dada de las coordenadas.

Además, de la invariancia del tensor métrico ante cambios de una de las coordenadas, resulta la conservación de alguna cantidad física.

Simetría temporal, o más bien, invariancia ante traslaciones temporales, significa que es posible hacer una elección del tiempo tal que el tensor métrico g_{ik} no dependa de t ; de este modo queda fija la coordenada tiempo salvo la elección del origen en cada punto del espacio y un factor de escala [1]. Si elegimos así el tiempo podremos ver que tenemos conservación de energía.

$$p_0 = \int \sqrt{-g} \quad T^0_0 \quad d\tau$$
$$\frac{\partial T^\mu_\nu \sqrt{-g}}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\beta} \quad T^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \quad , \quad (1)$$
$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$$

Simetría axial: en el caso de simetría axial elegimos adecuadamente la coordenada correspondiente, φ . El tensor métrico no dependerá de ella y tendremos conservación del impulso angular

$$p_\varphi = \int T^\varphi_\varphi \sqrt{-g} \quad d\tau$$

2) Estudiaremos en forma comparativa la acción de un campo gravitatorio estacionario y con simetría axial dado por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$; y de un campo elec-

tromagnético A_μ sobre el espinor ψ .

En II se determina el campo métrico $g_{\mu\nu}$ producido por una esfera de radio r_0 y de densidad de masa uniforme μ_0 en rotación uniforme con velocidad angular ω .

En III se resuelve el caso análogo para un campo electromagnético A_μ producido por una esfera uniformemente cargada de densidad de carga ρ_0 , de igual velocidad angular.

En IV se comparan las ecuaciones clásicas de movimiento de una partícula pesada y una partícula cargada.

En V y VI se desarrollan las ecuaciones de Dirac de una partícula de espín 1/2 en los campos $g_{\mu\nu}$ y A_μ respectivamente.

En VII se comparan en los dos casos los distintos términos que corresponden respectivamente a la acción de las fuerzas de Coriolis sobre el momento angular y de la fuerza magnética sobre el momento magnético, y de la fuerza Newtoniana y de la fuerza Coulombiana sobre el acoplamiento espín órbita.

En VIII mostraremos que el movimiento de una partícula de espín 1/2 hace intervenir tres campos: el campo espinorial ψ sobre el cual actúan dos campos externos, el campo vectorial electromagnético A_μ y el campo métrico (inercial o gravitatorio) tensorial $g_{\mu\nu}$. Las combinaciones de los tres tensores de rango 1/2, 1 y 2 conducen, en cada caso a ciertos factores numéricos y permiten entender el origen de las constantes de la precesión de Larmor, del impulso angular del espín, del factor g del electrón, del factor de Thomas.

II.- El tensor métrico $g_{\mu\nu}$ obedece las ecuaciones de Einstein [2], [6], [7] :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2)$$

donde:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^\nu}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta$$

es el tensor de Ricci, que es simétrico,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía impulso. Por ejemplo, para un fluido incompresible de densidad μ_0 , presión p :

$$T_{\mu\nu} = (p + \mu_0 c^2) u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu} p \quad (3)$$

con

$$u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds}$$

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \text{ donde } G \text{ es la constante gravitacional } (G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sec}^{-2})$$

El sistema de ecuaciones (2) toma una forma más simple si se considera la aproximación de campos débiles; o sea:

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \quad (4)$$

donde $\delta_{\mu\nu}$ da la métrica de Lorentz

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y $|\eta_{\mu\nu}| \ll 1$.

Despreciando términos cuadráticos en $\eta_{\mu\nu}$ e imponiendo la condición, que es una condición sobre las coordenadas *):

$$\partial^{\alpha\beta} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \eta_{\alpha\gamma} \right)_{,\beta} = 0$$

(2) se puede poner:

$$\partial^{\alpha\beta} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \partial^\epsilon \partial^\sigma \eta_{\epsilon\sigma} \right)_{,\alpha\beta} = -2\kappa T_{\mu\nu}$$

Definiendo:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^0{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^1{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^3{}^2}$$

*) Notación: $f_{,\mu} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$

queda:

$$\square \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \int^{\epsilon\sigma} \eta_{\epsilon\sigma} \right) = -2\sigma T_{\mu\nu} \quad (6)$$

Si hacemos el cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} x^0 &= x^0 \\ x^1 &= x^1 \cos x^2 \cos x^3 \\ x^2 &= x^1 \cos x^2 \sin x^3 \\ x^3 &= x^1 \sin x^2 \end{aligned}$$

en las nuevas coordenadas "esféricas" : $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \varphi)$,

el tensor métrico es:

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \eta_{\alpha\beta} \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \delta_{\alpha\beta} + \eta'_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (7)$$

El primer término es igual al tensor métrico en coordenadas esféricas del espacio plano:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

a) Solución aproximada para el tensor métrico dentro de una esfera homogénea, problema estático.

Para calcular el tensor de energía-impulso despreciaremos la contribución de la presión en (3).

$$\begin{aligned} T_{00} &= \mu_0 c^2 \\ T_{0i} &= 0 \\ T_{ik} &= 0 \end{aligned} \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (8)$$

Como $\eta_{\mu\nu}$ no dependen de t las ecuaciones (6) se pueden poner:

$$\Delta \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \int_{\mu\nu} \int^{\epsilon\sigma} \eta_{\epsilon\sigma} \right) = 2 \delta T_{\mu\nu}$$

Utilizando los valores de $T_{\mu\nu}$ de (8) se obtiene:

$$\Delta \eta_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu \quad (9)$$

$$\Delta \left[\eta_{00} - \frac{1}{2} (\eta_{00} - \eta_{11} - \eta_{22} - \eta_{33}) \right] = 2 \delta T_{00} \quad (10)$$

$$\Delta \left[\eta_{11} + \frac{1}{2} (\eta_{00} - \eta_{11} - \eta_{22} - \eta_{33}) \right] = 0 \quad (11)$$

$$\Delta \left[\eta_{22} + \frac{1}{2} (\eta_{00} - \eta_{11} - \eta_{22} - \eta_{33}) \right] = 0 \quad (12)$$

$$\Delta \left[\eta_{33} + \frac{1}{2} (\eta_{00} - \eta_{11} - \eta_{22} - \eta_{33}) \right] = 0 \quad (13)$$

Restando las ecuaciones (11), (12) y (13) de la (10) :

$$\Delta \left[\eta_{00} - \eta_{11} - \eta_{22} - \eta_{33} \right] = -2 \delta T_{00} \quad (14)$$

y reemplazando en (10) se obtiene la ecuación para η_{00} :

$$\Delta \eta_{00} = \delta T_{00}$$

Además, sumando y restando entre sí las ecuaciones (11), (12) y (13) se muestra que:

$$\Delta \eta_{00} = \Delta \eta_{11} = \Delta \eta_{22} = \Delta \eta_{33}$$

O sea:

$$\eta_{00} = \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} \quad ; \quad \eta_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu$$

Pasando a coordenadas (ct, r, θ, φ), según (7) :

$$\eta_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}$$

$$\eta'_{00} = \eta_{00}$$

$$\eta'_{11} = \eta_{11} = \eta_{00}$$

$$\eta'_{22} = r^2 \eta_{22} = r^2 \eta_{00}$$

$$\eta'_{33} = r^2 \sin^2 \theta \eta_{33} = r^2 \sin^2 \theta \eta_{00}$$

$$\eta'_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu$$

Quedan todas expresadas en función de η_{00} que debe cumplir la ecuación:

$$\Delta \eta_{00} = 26 \mu_0 c^2 \quad r < r_0$$

$$\Delta \eta_{00} = 0 \quad r > r_0$$

donde r_0 es el radio de la esfera de densidad μ_0 .

Como hay simetría en t , θ y φ , η_{00} será función solo de r .

$$\frac{d^2 \eta_{00}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\eta_{00}}{dr} = \begin{cases} 26 \mu_0 c^2 & r < r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

Cuya solución es:

$$\eta_{00} = \frac{1}{6} 26 \mu_0 c^2 r^2 - \frac{1}{2} 26 \mu_0 c^2 r_0^2, \quad r < r_0$$

$$\eta_{00} = -\frac{1}{3} 26 \mu_0 c^2 r_0^3 \frac{1}{r}, \quad r > r_0$$

O bien;

(15)

$$\eta_{00} = \frac{4}{3} \frac{\pi G}{c^2} \mu_0 r^2 - \frac{4\pi G}{c^2} \mu_0 r_0^2, \quad r < r_0$$

$$\eta_{00} = -\frac{8}{3} \frac{\pi G}{c^2} \mu_0 r_0^3 \frac{1}{r} = -\frac{2MG}{c^2} \frac{1}{r}, \quad r > r_0$$

donde M es la masa total de la esfera.

En coordenadas ct, r, θ, φ tenemos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + \eta_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - \eta_{00}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2(1 - \eta_{00}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta (1 - \eta_{00}) \end{pmatrix} \quad (16)$$

b) Solución aproximada para el tensor métrico dentro de una esfera homogénea que gira con velocidad ω : problema estacionario.

En este caso usaremos como tensor de energía-impulso, despreciando en (3) términos cuadráticos en v y la contribución de la presión:

$$T_{00} = \mu_0 c^2$$

$$T_{ik} = 0 \quad i, k = 1, 2, 3.$$

$$T_{01} = -\mu_0 c^2 \frac{v_x}{c} = \mu_0 c^2 \frac{\omega}{c} r \sin \theta \sin \varphi$$

$$T_{02} = -\mu_0 c^2 \frac{v_y}{c} = -\mu_0 c^2 \frac{\omega}{c} r \sin \theta \cos \varphi$$

$$T_{03} = 0$$

con lo que se deben seguir cumpliendo las ecuaciones (10), (11), (12), y (13), de donde se tiene:

$$\eta_{00} = \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33}$$

y
$$\Delta \eta_{00} = 2\mu_0 c^2$$

con lo que η_{00} viene dado por (15).

Además:

$$\Delta \eta_{ik} = 0, \quad \eta_{ik} = 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (17)$$

$$\Delta \eta_{0i} = 2\mu_0 T_{0i} \quad (18)$$

$$\Delta \eta_{02} = 2 \gamma_0 T_{02} \quad (19)$$

$$\Delta \eta_{03} = 0 \quad , \quad \eta_{03} = 0 \quad (20)$$

Pasando a coordenadas (ct, r, θ, φ) :

$$\eta'_{00} = \eta_{00}$$

$$\eta'_{11} = \eta_{11} = \eta_{00}$$

$$\eta'_{22} = r^2 \eta_{22} = r^2 \eta_{00}$$

$$\eta'_{33} = r^2 \text{sen}^2 \theta \eta_{33} = r^2 \text{sen}^2 \theta \eta_{00}$$

$$\eta'_{ik} = 0 \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, 3.$$

$$\eta'_{0i} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^0} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^i} \eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^i} \eta_{0\beta}$$

$$\eta'_{01} = \text{sen } \theta \cos \varphi \eta_{01} + \text{sen } \theta \text{sen } \varphi \eta_{02}$$

$$\eta'_{02} = r \cos \theta \cos \varphi \eta_{01} + r \cos \theta \text{sen } \varphi \eta_{02}$$

$$\eta'_{03} = -r \text{sen } \theta \text{sen } \varphi \eta_{01} + r \text{sen } \theta \cos \varphi \eta_{02}$$

De las ecuaciones (18) y (19) resulta:

$$\Delta \left(\frac{\eta'_{01}}{\text{sen } \theta} \right) = \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\eta'_{01}}{\text{sen } \theta} \quad (21)$$

$$\Delta \left(\frac{\eta'_{02}}{r \cos \theta} \right) = \frac{1}{r^3 \text{sen}^2 \theta \cos \theta} \eta'_{02}$$

$$\Delta \left(\frac{\eta'_{03}}{r \text{sen } \theta} \right) = \begin{cases} -2 \gamma_0 \mu_0 c^2 \frac{\omega}{c} r \text{sen } \theta + \frac{\eta'_{03}}{r^3 \text{sen}^3 \theta} & , r < r_0 \\ \frac{\eta'_{03}}{r^3 \text{sen}^3 \theta} & , r > r_0 \end{cases} \quad (22)$$

La solución de las ecuaciones (21) es:

$$\eta'_{01} = 0$$

$$\eta'_{02} = 0$$

La ecuación (22) la podemos poner:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \left(\frac{\eta'_{03}}{r \sin \theta} \right) = -2\gamma_6 \mu_0 c^2 \frac{\omega}{c} r \sin \theta$$

Cuya solución es:

$$\eta'_{03} = -\frac{1}{5} \gamma_6 \mu_0 c^2 \frac{\omega}{c} r^4 \sin^2 \theta + \frac{1}{3} \gamma_6 \mu_0 c^2 \frac{\omega}{c} r_0^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad r < r_0$$

$$\eta'_{03} = \frac{2}{15} \gamma_6 \mu_0 c^2 \frac{\omega}{c} \frac{r_0^5}{r} \sin^2 \theta, \quad r > r_0$$

o bien:

(23)

$$\eta'_{03} = -\frac{8}{5} \frac{\pi G}{c^2} \mu_0 \frac{\omega}{c} r^4 \sin^2 \theta + \frac{8}{3} \frac{\pi G}{c^2} \mu_0 \frac{\omega}{c} r_0^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad r < r_0$$

$$\eta'_{03} = \frac{16}{15} \frac{\pi G}{c^2} \mu_0 \frac{\omega}{c} \frac{r_0^5}{r} \sin^2 \theta, \quad r > r_0$$

Teníamos además, de (15):

$$\eta_{00} = \frac{4}{3} \frac{\pi G}{c^2} \mu_0 r^2 - \frac{4}{3} \frac{\pi G}{c^2} \mu_0 r_0^2, \quad r < r_0$$

$$\eta_{00} = -\frac{8}{3} \frac{\pi G}{c^2} \mu_0 r_0^3 \frac{1}{r} = -\frac{2MG}{c^2} \frac{1}{r}, \quad r > r_0$$

Luego, el tensor métrico calculado en primera aproximación, para una esfera homogénea que gira con velocidad ω es, en el sistema de coordenadas (ct, r, θ, φ) :

$$g'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + \eta_{00} & 0 & 0 & \eta'_{03} \\ 0 & -(1 - \eta_{00}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2(1 - \eta_{00}) & 0 \\ \eta'_{03} & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta (1 - \eta_{00}) \end{pmatrix} \quad (24)$$

donde η_{00} y η'_{03} están dados por (15) y (23) respectivamente.

III.- El potencial electromagnético:

$$\begin{aligned} A^\mu &= (\Phi, A_x, A_y, A_z) \\ A_\mu &= (\Phi, -A_x, -A_y, -A_z) \end{aligned} \quad (25)$$

en coordenadas (ct, x, y, z) con métrica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cumple las ecuaciones:

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (26)$$

donde:

$$j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z)$$

derivadas de las ecuaciones de Maxwell, con la condición de Lorentz:

$$A_{,\mu}^\mu = 0 \quad (27)$$

Si se pasa a coordenadas esféricas : $(ct, r, \theta, \varphi) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$

$$ct = ct$$

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$A'^0 = A^0 = \Phi$$

$$A'^1 = A_r = \operatorname{sen} \theta \cos \varphi A_x + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi A_y + \cos \theta A_z \quad (28)$$

$$A'^2 = \frac{1}{r} A_\theta = \frac{1}{r} (\cos \theta \cos \varphi A_x + \cos \theta \operatorname{sen} \varphi A_y - \operatorname{sen} \theta A_z)$$

$$A'^3 = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} A_\varphi = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} (-\operatorname{sen} \varphi A_x + \cos \varphi A_y)$$

a) Caso estático: $j^\mu = (c\rho_0, 0, 0, 0)$

Solución para una esfera cargada de densidad constante ρ_0 y radio r_0 .

Las ecuaciones (26) serán en este caso:

$$\Delta \bar{\Phi} = \begin{cases} -4\pi\rho_0 & r < r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases} \quad (29)$$

$$\Delta A_x = \Delta A_y = \Delta A_z = 0$$

Cuya solución es:

$$\bar{\Phi} = \begin{cases} -\frac{2}{3}\pi\rho_0 r^2 + 2\pi\rho_0 r_0^2 & r < r_0 \\ \frac{4}{3}\pi\rho_0 r_0^3 \frac{1}{r} & r > r_0 \end{cases} \quad (30)$$

$$A_x = A_y = A_z = 0; \quad \text{o bien} \quad A_r = A_\theta = A_\varphi = 0$$

b) Caso estacionario: esfera cargada de densidad constante ρ_0 y radio r_0 que gira con velocidad ω .

$$\begin{aligned} j^\mu &= (c\rho_0, j_x, j_y, 0) \\ j_x &= \rho_0 v_x = -\rho_0 \omega r \sin\theta \sin\varphi \\ j_y &= \rho_0 v_y = \rho_0 \omega r \sin\theta \cos\varphi \end{aligned} \quad (31)$$

Tendremos entonces las siguientes ecuaciones, de (26) :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\Phi} &= -4\pi\rho_0 \\ \Delta A_x &= -\frac{4\pi}{c} j_x = 4\pi\rho_0 \frac{\omega}{c} r \sin\theta \sin\varphi \\ \Delta A_y &= -\frac{4\pi}{c} j_y = -4\pi\rho_0 \frac{\omega}{c} r \sin\theta \cos\varphi \\ \Delta A_z &= 0 \end{aligned} \quad r < r_0 \quad (32)$$

y de (27) :

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \quad (33)$$

Si pasamos a coordenadas esféricas se cumplen las relaciones (28), con $A_z = 0$:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \Phi \\ A_r &= \text{sen } \theta \cos \varphi A_x + \text{sen } \theta \text{sen } \varphi A_y \\ A_\theta &= \cos \theta \cos \varphi A_x + \cos \theta \text{sen } \varphi A_y \\ A_\varphi &= -\text{sen } \varphi A_x + \cos \varphi A_y \end{aligned} \quad (34)$$

Utilizando (32) y (34) obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\Phi} &= -4\pi \rho_0 \\ \Delta \left(\frac{A_r}{\text{sen } \theta} \right) &= \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{A_r}{\text{sen } \theta} \\ \Delta \left(\frac{A_\theta}{\cos \theta} \right) &= \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{A_\theta}{\cos \theta} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\Delta A_\varphi = \begin{cases} -4\pi \rho_0 \frac{\omega}{c} r \text{sen } \theta + \frac{A_\varphi}{r^2 \text{sen}^2 \theta} & r < r_0 \\ \frac{A_\varphi}{r^2 \text{sen}^2 \theta} & r > r_0 \end{cases}$$

La solución de (35) es:

$$\bar{\Phi} = \begin{cases} -\frac{2}{3} \pi \rho_0 r^2 + 2\pi \rho_0 r_0^2 & r < r_0 \\ \frac{4}{3} \pi \rho_0 r_0^3 \frac{1}{r} & r > r_0 \end{cases}$$

$$A_r = 0$$

$$A_\theta = 0$$

$$A_\varphi = \begin{cases} -\frac{2}{5} \pi \rho_0 \frac{\omega}{c} r^3 \text{sen } \theta + \frac{2}{3} \pi \rho_0 \frac{\omega}{c} r_0^2 r \text{sen } \theta, & r < r_0 \\ \frac{4}{15} \pi \rho_0 \frac{\omega}{c} \frac{r_0^5}{r^2} \text{sen } \theta & r > r_0 \end{cases}$$

$$A'_3 = \frac{A_\varphi}{r \text{sen } \theta}$$

$$A'_3 = -r \text{sen } \theta A_\varphi$$

IV.- Ecuaciones clásicas de movimiento.

Para la comparación de los dos campos resultará conveniente utilizar las ecuaciones de movimiento en la forma de Euler[2]

$$\frac{dp_{\mu}}{ds} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}}$$

con

$$p_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^{\mu}}{ds} \right)}$$

$$\mathcal{L} = mc \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds}} + \frac{e}{c} A_{\mu} \frac{dx^{\mu}}{ds}$$

Luego
$$p_{\mu} = mc g_{\mu\nu} \frac{dx^{\nu}}{ds} + \frac{e}{c} A_{\mu} = mc g_{\mu\nu} u^{\nu} + \frac{e}{c} A_{\mu}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} &= \frac{mc}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\beta}}{ds} + \frac{e}{c} \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{dx^{\nu}}{ds} \\ &= \frac{mc}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} u^{\alpha} u^{\beta} + \frac{e}{c} \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} u^{\nu} \end{aligned}$$

y las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{dp_{\mu}}{ds} = \frac{d}{ds} \left(mc g_{\mu\nu} u^{\nu} + \frac{e}{c} A_{\mu} \right) = \frac{mc}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} u^{\alpha} u^{\beta} + \frac{e}{c} \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} u^{\nu}$$

Para obtener las ecuaciones para una partícula pesada en un campo gravitacional y para una partícula cargada en un campo electromagnético hacemos $A_{\nu} = 0$, y

$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ respectivamente.

Campo gravitacional

$$p_{\mu} = mc g_{\mu\nu} u^{\nu}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\mu}}{ds} &= \frac{mc}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} u^{\alpha} u^{\beta} \\ &\cong \frac{mc}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\mu}} + mc \frac{\partial g_{0k}}{\partial x^{\mu}} u^k \\ &= \frac{mc}{2} \frac{\partial \eta_{00}}{\partial x^{\mu}} + mc \frac{\partial \eta_{0k}}{\partial x^{\mu}} u^k \end{aligned}$$

Donde
$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}$$

Campo electromagnético

$$p_{\mu} = mc u_{\mu} + \frac{e}{c} A_{\mu}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\mu}}{ds} &= \frac{e}{c} \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} u^{\nu} \\ &\cong \frac{e}{c} \frac{\partial A_0}{\partial x^{\mu}} + \frac{e}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x^{\mu}} u^k \\ &= \frac{e}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\mu}} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x^{\mu}} u^k \end{aligned}$$

Ya que
$$A_{\mu} = \left(\frac{\Phi}{c}, -A_x, -A_y, -A_z \right)$$

$$\frac{m c}{2} \frac{\partial \eta_{00}}{\partial x^\mu} \text{ se corresponde con } \frac{e}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$$

$$m c \frac{\partial \eta_{0k}}{\partial x^\mu} \text{ se corresponde con } - \frac{e}{c} \frac{\partial \Delta_k}{\partial x^\mu}$$

Definimos las siguientes cantidades:

Campo gravitatorio

$$V = \frac{1}{2} m c^2 \eta_{00}$$

$$\vec{F} = - \text{grad } V \quad : \text{ Newton}$$

$$A_x = - m c^2 \eta_{01} \quad (37a)$$

$$A_y = - m c^2 \eta_{02}$$

$$A_z = - m c^2 \eta_{03}$$

$$\vec{K} = \text{rot } \vec{A} \quad : \text{ campo de Coriolis}$$

$$\frac{dp_\mu}{ds} = \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial x^\mu} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x^\mu} u^k$$

Campo electromagnético

$$V = e \phi$$

$$\vec{F} = e \vec{E} = - e \text{ grad } \phi = - \text{ grad } V$$

Coulomb

$$A_x = e \Delta_x \quad (37b)$$

$$A_y = e \Delta_y$$

$$A_z = e \Delta_z$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} \quad : \text{ campo magnético}$$

$$\vec{K} = e \vec{H} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\frac{dp_\mu}{ds} = \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial x^\mu} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x^\mu} u^k$$

Que obedecen a las siguientes ecuaciones:

$$\Delta V = 4\pi \frac{G m}{c^2} T_{00} = 4\pi G m \mu_0$$

$$\Delta A_x = -16\pi \frac{G m}{c^2} T_{0x} = 16\pi G m \mu_0 \frac{v_x}{c} \quad (38a)$$

$$\Delta A_y = -16\pi \frac{G m}{c^2} T_{0y} = 16\pi G m \mu_0 \frac{v_y}{c}$$

$$\Delta A_z = -16\pi \frac{G m}{c^2} T_{0z} = 16\pi G m \mu_0 \frac{v_z}{c}$$

$$\Delta V = -4\pi e \rho_0 = 4\pi |e \rho_0|$$

$$\Delta A_x = -4\pi e \rho_0 \frac{v_x}{c} = 4\pi |e \rho_0| \frac{v_x}{c} \quad (38b)$$

$$\Delta A_y = -4\pi e \rho_0 \frac{v_y}{c} = 4\pi |e \rho_0| \frac{v_y}{c}$$

$$\Delta A_z = -4\pi e \rho_0 \frac{v_z}{c} = 4\pi |e \rho_0| \frac{v_z}{c}$$

\vec{A} , en el caso gravitatorio, se transforma como vector solamente bajo transformaciones espaciales, que no incluyen el tiempo. Ante éstas, V permanece invariante; ante transformaciones más generales hay que considerar que son parte de

un tensor $\eta_{\mu\nu}$.

Si tomamos coordenadas esféricas, y designamos con los subíndices r, θ, φ las componentes físicas de un vector:

$$\begin{aligned} a_r &= \text{sen } \theta \cos \varphi a_x + \text{sen } \theta \text{sen } \varphi a_y + \cos \theta a_z \\ a_\theta &= \cos \theta \cos \varphi a_x + \cos \theta \text{sen } \varphi a_y - \text{sen } \theta a_z \\ a_\varphi &= -\text{sen } \varphi a_x + \cos \varphi a_y \end{aligned}$$

y en el caso en que $a_r = 0, a_\theta = \theta$, se tendrá:

$$\begin{aligned} K_r &= \frac{1}{r \text{sen } \theta} \frac{\partial a_\varphi \text{sen } \theta}{\partial \theta} \\ K_\theta &= \frac{-1}{r \text{sen } \theta} \frac{\partial a_\varphi r \text{sen } \theta}{\partial r} \end{aligned} \tag{39}$$

Ejemplos:

a) Si estamos en un espacio euclídeo y consideramos un sistema que rota con velocidad ω tendremos un $g_{\mu\nu}$ que da la inercia:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega^2}{c^2} (x^2 + y^2) & -\frac{\omega}{c} y & \frac{\omega}{c} x & 0 \\ -\frac{\omega}{c} y & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\omega}{c} x & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Compararemos las ecuaciones de movimiento en este sistema y las que corresponden a una partícula cargada en un campo magnético constante en la dirección z , y potencial Φ .

$$h_x = -\frac{1}{2} H y$$

$$h_y = \frac{1}{2} H x$$

$$V = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2)$$

$$A_x = m \omega c y$$

$$A_y = -m \omega c x$$

$$p_1 = -m c u' - m \omega y$$

$$p_2 = -m c u^2 + m \omega x$$

$$p_3 = -m c u^3$$

$$\frac{dp_1}{ds} = m \frac{\omega^2}{c} x + m \omega u^2$$

(40a)

$$\frac{dp_2}{ds} = m \frac{\omega^2}{c} y - m \omega u'$$

$$\frac{dp_3}{ds} = 0$$

$$V = e \Phi$$

$$A_x = -\frac{1}{2} e H y$$

$$A_y = \frac{1}{2} e H x$$

$$p_1 = m c u' + \frac{e}{c} A_x = -m c u' - \frac{e}{c} A_x \\ = -m c u' + \frac{1}{2} e H y$$

$$p_2 = -m c u^2 - \frac{1}{2} e H x$$

$$p_3 = -m c u^3$$

$$\frac{dp_1}{ds} = \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{e}{c} H u^2$$

(40b)

$$\frac{dp_2}{ds} = \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{e}{c} H u'$$

$$\frac{dp_3}{ds} = \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial z}$$

b) Esfera de densidad de masa μ_0 y radio r_0 y esfera cargada de densidad de carga ρ_0 y radio r_0 . El $g_{\mu\nu}$ y A_μ correspondientes han sido calculados en párrafos II y III respectivamente ((24) y (36)).

En cada uno de estos campos tendremos:

$$V = \frac{2}{3} \pi m G \mu_0 r^2 - 2 \pi m G \mu_0 r^2$$

$$A_\psi = 8 \pi m G \mu_0 \frac{\omega}{c} \left(\frac{1}{5} r^2 - \frac{1}{3} r_0^2 \right) r \sin \theta \quad (41a)$$

$$K_r = 16 \pi m G \mu_0 \frac{\omega}{c} \left(\frac{1}{5} r^2 - \frac{1}{3} r_0^2 \right) \cos \theta$$

$$K_\theta = 16 \pi m G \mu_0 \frac{\omega}{c} \left(-\frac{2}{5} r^2 + \frac{1}{3} r_0^2 \right) \sin \theta$$

$$V = \frac{2}{3} \pi |e \rho_0| r^2 - 2 \pi |e \rho_0| r_0^2$$

$$A_\psi = 2 \pi |e \rho_0| \frac{\omega}{c} \left(\frac{1}{5} r^2 - \frac{1}{3} r_0^2 \right) r \sin \theta \quad (41b)$$

$$K_r = 4 \pi |e \rho_0| \frac{\omega}{c} \left(\frac{1}{5} r^2 - \frac{1}{3} r_0^2 \right) \cos \theta$$

$$K_\theta = 4 \pi |e \rho_0| \frac{\omega}{c} \left(-\frac{2}{5} r^2 + \frac{1}{3} r_0^2 \right) \sin \theta$$

V.- Electrón de Dirac en un campo gravitacional.

La ecuación de Dirac en espacios euclídeos es:

$$i \hbar \gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} = m c \psi \quad (42)$$

En estos espacios se puede hacer un cambio de coordenadas a un sistema cartesiano $\bar{x}^\mu = (ct, x, y, z)$

$$x^\nu = x^\nu(\bar{x}^\mu) \quad (43)$$

Las matrices γ^μ se podrán expresar en función de las matrices de Dirac constantes: $\beta, \gamma^x, \gamma^y, \gamma^z$ que designaremos con $\bar{\gamma}^\mu$

$$\gamma^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \bar{\gamma}^\nu \quad (44)$$

y se cumple que:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \quad (45)$$

y además, que la derivada covariante [5] de los γ^μ es nula:

$$\gamma^\mu_{; \nu} = \frac{\partial \gamma^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \gamma^\alpha = 0 \quad (46)$$

donde: $\Gamma^\mu_{\alpha\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \left(\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} \right)$

En espacios no euclídeos, con gravitación, si tenemos un sistema de coordenadas x^μ no se puede hacer ningún cambio de coordenadas que nos lleve a coordenadas cartesianas.

Tenemos cuatro matrices $\bar{\gamma}^\mu$ que cumplen:

$$\bar{\gamma}^\mu \bar{\gamma}^\nu + \bar{\gamma}^\nu \bar{\gamma}^\mu = 2 g^{\mu\nu}$$

que se transforman como vectores ante cambios de coordenadas, y que ante transformaciones espinoriales:

$$\psi' = S \psi$$

se transforman como:

$$\bar{\gamma}'^\mu = S \bar{\gamma}^\mu S^{-1}$$

Se define la derivada "espinorial", que designaremos con / de la siguiente manera ([2] , [3]) :

$$\psi_{/\nu} = \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} - \Gamma_\nu \psi$$

$$\psi_{/\nu}^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial x^\nu} + \psi^+ \Gamma_\nu$$

$$\gamma_{/\nu}^\mu = \gamma_{;\nu}^\mu - \Gamma_\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \Gamma_\nu$$

y se impone la condición $\gamma_{/\nu}^\mu = 0$ (47)

Si se elige en cada punto un sistema local de coordenadas cartesianas [8]

$$d\bar{x}^k = b_\nu^k dx^\nu, \quad dx^\mu = a_i^\mu d\bar{x}^i \quad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

tendremos

$$\begin{aligned} \gamma^\mu &= a_i^\mu \bar{\gamma}^i, & \gamma_\nu &= b_\nu^k \bar{\gamma}_k \\ \bar{\gamma}^i &= b_\mu^i \gamma^\mu, & \bar{\gamma}_k &= a_k^\nu \gamma_\nu \\ g^{\mu\nu} &= a_i^\mu a_k^\nu \delta^{ik}, & g_{\mu\nu} &= b_\mu^i b_\nu^k \delta_{ik} \end{aligned} \quad (48)$$

Con la condición $\gamma_{/\nu}^\mu = 0$ y esta elección de γ^μ ("Vierbein") quedan determinadas las matrices Γ_ν , salvo un múltiplo de la unidad I :

$$\Gamma_\nu = \frac{1}{8} g_{\sigma\alpha} \left[\left(\frac{\partial b_\mu^k}{\partial x^\nu} \right) a_k^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \right] (\gamma^\sigma \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\sigma) + a_\nu I; \quad (49)$$

a_ν será nula en ausencia de campos electromagnéticos; (49) se puede poner también:

$$\Gamma_\nu = \frac{1}{4} (\gamma_{\mu,\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \gamma_\alpha) \gamma^\mu \quad (50)$$

La ecuación:

$$i \hbar \gamma^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_\mu \right) \psi = m c \psi \quad (51)$$

o sea:

$$i \hbar \gamma^\mu \psi_{/\mu} = m c \psi$$

es invariante ante cambios de coordenadas y ante transformaciones espinoriales y

se reduce a la ecuación (42) en el caso euclídeo.

La ecuación (51) es la ecuación de Dirac en presencia de gravitación ([2], [3]).

Analizaremos para el caso en que existe simetría temporal y axial y que $g_{\mu\nu}$ es de la forma (24) :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + \eta_{00} & 0 & 0 & \eta_{03} \\ 0 & -(1 - \eta_{00}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2(1 - \eta_{00}) & 0 \\ \eta_{03} & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2 \theta (1 - \eta_{00}) \end{pmatrix}$$

Las coordenadas son: $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \psi)$.

$g^{\mu\nu}$ debe ser tal que $g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = \delta^{\mu}_{\alpha}$. Luego:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \eta_{00} & 0 & 0 & \frac{\eta_{03}}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \\ 0 & -(1 + \eta_{00}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(1 + \eta_{00})}{r^2} & 0 \\ \frac{\eta_{03}}{r^2 \text{sen}^2 \theta} & 0 & 0 & -\frac{(1 + \eta_{00})}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \end{pmatrix}$$

con $\eta_{00} = \eta_{00}(r)$, $\eta_{03} = \eta_{03}(r, \theta)$

Las matrices γ^{μ} serán:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= (1 - \eta_{00})^{1/2} \beta \\ \gamma^1 &= (1 + \eta_{00})^{1/2} \gamma^r \\ \gamma^2 &= \frac{1}{r} (1 + \eta_{00})^{1/2} \gamma^\theta \\ \gamma^3 &= \frac{1}{r \text{sen} \theta} (1 + \eta_{00})^{1/2} \gamma^\psi + \frac{\eta_{03}}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \beta \end{aligned} \tag{52}$$

donde :

$$\begin{aligned}\gamma^r &= \text{sen } \theta \cos \varphi \gamma^x + \text{sen } \theta \text{sen } \varphi \gamma^y + \cos \theta \gamma^z \\ \gamma^\theta &= \cos \theta \cos \varphi \gamma^x + \cos \theta \text{sen } \varphi \gamma^y - \text{sen } \theta \gamma^z \\ \gamma^\varphi &= -\text{sen } \varphi \gamma^x + \cos \varphi \gamma^y\end{aligned}$$

Iteraremos la ecuación de Dirac para obtener una ecuación de segundo grado.

Al hacerlo despreciaremos los términos cuadráticos en $\eta_{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} - \Gamma_\mu \Psi \right) &= \frac{m c}{i \hbar} \Psi \\ \left[(1 - \eta_{00})^{1/2} \frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t} + (1 + \eta_{00})^{1/2} \left(\gamma^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\gamma^\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\gamma^\varphi}{r \text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\eta_{03} \beta}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \gamma^\mu \Gamma_\mu \right] \Psi = \frac{m c}{i \hbar} \Psi \quad (53)\end{aligned}$$

Iterando:

$$\begin{aligned}\left[(1 - \eta_{00})^{1/2} \frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t} + (1 + \eta_{00})^{1/2} \left(\gamma^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\gamma^\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\gamma^\varphi}{r \text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\eta_{03} \beta}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \gamma^\mu \Gamma_\mu \right] \cdot \left[(1 - \eta_{00})^{1/2} \frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t} + (1 + \eta_{00})^{1/2} \left(\gamma^r \frac{\partial}{\partial r} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma^\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\gamma^\varphi}{r \text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{\eta_{03} \beta}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \gamma^\nu \Gamma_\nu \right] \Psi = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi\end{aligned}$$

Se obtiene :

$$\begin{aligned}\left\{ (1 - \eta_{00}) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (1 + \eta_{00}) \Delta + \frac{2 \eta_{03}}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \varphi} - \right. \\ \left. - \frac{1}{c} (\beta \gamma^\nu \Gamma_\nu + \gamma^\nu \Gamma_\nu \beta) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \eta_{00}}{\partial r} \beta \gamma^r \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial \eta_{00}}{\partial r} \gamma^r \left(\gamma^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\gamma^\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\gamma^\varphi}{r \text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \left(\frac{\eta_{03}}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \right)}{\partial r} \gamma^r \beta \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial \left(\frac{\eta_{03}}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \right)}{\partial \theta} \frac{\gamma^\theta}{r} \beta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\gamma^r \frac{\partial \gamma^{\nu} \Gamma_{\nu}}{\partial r} + \frac{\gamma^{\theta}}{r} \frac{\partial \gamma^{\nu} \Gamma_{\nu}}{\partial \theta} + \frac{\gamma^{\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \gamma^{\nu} \Gamma_{\nu}}{\partial \varphi} \right) - \\
 & - \left[(\gamma^r \gamma^{\nu} \Gamma_{\nu} + \gamma^{\nu} \Gamma_{\nu} \gamma^r) \frac{\partial}{\partial r} + (\gamma^{\theta} \gamma^{\nu} \Gamma_{\nu} + \gamma^{\nu} \Gamma_{\nu} \gamma^{\theta}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \right. \\
 & \quad \left. + (\gamma^{\varphi} \gamma^{\nu} \Gamma_{\nu} + \gamma^{\nu} \Gamma_{\nu} \gamma^{\varphi}) \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + \\
 & + \left[\frac{\eta_{03}}{r^2 \sin^2 \theta} \beta \left(\sin \theta \gamma^{\varphi} \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \frac{\gamma^{\varphi}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\gamma^r}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \gamma^{\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] \psi = \\
 & = - \frac{m^2 c^2}{h^2} \psi
 \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula (50) para el cálculo de Γ_{ν} , multiplicando por γ^{ν} y sumando:

$$\gamma^{\nu} \Gamma_{\nu} = \frac{1}{4} \frac{\partial \eta_{03}}{\partial r} \frac{1}{r \sin \theta} \beta \gamma^r \gamma^{\varphi} + \frac{1}{4} \frac{\partial \eta_{03}}{\partial \theta} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \beta \gamma^{\theta} \gamma^{\varphi} + \frac{1}{4} \frac{\partial \eta_{00}}{\partial r} \gamma^r \quad (54)$$

Reemplazando este valor en la ecuación diferencial y haciendo algunas simplificaciones:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ (1 - \eta_{00}) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (1 + \eta_{00}) \Delta + \frac{2 \eta_{03}}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \varphi} - \right. \\
 & - \frac{1}{2 r \sin \theta} \left(\frac{\partial \eta_{03}}{\partial r} \gamma^r \gamma^{\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta_{03}}{\partial \theta} \gamma^{\theta} \gamma^{\varphi} \right) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \eta_{00}}{\partial r} \beta \gamma^r \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial \eta_{00}}{\partial r} \left(\frac{\gamma^r \gamma^{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\gamma^r \gamma^{\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \eta_{03}}{\partial r} \frac{1}{r \sin \theta} - \frac{\eta_{03}}{r^2 \sin \theta} \right) \beta \gamma^{\varphi} \frac{\partial}{\partial r} - \\
 & - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \eta_{00}}{\partial \theta} \frac{1}{r^3 \sin \theta} - \frac{\eta_{03} \cos \theta}{r^3 \sin^2 \theta} \right) \beta \gamma^{\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} - \\
 & - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \eta_{03}}{\partial r} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{\eta_{03}}{r^3 \sin^2 \theta} \right) \beta \gamma^r \frac{\partial}{\partial \varphi} - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \eta_{03}}{\partial \theta} \frac{1}{r^3 \sin^2 \theta} - \frac{\eta_{03} \cos \theta}{r^3 \sin^3 \theta} \right) \beta \gamma^{\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \\
 & - \frac{1}{4 r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2 \eta_{03}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta_{03}}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \eta_{03}}{\partial \theta} \right) \beta \gamma^{\varphi} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 \eta_{00}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \eta_{00}}{\partial r} \right) \left. \right\} \psi = \\
 & = - \frac{m^2 c^2}{h^2} \psi
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\eta_{00} \ll 1$, $\frac{\eta_{03}}{r \operatorname{sen} \theta} \ll 1$, $\frac{v}{c} \ll 1$, los términos principales de la ecuación son:

$$\left\{ (1 - \eta_{00}) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (1 + \eta_{00}) \Delta + \frac{2 \eta_{03}}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \varphi} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2 r \operatorname{sen} \theta} \left(\frac{\partial \eta_{03}}{\partial r} \delta^r \delta^\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta_{03}}{\partial \theta} \delta^\theta \delta^\varphi \right) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial \eta_{00}}{\partial r} \beta \delta^r \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \eta_{00}}{\partial r} \left(\frac{\delta^r \delta^\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\delta^r \delta^\varphi}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right\} \psi = \\ = - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi \quad (55)$$

El término $\eta_{00} \Delta$ es un término pequeño de poco interés que produce un leve corrimiento de la energía, sin cambiar la degeneración de los niveles.

Poniendo:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{i \hbar} \left(m c + \frac{E}{c} \right), \quad E \ll m c^2$$

obtenemos:

$$\left[\left(E - \frac{m c^2}{2} \eta_{00} \right) + \frac{\hbar^2}{2 m} \Delta - \frac{\hbar}{m c} m c^2 \frac{\eta_{03}}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \right. \\ \left. - \frac{\hbar}{2 m c} \frac{1}{2} \frac{i}{r \operatorname{sen} \theta} m c^2 \left(\frac{\partial \eta_{03}}{\partial r} \delta^r \delta^\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta_{03}}{\partial \theta} \delta^\theta \delta^\varphi \right) + \right. \\ \left. + \frac{\hbar}{2 m c} \frac{m c^2}{2} \frac{\partial \eta_{00}}{\partial r} i \beta \delta^r - \frac{\hbar^2}{2 m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{m c^2}{2} \frac{\partial \eta_{00}}{\partial r} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right] \psi = 0 \quad (56)$$

donde $\vec{L} = \frac{1}{\hbar} \vec{r} \wedge \vec{p} = \frac{1}{i} \vec{r} \wedge \vec{\text{grad}}$

Usando las definiciones dadas en (37 a), y designando con los subíndices r , θ , φ las componentes físicas de un vector:

$$V = \frac{1}{2} m c^2 \eta_{00} \quad a_{\varphi} = - \frac{\eta_{03} m c^2}{r \sin \theta}$$

$$K_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_{\varphi} \sin \theta}{\partial \theta} = - \frac{m c^2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \eta_{03}}{\partial \theta} \quad (57)$$

$$K_{\theta} = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_{\varphi} r \sin \theta}{\partial r} = \frac{m c^2}{r \sin \theta} \frac{\partial \eta_{03}}{\partial r}$$

$$K_{\varphi} = 0$$

$$\left[(E - V) + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{\hbar}{mc} a_{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\hbar}{2mc} \frac{1}{2} \vec{K} \cdot \vec{\sigma} + \right. \\ \left. + \frac{\hbar}{2mc} \frac{\partial V}{\partial r} i \beta \gamma^r - \frac{\hbar^2}{2m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right] \psi = 0 \quad (58 a)$$

Separando ψ en componentes grandes y chicas:

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} ; \quad \beta \gamma^r = \alpha^r = \begin{pmatrix} & \sigma^r \\ \sigma^r & \end{pmatrix}$$

para las componentes grandes queda la ecuación :

$$\left[(E - V) + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{\hbar}{mc} a_{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\hbar}{2mc} \frac{1}{2} \vec{K} \cdot \vec{\sigma} - \right. \\ \left. - 3 \frac{\hbar^2}{4m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right] u = 0 \quad (58 b)$$

En el caso de tener un campo K constante en la dirección z :

$$a_{\varphi} = \frac{1}{2} r \sin \theta K$$

y podemos poner:

$$\left[(E - V) + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{\hbar}{2mc} \vec{K} \cdot \left(\vec{L} + \frac{1}{2} \vec{\sigma} \right) - 5 \frac{\hbar^2}{4m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right] \psi = 0$$

(58 o)

Para una esfera en rotación el campo está dado por los valores de η_{00} y η_{03} de (15) y (23):

$$\begin{aligned} \eta_{00} &= \frac{4}{3} \frac{\pi G}{c^2} \mu_0 r^2 - \frac{4\pi G}{c^2} \mu_0 r_0^2 = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{r^3} r^2 - \frac{3}{2} \frac{\alpha}{r_0} \\ \eta_{03} &= -\frac{8}{5} \frac{\pi G}{c^2} \mu_0 \frac{\omega}{c} r^4 \sin^2 \theta + \frac{8}{3} \frac{\pi G}{c^2} \mu_0 \frac{\omega}{c} r_0^2 r \sin^2 \theta \\ &= -\frac{3}{5} \frac{\alpha}{r_0^3} \frac{\omega}{c} r^4 \sin^2 \theta + \frac{\alpha}{r_0} \frac{\omega}{c} r^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

De donde (Ver (41 a)) :

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \pi m G \mu_0 r^2 - 2\pi m G \mu_0 r_0^2 \\ A_\varphi &= \frac{8}{5} \pi m G \mu_0 \frac{\omega}{c} r^3 \sin \theta - \frac{8}{3} \pi m G \mu_0 \frac{\omega}{c} r_0^2 r \sin \theta \\ K_r &= \frac{16}{5} \pi m G \mu_0 \frac{\omega}{c} r^2 \cos \theta - \frac{16}{3} \pi m G \mu_0 \frac{\omega}{c} r_0^2 \cos \theta \\ K_\theta &= -\frac{32}{5} \pi m G \mu_0 \frac{\omega}{c} r^2 \sin \theta + \frac{16}{3} \pi m G \mu_0 \frac{\omega}{c} r_0^2 \sin \theta \mu_c \end{aligned}$$

$$\left\{ E - 2\pi m G \mu_0 \left(\frac{1}{3} r^2 - r_0^2 \right) + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{\hbar}{mc} 8\pi m G \mu_0 \frac{\omega}{c} \left(\frac{1}{5} r^2 - \frac{1}{3} r_0^2 \right) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \right.$$

$$+ \frac{\hbar}{mc} 4\pi m G \mu_0 \frac{\omega}{c} \left[\left(\frac{1}{5} r^2 - \frac{1}{3} r_0^2 \right) \cos \theta \sigma^r - \left(\frac{2}{5} r^2 - \frac{1}{3} r_0^2 \right) \sin \theta \sigma^\theta \right] +$$

$$\left. + \frac{\hbar}{2mc} \frac{4\pi}{3} m G \mu_0 r \left(i\beta \delta^{rr} - \frac{\hbar}{mc} \frac{1}{r} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right) \right\} \psi = 0 \quad (59)$$

VI .- Electrón de Dirac en un campo electromagnético

La ecuación para una partícula de carga e en un campo electromagnético A_μ es:

$$i \hbar \gamma^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \psi = m c \psi$$

Si tomamos coordenadas esféricas y un potencial :

$$A_\mu = (\bar{\Phi}, 0, 0, -A_\varphi r \text{ sen } \theta)$$

tal que :

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \theta} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

obtenemos:

$$i \hbar \left[\beta \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie}{\hbar} \bar{\Phi} \right) + \gamma^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\gamma^\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + \gamma^\varphi \left(\frac{1}{r \text{ sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{ie}{\hbar c} A_\varphi \right) \right] \psi = m c \psi \quad (60)$$

Si iteramos obtendremos la ecuación de segundo grado siguiente:

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2ie}{\hbar c^2} \bar{\Phi} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta + \frac{2ie}{\hbar c} A_\varphi \frac{1}{r \text{ sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \right. \\ \left. - \frac{ie}{\hbar c} \left(\gamma^r \gamma^\varphi \frac{1}{r \text{ sen } \theta} \frac{\partial (A_\varphi r \text{ sen } \theta)}{\partial r} + \gamma^\theta \gamma^\varphi \frac{1}{r^2 \text{ sen } \theta} \frac{\partial (A_\varphi r \text{ sen } \theta)}{\partial \theta} \right) \right. \\ \left. - \frac{ie}{\hbar c} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} \beta \gamma^r - \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} \bar{\Phi}^2 + \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} A_\varphi^2 \right] \psi = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi$$

O también:

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2ie}{\hbar c} \bar{\Phi} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta + \frac{2ie}{\hbar c} A_\varphi \frac{1}{r \text{ sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \right. \\ \left. - \frac{e}{\hbar c} \vec{\sigma} \cdot \vec{H} - \frac{ie}{\hbar c} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} \beta \gamma^r \right] \psi = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi \quad (61)$$

donde hemos despreciado los términos cuadráticos en $\bar{\Phi}$ y A_φ .

Poniendo:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \left(mc + \frac{E}{c} \right)$$

obtenemos:

$$\left[(E - e\Phi) + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{\hbar}{mc} e A_{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\hbar}{2mc} e \vec{H} \cdot \vec{\sigma} + \frac{\hbar}{2mc} e \frac{\partial \Phi}{\partial r} i \beta \gamma^r \right] \psi = 0$$

Definimos (Ver (37 b)) $V = e\Phi$, $\vec{A} = e\vec{A}$, $\vec{K} = e\vec{H}$

$$\left[(E - V) + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{\hbar}{mc} A_{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\hbar}{2mc} \vec{K} \cdot \vec{\sigma} + \frac{\hbar}{2mc} \frac{\partial V}{\partial r} i \beta \gamma^r \right] \psi = 0 \quad (62a)$$

Las componentes grandes cumplen la ecuación:

$$\left[(E - V) + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{\hbar}{mc} A_{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\hbar}{2mc} \vec{K} \cdot \vec{\sigma} - \frac{\hbar^2}{4m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right] u = 0 \quad (62b)$$

En el caso en que el campo magnético es un campo constante en la dirección z,

$$A_{\varphi} = \frac{1}{2} r \sin \theta H$$

la ecuación (62b) resulta:

$$\left[(E - V) + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{\hbar}{2mc} \vec{K} \cdot (\vec{L} + \vec{\sigma}) - \frac{\hbar^2}{4m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right] u = 0 \quad (62c)$$

Dentro de la esfera cargada que rota el campo está dado por (36) :

$$\Phi = -\frac{2}{3} \pi \rho_0 r^2 + 2\pi \rho_0 r_0^2$$

$$A_{\varphi} = -\frac{2}{5} \pi \rho_0 \frac{\omega}{c} r^3 \sin \theta + \frac{2}{3} \pi \rho_0 \frac{\omega}{c} r_0^2 r \sin \theta$$

O sea:

$$V = -\frac{2}{3}\pi e \beta_0 r^2 + 2\pi e \beta_0 r_0^2$$

$$A_\varphi = -\frac{2}{5}\pi e \beta_0 \frac{\omega}{c} r^3 \sin \theta + \frac{2}{3}\pi e \beta_0 \frac{\omega}{c} r_0^2 r \sin \theta$$

Para poder comparar con un campo gravitatorio el potencial V debe ser atractivo; luego e y β_0 deben tener signos distintos (41b) :

$$V = \frac{2}{3}\pi |e \beta_0| r^2 - 2\pi |e \beta_0| r_0^2$$

$$A_\varphi = \frac{2}{5}\pi |e \beta_0| \frac{\omega}{c} r^3 \sin \theta - \frac{2}{3}\pi |e \beta_0| \frac{\omega}{c} r_0^2 r \sin \theta$$

$$K_r = \frac{4}{5}\pi |e \beta_0| \frac{\omega}{c} r^2 \cos \theta - \frac{4}{3}\pi |e \beta_0| \frac{\omega}{c} r_0^2 \cos \theta$$

$$K_\theta = -\frac{8}{5}\pi |e \beta_0| \frac{\omega}{c} r^2 \sin \theta + \frac{4}{3}\pi |e \beta_0| \frac{\omega}{c} r_0^2 \sin \theta$$

$$\left\{ E - 2\pi |e \beta_0| \left(\frac{1}{3} r^2 - r_0^2 \right) + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{\hbar}{mc} 2\pi |e \beta_0| \frac{\omega}{c} \left(\frac{1}{5} r^2 - \frac{1}{3} r_0^2 \right) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \right.$$

$$+ \frac{\hbar}{mc} 2\pi |e \beta_0| \frac{\omega}{c} \left[\left(\frac{1}{5} r^2 - \frac{1}{3} r_0^2 \right) \cos \theta \sigma^r - \left(\frac{2}{5} r^2 - \frac{1}{3} r_0^2 \right) \sin \theta \sigma^\theta \right] +$$

$$\left. + \frac{\hbar}{2mc} \frac{4\pi}{3} |e \beta_0| r^2 i \beta \gamma^r \right\} \psi = 0 \quad (63)$$

VII .- De las ecuaciones (58) y (62) se puede ver que el potencial Newtoniano $\frac{1}{2} m c^2 \eta_{00}$ y las fuerzas de Coriolis $\frac{-\gamma_{e3} m c^2}{r \sin \theta}$ actúan en forma similar al potencial eléctrico e Φ y al campo magnético e \vec{H} , pero existen diferencias:

a) El término que da la interacción del campo de Coriolis con el espín es $\frac{\hbar}{2mc} \frac{1}{2} \vec{K} \cdot \vec{\sigma}$, mientras que en el caso magnético tenemos $\frac{\hbar}{2mc} e \vec{H} \cdot \vec{\sigma}$. Cuando los campos son constantes la acción de ellos sobre el impulso angular orbital y el espín se puede poner:

$$\frac{\hbar}{2mc} \vec{K} \cdot (\vec{L} + g \vec{S}), \quad \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$$

siendo $g = 1$, en el caso gravitacional, y $g = 2$ en el caso magnético (Ver (58c) y (62c)).

b) La "interacción espín - órbita" aparece en el caso gravitatorio en dos términos:

$$\frac{\hbar}{2mc} \frac{\partial V}{\partial r} \left(i \beta \gamma^r - \frac{\hbar}{mc} \frac{1}{r} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right)$$

y en el eléctrico en uno:

$$\frac{\hbar}{2mc} e \frac{\partial \Phi}{\partial r} i \beta \gamma^r$$

que se reducen, si se considera la ecuación para las componentes "grandes" del espinor, a:

$$- 3 \frac{\hbar^2}{4mc^2} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{\sigma} \cdot \vec{L}$$

y

$$- \frac{\hbar^2}{4mc^2} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{\sigma} \cdot \vec{L}$$

respectivamente, habiendo un factor 3 de diferencia.

Nuestros cálculos muestran, luego, que tanto las fuerzas dependientes de la velocidad (fuerzas de Coriolis, fuerza de Lorentz) como las fuerzas estáticas (fuerza gravitacional de Newton, fuerza electrostática de Coulomb) actúan de una manera bastante diferente sobre un campo espinorial. No es de extrañar, luego, que un campo de otro tipo y todavía desconocido en sus detalles, como es el campo de las fuerzas nucleares, conduzca a efectos diferentes en orden de magnitud y en signo que los de los campos bien conocidos.

VIII .- En los casos que hemos considerado actúan sobre el campo espinorial de Dirac dos campos externos: los campos electromagnético vectorial, A_μ , y gravitacional tensorial, $g_{\mu\nu}$. Intervienen, luego, tres campos tensoriales de rango $\frac{1}{2}$, 1 y 2 respectivamente.

Los rangos tensoriales de los campos que intervienen, determinan ciertas constantes numéricas que resultan de las fórmulas. Para hacer ver el origen común de estas constantes damos a continuación la lista de las mismas en los casos principales :

a) Electrón en un campo magnético: en el caso de un electrón en un campo magnético, tenemos que igualar la fuerza centrífuga a la fuerza de Lorentz y resulta para la frecuencia del movimiento

$$\omega = \frac{e H}{m c}$$

En el caso de un electrón ligado en un campo magnético externo, igualamos, para determinar el diamagnetismo la fuerza de Lorentz a la fuerza de Coriolis. De ahí resulta la frecuencia de Larmor :

$$\omega_L = \frac{e H}{2 m c}$$

En este caso intervienen los campos vectorial y tensorial.

b) El espín : en el caso de un electrón de Dirac libre, en coordenadas cilíndricas o esféricas actúan los campos inercial y espinorial. Así resulta una cotribución

$$\frac{1}{2} h \vec{\sigma}$$

al impulso angular [4] .

Introduciendo un campo vectorial (electromagnético) aparece una interacción magnética

$$\vec{\mu} \cdot \vec{H} = \vec{K} \frac{g}{2 m c} \frac{1}{2} h \vec{\sigma} \quad (\vec{K} = e \vec{H})$$

con

$$g = 2$$

(64)

como resultado de la intervención de los tres campos.

Reemplazando el potencial vector \vec{A} por un campo estático A_0 aparece el acoplamiento espín-órbita:

$$\frac{T}{2 m c} \hbar \vec{\sigma} \cdot \left(\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{\text{grad}} V \right) \quad (\text{grad } V = - e \vec{E}) \quad (65)$$

con $T = \frac{1}{2}$

c) Espín en un campo gravitatorio: en este caso intervienen dos campos, tensorial y espinorial. Con las fuerzas de Coriolis ($g_{\bullet i}$) hay una interacción

$$\vec{K} \cdot \frac{g}{2 m c} \frac{1}{2} \hbar \vec{\sigma} \quad (\vec{K} = \text{rot } \vec{a}; a_i = -m c^2 \eta_{\bullet i}) \quad (64')$$

con $g = 1$

Si se tiene un campo Newtoniano g_{00} , aparece la interacción espín - órbita

$$\frac{T}{2 m c} \hbar \vec{\sigma} \cdot \left(\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{\text{grad}} V \right) \quad (V = \frac{1}{2} m c^2 \eta_{\bullet 0}) \quad (65')$$

con $T = \frac{3}{2}$

Se ve, luego, que estos factores dependen directamente de la cinemática de los campos considerados.

IX .- ADDENDA

Después de haber concluído el presente trabajo fui informada de la existencia de un artículo de C.G. Oliveira y J.Tiomno [10] sobre el mismo tema, en el que se obtienen resultados similares respecto al factor "giromagnético" gravitatorio g y a la interacción espín-órbita.

En ese artículo para determinar la ecuación no relativista a partir de la ecuación de Dirac se utiliza la representación de Foldy - Wouthuysen [11] a diferencia del método de iteración empleado en el presente trabajo, y se trabaja en presencia simultánea del campo gravitatorio y electromagnético.

La ecuación que obtienen contiene términos en $\text{div } \vec{E}$ y $\text{div } \vec{e}$ (\vec{e} corresponde a $-\frac{1}{m} \text{grad } V = -\frac{1}{m} \text{grad } \frac{1}{2} m c^2 \frac{g_{00}}{c^2}$ en la notación de este trabajo); el término en $\text{div } \vec{E}$ está también en el artículo de Foldy - Wouthuysen [11]. Estos términos no aparecen en el presente trabajo debido a que se ha despreciado la contribución de E^2 , habiéndose supuesto $E \ll m c^2$; en este orden se han conservado solamente los términos dependientes del espín, ya que estos son los únicos que pueden ser observados por separación de niveles.

Desde el punto de vista general el método de Foldy - Wouthuysen es más sistemático, para la comparación entre la ecuación de Dirac y la ecuación de Pauli. Sin embargo en el orden considerado el término de la interacción espín - órbita resulta ser idéntico en el método de iteración y deja ver más claramente su origen relativista.

C.G.Oliveira y J.Tiomno obtienen el "red shift" de los niveles del átomo de hidrógeno en presencia de campos gravitatorios y hacen también un análisis de las ecuaciones clásicas de movimiento.

Otros dos trabajos relacionados con el tema de la interacción del espín con el campo gravitatorio son el de A.Peres [12] y el de I. Yu. Kobzarev

y V.I. Zakharov [13] . El primero llega a la conclusión de que la ecuación de Dirac iterada en presencia de campos gravitatorios no contiene términos de acoplamiento espín - curvatura ; esto se debe a que en el análisis no tiene en cuenta que los Γ_{μ} dependen de los σ_{ik} . Esto lo hacen notar I. Yu. Kobzarev y V.I. Zakharov [13] .

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Guido Beck por su continua guía y estímulo en la realización de este trabajo, y al Lic. Norberto Vaieretti por provechosas discusiones.

Deseo manifestar mi reconocimiento al Dr. J. Tiomno por útiles observaciones durante su estadía en Bariloche.

Agradezco a la Comisión Nacional de Energía Atómica por el otorgamiento de una beca, y a las autoridades y personal del Instituto de Física " Dr. J.A.Balseiro" y Centro Atómico Bariloche, en donde se realizó este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] - L.D.Landau and E.M.Lifschitz .- The Classical Theory of Fields .- Addison - Wesley Publishing Company Inc. -
- [2] - J.Weber .- General Relativity and Gravitational Waves. - Interscience Publishers, N.Y. -
- [3] - D.R. Brill and J.A. Wheeler .- Revs.Modern Phys. 29 , 465 (1957)
- [4] - N. Vaieretti .- Tesis en preparación .- CAB - IFB.
- [5] - L.A. Santaló .- Vectores y tensores con sus aplicaciones. EUDEBA.-
- [6] - H. Weyl - Space - Time - Matter .- Dover Publications, Inc.
- [7] - R. Adler , M.Bazin and M. Schiffer .- Introduction to General Relativity - Mc. Graw - Hill Book Company .-
- [8] - F.J.Belinfante.- Physica 7 , 305 , 1940 .-
- [9] - L.I. Schiff - Meccanica Quantistica .- Edizioni Scientifiche Einaudi.-
- [10] - C.G.Oliveira and J.Tiomno .- Il Nuovo Cimento 24 , 672 , 1962.-
- [11] - L.L. Foldy and S.A. Wouthuysen - Phys,Rev. 78 , 29, 1950.-
- [12] - A. Peres - Il Nuovo Cimento, 28, 1091 , 1963 .-
- [13] - I.Yu. Kobzarev and V.I. Zakharov .- Annals of Physics 37 , 1 , 1966.-