

C.N.E.A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº 1	AÑO 1971

01.71.17

CAB/1971/16

LA TRANSFORMACION A EJES PRINCIPALES DE UN SISTEMA QUE CONSISTE
EN UN OSCILADOR ACOPLADO A UN CAMPO ESCALAR EN UNA ESFERA FINITA.

N. Pinheiro *

Centro Atómico Bariloche
Comisión Nacional de Energía Atómica
Instituto de Física "Dr. José A. Balseiro"
Universidad Nacional de Cuyo

ABSTRACT: Se resuelve en forma rigurosa el problema de un oscilador de frecuencia $\bar{\omega}$ con un campo escalar en una esfera reflectora de radio R.

Esta solución se reduce a una transformación ortogonal (t_{μ}^r) con la ayuda de la cual se determina la distribución de la energía de un "fotón" sobre las dos partes del sistema, que podemos llamar "oscilador" y "campo" "vestidos".

* Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.
Becado por la "Fundação Para o Desenvolvimento da Ciência na Bahia"

Octubre 1971
Bariloche - Argentina

1) - Los Osciladores del Campo.

Sea un oscilador descrito por la coordenada $q_0(t)$ y un campo escalar $\phi(r, t)$ dentro de una esfera reflectora de radio R . Si el oscilador está acoplado al campo el sistema estará descrito por las ecuaciones:⁽¹⁾

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 = 2 \pi \sqrt{gc} \int_0^R \phi(r, t) \rho(r) d^3 r \\ \frac{1}{c} \ddot{\phi} - \Delta \phi = 2 \pi \sqrt{gc} q_0 \rho(r) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(Ia)} \\ \text{(Ib)} \end{array}$$

donde g es la constante de acoplamiento y $\rho(r)$ es una función de distribución espacial del acoplamiento, que obedece a la condición de normalización

$$\int_0^R \rho(r) d^3 r = 1$$

Nosotros haremos

$$\rho(r) \equiv \delta(\vec{r})$$

con lo que las ecuaciones (Ia) y (Ib) asumen la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 = 2 \pi \sqrt{gc} \phi(0, t) \\ \frac{1}{c} \ddot{\phi} - \Delta \phi = 2 \pi \sqrt{gc} q_0 \delta(\vec{r}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(IIa)} \\ \text{(IIb)} \end{array}$$

Para $g = 0$ la solución general para el campo $\phi(r, t)$ puede ser representada como

$$\phi_K e^{-i \omega_K t},$$

donde

$$\phi_K = \frac{\text{sen } k_K r}{r \sqrt{2 \pi R}} \quad \text{(III)}$$

con

$$k_K = \frac{\omega_K}{c} = K \frac{\pi}{R} \quad (K = 1, 2, 3, \dots)$$

forman un conjunto ortonormal completo de funciones esféricas de Bessel, que puede ser usado como base para expansión de Fourier de funciones con simetría esférica, definidas en el dominio $0 < r < R$. Así, se puede escribir

$$\Phi(r, t) = c \sum_{K=1}^{\infty} q_K(t) \phi_K(r) \quad (IV)$$

y

$$\delta(\vec{r}) = \sum_{K=1}^{\infty} c_K \phi_K(r),$$

con

$$c_K = \int_0^R \delta(\vec{r}) \phi_K(r) d^3 r = \frac{k_K}{\sqrt{2\pi R}}$$

i.e.

$$\delta(\vec{r}) = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{k_K}{\sqrt{2\pi R}} \phi_K(r)$$

La ecuación (IIa) se transforma en⁽²⁾

$$\ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 = 2 \pi \sqrt{gc} c \sum_K q_K(t) \phi_K(0),$$

ó

$$\ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 = \sum_K \sqrt{\frac{2 \pi g c}{R}} \omega_K q_K(t)$$

Teniendo en cuenta que

$$\Delta \phi_K = -k_K^2 \phi_K$$

la ecuación (IIb) asume la forma

$$\frac{1}{c^2} c \sum_{K=1}^{\infty} \ddot{q}_K(t) \phi_K(r) + c \sum_{K=1}^{\infty} k_K^2 q_K(t) \phi_K(r) = 2 \pi \sqrt{gc} q_0 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{k_K}{\sqrt{2\pi R}} \phi_K(r)$$

ó,

$$\ddot{q}_K + \omega_K^2 q_K = \sqrt{\frac{2 \pi g c}{R}} \omega_K q_0(t); (K = 1, 2, 3, \dots)$$

Por consiguiente se puede describir el sistema físico con un sistema infinito de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 = \sum_{K=1}^{\infty} \eta_K^2 q_K \\ \ddot{q}_K + \omega_K^2 q_K = \eta_K^2 q_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(Va)} \\ \text{(Vb)} \end{array}$$

con

$$\eta_K^2 = \eta \omega_K, \quad (K = 1, 2, 3, \dots)$$

y

$$\eta = \sqrt{\frac{2 \pi g c}{R}} \quad \text{(VI)}$$

En esta forma las ecuaciones representan a un sistema compuesto de un oscilador q_0 acoplado linealmente a un número infinito de osciladores del campo q_K .

Multiplicando la ecuación (Va) por $\dot{q}_0$ y cada una de las ecuaciones (Vb) por $\dot{q}_K$ y sumando, obtenemos una constante de movimiento que es proporcional a la energía total del sistema,

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left[\dot{q}_0^2 + \omega_0^2 q_0^2 + \sum_{K=1}^{\infty} (\dot{q}_K^2 + \omega_K^2 q_K^2) - 2 \sum_{K=1}^{\infty} \eta_K^2 q_0 q_K \right] \right\} = 0$$

Elegimos los q de tal manera que la energía total sea

$$E = \frac{1}{2} \left[\dot{q}_0^2 + \omega_0^2 q_0^2 + \sum_K (\dot{q}_K^2 + \omega_K^2 q_K^2) - 2 \sum_K \eta_K^2 q_0 q_K \right]$$

con energía cinética

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \dot{q}_0^2 + \sum_K \dot{q}_K^2 \right\}$$

y energía potencial

$$V = \frac{1}{2} \left\{ \omega_0^2 q_0^2 + \sum_K \omega_K^2 q_K^2 - 2 \sum_K \eta_K^2 q_0 q_K \right\}$$

Por consiguiente, construyendo el Lagrangeano, $L = T - V$, y calculando,

viene

$$p_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} = \dot{q}_0$$

$$p_K = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} = \dot{q}_K$$

Luego

$$H = \frac{1}{2} \left\{ p_0^2 + \omega_0^2 q_0^2 + \sum_K \left(p_K^2 + \omega_K^2 q_K^2 \right) - 2 \sum_K \eta_K^2 q_0 q_K \right\} \quad (\text{VII})$$

es el Hamiltoniano del sistema en términos de los q y sus momentos conjugados.

2) Un sistema de osciladores acoplados.

Trataremos el problema de un oscilador acoplado a N otros: este número N lo haremos posteriormente tender a infinito de acuerdo con el caso oscilador-campo.

El sistema estará descripto por las ecuaciones

$$\begin{cases} \ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 = \sum_{K=1}^N \eta_K^2 q_K \\ \ddot{q}_K + \omega_K^2 q_K = \eta_K^2 q_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (\text{V'a}) \\ (\text{V'b}) \end{matrix}$$

con $K = 1, 2, \dots, N$

y
$$\eta_K^2 = \eta \omega_K$$

El Hamiltoniano será

$$H = \frac{1}{2} \left\{ p_0^2 + \omega_0^2 q_0^2 + \sum_{K=1}^N \left(p_K^2 + \omega_K^2 q_K^2 \right) - 2 \sum_{K=1}^N \eta_K^2 q_0 q_K \right\} \quad (\text{VII}')$$

Transformando a ejes principales obtenemos

$$H = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^N \left\{ p_r^2 + \Omega_r^2 Q_r^2 \right\} \quad (\text{VIII})$$

Sea (t_{μ}^r) la matriz ortogonal de transformación que lleva del sistema Q al sistema q . Tenemos entonces

$$q_{\mu} = \sum_{s=0}^N t_{\mu}^s Q_s \quad (IX)$$

y

$$Q_s = \sum_{\mu=0}^N t_{\mu}^s q_{\mu} \quad (\mu, s = 0, 1, \dots, N) \quad (X)$$

con

$$\sum_{s=0}^N t_{\mu}^s t_{\nu}^s = \delta_{\mu\nu} \quad ; \quad \sum_{\mu=0}^N t_{\mu}^r t_{\mu}^s = \delta^{rs} \quad (XI)$$

El Hamiltoniano (VIII) referido a ejes principales, describe el sistema como un todo; cada Ω_r es una frecuencia posible para el sistema. Asumiendo que solamente la n -ésima vibración normal, de frecuencia Ω_n esté excitada

$$Q_r(t) = \bar{Q}_n \delta_{nr} e^{-i \Omega_n t}$$

tenemos

$$q_o^{(n)} = t_o^n \bar{Q}_n e^{-i \Omega_n t} \quad (XIIa)$$

$$q_K^{(n)} = t_K^n \bar{Q}_n e^{-i \Omega_n t} \quad (XIIb)$$

donde $\bar{Q}_n$ es una constante.

Las ecuaciones (V') se transforman en

$$\begin{cases} (-\Omega_n^2 + \omega_o^2) t_o^n \bar{Q}_n = \eta \sum_{K=1}^N \omega_K t_K^n \bar{Q}_n \\ (-\Omega_n^2 + \omega_K^2) t_K^n \bar{Q}_n = \eta \omega_K t_o^n \bar{Q}_n \end{cases}$$

Luego

$$t_K^n = \frac{\eta \omega_K}{\omega_K^2 - \Omega_n^2} t_o^n \quad (XIII)$$

y

$$\omega_o^2 - \Omega_n^2 = \eta^2 \sum_{K=1}^N \frac{\omega_K^2}{\omega_K^2 - \Omega_n^2}$$

Deben existir $N + 1$ soluciones para esa ecuación correspondientes a los $N + 1$ modos de vibración del sistema. Así, se puede eliminar el índice n de Ω y escribir

$$\omega_0^2 - \Omega^2 = \eta^2 \sum_{K=1}^N \frac{\omega_K^2}{\omega_K^2 - \Omega^2} \quad (\text{XIV})$$

Esta ecuación puede ser analizada gráficamente. Para hacerlo tomemos

$$F(\Omega^2) = \omega_0^2 - \Omega^2,$$

y

$$G(\Omega^2) = \eta^2 \sum_{K=1}^N \frac{\omega_K^2}{\omega_K^2 - \Omega^2}$$

y grafiquemos juntas estas dos funciones (vea fig. 1)

Podemos distinguir dos casos

$$\text{i)} \quad \omega_0^2 > G(0) = N \eta^2$$

Se puede ver de la fig. 1 que en este caso todos los posibles valores de Ω^2 son positivos. Físicamente esto significa que el sistema oscila armónicamente en todos sus modos.

$$\text{ii)} \quad \omega_0^2 < G(0) = N \eta^2$$

En este caso vemos que existe un valor para $\Omega^2 = \Omega_-^2$ que es negativo, todos los otros son positivos. Esto significa que existe un modo de vibración del sistema cuya amplitud crece o decrece exponencialmente. Este caso no lleva a configuraciones estacionarias y es sin interés para nosotros (runaway solutions). Debemos asumir entonces que

$$\omega_0^2 > N \eta^2$$

Llamaremos

$$\bar{\omega} = (\omega_0^2 - N \eta^2)^{1/2} \quad (\text{XV})$$

la frecuencia renormalizada del oscilador. El concepto de frecuencia renormalizada fue introducido por W. THIRRING y F. SCHWABL.⁽¹⁾

Transformando la (XIV) obtenemos

$$\omega_0^2 - \Omega^2 = N \eta^2 + \eta^2 \sum_{K=1}^N \frac{\Omega^2}{\omega_K^2 - \Omega^2}$$

o finalmente

$$\bar{\omega}^2 - \Omega^2 = \eta^2 \sum_{K=1}^N \frac{\Omega^2}{\omega_K^2 - \Omega^2} \quad (\text{XVI})$$

Podemos ahora demostrar la ortogonalidad de la matriz (t_μ^r) . En vista de (XIII) tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^N t_\mu^r t_\mu^s &= t_0^r t_0^s + \sum_{K=1}^N t_K^r t_K^s = \\ &= t_0^r t_0^s \left\{ 1 + \sum_{K=1}^N \frac{\eta^2 \omega_K^2}{(\omega_K^2 - \Omega_r^2)(\omega_K^2 - \Omega_s^2)} \right\} = \\ &= t_0^r t_0^s \left\{ 1 + \frac{1}{\Omega_r^2 - \Omega_s^2} \eta^2 \sum_{K=1}^N \left(\frac{\omega_K^2}{\omega_K^2 - \Omega_r^2} - \frac{\omega_K^2}{\omega_K^2 - \Omega_s^2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

que en vista de (XVI) resulta

$$\sum_{\mu=0}^N t_\mu^r t_\mu^s = t_0^r t_0^s \left\{ 1 + \frac{1}{\Omega_K^2 - \Omega_s^2} (\bar{\omega}^2 - \Omega_r^2 - \bar{\omega}^2 + \Omega_s^2) \right\} = 0$$

para $r \neq s$.

Además, si imponemos la normalización

$$(t_0^r)^2 + \sum_{K=1}^N (t_K^r)^2 = 1$$

viene

$$\begin{aligned} (t_0^r)^2 + (t_0^r)^2 &+ \sum_{K=1}^N \frac{\eta^2 \omega_K^2}{(\omega_K^2 - \Omega_r^2)^2} = 1 \\ t_0^r &= \left\{ 1 + \sum_{K=1}^N \frac{\eta^2 \omega_K^2}{(\omega_K^2 - \Omega_r^2)^2} \right\}^{-1/2} \quad (\text{XVII}) \end{aligned}$$

y

$$t_K^r = \frac{\eta \omega_K}{\omega_K^2 - \Omega_r^2} \left\{ 1 + \sum_{K=1}^N \frac{\eta^2 \omega_K^2}{(\omega_K^2 - \Omega_r^2)^2} \right\}^{-1/2} \quad (\text{XVIII})$$

En esta forma la matriz obedece, por lo menos, a la relación de ortonormalidad

$$\sum_{\mu=0}^N t_{\mu}^r t_{\mu}^s = \delta^{rs}$$

De ahí y en vista de la (IX) viene

$$\sum_{\mu=0}^N q_{\mu}^2 = \sum_{r,s} \left(\sum_{\mu} t_{\mu}^r t_{\mu}^s \right) Q_r Q_s = \sum_{r=0}^N Q_r^2$$

o, invirtiendo

$$\sum_r Q_r^2 = \sum_{\mu,\nu} \left(\sum_r t_{\mu}^r t_{\nu}^r \right) q_{\mu} q_{\nu} = \sum_{\mu} q_{\mu}^2$$

o sea

$$\sum_r t_{\mu}^r t_{\nu}^r = \delta_{\mu\nu}$$

Por lo tanto, en la forma (XVII) y (XVIII) la matriz obedece a las dos relaciones de ortonormalidad (XI).

3) El espectro de auto-frecuencias.

Podemos tratar el caso del acoplamiento oscilador-campo de la misma manera como fue tratado el acoplamiento oscilador-osciladores, con tal de hacer, en el último, $N = \infty$. Tendremos entonces, de (XIV)

$$\omega_0^2 - \Omega^2 = \eta^2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\omega_K^2}{\omega_K^2 - \Omega^2} \quad (XIX)$$

6

$$\omega_0^2 - \Omega^2 = \eta^2 \sum_{K=1}^{\infty} 1 + \eta^2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{\omega_K^2 - \Omega^2}$$

Como en el caso anterior, debemos tener

$$\omega_0^2 > \eta^2 \sum_{K=1}^{\infty} 1$$

lo que significa que la frecuencia ω_0 (frecuencia propia del oscilador libre) es infinita para nuestro modelo, y carece, por consiguiente, de significado físico. Imponemos entonces la renormalización

$$\bar{\omega}^2 = \omega_0^2 - \eta^2 \sum_{K=1}^{\infty} 1 \quad (XV')$$

Obtenemos así

$$\bar{\omega}^2 - \Omega^2 = \eta^2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{\omega_K^2 - \Omega^2} \quad (\text{XX})$$

Además, en analogía con las relaciones

$$\omega_K = K \cdot \frac{\pi c}{R} \quad ; \quad (K = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{XXI})$$

haremos

$$\Omega = x \cdot \frac{\pi c}{R} \quad (\text{XXII})$$

y tendremos

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{\omega_K^2 - \Omega^2} = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{x^2}{K^2 - x^2} \quad (\text{XXIII})$$

donde x es un número positivo.

Ahora bien, se puede mostrar (vea Apéndice) que

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{x^2}{K^2 - x^2} = \frac{1}{2} \{ 1 - \pi x \cotg \pi x \} \quad (\text{A.7})$$

Comparando (XXIII) y (A.7), y en vista de (XXII) viene

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{\omega_K^2 - \Omega^2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{R \Omega}{c} \cotg \frac{R \Omega}{c} \right\} \quad (\text{XXIV})$$

Sustituyendo en la (XX) obtenemos

$$\bar{\omega}^2 - \Omega^2 = \frac{\eta^2}{2} \left\{ 1 - \frac{R \Omega}{c} \cotg \frac{R \Omega}{c} \right\} \quad (\text{XXV})$$

Transformando y teniendo en cuenta la (VI) se llega a

$$\cotg \frac{R \Omega}{c} = \frac{c}{R \Omega} + \frac{\Omega^2 - \bar{\omega}^2}{\pi g \Omega} \quad (\text{XXVI})$$

Esta relación puede aún ser transformada y da

$$\cotg \frac{R \Omega}{c} = \frac{\Omega}{\pi g} + \frac{c}{R \Omega} \left(1 - \frac{R}{\pi g c} \bar{\omega}^2 \right)$$

y en vista de (XXII) viene

$$\cotg \pi x = \frac{c}{R g} x + \frac{1}{\pi x} \left(1 - \frac{R}{\pi g c} \bar{\omega}^2 \right)$$

6

$$\cotg \pi x = \frac{L}{R} x + \frac{1}{\pi x} \cdot \left(1 - \frac{R L}{\pi \bar{\lambda}^2} \right) \quad (\text{XXVII})$$

donde

$$L = \frac{c}{g} \quad (\text{XXVIII})$$

es la longitud de coherencia correspondiente al acoplamiento, y

$$\bar{\lambda} = \frac{c}{\omega}$$

es la longitud de onda reducida renormalizada del oscilador.

La ecuación (XXVII) puede ser resuelta gráficamente. En la fig. 2 están graficados los dos miembros de la ecuación para valores arbitrarios de R , L , y $\bar{\lambda}$. La curva secante (2º miembro) corta una vez cada rama de la cotangente, con lo que las soluciones pueden ser numeradas en la forma

$$x_r = r + \epsilon_r \quad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

con $0 < \epsilon_r < 1$. En vista de (XXII) podemos escribir

$$\Omega_r = (r + \epsilon_r) \cdot \frac{\pi c}{R} = (r + \epsilon_r) \cdot \Delta \omega \quad (\text{XXIX})$$

donde

$$\Delta \omega = \frac{\pi c}{R} \quad (\text{XXX})$$

representa la distancia entre los niveles de frecuencia del campo libre.

Distinguiremos tres casos:

$$a) \quad \bar{\lambda} \ll \sqrt{\frac{R L}{\pi}} \quad \text{ó} \quad \bar{\omega} \gg \sqrt{g \cdot \Delta \omega}$$

En este caso el 2º miembro de la (XXVII) puede ser aproximado, y obtenemos

$$\cotg \pi x = \frac{L}{R} x - \frac{R L}{\pi^2 \bar{\lambda}^2} \cdot \frac{1}{x} \quad (\text{XXXI})$$

La curva secante cortará el eje de abscisas en

$$x_0 = \frac{R}{\pi \bar{\lambda}} = \frac{\bar{\omega}}{\frac{\pi c}{R}} = \bar{x}$$

siendo $\bar{x}$ la abscisa correspondiente a $\bar{\omega}$ en nuestros gráficos. La pendiente de la curva secante en cada punto será

$$\alpha(x) = \frac{L}{P} + \frac{R L}{\pi^2 \bar{x}^2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

En este caso distinguiremos aún dos posibilidades

a.I) Caja muy grande ($R \gg L$)

Para $x \approx x_0$ tendremos

$$\alpha(x) \approx \frac{L}{R} + \frac{R L}{\pi^2 \bar{x}^2} \cdot \frac{\pi^2 \bar{x}^2}{R^2} = 2 \cdot \frac{L}{R} \ll 1$$

Por consiguiente la curva estará muy cerca de la horizontal en esta región (vea fig. 3) y las vibraciones correspondientes estarán muy modificadas respecto de las vibraciones del campo libre. Para muchas de ellas el nivel del campo libre más próximo se encuentra distanciado en casi $\Delta \omega/2$. Esto se verifica esté el valor de $\bar{\omega}$ cerca o lejos de una de las vibraciones del campo libre.

Además la cantidad de niveles fuertemente modificados por el acoplamiento es en este caso muy grande, lo que significa que es muy extenso el dominio de resonancia.

a.II) Caja muy pequeña ($R \ll L$).

Para $x \approx x_0$

$$\alpha(x) \approx \frac{2 L}{P} \gg 1$$

La curva secante estará, por consiguiente, muy cerca de la vertical en la región $x \approx x_0$. Los modos del sistema se presentarán, en general, poco modificados respecto de los del campo libre, sin embargo, existen una o dos vibraciones (según el caso) que, como consecuencia del acoplamiento, presentan características diferentes de aquellas de las vibraciones del campo libre.

Antes de analizar estos casos notemos que, de la (XXVII), se deduce inmediatamente que la curva secante intersecta el eje de abscisas en el punto x correspondiente a

$$\Omega = \frac{\pi c}{R} \quad x = \sqrt{\bar{\omega}^2 - g \cdot \Delta \omega} \quad (\text{XXXIII})$$

De $R \ll L$ se concluye que

$$\frac{\Delta \omega}{\pi} > g$$

Además, si admitimos que la frecuencia renormalizada es más grande o del mismo orden que la separación entre los niveles del campo libre:

$$\bar{\omega} \gtrsim \Delta \omega$$

resulta

$$\bar{\omega} \gtrsim \Delta \omega > \pi g$$

La (XXXIII) puede entonces ser aproximada por

$$\Omega \approx \bar{\omega}$$

o sea, la intersección de la curva secante con el eje de abscisas coincide aproximadamente con el punto $\bar{x}$ sobre el eje. Destacaremos ahora dos casos típicos según el valor de $\bar{\epsilon}$, siendo

$$\bar{x} \cdot \Delta \omega = (\bar{r} + \bar{\epsilon}) \cdot \Delta \omega = \bar{\omega}$$

con $\bar{r}$ entero.

Estos casos son

a.II.α) $\bar{\epsilon} \approx 1/2$

En este caso (vea fig. 4) habrá solamente un modo sensiblemente modificado: $\Omega_{\bar{r}} = \bar{\omega}$, teniendo todos los otros frecuencias muy cercanas a las del campo libre. Este es un caso de anti-resonancia.

a.II.β) $\bar{\epsilon} \approx 0$

Para este caso (vea fig. 5) se da un desdoblamiento del modo $\omega_{\bar{r}} = \bar{\omega}$ en

dos; Ω_{r-1} y Ω_r . Aproximando la curva secante por una recta en el dominio $x \approx \bar{x}$, se tiene

$$x_{r-1} \approx \bar{x} - \Delta x = \bar{r} - \Delta x$$

$$x_r \approx \bar{x} + \Delta x = \bar{r} + \Delta x$$

con

$$\Delta x = \frac{x_r - x_{r-1}}{2}$$

Además para $\Delta x \ll 1$ podemos escribir

$$\cotg \pi (\bar{r} + \Delta x) = \cotg \pi \cdot \Delta x \approx \frac{1}{\pi \cdot \Delta x}$$

Entonces, teniendo en cuenta la (XXXII), resulta

$$\frac{1}{\pi \cdot \Delta x} = \frac{2L}{R} \cdot \Delta x$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{R}{2\pi L}} \quad (\text{XXXIV})$$

Mostraremos después que en este caso el sistema evoluciona según un batido de frecuencia

$$\Delta \Omega = \Delta x \cdot \Delta \omega = \sqrt{\frac{\pi g c}{2R}} \quad (\text{XXXV})$$

Ambos casos $\alpha)$ y $\beta)$ volverán a ser analizados cuando se estudie la distribución de energía de las vibraciones.

$$b) \quad \bar{x} > \sqrt{\frac{RL}{\pi}}, \text{ o } \bar{\omega} < \sqrt{g \cdot \Delta \omega}$$

El segundo miembro de la (XXVII) será siempre positivo; en particular, para $x \approx 0$ es muy grande (vea fig. 6). Existe un mínimo para

$$x_m = \sqrt{\frac{R}{\pi L} \left(1 - \frac{RL}{\pi \bar{x}^2} \right)}$$

En el caso límite, cuando

$$\bar{\chi} > \sqrt{\frac{R L}{\pi}}$$

entonces

$$x_{\text{m}} \approx \sqrt{\frac{R}{\pi L}}$$

$$c) \quad \bar{\chi} = \sqrt{\frac{R L}{\pi}}, \text{ o } \bar{\omega} = \sqrt{g \cdot \Delta \omega}$$

En este caso la (XXVII) se reduce a

$$\cotg \pi x = \frac{R}{L} x$$

o sea, la secante es una recta que pasa por el origen (vea fig. 7). En cualquiera de los tres casos arriba analizados las frecuencias del campo sensiblemente modificadas por el acoplamiento están en un vecindad de $\bar{\omega}$, vecindad esta que es tanto más pequeña cuanto más grande sea L (cuanto más pequeño sea g). Las otras frecuencias prácticamente coinciden con las del campo libre.

4) Los coeficientes de transformación.

Podemos ahora calcular explícitamente los coeficientes de transformación para el sistema acoplado oscilador-campo. Pongamos la (XVII) en la forma

$$t_o^r = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{n R}{\pi c}\right)^2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{K^2}{(K^2 - x_r^2)^2}}}$$

donde hicimos $N = \infty$ por tratarse del caso oscilador-campo, e introducimos K y x_r de acuerdo con las relaciones (XXI) y (XXII).

Hacemos

$$f(x) = \sum_K \frac{K^2}{(K^2 - x^2)^2} \quad (\text{XXXVI})$$

y viene

$$t_0^r = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\eta R}{\pi c} \right)^2 f(x_r)}} \quad (\text{XXXVII})$$

Pero

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_K \frac{1}{K^2 - x^2} + \sum_K \frac{x^2}{(K^2 - x^2)^2} = \\ &= \sum_K \frac{1}{K^2 - x^2} + \frac{x}{2} \frac{d}{dx} \sum_K \frac{1}{K^2 - x^2} \end{aligned}$$

De (A.7) (vea Apéndice) viene

$$\sum_{K=1} \frac{1}{K^2 - x^2} = \frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x} \cotg \pi x \quad (\text{XXXVIII})$$

De ahí resulta que

$$f(x) = -\frac{\pi}{4x} \cotg \pi x + \frac{\pi^2}{4} (1 + \cotg^2 \pi x) \quad (\text{XXXIX})$$

Sustituyendo en la (XXXVII) y operando encontramos que

$$t_0^r = \frac{\text{sen } \pi x_r}{\sqrt{\text{sen}^2 \pi x_r + \left(\frac{\eta R}{2c} \right)^2 \left[1 - \frac{\text{sen } \pi x_r \cos \pi x_r}{R \Omega_r / c} \right]}} \quad (\text{XL})$$

En vista de (XIII) tenemos además

$$t_K^r = \frac{\eta \omega_K}{\omega_K^2 - \Omega_r^2} \frac{\text{sen } x_r}{\sqrt{\text{sen}^2 \pi x_r + \left(\frac{\eta R}{2c} \right)^2 \left[1 - \frac{\text{sen } \pi x_r \cos \pi x_r}{R \Omega_r / c} \right]}} \quad (\text{XLI})$$

Estas relaciones pueden asumir otra forma si se elimina a $\cotg \pi x =$
 $= \cotg \frac{R \Omega}{c}$ en (XXXIX) por medio de (XXVI). Resulta entonces

$$f(x) = f\left(\frac{R \Omega}{\pi c}\right) = \frac{\pi^2}{4} \left\{ 1 + \frac{c}{R \Omega} \frac{\Omega^2 - \bar{\omega}^2}{\pi g \Omega} + \frac{(\Omega^2 - \bar{\omega}^2)^2}{\pi^2 g^2 \Omega^2} \right\}$$

Llevando a la (XXXVII) y teniendo en cuenta la (VI) se obtiene finalmente

$$t_o^r = \frac{\Omega_r}{\sqrt{\frac{\kappa}{2\pi g c} (\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2) + \frac{1}{2} (3 \Omega_r^2 - \bar{\omega}^2) + \frac{\pi g R}{2 c} \Omega_r^2}} \quad \text{XLII)}$$

y por consiguiente

$$t_K^r = \frac{\eta \omega_K}{\omega_K^2 - \Omega_r^2} \cdot \frac{\Omega_r}{\sqrt{\frac{P}{2\pi g c} (\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \frac{1}{2} (3 \Omega_r^2 - \bar{\omega}^2) + \frac{\pi g R}{2 c} \Omega_r^2}}$$

6

$$t_K^r = \sqrt{\frac{2\pi g c}{R}} \frac{\omega_K}{\omega_K^2 - \Omega_r^2} \cdot \frac{\Omega_r}{\sqrt{\frac{P}{2\pi g c} (\Omega_r^2 - \bar{\omega}^2)^2 + \frac{1}{2} (3 \Omega_r^2 - \bar{\omega}^2) + \frac{\pi g R}{2 c} \Omega_r^2}} \quad \text{(XLIH)}$$

5) La expresión del campo.

En esta sección determinaremos la expresión del campo $\Phi(r, t)$. Para esto tomemos las relaciones (IV) y (IX); resulta

$$\Phi(r, t) = c \sum_K q_K(t) \phi_K(r) = c \sum_{K,r} t_K^r Q_r \phi_K$$

6

$$\Phi(r, t) = c \sum_r Q_r \phi_r(r) \quad \text{(XLIV)}$$

con

$$\phi_r(r) = \sum_K t_K^r \phi_K \quad \text{(XLV)}$$

Como t_K^r y ϕ_K son ortonormales resulta que las $\phi_r(r)$ también lo serán.

Sustituyendo la (XLIV) en (IIb) se tiene

$$c \sum \left(-\frac{\Omega_r^2}{c^2} - \Delta \right) Q_r \phi_r(r) = 2\pi \sqrt{g c} \delta(\vec{r}) \sum_r t_o^r Q_r$$

En vista de la ortogonalidad de los Q_r esta ecuación puede ser descompuesta en el conjunto infinito de ecuaciones

$$\begin{aligned} c \left(- \frac{\Omega_r^2}{c^2} - \Delta \right) \phi_r(r) Q_r &= 2 \pi \sqrt{g} c \delta(\vec{r}) t_0^r Q_r \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \\ \left(- \frac{\Omega_r^2}{c} - \Delta \right) \phi_r &= 2 \pi \sqrt{\frac{g}{c}} \delta(\vec{r}) t_0^r \end{aligned}$$

Esta ecuación tiene como solución a

$$\phi_r(r) = - \sqrt{\frac{g}{c}} \frac{t_0^r}{2 \sin \delta_r} \frac{\sin(K_r r - \delta_r)}{r} \quad (\text{XLVI})$$

con $\delta_r \neq 0$ y $K_r = \frac{\Omega_r}{c}$

Para determinar δ_r desarrollaremos el segundo miembro en términos de los $\phi_K(r)$, definidos en (III), y compararemos con (XLV). Sea

$$\sqrt{\frac{g}{c}} \frac{t_0^r}{2 \sin \delta_r} \frac{\sin(K_r r - \delta_r)}{r} = \sum_K C_K^r \frac{\sin \frac{\omega_K}{c} r}{\sqrt{2 \pi R} r},$$

con

$$C_K^r = - 4 \pi \int_0^R r^2 dr \sqrt{\frac{g}{c}} \frac{t_0^r \sin \left(\frac{\Omega_r r}{c} - \delta_r \right) \sin \frac{\omega_K r}{c}}{\sqrt{2 \pi R} 2 \sin \delta_r \cdot r^2}$$

Integrando y teniendo en cuenta la (VI) resulta

$$C_K^r = t_0^r \frac{\eta \omega_K}{\omega_K^2 - \Omega_r^2} - \frac{t_0^r}{\sin \delta_r} \frac{\eta \omega_K}{\Omega_r^2 - \omega_K^2} (-)^K \sin \left(\frac{\Omega_r R}{c} - \delta_r \right)$$

Para que los C_K^r coincidan con los coeficientes, t_K^r , del desarrollo (XLV) debemos tener

$$\sin \left(\frac{\Omega_r R}{c} - \delta_r \right) = 0$$

Por lo tanto, cada $\phi_r(r)$ se anula para $r = R$, y de (XLIV) viene

$$\phi(R, t) = c \sum_r Q_r \phi_r(R) = 0$$

De ahí se ve que ya está implícito en nuestro modelo el carácter reflectante de la caja. Además tendremos

$$K_r R - \delta_r = N\pi,$$

con N entero. Pero

$$K_r = \frac{\Omega_r}{c} = (r + \epsilon_r) \frac{\pi}{R}$$

luego

$$\delta_r = (r - N)\pi + \epsilon_r \pi = m\pi + \epsilon_r \pi,$$

Cualquiera que sea m , entero, tendremos

$$\frac{\sin(K_r r - \delta_r)}{\sin \delta_r} = \frac{\sin(K_r r - \epsilon_r \pi)}{\sin \epsilon_r \pi}.$$

Haremos $m = 0$ y por consiguiente

$$\delta_r = \epsilon_r \pi \quad (\text{XLVII})$$

Como se ve, ϵ_r da la medida de una fase $0 < \psi < \pi$ para la expresión del campo en el estado Ω_r .

Comparando la (XLVI) con la (XLIV) resulta

$$\psi(r, t) = c \sum_r Q_r \psi_r = -c \sum_r Q_r \sqrt{\frac{g}{c}} \frac{t_0^r}{2 \sin \delta_r} \frac{\sin(K_r r - \delta_r)}{r}$$

o, teniendo en cuenta la (XL), se obtiene finalmente

$$\psi(r, t) = -\frac{\sqrt{gc}}{2} \sum_r \frac{Q_r}{\sqrt{\sin^2 \delta_r + \left(\frac{\eta R}{2c}\right)^2 \left[1 - \frac{\sin \delta_r \cos \delta_r}{\Omega_r R / c}\right]}} \cdot \frac{\sin(K_r r - \delta_r)}{r} \quad (\text{XLVIII})$$

con

$$\delta_r = \pi \epsilon_r$$

6) Distribución de energía de las vibraciones.

Tomemos el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} (p_0^2 + \omega_0^2 q_0^2) - \eta \sum_K \omega_K q_0 q_K + \frac{1}{2} \sum_K (p_K^2 + \omega_K^2 q_K^2)$$

y transformando aisladamente cada contribución (oscilador, acoplamiento y campo, respectivamente) a ejes principales según las expresiones (IX). Se obtiene

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \sum_{r,s} \{ t_0^r t_0^s p_r p_s + \omega_0^2 t_0^r t_0^s q_r q_s \} - \\ & - \eta \sum_K \sum_{r,s} \omega_K t_0^r t_K^s q_r q_s + \\ & + \frac{1}{2} \sum_K \sum_{r,s} \{ t_K^r t_K^s p_r p_s + \omega_K^2 t_K^r t_K^s q_r q_s \} \quad (XLIX) \end{aligned}$$

Si se calculan los valores medios de los términos cruzados $q_r q_s$ y $p_r p_s$ ($r \neq s$) para un estado estacionario del sistema acoplado, se verifica que ellos son nulos. En efecto, si se admite que el sistema está en un estado de frecuencia Ω_N una vez excitado, él será descrito por la auto-función(normalizada)

$$r_N(Q) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_1 \left(\sqrt{\frac{\Omega_N}{\hbar}} Q_N \right) r^{(0)}(Q) \quad (Q)$$

donde

$$r^{(0)}(Q) = e^{-\sum_s \Omega_s Q_s^2 / 2 \hbar} = \frac{1}{4} \sum_s \ln \frac{\Omega_s}{\pi \hbar}$$

es la auto-función (normalizada) del vacío, y

$$H_1 \left(\sqrt{\frac{\Omega_N}{\hbar}} Q_N \right) = 2 \sqrt{\frac{\Omega_N}{\hbar}} Q_N$$

es el polinomio de Hermite de orden 1.

Tendremos

$$\begin{aligned} \langle P_n P_m \rangle &= \int r_N(Q) (P_n P_m) r_N(Q) dQ = \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2}} H_1 \left(\sqrt{\frac{\Omega_N}{\hbar}} Q_N \right) r^{(0)}(Q) \left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial Q_n \partial Q_m} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} H_1 \left(\sqrt{\frac{\Omega_N}{\hbar}} Q_N \right) r^{(0)}(Q) dQ \end{aligned}$$

Si m y n son diferentes de N , resulta

$$\langle P_n P_m \rangle = -\hbar^2 \int \frac{1}{2} \left[H_1 \left(\sqrt{\frac{\Omega_N}{\hbar}} Q_N \right) r^{(0)}(Q) \right]^2 \frac{\Omega_n Q_n}{\hbar} \frac{\Omega_m Q_m}{\hbar} dQ$$

Transformando el integrando en términos de los polinomios de Hermite y teniendo en cuenta la ortogonalidad de los mismos, resulta

$$\langle P_n P_m \rangle = 0, \quad m \neq n$$

De manera análoga se halla que

$$\langle P_m P_N \rangle = \langle P_N P_m \rangle = 0$$

y

$$\langle Q_m Q_n \rangle = \langle Q_m Q_N \rangle = \langle Q_N Q_n \rangle = 0$$

para índices diferentes.

Así, se puede escribir, a partir de (XLIX),

$$\begin{aligned} H = \langle H \rangle &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_r t_O^r t_O^r \langle P_r^2 \rangle + \omega_O^2 \sum_r t_O^r t_O^r \langle Q_r^2 \rangle \right\} - \\ &- n \sum_{K,r} \omega_K t_O^K t_K^r \langle Q_r \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \sum_{K,r} t_K^r t_K^r \langle P_r \rangle + \sum_{K,r} \omega_K^2 t_K^r t_K^r \langle Q_r^2 \rangle \right\} \quad (L) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\langle P_r^2 \rangle = \int \frac{1}{\sqrt{2}} H_1 \left(\sqrt{\frac{\Omega_N}{\hbar}} Q_N \right) r^{(0)}(Q) \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial Q_r^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} H_1 \left(\sqrt{\frac{\Omega_N}{\hbar}} Q_N \right) r^{(0)}(Q) \right) dQ$$

Si $r \neq N$ esa expresión resulta $\langle p_r^2 \rangle = \frac{1}{2} \hbar \Omega_r$

Si $r = N$ $\langle p_N^2 \rangle = \frac{3}{2} \hbar \Omega_N$

De manera análoga obtenemos

$$\langle Q_r^2 \rangle = \frac{1}{2} \hbar / \Omega_r \text{ si } r \neq N \text{ y } \langle Q_N^2 \rangle = \frac{3}{2} \hbar / \Omega_N$$

Si tomamos del Hamiltoniano en su forma (L), solamente la contribución del modo Ω_N y calculamos separadamente cada término, resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle p_N^2 + \Omega_N^2 Q_N^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \hbar \Omega_N \right) \left\{ (t_O^r)^2 + \omega_O^2 (t_O^1)^2 \frac{1}{\Omega_N^2} \right\} - \\ &- \left(\frac{3}{2} \hbar \Omega_N \right) \left\{ n \sum_K \omega_K (t_O^N)^2 \frac{\eta \omega_K}{\omega_K^2 - \Omega_N^2} \frac{1}{\Omega_N^2} \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \hbar \Omega_N \right) \left\{ \sum_K (t_K^N)^2 + \sum_K (t_O^N)^2 \frac{\eta^2 \omega_K^2}{\omega_K^2 - \Omega_N^2} \frac{1}{\Omega_N^2} \right\} = \\ &= \left(-\frac{3}{2} \hbar \Omega_N \right) \left\{ \frac{1}{2} \left[(t_O^N)^2 + \frac{\omega^2}{\Omega_N^2} (t_O^N)^2 + \frac{(t_O^N)^2}{\Omega_N^2} \eta^2 \sum_K 1 \right] - \right. \\ &- \left[\frac{(t_O^N)^2}{\Omega_N^2} \eta^2 \sum_K \frac{\Omega_N^2}{\omega_K^2 - \Omega_N^2} + \frac{(t_O^N)^2}{\Omega_N^2} \eta^2 \sum_K 1 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\sum_K (t_K^N)^2 + \frac{(t_O^N)^2}{\Omega_N^2} \eta^2 \sum_K \frac{\omega_K^2}{\omega_K^2 - \Omega_N^2} + (t_O^N)^2 \sum_K \frac{\eta^2 \omega_K^2}{(\omega_K^2 - \Omega_N^2)^2} \right] \left. \right\} = \\ &= \left(-\frac{3}{2} \hbar \Omega_N \right) \left\{ \frac{1}{2} \left[(t_O^N)^2 + (t_O^N)^2 + \frac{\omega^2 - \Omega_N^2}{\Omega_N^2} (t_O^N)^2 + \frac{(t_O^N)^2}{\Omega_N^2} \eta^2 \sum_K 1 \right] - \right. \\ &- \left[(t_O^N)^2 \sum_K \frac{\eta^2}{\omega_K^2 - \Omega_N^2} + \frac{(t_O^N)^2}{\Omega_N^2} \eta^2 \sum_K 1 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\sum_K (t_K^N)^2 + (t_O^N)^2 \sum_K \frac{\eta^2}{\omega_K^2 - \Omega_N^2} + \frac{(t_O^N)^2}{\Omega_N^2} \eta^2 \sum_K 1 + \sum_K (t_K^N)^2 \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

Ordenando y teniendo en cuenta la (XX) resulta

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \langle p_N^2 + \Omega_N^2 Q_N^2 \rangle &= \frac{3}{2} \hbar \Omega_N \left\{ \left[(t_O^N)^2 + \frac{1}{2} (t_O^N)^2 \sum_K \frac{\eta^2}{\omega_K^2 - \Omega_N^2} + \frac{1}{2} \frac{(t_O^N)^2}{\Omega_N^2} \eta^2 \sum_K 1 \right] + \right. \\
 &\quad + \left[- (t_O^N)^2 \sum_K \frac{\eta^2}{\omega_K^2 - \Omega_N^2} - \frac{(t_O^N)^2}{\Omega_N^2} \eta^2 \sum_K 1 \right] + \\
 &\quad + \left[\sum_K (t_K^N)^2 + \frac{1}{2} (t_O^N)^2 \sum_K \frac{\eta^2}{\omega_K^2 - \Omega_N^2} + \frac{1}{2} \frac{(t_O^N)^2}{\Omega_N^2} \eta^2 \sum_K 1 \right] \Big\} = \\
 &= \frac{3}{2} \hbar \Omega_N \left\{ (t_O^N)^2 + \sum_K (t_K^N)^2 \right\} \quad (LI)
 \end{aligned}$$

De manera análoga se obtiene, para $r \neq N$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \langle p_r^2 + \Omega_r^2 Q_r^2 \rangle &= \frac{1}{2} \hbar \Omega_r \left\{ \left[(t_O^r)^2 + \frac{1}{2} (t_O^r)^2 \sum_K \frac{\eta^2}{\omega_K^2 - \Omega_r^2} + \frac{1}{2} \frac{(t_O^r)^2}{\Omega_r^2} \eta^2 \sum_K 1 \right] + \right. \\
 &\quad + \left[- (t_O^r)^2 \sum_K \frac{\eta^2}{\omega_K^2 - \Omega_r^2} - \frac{(t_O^r)^2}{\Omega_r^2} \eta^2 \sum_K 1 \right] + \\
 &\quad + \left[\sum_K (t_K^r)^2 + \frac{1}{2} (t_O^r)^2 \sum_K \frac{\eta^2}{\omega_K^2 - \Omega_r^2} + \frac{1}{2} \frac{(t_O^r)^2}{\Omega_r^2} \eta^2 \sum_K 1 \right] \Big\} = \\
 &= \frac{1}{2} \hbar \Omega_r \left\{ (t_O^r)^2 + \sum_K (t_K^r)^2 \right\} \quad (LII)
 \end{aligned}$$

Por consiguiente la energía de excitación, que se obtiene substrayendo del Hamiltoniano la energía del vacío, presentará el mismo tipo de distribución:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \langle p_r^2 + \Omega_r^2 q_r^2 \rangle - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \hbar \Omega_r = \\
 &= \hbar \Omega_N \left\{ \left[(t_0^N)^2 + \frac{1}{2} (t_0^N)^2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\eta^2}{\omega_K^2 - \Omega_N^2} + \frac{1}{2} \frac{(t_0^N)^2}{\Omega_N^2} \eta^2 \sum_{K=1}^{\infty} 1 \right] + \right. \\
 &+ \left[- (t_0^N)^2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\eta^2}{\omega_K^2 - \Omega_N^2} - \frac{(t_0^N)^2}{\Omega_N^2} \eta^2 \sum_{K=1}^{\infty} 1 \right] + \\
 &+ \left[\sum_{K=1}^{\infty} (t_K^N)^2 + \frac{1}{2} (t_0^N)^2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\eta^2}{\omega_K^2 - \Omega_N^2} + \frac{1}{2} \frac{(t_0^N)^2}{\Omega_N^2} \eta^2 \sum_{K=1}^{\infty} 1 \right] \Big\} = \\
 &= \hbar \Omega_N \left\{ (t_0^N)^2 + \sum_K (t_K^N)^2 \right\} = \hbar \Omega_N \quad \text{(LIII)}
 \end{aligned}$$

De aquí se ve que las tres partes que postulamos inicialmente para el sistema - oscilador, interacción y campo - tienen energías infinitas, por lo que carecen de significado físico. Por otro lado la infinidad negativa de la interacción compensa las infinidades del oscilador y del campo, de tal manera que el sistema puede, ahora, ser considerado como formado de dos partes: una, que representa una fracción $(t_0^N)^2$ de la energía, a que llamaremos "oscilador", y la otra con

$$\sum_K (t_K^N)^2 \hbar \Omega_N ,$$

que denominaremos "campo". Naturalmente, ya no se trata del oscilador y del campo libres (desnudos) que postulamos inicialmente, sino que de un "oscilador vestido" y un "campo vestido", entendiéndose por "vestimenta" a los incrementos de energía que les son inherentes cuando están acoplados; esta última división, en dos partes, es la que tiene significado físico y de ella se ve la estructura física del sistema.

En lo que sigue de esta Sección nos abstendremos del uso de comillas, entendiendo por oscilador y campo a los respectivos entes "vestidos".

Calcularemos ahora, explícitamente, la distribución de energía entre los dos elementos constituyentes del sistema, distinguiendo los diversos casos posibles.

$$1 - R \gg L \quad \left(\frac{\Delta \omega}{\pi} \ll g \right)$$

Dividamos el espectro en tres dominios

$$1.I) \quad \chi_r \ll R \quad \left(\Omega_r \gg \frac{\Delta \omega}{\pi} \right)$$

De (XL), (VI) y (XXVIII) viene

$$(t_o^r)^2 = \frac{\sin^2 \delta_r}{\sin^2 \delta_r + \frac{\pi}{2} \frac{R}{L} \left[1 - \frac{\sin \delta_r \cos \delta_r}{P / \chi_r} \right]} \quad (LIV)$$

En nuestro caso

$$(t_o^r)^2 \approx \sin^2 \delta_r \frac{2}{\pi} \frac{L}{R} \ll 1$$

y consecuentemente

$$\sum_K (t_K^r)^2 = 1 - (t_o^r)^2 \approx 1$$

$$i.II) \quad \chi_r \sim R$$

La (LIV) puede aún ser puesta en la forma

$$(t_o^r)^2 = \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2} \frac{R}{L} \left\{ 1 - \operatorname{ctg} \delta_r \left(\frac{\chi_r}{R} - \operatorname{ctg} \delta_r \right) \right\}} \quad (LV)$$

Hay tres posibilidades para $\bar{\omega}$:

$$1.II.a) \quad \bar{\omega} \gg g \quad (\bar{\chi} \ll L)$$

o sea, en resumen

$$\bar{\chi} \ll L \ll R \sim \chi_r \quad \left(\bar{\omega} \gg g \gg \frac{\Delta \omega}{\pi} \sim \Omega_r \right)$$

De (XXVI) viene

$$\operatorname{ctg} \delta_r = \operatorname{ctg} \frac{R \Omega_r}{c} \approx \frac{\chi_r}{R} - \frac{\bar{\omega}^2}{\pi g \Omega_r} \approx - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\bar{\omega}}{g} \right)^2 \frac{g}{\Omega_r} \ll -1$$

$$1.II.b) \quad \bar{\omega} \sim g \quad (\bar{\chi} \sim L)$$

$$\delta \quad \bar{\chi} \sim L \ll R \sim \chi_r \quad \bar{\omega} \sim g \gg \frac{\Delta \omega}{\pi} \sim \Omega_r$$

Tendremos, como anteriormente

$$\operatorname{ctg} \delta_r \approx - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\bar{\omega}}{g} \right)^2 \frac{g}{\Omega_r} \ll -1$$

$$1.II.c) \quad \bar{\omega} \sim \frac{\Delta \omega}{\pi} \quad (\bar{\chi} \sim R)$$

Resumen

$$\bar{\chi} \sim R \sim \chi_r \gg L \quad \left(\bar{\omega} \sim \frac{\Delta \omega}{\pi} \sim \Omega_r \ll g \right)$$

$$\operatorname{ctg} \delta_r = \frac{\chi_r}{R} + \frac{1}{\pi} \frac{\Omega_r - \bar{\omega}}{\Omega_r} \frac{\Omega_r + \bar{\omega}}{g} \approx \frac{\chi_r}{R}$$

En los dos casos, a) y b), se obtiene de (LV)

$$(t_o^r)^2 \approx \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2} \frac{R}{L} \operatorname{ctg}^2 \delta_r} \ll 1$$

Para el c)

$$(t_o^r)^2 \approx \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2} \frac{R}{L} \left\{ 1 + \frac{\chi_r}{R} \frac{1}{\pi} \frac{\Omega_r - \bar{\omega}}{\Omega_r} \frac{\Omega_r + \bar{\omega}}{g} \right\}} \approx \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2} \frac{R}{L}} \ll 1$$

y en los tres casos

$$\sum_r (t_K^r)^2 \approx 1$$

$$1.III) \quad \chi_o \gg R \quad \left(\Omega_o \ll \frac{\Delta \omega}{\pi} \right)$$

En este caso es válida la aproximación

$$\operatorname{ctg} R \frac{\Omega_o}{c} \approx \frac{c}{R \Omega_o} = \frac{\chi_o}{R} \quad (LVI)$$

Sustituyendo en la (XXVI) resulta

$$\Omega_0 = \bar{\omega}$$

Sustituyendo en la (LV), cuando sea el caso, la $\cotg \epsilon_r$ por su expansión hasta el término lineal:

$$\cotg \frac{R \Omega_0}{c} \approx \frac{c}{R \Omega_0} - \frac{1}{6} \frac{R \Omega_0}{c} = \frac{\chi_0}{R} - \frac{1}{6} \frac{R}{\chi_0}$$

resulta

$$(t_0^r)^2 \approx \frac{1}{1 + \frac{5}{6} \frac{\pi}{2} \frac{P}{L}} < 1$$

y

$$\sum_K (t_K^r)^2 \approx 1$$

Por consiguiente, en el caso $R \gg L$, sea cual fuera el valor de $\bar{\omega}$ y para todas las vibraciones del espectro, la energía $\hbar \Omega$ de un cuanto se encuentra casi exclusivamente en el campo, con poca probabilidad de que el oscilador esté excitado. En otras palabras, el tiempo que lleva la excitación en el oscilador es muy pequeño respecto del tiempo que la misma se manifiesta como radiación.

$$2) \quad R = L \quad \left(\frac{\Delta \omega}{\pi} = g \right)$$

Admitiremos además que

$$\bar{\omega} \gg \Delta \omega \quad \left(\bar{\chi} \ll \frac{R}{\pi} \right)$$

y dividiremos el espectro (χ_r) en tres dominios

$$2.I) \quad \chi_r \ll \bar{\chi} \ll \frac{R}{\pi} = \frac{L}{\pi} \quad (\Omega_r \gg \bar{\omega} \gg \Delta \omega = \pi g)$$

de (XXVI) viene

$$\cotg \frac{R \Omega_r}{c} \approx \frac{c}{R \Omega_r} + \frac{\Omega_r}{\pi g} = \frac{\Delta \omega}{\pi \Omega_r} + \frac{\Omega_r}{\pi g} \approx \frac{\Omega_r}{\pi g} \gg 1$$

De (LV) resulta

$$(t_o^r)^2 \approx \frac{1}{\frac{\pi}{2} \operatorname{ctg}^2 \delta_r} \quad , \quad \epsilon < 1 \quad ; \quad \sum_K (t_K^r)^2 \approx 1$$

$$2.II) \quad \chi_r \sim \frac{R}{\pi} = \frac{L}{\pi} \gg \bar{\chi} \quad (\Omega_r \sim \Delta \omega = \pi g, \quad \epsilon < \bar{\omega})$$

$$\operatorname{ctg} \frac{R}{c} \frac{\Omega_r}{\Omega_r} \approx \frac{c}{R} - \frac{\bar{\omega}^2}{\pi g \Omega_r} = \frac{\Delta \omega}{\pi \Omega_r} - \frac{\bar{\omega}}{\Omega_r} \cdot \frac{\bar{\omega}}{\pi g} \approx - \frac{\bar{\omega}}{\Omega_r} \frac{\bar{\omega}}{\pi g} \quad \epsilon < -1$$

De ahí que

$$(t_o^r)^2 \approx \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2} \frac{R}{L} \operatorname{ctg}^2 \delta_r} \quad \epsilon < 1 \quad ; \quad \sum_K (t_K^r)^2 \approx 1$$

$$2.III) \quad \chi_r \sim \bar{\chi}, \quad \epsilon < \frac{R}{\pi} - \frac{L}{\pi} \quad (\Omega_r \sim \bar{\omega} \gg \Delta \omega = \pi g)$$

En este caso calculamos el valor del elemento de matriz en función de la fase δ_r correspondiente:

$$2.III.a) \quad \delta_r = \pi/2$$

De la (LIV) se obtiene

$$(t_o^r)^2 = \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2} \frac{R}{L}} = \frac{2}{\pi + 2} \approx \frac{2}{5}$$

$$\sum_K (t_K^r)^2 = \frac{\pi}{\pi + 2} \approx \frac{3}{5}$$

$$2.III,b) \quad \delta_r = \pi/4$$

De acuerdo a nuestras desigualdades la (LIV) puede ser aproximada por

$$\left| t_o^r \right|^2 \approx \frac{\operatorname{sen}^2 \delta_r}{\operatorname{sen}^2 \delta_r + \pi/2} \quad (LVII)$$

Entonces tendremos

$$\left| t_0^r \right|^2 \approx \frac{1/2}{1/2 + \pi/2} = \frac{1}{\pi + 1} \approx \frac{1}{4}$$

$$\sum_K \left| t_K^r \right|^2 \approx \frac{\pi}{\pi + 1} \approx \frac{3}{4}$$

2.III,c) $\delta_r = 3\pi/4$

Los resultados son idénticos a los del caso b)

$$\left| t_0^r \right|^2 \approx \frac{1}{4} \quad ; \quad \sum_K \left| t_K^r \right|^2 \approx \frac{3}{4}$$

2.III,d) $\delta_r \approx 0$ (o $\delta_r \approx \pi$)

De (LVII) viene

$$\left| t_0^r \right|^2 \approx 0 \quad ;$$

luego

$$\sum_K \left| t_K^r \right|^2 \approx 1$$

Se concluye entonces que para $R = L$ las únicas vibraciones que tienen una probabilidad razonable de excitar el oscilador son las que están próximas a $\bar{\omega}$ (compare fig. 2 con fig. 8). De todas formas siempre es más grande la probabilidad de que la excitación esté en el campo que en el oscilador, como se ve en la fig. 8.

Por (LIV) se ve que este diagrama tiene un mínimo para $\delta_r = \pi/2$ y es prácticamente simétrico. El mínimo se verifica en la anti-resonancia, o sea cuando

$$\Omega_r = \bar{\omega} = \left(\bar{r} + \frac{1}{2} \right) \cdot \Delta \omega$$

3) $R \ll L \quad \left(\frac{\Delta \omega}{\pi} \gg g \right)$

Distinguiremos dos rangos para $\bar{\omega}$:

$$3.1) \quad \bar{\omega} \gtrsim \Delta \omega \quad \left(\bar{\chi} \lesssim \frac{R}{\pi} \right)$$

Respecto del valor de $\bar{\epsilon}$ consideraremos, como en la Sección 3, dos casos

$$3.I,a) \quad \bar{\epsilon} = 1/2$$

Como ya ^{fue visto} en la Sección 3, caso α) hay una frecuencia, $\Omega_{\bar{r}}$, del espectro, para la cual

$$\epsilon_{\bar{r}} \approx \bar{\epsilon} = 1/2$$

De la (LIV) resulta

$$\left| \bar{t}_0^{\bar{r}} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2} \frac{R}{L}} \approx 1 - \frac{\pi}{2} \frac{R}{L} \approx 1 \quad (\text{LVIII})$$

$$\sum_K \left| \bar{t}_K^{\bar{r}} \right|^2 \approx \frac{\pi}{2} \frac{R}{L} \ll 1$$

En este caso la probabilidad de que la energía de excitación se encuentre en el campo es casi nula, o sea, el tiempo que puede tardar la excitación en el campo es muy pequeño, respecto del tiempo que la misma lleva en el oscilador. Este es el caso de la anti-resonancia.

$$3.I,b) \quad \bar{\epsilon} = 0$$

En este caso, como fue visto en la Sección 3, tendremos un desdoblamiento en dos del modo $\omega_{\bar{r}} \approx \bar{\omega}$ (fig. 5) en

$$\Omega_{\bar{r}-1} \approx \bar{\omega} - \Delta \Omega$$

y

$$\Omega_{\bar{r}} \approx \bar{\omega} + \Delta \Omega$$

(LIX)

con

$$\Delta \Omega = \Delta \chi \cdot \Delta \omega = \sqrt{\frac{\pi g c}{2 R}} \quad (\text{XXXV})$$

Entonces

$$\text{ctg} \frac{R \Omega_{\bar{r}-1}}{c} = - \text{ctg} \frac{R \Omega_{\bar{r}}}{c} \approx \frac{c}{R \Delta \Omega} = \sqrt{\frac{2 c}{\pi R g}} = \sqrt{\frac{2 L}{\pi R}} \gg 1$$

De (LV) se obtiene

$$\left| t_{\bar{o}}^{\bar{r}-1} \right|^2 = \left| t_{\bar{o}}^{\bar{r}} \right|^2 \approx \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2} \frac{R}{L} \left\{ 1 + \frac{2L}{\pi R} \right\}} \approx \frac{1}{2} \quad (\text{LX})$$

Por consiguiente

$$\sum_K \left| t_K^{\bar{r}-1} \right|^2 = \sum_K \left| t_K^{\bar{r}} \right|^2 \approx \frac{1}{2}$$

y la probabilidad de que la excitación se encuentre en el campo es igual a la de que se halle en el oscilador. Se muestra fácilmente que el sistema evoluciona bajo la forma de un batido. En efecto, admitamos que inicialmente solo el oscilador está excitado, estando el campo en su estado fundamental, o sea, para $t = 0$

$$q_o(0) = q_o$$

$$q_K(0) = 0, \quad (K \neq 0)$$

En vista de (X), tendremos entonces

$$Q_r(0) = t_o^r q_o(0) \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{LXI})$$

y

$$\begin{aligned} q_o(t) &= \sum_r t_o^r Q_r(t) \\ q_o(t) &= \sum_r t_o^r Q_r(0) e^{-i \Omega_r t} \end{aligned} \quad (\text{LXII})$$

De (LX) se obtiene

$$\left| t_o^{\bar{r}-1} \right|^2 + \left| t_o^{\bar{r}} \right|^2 \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

y de las relaciones de ortonormalidad (XI) resulta

$$\left| t_o^r \right|^2 \approx 0, \quad \text{si } r \neq \bar{r} - 1, \bar{r} \quad (\text{LXIII})$$

De la (LXI) se concluye entonces que las únicas coordenadas normales no-nulas, en el instante $t = 0$, serán

$$Q_{\bar{r}-1}^{-}(0) = t_0^{\bar{r}-1} q_0(0),$$

y

$$Q_{\bar{r}}^{-}(0) = t_0^{\bar{r}} q_0(0)$$

que introducidas en (LXII) nos dan

$$q_0(t) = \left| t_0^{\bar{r}-1} \right|^2 q_0(0) e^{-i \Omega_{\bar{r}-1} t} + \left| t_0^{\bar{r}} \right|^2 q_0(0) e^{-i \Omega_{\bar{r}} t}$$

Teniendo en cuenta las relaciones (LX) y (LIX) queda

$$q_0(t) = \left[q_0(0) \cos \Delta \Omega \cdot t \right] e^{-i \bar{\omega} t},$$

con

$$\Delta \Omega = \sqrt{\frac{\tau g c}{2 R}} \ll \bar{\omega}$$

Por lo tanto, el oscilador evoluciona con un batido de frecuencia $\Delta \Omega$, siendo su frecuencia de vibración igual a la frecuencia renormalizada $\bar{\omega}$.

Para las vibraciones no mencionadas, sea en el caso a) o en el caso b), la distribución de energía será la usual: hay una probabilidad casi nula de que la energía de excitación se halle en el oscilador, contra una probabilidad casi uno de que se halle en el campo. Para el caso b) esto se ve directamente de (LXIII) y para el caso a) se deduce inmediatamente de (LVIII) y de la normalización de la matriz que

$$\left| t_0^r \right|^2 \approx 0,$$

y

$$\sum_K \left| t_K^r \right|^2 \approx 1, \text{ para } r \neq \bar{r}$$

$$3.II) \quad \bar{\omega} \ll \Delta \omega \left(\frac{R}{\pi} \ll \bar{\chi} \right)$$

Calcularemos la primera autofrecuencia admitiendo "a priori" que la misma es suficientemente pequeña ($\Omega_0 \ll \Delta \omega$) como para que sea válida la aproximación

$$\text{ctg} \frac{R \Omega_0}{c} \approx \frac{c}{R \Omega_0}$$

Sustituyendo en (XXVI) resulta

$$\Omega_0 \approx \bar{\omega}$$

y como, por hipótesis $\bar{\omega} \ll \Delta \omega$, está justificada la aproximación hecha.

Sustituyendo en la (IV) la cotg. δ_r por su expansión, incluyendo el término lineal cuando sea el caso, obtenemos

$$\left| t_0^o \right|^2 \approx \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2} \frac{R}{L} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \right\}} \approx 1 - \frac{5}{6} \frac{\pi}{2} \frac{R}{L} \approx 1$$

$$\sum_K \left| t_K^o \right|^2 \approx \frac{5}{6} \frac{\pi}{2} \frac{R}{L} < 1$$

Como en veces anteriores tendremos además

$$\left| t_0^r \right|^2 \approx 0$$

y

$$\sum_K \left| t_K^r \right|^2 \approx 1, \text{ para } r \neq 0.$$

En este, como en el caso Ia), hay una vibración, Ω_0 , cuya energía se halla casi siempre en el oscilador y para las otras vibraciones se da lo contrario.

El análisis de la distribución de energía podría también ser hecho por medio de la presión de radiación en las paredes de la caja. Este tipo de análisis es de aplicación más general, pudiendo ser usado para sistemas de los que no se conocen las matrices de transformación a ejes principales (t_μ^r) , tales como átomos, núcleos y partículas elementales.

En el caso de radiación libre, la presión ejercida por un cuanto $\hbar \omega_i$ está simplemente dada por

$$- \frac{d(\hbar \omega_i)}{dV} = \Pi = \frac{1}{3} \frac{\hbar \omega_i}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{\hbar \omega_i}{4\pi R^3}$$

En el caso general

$$\pi_r = - \frac{d(\hbar \Omega_r)}{dV} = - \frac{d(\hbar \Omega_r)}{dR} \frac{dR}{d\left(\frac{4}{3} \pi R^3\right)} = - \frac{\hbar}{4 \pi R^2} \frac{d\Omega_r}{dP}$$

Para nuestro modelo, $d\Omega_r/dP$ puede ser obtenido por diferenciación de (XXV); teniendo en cuenta la (VI) se llega, después de algunas transformaciones, a

$$\frac{d\Omega_r}{dR} = \pi \chi_r \cdot \frac{\frac{c}{R^2} - \frac{c}{\chi_r^2} - \frac{c}{\chi_r^2} \cotg^2 \frac{R\Omega_r}{c}}{2L + \pi R - \pi R \cotg \frac{R\Omega_r}{c} \left\{ \frac{\chi_r}{R} - \cotg \frac{R\Omega_r}{c} \right\}}$$

luego

$$\pi_r = - \frac{\pi \hbar \chi_r}{4 \pi R^2} \cdot \frac{\frac{c}{R^2} - \frac{c}{\chi_r^2} - \frac{c}{\chi_r^2} \cotg \frac{R\Omega_r}{c}}{2L + \pi R - \pi R \cotg \frac{R\Omega_r}{c} \left(-\frac{\chi_r}{R} - \cotg \frac{R\Omega_r}{c} \right)} \quad (LXIV)$$

La densidad de energía (media) en el campo está dada por

$$\frac{W_r}{\frac{4}{3} \pi R^3} = 3 \pi_r,$$

y la probabilidad de que un cuanto $\hbar \Omega_r$ esté en el campo será

$$\frac{W_r}{\hbar \Omega_r} = \frac{4 \pi R^3}{\hbar \Omega_r} \pi_r \quad (LXV)$$

Consecuentemente la probabilidad de que el oscilador esté excitado con esa energía será

$$1 - \frac{W_r}{\hbar \Omega_r} = 1 - \frac{4 \pi R^3}{\hbar \Omega_r} \pi_r$$

El análisis de la distribución de energía a partir de las presiones conduce a los mismos resultados que obtuvimos por cálculo de elementos de matriz.

Conclusiones.-

Hemos mostrado que el problema de un oscilador puntiforme, de frecuencia $\bar{\omega}$, acoplado a un campo escalar anteriormente estudiado en el caso del espacio infinito⁽¹⁾, ⁽²⁾, también puede ser resuelto rigurosamente en el caso de una esfera reflectora de radio R finito.

El sistema acoplado puede ser descripto por un Hamiltoniano sencillo, sin referencia a las partes no-acopladas (desnudas) singulares, que carecen de significado físico, por medio de coordenadas colectivas.

La conexión entre estas coordenadas colectivas y las coordenadas que describen al oscilador y al campo que deseamos representar, está dada por una transformación ortogonal t_O^r , t_K^r .

Resulta que esta transformación permite separar el sistema acoplado en dos partes finitas, a las cuales podemos llamar, respectivamente, "oscilador vestido" y "campo vestido", partes que no coinciden con los ficticios conceptos de oscilador y campo "desnudos" inicialmente mencionados.

El modelo considerado permite determinar, para una autovibración del sistema dada, cómo una excitación se distribuye sobre el "campo" y el "oscilador". En el caso de una esfera suficientemente grande ($R \gg L$), el volumen de fase de la radiación domina, de modo que el "oscilador" participa muy poco en cada autovibración del sistema.

En el caso de una esfera pequeña ($R \ll L$), sin embargo, encontramos estados de frecuencias cercanas a $\bar{\omega}$, en las cuales una gran parte de la excitación pertenece al "oscilador" y que, luego, se comporta de una manera muy semejante que un oscilador descripto por la mecánica cuántica.

Una aplicación de las fórmulas dadas en lo que precede, al caso $R \gg I$ ha sido hecha por A. Malbouisson en un trabajo que permite describir tanto el proceso de la emisión de radiación como el comportamiento cuántico de un "oscilador vestido".

Queda por verse hasta que punto las propiedades cualitativas arriba descritas son exclusivas de nuestro modelo simplificado y hasta que punto son generales y se las puede también atribuir a sistemas más realistas, tales como átomos, núcleos y partículas elementales, que todavía no sabemos tratar adecuadamente.

AGRADECIMIENTOS

Al Prof. Dr. Guido Beck por la idea y orientación de este trabajo.

Al Prof. J.W. Bautista Vidal por el interés y la colaboración en conseguir los recursos financieros indispensables para su realización.

Al Instituto de Física Dr. J.A. Balseiro por otorgarme todos los elementos de trabajo necesarios y a la "Fundação Para o Desenvolvimento da Ciência na Bahia" por la beca concedida.

Cálculo de la suma

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{x^2}{K^2 - x^2} = \frac{1}{2} \{ 1 - \pi x \cotg \pi x \}$$

Sea la función

$$\gamma(x) = \frac{1}{2x} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x}{m^2 - x^2}$$

Mostraremos que $\gamma(x)$ es una función periódica de periodo 1. En efecto

$$\begin{aligned} \gamma(x+1) &= \frac{1}{2(x+1)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x+1}{m^2 - (x+1)^2} = \frac{1}{2(x+1)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x+1}{[m - (x+1)][m + (x+1)]} = \\ &= \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m - (x+1)} - \frac{1}{m + (x+1)} \right] = \\ &= \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{x} + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K - x} - \sum_{K=2}^{\infty} \frac{1}{K + x} \right\} = \\ &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K - x} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{K + x} \right\} = \gamma(x) \end{aligned}$$

En general, si hacemos

$$x = \epsilon + n,$$

con n entero y

$$0 < \epsilon < 1 \quad (A.1)$$

tenemos

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \frac{1}{2x} - \sum_{K=1}^{\infty} \frac{x}{K^2 - x^2} = \frac{1}{2(\epsilon + n)} - \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\epsilon + n}{K^2 - (\epsilon + n)^2} \\ &= \frac{1}{2\epsilon} - \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{K^2 - \epsilon^2} \end{aligned} \quad (A.2)$$

Por otro lado

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{K^2 - \epsilon^2} = \epsilon \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\epsilon}{K}\right)^2}$$

Desarrollando y teniendo en cuenta la (A.1) se obtiene

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{K^2 - \epsilon^2} = \epsilon \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^2} \sum_{S=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon}{K}\right)^{2S} = \epsilon \sum_{K=1}^{\infty} \sum_{S=0}^{\infty} \epsilon^{2S} \frac{1}{K^2 (S+1)},$$

o

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{K^2 - \epsilon^2} = \epsilon \sum_{S=0}^{\infty} \epsilon^{2S} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^2 (S+1)} \quad (A.3)$$

Tomemos ahora la identidad (3)

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^{2\ell}} = \frac{2^{2\ell-1} \pi^{2\ell}}{(2\ell)!} \left| B_{2\ell} \right| \quad (A.4)$$

donde $B_{2\ell}$ son los coeficientes de Bernouilli de orden par, que son definidos a partir del desarrollo

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} \quad (A.5)$$

para esos coeficientes valen las relaciones⁽⁴⁾

$$\left[\begin{array}{l} B_0 = 1 \\ B_1 = -1/2 \\ B_{2n} = (-1)^{n+1} \left| B_{2n} \right| \\ B_{2n+1} = 0 \end{array} \right]$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$

Comparando (A.3) y (A.4) resulta

$$\begin{aligned} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{K^2 - \epsilon^2} &= \epsilon \sum_{S=0}^{\infty} \epsilon^{2S} \frac{2^{2(S+1)-1} \pi^{2(S+1)}}{[2(S+1)]!} \left| B_{2(S+1)} \right| = \\ &= \epsilon \sum_{r=1}^{\infty} \epsilon^{2(r-1)} \frac{2^{2r-1} \pi^{2r}}{(2r)!} \left| B_{2r} \right| = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\epsilon} \sum_{r=1}^{\infty} \epsilon^{2r} \frac{\epsilon^{2r} \pi^{2r}}{(2r)!} \left| B_{2r} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\epsilon} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2\pi\epsilon)^{2r}}{(2r)!} \left| B_{2r} \right| = - \frac{1}{2\epsilon} \sum_{r=1}^{\infty} (-)^r (-)^{r+1} \left| B_{2r} \right| \frac{(2\pi\epsilon)^{2r}}{(2r)!}$$

Aplicando una de las relaciones (A.6) queda

$$\begin{aligned} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{K^2 - \epsilon^2} &= - \frac{1}{2\epsilon} \sum_{r=1}^{\infty} B_{2r} \frac{(2\pi i \epsilon)^{2r}}{(2r)!} = \\ &= - \frac{1}{2\epsilon} \left\{ 1 - \frac{1}{2} 2\pi i \epsilon + \sum_{r=1}^{\infty} B_{2r} \frac{(2\pi i \epsilon)^{2r}}{(2r)!} - 1 + \frac{1}{2} 2\pi i \epsilon \right\} \end{aligned}$$

En vista de las otras tres relaciones (A.6) podemos escribir

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{K^2 - \epsilon^2} = - \frac{1}{2\epsilon} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} B_r \frac{(2\pi i \epsilon)^r}{r!} - 1 + \frac{1}{2} 2\pi i \epsilon \right\}$$

Comparando con (A.5) resulta

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{K^2 - \epsilon^2} = - \frac{1}{2\epsilon} \left\{ \frac{2\pi i \epsilon}{e^{2\pi i \epsilon} - 1} - 1 + \frac{1}{2} 2\pi i \epsilon \right\}$$

O sea

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\epsilon} - \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{K^2 - \epsilon^2} &= \frac{1}{2\epsilon} \left\{ \frac{2\pi i \epsilon}{e^{2\pi i \epsilon} - 1} + \frac{1}{2} 2\pi i \epsilon \right\} = \\ &= \frac{\pi i}{e^{2\pi i \epsilon} - 1} + \frac{1}{2} \pi i = \frac{\pi i}{2} \frac{e^{2\pi i \epsilon} + 1}{e^{2\pi i \epsilon} - 1} = \\ &= \frac{\pi}{2} i \frac{e^{\pi i \epsilon} + e^{-\pi i \epsilon}}{e^{\pi i \epsilon} - e^{-\pi i \epsilon}} \end{aligned}$$

O finalmente

$$\frac{1}{2\epsilon} - \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{K^2 - \epsilon^2} = - \frac{\pi}{2} \cotg \pi \epsilon, \text{ si } 0 < \epsilon < 1$$

En vista de (A.2) y de la periodicidad de $\cotg \pi x$, esta expresión puede ser generalizada a

$$\frac{1}{2x} - \sum_{K=1}^{\infty} \frac{x}{m^2 - x^2} = -\frac{\pi}{2} \cotg \pi x, \quad \forall x$$

Transformando resulta

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{x^2}{K^2 - x^2} = \frac{1}{2} \{ 1 - \pi x \cotg \pi x \} \quad (A.7) \quad \text{c.q.d.}$$

REFERENCIAS:

- (1) F. Schwabl y W. Thirring, Erg. Exact. Naturw., 36, 219 (1964).
- (2) P. Ullersma, Physica, 32, 27 (1966).
- (3) Ryshik y Gradstein, Tables, pag. 7.
- (4) Ryshik y Gradstein, Tables, pag. 408.

F I G U R A S

Figura 1:

Solución gráfica de la ecuación

$$\omega_0^2 - \Omega^2 = \eta^2 \sum_{K=1}^N \frac{\omega_K^2}{\omega_K^2 - \Omega^2} \quad (F(\Omega^2) = G(\Omega^2)) \quad (XIV)$$

Caso I) $\omega_0^2 > N \eta^2 \quad (F(0) > G(0))$

En este caso todas las soluciones Ω_i^2 son positivas y, consecuentemente, el sistema oscila armónicamente en todos sus modos.

Caso II) $\omega_0^2 < N \eta^2 \quad (F(0) < G(0))$

Hay una solución - Ω_-^2 - que es negativa; las amplitudes de este modo crecerán o decrecerán exponencialmente. El sistema no tendrá configuraciones estacionarias.

Figura 2:

Solución gráfica de la ecuación

$$\cotg \pi x = \frac{L}{R} x + \frac{1}{\pi x} \left(1 - \frac{R L}{\pi \bar{\lambda}^2} \right) \quad (XXVII)$$

para el caso en que $R \sim L$.

El sistema presenta un espectro modificado respecto al espectro del campo libre, sobretodo en la región de resonancia, $x \sim \bar{x} \quad (\Omega \sim \bar{\omega})$.

Figura 3:

Solución gráfica de la ecuación (XXVII) para el caso en que $R \gg L$, con

$$\bar{\chi} \ll \sqrt{\frac{R L}{\pi}}$$

El dominio de resonancia, representado por el conjunto de niveles fuertemente modificados respecto a los del campo libre, es muy extenso.

Figura 4:

Solución gráfica de la ecuación (XXVII) para el caso en que $R \ll L$,

$$\bar{\epsilon} \approx \frac{1}{2}, \text{ con}$$

$$\bar{\chi}_1 \ll \sqrt{\frac{R L}{\pi}}$$

El espectro de los modos del sistema acoplado consiste, prácticamente, de los mismos modos del campo libre más una nueva frecuencia: $\bar{\omega}_r = \bar{\omega}$

Figura 5:

Solución gráfica de la ecuación (XXVII) para el caso $R \ll L$,

$$\bar{\epsilon} \approx 0, \text{ con}$$

$$\bar{\chi} \ll \sqrt{\frac{R L}{\pi}}$$

Respecto al espectro del campo libre se observa un desdoblamiento del modo $\bar{\omega}_r = \bar{\omega}$ en dos: $\bar{\omega}_{r-1}$ y $\bar{\omega}_r$. El resto del espectro prácticamente no se modifica por el acoplamiento.

Figura 6.

Solución gráfica de la ecuación (XXVII) para el caso

$$\bar{\kappa} > \sqrt{\frac{R L}{\pi}}$$

La curva secante se encuentra totalmente arriba del eje X , y tiene un mínimo para

$$x_m = \sqrt{\frac{R}{\pi L} \left(1 - \frac{R L}{\pi \bar{\kappa}^2} \right)}$$

Figura 7.

Solución gráfica de la ecuación (XXVII) para el caso

$$\bar{\kappa} = \sqrt{\frac{R L}{\pi}}$$

La curva secante se transforma en la recta $\frac{R}{L} x$.

Figura 8:

Diagrama de los valores de

$$\sum_K \left| t_K^r \right|^2 = 1 - \left| t_0^r \right|^2$$

según la fase δ_r para el caso en que

$$\chi_r \sim \bar{\kappa} \ll \frac{R}{\pi} = \frac{L}{\pi}$$

La mínima probabilidad de que la excitación esté en el campo se da cuando $\delta_r = 1/2$ y vale

$$\sum_K \left| t_K^r \right|^2 = 3/5 .$$

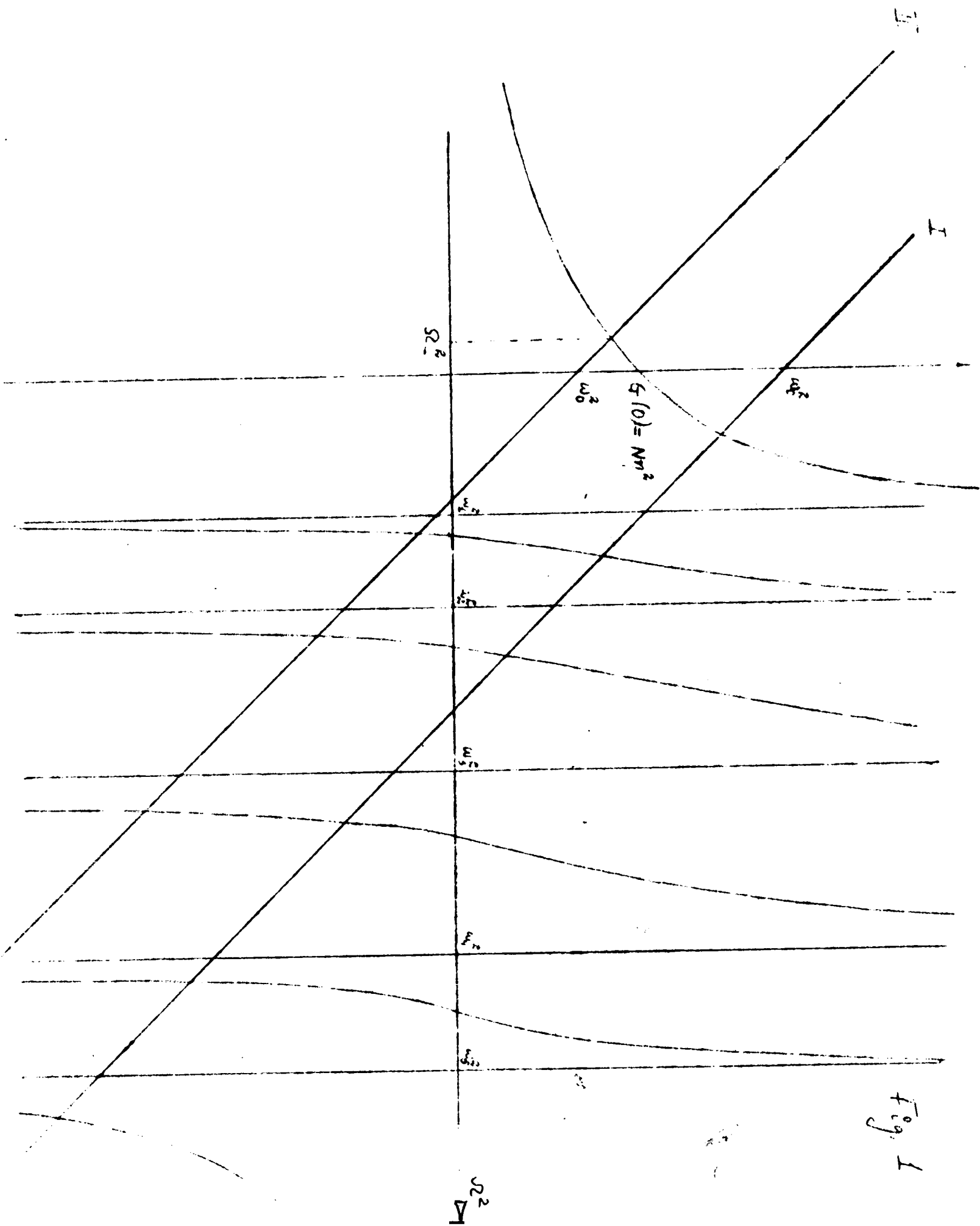


Fig. 2

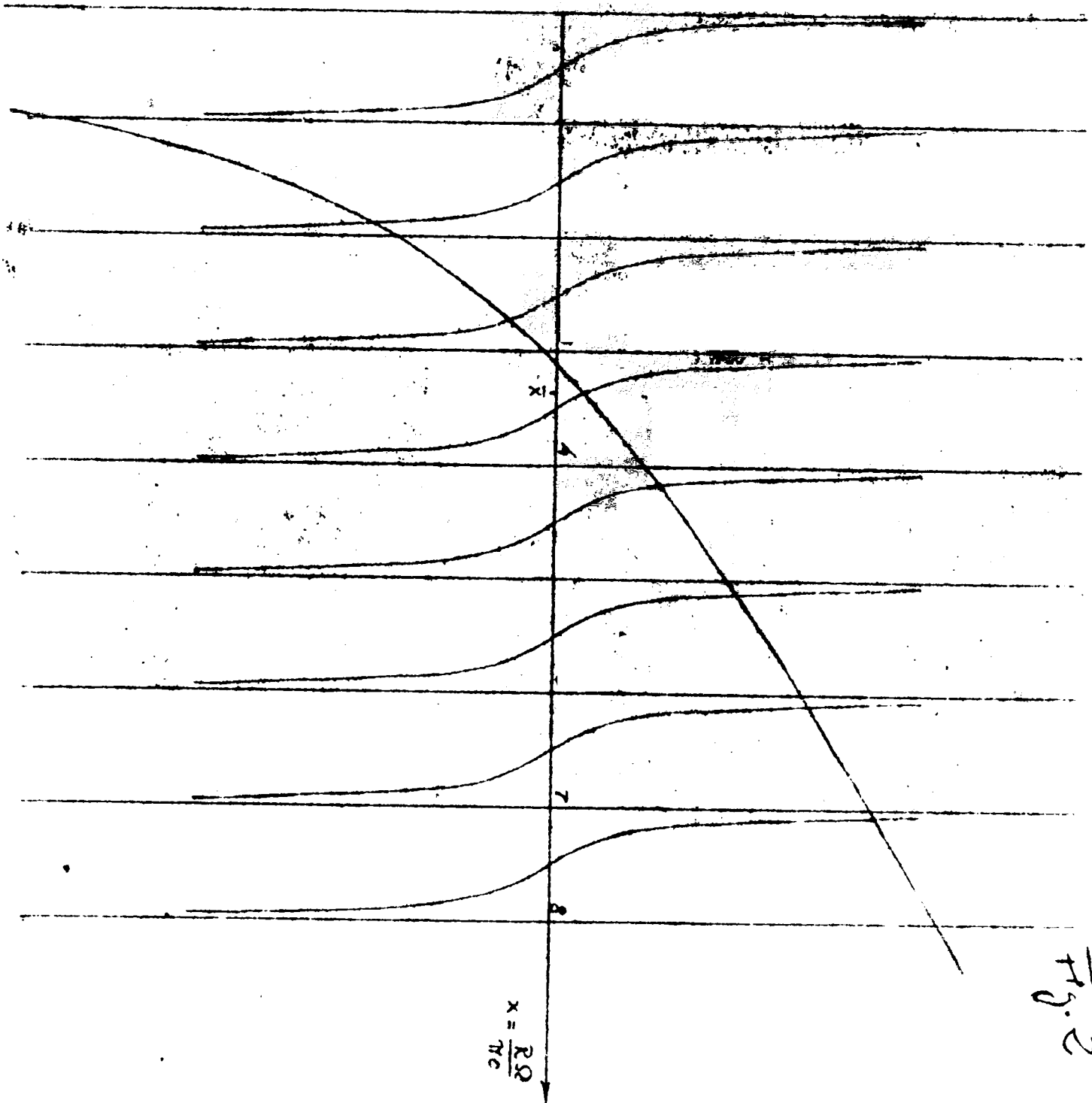


Fig. 3

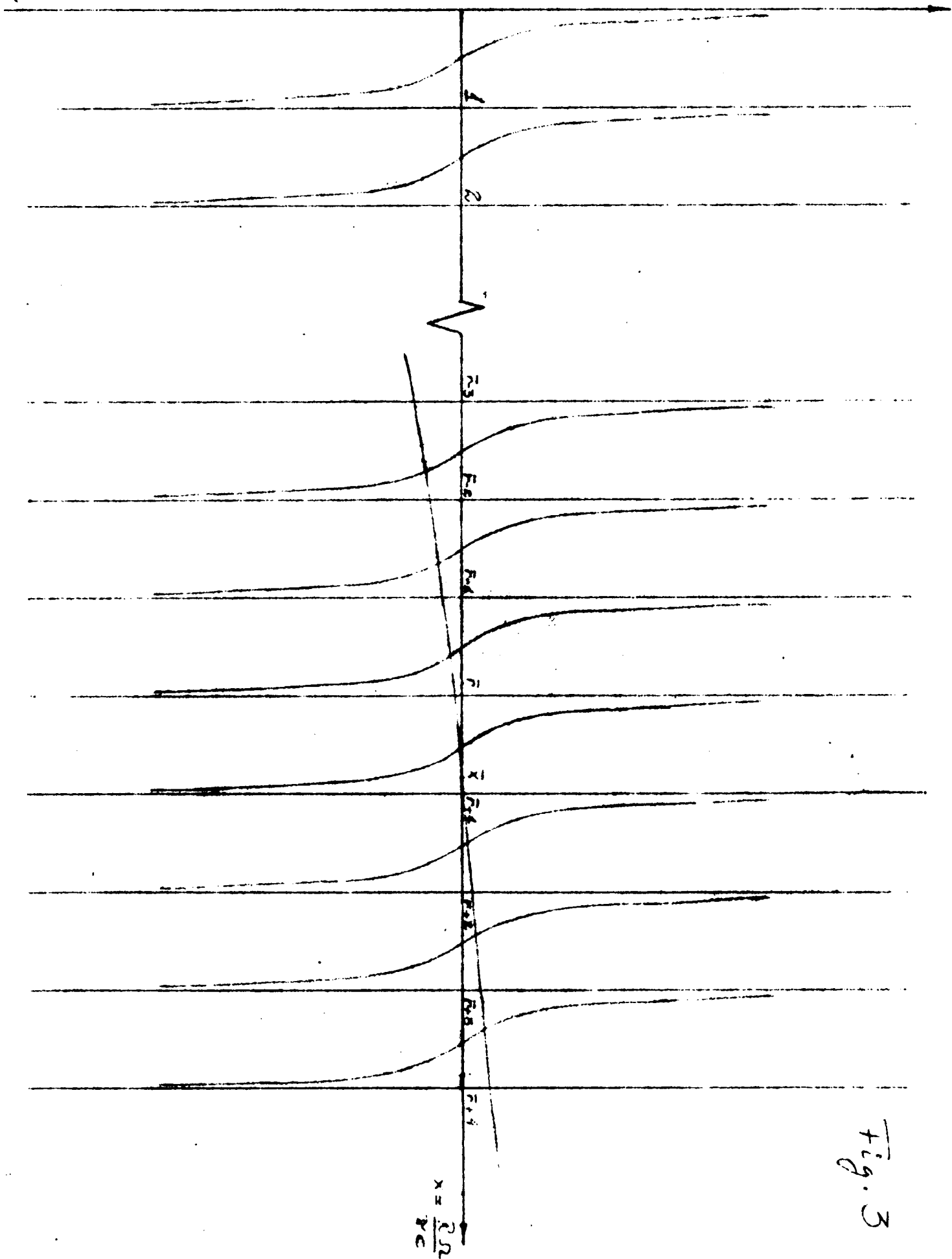


Fig. 4

$$x = \frac{R_0}{\eta c}$$

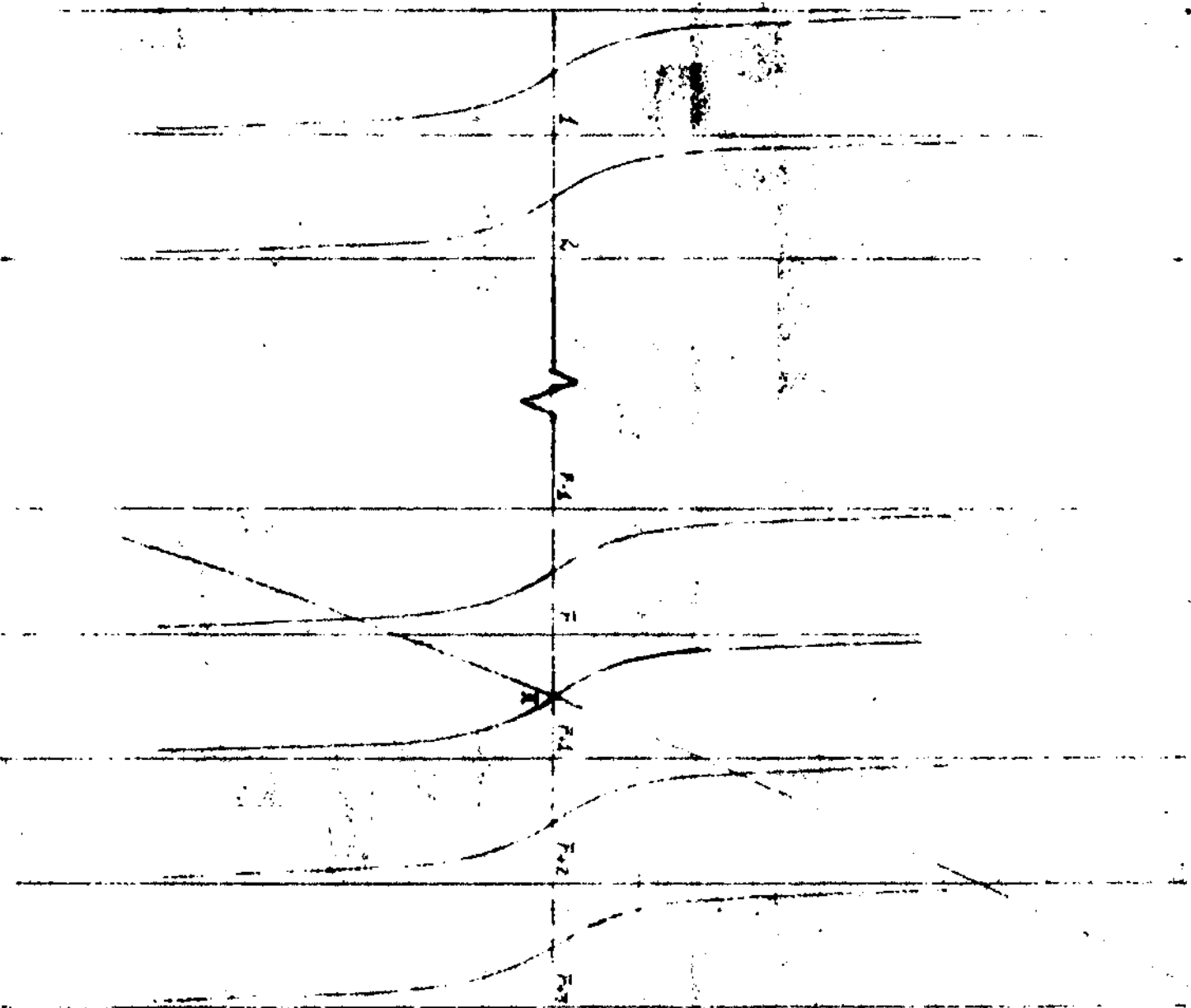


Fig. 5

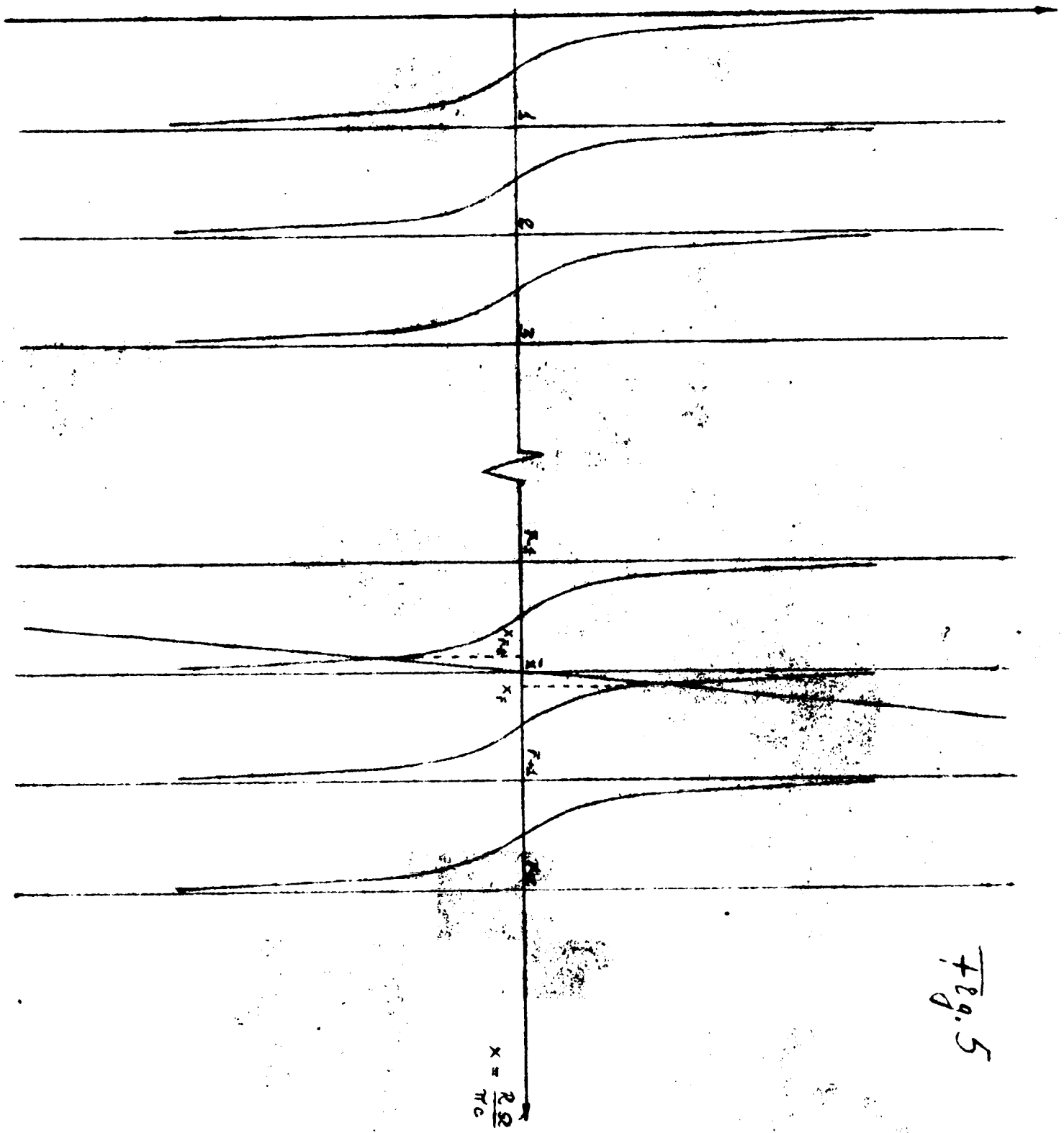


Fig. 6

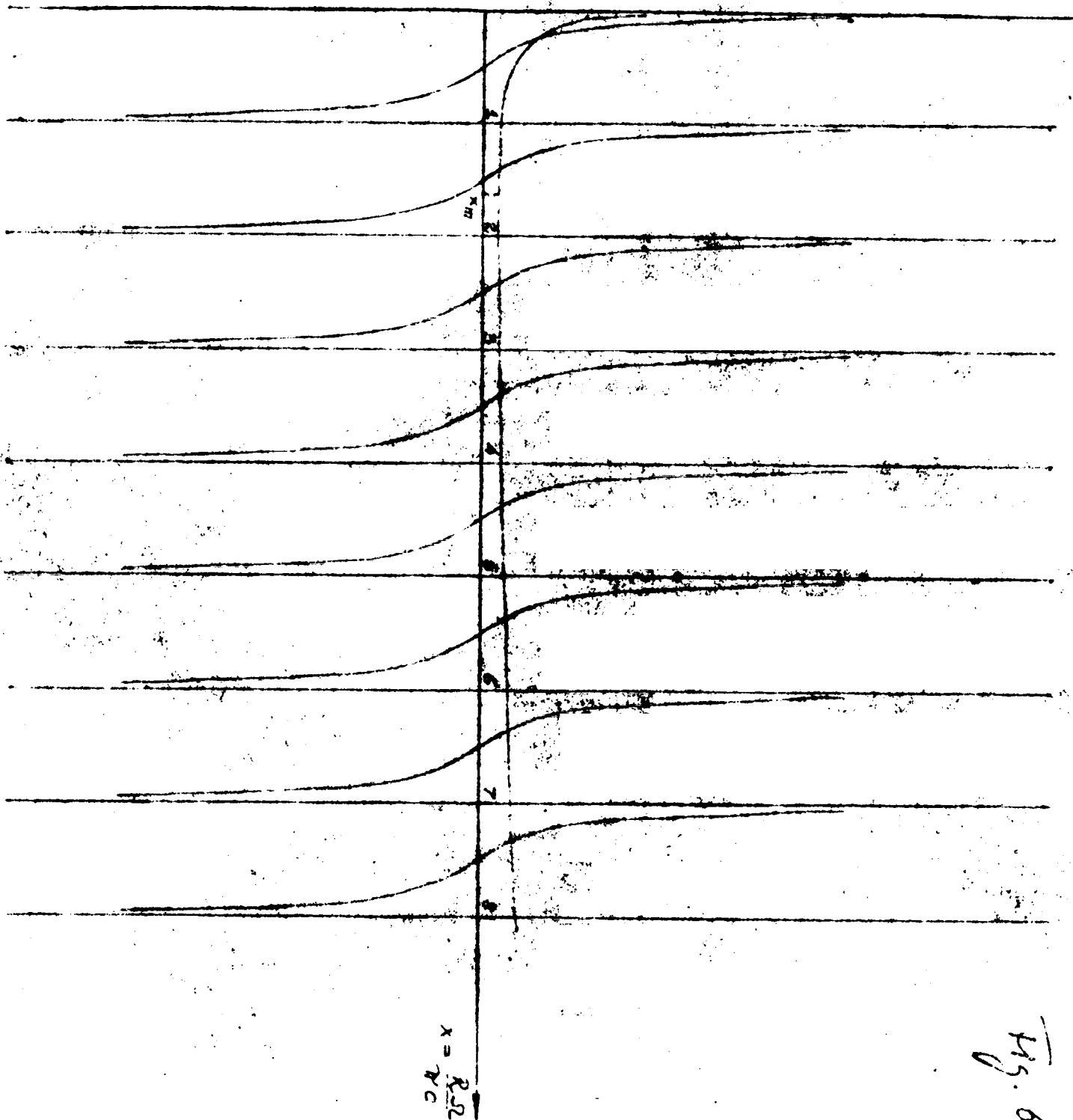


Fig. 7

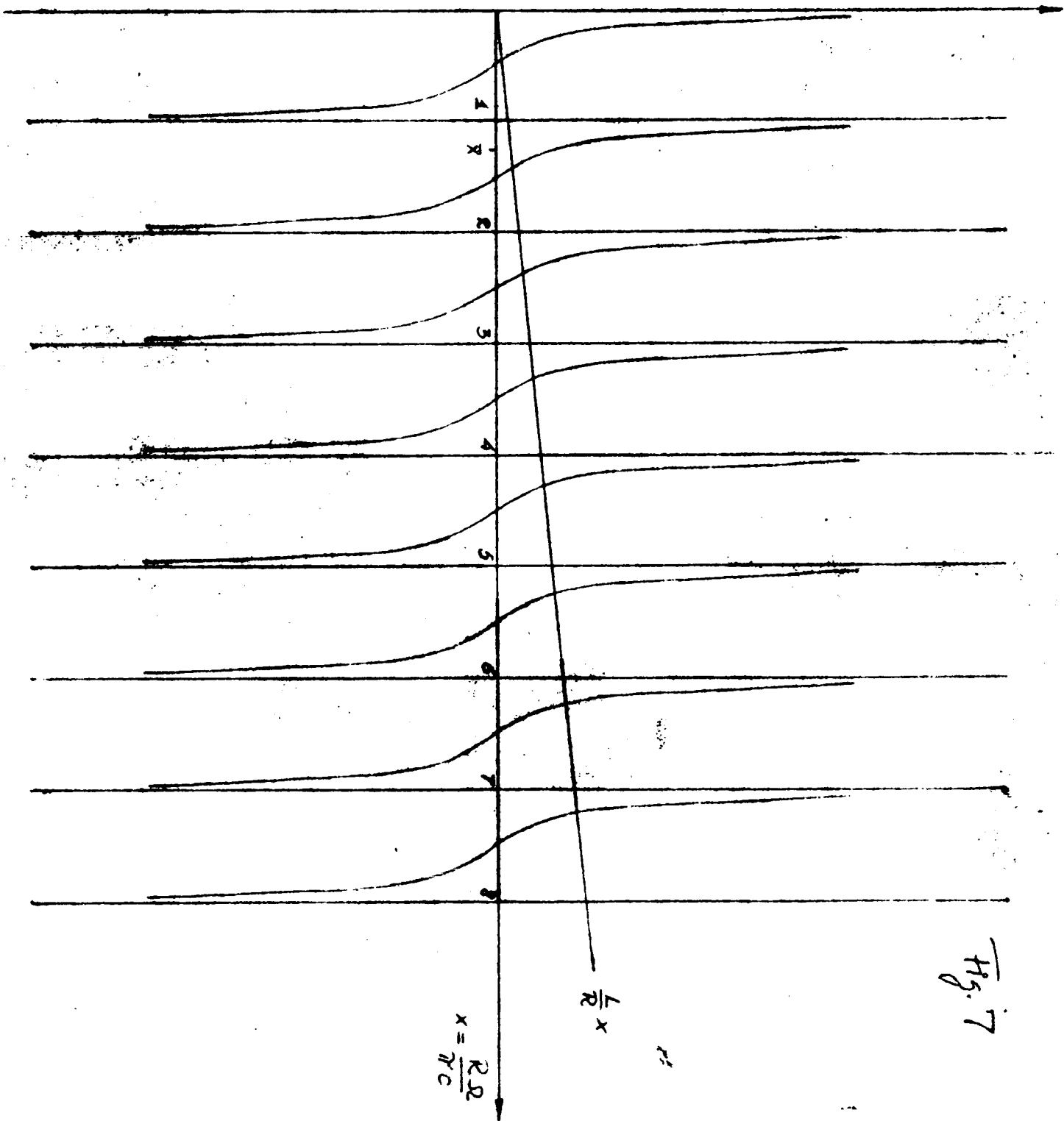


Fig. 8

