

1 1959

01.59.01

1

MANUEL BALANZAT

LECCIONES SOBRE TEORIA
DE
DISTRIBUCIONES

INSTITUTO DE FISICA
SAN CARLOS DE BARILOCHE

1959

M A N U E L

B A L A N Z A T

LECCIONES SOBRE TEORIA DE
D I S T R I B U C I O N E S

INSTITUTO DE FISICA
SAN CARLOS DE BARILOCHE
1959

I N T R O D U C C I O N

La teoría de las distribuciones fué creada, hacia 1950, por el matemático francés Laurent Schwartz para dar forma correcta, desde el punto de vista matemático, a una serie de algoritmos creados y utilizados con éxito por los físicos a pesar de su inconsistencia matemática.

Puede decirse que estos algoritmos se inician con el cálculo operacional de Heaviside y culminaron con la introducción por Dirac de la famosa función $\delta(x)$ que se definía por las siguientes propiedades:

$$\delta(x) = 0 \text{ para } x \neq 0; \delta(0) = +\infty; \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Es claro que esta definición no tiene sentido matemático pues en cualquier definición correcta de la integral, el valor de esta no se altera al cambiar el valor de la función en un punto, aún dándole a la función el valor ∞ en ese punto.

Las derivadas de la δ que también se definían tenían aún menos sentido matemático. Es muy fácil obtener resultados absurdos de esta definición: de ella se deduce que $\delta(x) = 2\delta(x)$ y por lo tanto se tiene:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta(x) dx = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 2$$

Naturalmente que la igualdad $1 = 2$ es demasiado estupefaciente para aceptar el instrumento "matemático" que permite obtenerla, por eso no es extraño que muchos matemáticos rechazaran esta teoría: uno de los más grandes de la época, el húngaro von Neumann, dice en el prólogo de su libro "Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica" que la función de Dirac no satisface los requisitos del rigor matemático ni siquiera reducido al habitual en física teórica. Uno de los propósitos del libro era el de desterrar de la mecánica cuántica las funciones de Dirac, pero no lo consiguió pues los desarrollos posteriores probaron la fecundidad de la teoría a pesar de su inconsistencia matemática, la cual se salvaba con frases como la de Sneddon en su libro "Fourier Transforms" en donde dice, a

a propósito de la δ : "It may be used in analysis only when it is obvious that no inconsistency will follow from its use."

Esta especie de reserva mental no es muy aceptable para una inteligencia matemática.

Esta teoría creaba una situación contradictoria; por un lado fecundidad de su empleo, por el otro carencia de sentido matemático. Schwartz dice, en la introducción de su obra, que cuando estas situaciones se presentan es bien raro que no resulta una teoría matemática nueva que justifique en una forma modificada, el lenguaje de los físicos y que hay en ello una fuente importante de progreso para la matemática y para la física.

Por otra parte estas situaciones contradictorias se han presentado muchas veces y no siempre dependiendo de cuestiones físicas. Por ejemplo, los números complejos se crearon para obtener la raíz cuadrada de los números que no tenían raíz cuadrada. Este aparente absurdo se resuelve creando nuevos entes que comprenden a los anteriores. En forma análoga las distribuciones generalizan las funciones en el mismo sentido que los números complejos generalizan los reales; se obtienen así entes más generales, que tienen propiedades nuevas (por ejemplo, las distribuciones son siempre derivables) y que forman un nuevo cuerpo de estudio más rico y armonioso que el anterior, por lo menos en algunos aspectos.

Como todas las creaciones del espíritu humano, la teoría de distribuciones ha tenido sus precursores, como por ejemplo las generalizaciones del concepto de función de Bochner y Soboleff, pero puede afirmarse que la de Schwartz es la primera teoría completa que ha podido englobar y precisar al mismo tiempo, diversos conceptos, en algunos casos formulados incorrectamente, de distintas ramas de la matemática; por eso esta teoría ha suscitado un gran interés en el ambiente matemático de nuestros días.

Un estudio riguroso y profundo de la teoría de distribuciones exige conocimientos bastantes avanzados de topología ge-

neral y análisis funcional y usa continuamente la teoría de la integral de Lebesgue.

Las características de la enseñanza de la matemática para los físicos hacen difícil abordar el estudio de la teoría de las distribuciones en esta forma. El mismo Schwartz, después de la exposición de su teoría en (1), ha expresado en sus cursos de métodos matemáticos de la física en la Sorbona, (4) la teoría en forma más accesible sin exigir muchos conocimientos previos, lo que le obliga a suprimir algunas demostraciones.

Siguiendo las ideas del curso de Schwartz, expusimos a nuestros alumnos del Instituto de Física de Bariloche, la teoría de las distribuciones; se consigue así información suficiente sobre las ideas básicas y un conocimiento que permite el manejo de la teoría, al menos en sus partes más sencillas, que son las más utilizadas por los físicos.

BOSQUEJO DE LA INTEGRAL DE LEBESGUE

1.- Evolución del concepto de integral.

El concepto de integral, después de ser usado con todo éxito, aunque en forma no bien precisada, durante siglo y medio, fué dado en forma rigurosa por Cauchy, a principios del siglo pasado para las funciones continuas. En 1854 Riemann generaliza la teoría de Cauchy extendiéndola para todas las funciones, continuas o no, en las que existe el límite único

$$(1) \quad \lim \sum f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

para toda sucesión de subdivisiones tales que la longitud de los intervalos tienda a cero.

Las funciones integrables Riemann pueden tener infinitos puntos de discontinuidad los cuales pueden formar un conjunto denso, por ejemplo el de los números racionales, pero dichos puntos de discontinuidad no pueden formar un conjunto arbitrario. Se puede probar, adelantando conceptos vamos a precisar en seguida, que: la condición necesaria y suficiente para que una función sea integrable Riemann es que el conjunto de sus puntos de discontinuidad sea de medida nula.

Por lo tanto funciones como la de Dirichlet, que vale uno en los puntos racionales y cero en los irracionales, discontinuas en todos sus puntos no son integrables Riemann. La existencia de funciones que se presentan de forma natural y que no son integrables Riemann sugiere la necesidad de generalizar este concepto de la integral; esta generalización fué hecha en forma magistral a principio de este siglo por el matemático francés Henri Lebesgue. Esta teoría de Lebesgue es una de las más fructíferas de la matemática contemporánea; por ejemplo en la teoría del espacio de Hilbert en forma funcional, la integral de Riemann es insuficiente; por ello la generalización

de la integral dada por Lebesgue fué para el estudio de dichos espacios un progreso comparable al de la introducción de los números irracionales en la matemática clásica.

A pesar de su importancia la integral de Lebesgue no ha alcanzado en la enseñanza la difusión que debería tener. En los cursos básicos de Análisis Matemático la teoría de la integral que se dá, o intenta dar, es la de Riemann y aún en textos modernos y extensos de Análisis Matemático, la integral de Lebesgue, o no aparece, o aparece en forma de un complemento poco o nada utilizado.

Esta rutina de la enseñanza es una rémora para la formación matemática; la integral de Lebesgue no es una teoría de extensa dificultad, no es facil, (tampoco lo es la de la integral de Riemann si se desarrolla en forma completa y rigurosa), pero es accesible a los estudiantes de los cursos básicos de análisis matemático y su estudio les pondría en posesión de una herramienta de gran utilidad en muchas teorías de la matemática, algunas como las series trigonométricas, el espacio de Hilbert o las distribuciones de gran importancia para la física.

Como suponemos que el lector conoce suficientemente la integral de Riemann, nos limitaremos, para no alargarnos demasiado en este capítulo preliminar, a dar las ideas básicas y enunciar sin demostración las propiedades de la integral de Lebesgue. Como las ideas básicas no son difíciles y las propiedades son muy análogas a las de la integral de Riemann creemos que ello será suficiente para utilizar como instrumento la integral de Lebesgue en la teoría de las distribuciones.

2.-Medida de conjuntos.

Para el desarrollo de la integral de Lebesgue es básico el concepto de medida de un conjunto, que fué introducido, en la forma adecuada, por Borel y desarrollado y completado más tarde por Lebesgue en su teoría doctoral sobre el nuevo concepto de integral.

Tomemos un conjunto cualquiera de puntos E sobre la recta;

una sucesión de intervalos, $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ se dice que cubre el conjunto E si todo punto de E pertenece a algún intervalo de la sucesión. Para cada sucesión de intervalos formemos el número

$$(2) \quad L = \sum_1^{\infty} (\text{longitud de } I_n).$$

L será un número real positivo si la serie converge o $+\infty$ si la serie diverge.

Definición 1.- La medida exterior del conjunto E es el extremo inferior del conjunto de los números L cuando se consideran todas las sucesiones de intervalos que cubren dicho conjunto.

Queda así definida para cualquier conjunto su medida exterior que podrá ser $+\infty$ o un número real mayor o igual que cero. Por ejemplo, la medida exterior de una semirecta es $+\infty$; la de un conjunto reducido a un solo punto es cero, pues dado un ϵ siempre existe un intervalo de longitud ϵ que cubre el conjunto.

Las propiedades de la medida exterior toman interés cuando se restringe su aplicación al campo de los conjuntos denominados medibles. Hay muchas maneras de definir los conjuntos medibles; por ejemplo, para un conjunto contenido en un intervalo (a, b) se define la medida interior como la diferencia entre la longitud de (a, b) y la medida exterior del conjunto de los puntos de (a, b) que no pertenecen al conjunto E y se adopta la siguiente definición:

Definición 2.- Un conjunto E es medible cuando sus dos medidas exterior e interior coinciden y ese valor común se denomina la medida de E y se representa con la notación $m(E)$.

Para los conjuntos no acotados se puede descomponer la recta en intervalos sin puntos comunes y tomar como medida la suma de las medidas de los conjuntos intersección de E con cada uno de los intervalos.

Se nos presenta ahora la cuestión: ¿qué conjuntos son medibles? Se puede probar la existencia de no conjuntos no medibles,

pero se los define de una forma enteramente artificial; prácticamente son medibles todos los conjuntos que se presentan en las teorías matemáticas que se usan en física; por ello no entraremos en detalles sobre los conjuntos no medibles y admitiremos que todos los conjuntos que se nos van a presentar son medibles; no haremos por consiguiente ninguna diferencia entre la medida y la medida exterior.

Definición 3.- Un conjunto cuya medida es cero se dice que es un conjunto de medida nula.

De la definición se deduce que un conjunto es de medida nula cuando se puede cubrir por una sucesión de intervalos cuya suma de longitudes sea menor o igual que un ϵ arbitrario. De acá se deduce que el conjunto de los números racionales, y en general cualquier conjunto numerable es de medida nula.

En efecto sea $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ el conjunto numerable; para cada a_n tomamos un intervalo de centro a_n y de longitud $\frac{\epsilon}{2^{n+1}}$ dichos intervalos cubren el conjunto y la suma de sus longitudes es igual a ϵ (Haremos observar que existen también conjuntos no numerables de medida nula).

Esta propiedad puede deducirse como un corolario del teorema fundamental de la teoría de la medida que es el siguiente y cuya demostración no daremos.

Teorema 1.- Si los conjuntos E_n , en número finito o en una infinidad numerable, no tienen puntos comunes dos a dos se tiene:

$$(3) \quad m\left(\bigcup_1^{\infty} E_n\right) = \sum_1^{\infty} m(E_n)$$

en donde $\bigcup_1^{\infty} E_n$ representa el conjunto formado con los puntos de todos los conjuntos E_n . Si tuviesen puntos comunes hay que reemplazar el signo igual de (3) por el signo menor o igual.

La extensión al plano, al espacio y en general al espacio de n dimensiones se hace en forma análoga reemplazando los intervalos por rectángulos, paralelepípedos.....

Se ve que la génesis del concepto de medida está en la definición de áreas o volúmenes como límites de áreas rectangulares o volúmenes paralelepípedicos; la idea a la vez simple y genial de Borel que le permitió triunfar donde no lo pudieron hacer sus predecesores fué la de cubrir los conjuntos por una sucesión de intervalos en vez de hacerlo, como en las teorías anteriores, por un número finito.

3.-Definición de la integral de Lebesgue.

Supongamos una función $f(x)$ positiva definida en toda la recta. Dividamos el eje OY en una serie de intervalos definidos por los puntos $0 = y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$; sea E_n el conjunto de los puntos de x que satisfacen a la condición $y_{n-1} \leq f(x) < y_n$; formemos la suma o serie

$$(3) \quad \sum y_n \quad m(E_n)$$

Definición 4.- La integral de $f(x) \geq 0$ en toda la recta en el sentido de Lebesgue es el límite de la suma (3) para toda sucesión de subdivisiones tales que la longitud de los intervalos de subdivisión tienda a cero. Se representa con la notación habitual.

Admitiremos sin definición que este límite, finito o infinito, existe siempre y que es independiente de la sucesión de subdivisiones que se adopte.

Puede definirse ahora la integral sobre un conjunto E cualquiera poniendo por definición

$$(4) \quad \int_E f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_E(x) dx; \text{ siendo } f_E(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \in CE \end{cases}$$

Dada ahora una función $f(x)$ cualquiera definida en un conjunto E ; sea P el conjunto de los puntos de E en que es $f(x) \geq 0$ y N el conjunto de los puntos de E en que es $f(x) \leq 0$.

Definición 5.- La integral de $f(x)$ en el sentido de Lebesgue es

$$\int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx - \int_{E_2} f(x) dx$$

La integral será finita si las dos integrales lo son; será infinita con signo más o menos si una de las integrales es finita y la otra es infinita; si ambas son infinitas la función no es integrable. Una función cuya integral de Lebesgue es finita se denomina sumable.

Vamos a precisar el alcance de esta definición. Para que pueda aplicarse la definición a la función, tienen que ser medibles los conjuntos E_n ; la función se dice medible. Como dijimos que considerábamos todos los conjuntos como medibles (desde el punto de vista práctico para evitar las dificultades matemáticas de la teoría) entonces consideraremos todas las funciones como medibles. En esta hipótesis las integrales sobre E_1 y E_2 existen siempre finitas o infinitas; si la función es acotada, y nula fuera de un intervalo, esas integrales tienen que ser siempre finitas, luego: todas las funciones acotadas y nulas fuera de un intervalo son sumables y si su integral de Riemann existe coincide con la de Lebesgue. (admitiremos sin demostración la segunda parte).

Para las funciones del tipo que acabamos de mencionar la integral de Lebesgue es mucho más amplia que la de Riemann puesto que comprende prácticamente a todas las funciones, (por ejemplo la función de Dirichlet es integrable Lebesgue con integral cero).

Para las funciones que no cumplan las condiciones anteriores se tiene el siguiente teorema que admitiremos sin demostración:

Teorema 2.- Si la integral impropia en el sentido de Riemann de una función es absolutamente convergente la función es sumable y su integral Lebesgue coincide con la integral impropia Riemann. Si la integral impropia Riemann no es absolutamente convergente la integral no es sumable.

Por lo tanto una función cuya integral impropia de Riemann exista pero sin ser absolutamente convergente no es integrable en el sentido de Lebesgue. Esta limitación de la integral de Lebesgue deriva del hecho, que surge de la definición, de que f(x) es sumable si y solo si lo es |f(x)| y puede salvarse con una generalización de la integral de Lebesgue, la integral de Denjoy, que acá solo podemos mencionar.

Por la definición de la integral se ve que es inmediata la extensión a las funciones de varias variables, sin más que reemplazar en la definición la medida lineal por la medida del espacio de las variables independientes.

Emplearemos indistintamente las notaciones

o las notaciones

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

para designar las integrales sobre todo el espacio; en las segundas x designa un vector y dx el elemento de volumen.

En la teoría de la integral de Lebesgue tienen un papel muy importante las propiedades p.p. (iniciales de "presque partout") que son las propiedades que se cumplen para todos los puntos de un conjunto con la posible excepción de un conjunto de medida nula.

Se tiene el siguiente teorema: (que no demostraremos)

Teorema 3.- Si una función es nula p.p. sobre el conjunto de definición su integral sobre dicho conjunto vale cero. Si la función no es negativa p.p. y su integral vale cero la función es nula p.p. Si la función de una variable f(x) es sumable en (a,b) y si la integral

$$\int_a^x f(x) dx = 0$$
 para todo x de (a,b) f(x) es nula en (a,b) p.p.

Una consecuencia importantísima es que la integral no se altera si se cambia el valor de la función en un conjunto de

puntos de medida nula en el que puede suponerse incluso que la función es infinita y puede también definirse la integral cuando se desconoce el valor de la función en dicho conjunto de medida nula; esto puede también expresarse diciendo que dos funciones iguales p.p. tiene la misma integral.

4.-Propiedades de la integral de Lebesgue.

Las daremos todas sin demostración y, salvo mención en contrario, supondremos todas las integrales definidas en el espacio R_n .

Teorema 4.- Si $f(x)$ y $g(x)$ son sumables, también lo son $af(x) + bg(x)$, el máximo y el mínimo de las dos funciones. Si $g(x)$ es acotada, entonces $f(x) \cdot g(x)$ es sumable. Se tiene además:

$$(6) \int_E [af(x) + bg(x)] dx = a \int_E f(x) dx + b \int_E g(x) dx$$

Si $f(x)$ es sumable también lo es $|f(x)|$ y se tiene:

$$(6') \left| \int_E f(x) dx \right| \leq \int_E |f(x)| dx$$

Teorema 5.- Si $f(x)$ es sumable y si $|g(x)| \leq f(x) \cdot g(x)$ es sumable y se tiene:

$$(7) \left| \int_E g(x) dx \right| \leq \int_E |g(x)| dx \leq \int_E f(x) dx$$

Teorema 6.- Dada una función $f(x)$ sean a y m dos números positivos cualquiera y $f(a,m;x)$ la función de x igual a $f(x)$ cuando se cumplen simultáneamente las condiciones $|x| \leq a$ y $|f(x)| \leq m$ y nula en caso contrario. Por el teorema 2, $f(a,m;x)$ es sumable y la condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ sea sumable es que exista un número K tal que se tenga para todo par de valores m y a .

$$(8) \int_{R^n} |f(a,m;x)| dx \leq K$$

Teorema 7.- Sea $E = \bigcup_1^{\infty} E_n$, en donde los conjuntos E_n son sin puntos comunes dos a dos: si $f(x)$ es sumable sobre E se tiene:

$$(9) \quad \int_E f(x) dx = \sum_1^{\infty} \int_{E_n} f(x) dx$$

Teorema 8.- (Teorema del valor medio): sea $g(x) \geq 0$ p.p. y sumable en E ; sea $f(x)$ sumable en E y tal que $L \leq f(x) \leq L$ p.p. en E . Entonces:

$$(10) \quad L \int_E g(x) dx \leq \int_E g(x) \cdot f(x) dx \leq L \int_E g(x) dx$$

En particular si E es de medida finita se tiene:

$$(11) \quad Lm(E) \leq \int_E f(x) dx \leq Lm(E).$$

y tomando $f(x) = 1$,

$$(12) \quad \int_E dx = m(E).$$

Relaciones entre integral y derivada.

Con la generalización hecha por Riemann del concepto de integral se planteó el problema de saber si subsistía la correspondencia básica entre los conceptos de integral y función primitiva que se obtiene para las funciones continuas, y que es la base del cálculo integral. Esta correspondencia no subsiste, pues se prueba que existen funciones $f(x)$, integrables Riemann y tales que $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ no es siempre derivable y también existen funciones que tienen derivada acotada en un intervalo pero dicha derivada no es integrable Riemann.

El problema de la correspondencia entre integral y primitiva solo puede ser resuelto mediante el empleo de la integral de Denjoy. Acá nos limitaremos a citar dos resultados importantes para las funciones de una variable.

Teorema 9.- Si $f(x)$ es sumable en (a, b) y si ponemos $F(x) = \int_a^x f(x) dx$, $F(x)$ es continua en todos los puntos de (a, b) y en dicho intervalo se tiene: $F'(x) = f(x)$ p.p.

Teorema 10.- Si $f(x)$ es acotada y es la derivada p.p. de $F(x)$ en (a,b) , $f(x)$ es sumable en (a,b) y se tiene para todo x de a,b :

$$(13) \quad \int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$$

Integración por partes para funciones de una variable.

Teorema 11.- Sea $f(x)$ una integral indefinida en (a,b) (por lo tanto continua y con derivada p.p.) y sea $h(x)$ una función sumable en (a,b) , poniendo $g(x) = \int_a^x h(x)dx$ se tiene:

$$(14) \quad \int_a^b f(x)h(x)dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

Reducción de integral múltiples a integrales simples.

Teorema 12.- (Teorema de Fubini). Sea $f(x,y)$ sumable en R^2 ; si fijamos el valor de una variable, la función considerada como función de la otra es, salvo posiblemente para un conjunto de valores de medida nula de la variable fija, sumable en R y se tiene:

$$(15) \quad \iint_{R^2} f(x,y)dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \right] dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \right] dx.$$

Teorema 13 (Teorema de Tonelli).- Si la función $f(x,y)$ es no negativa, la existencia de una cualquiera de las tres integrales de la fórmula (15) implica la existencia de las otras dos.

Estas propiedades que permiten la reducción de integrales múltiples cualesquiera a integrales simples marcan uno de los progresos esenciales de la integral de Lebesgue, respecto a la integral de Riemann; en esta teoría puede suceder que exista la integral doble y no tengan sentido las integrales reiteradas y también puede suceder que ambas integrales reiteradas existan y sean iguales y no exista la integral doble.

Fórmula del cambio de variable.

Teorema 14.- Sea $f(x)$ una función de una variable acotada en (a,b) , y sea $x = k(t)$ una integral indefinida en $c \leq t \leq d$, cuyos valores están comprendidos entre a y b siendo $k(c) = a$ y $k(d) = b$. Entonces la función $f[k(t)]k'(t)$ es sumable en (c,d) y se cumple la relación:

$$(16) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_c^d f[k(t)] k'(t) dt.$$

Teorema 15.- Sea T una transformación biunívoca de un conjunto A del espacio R^n en otro conjunto B del mismo espacio y suponemos que las funciones

$$x_i = k_i(t_1, \dots, t_n)$$

que definen la transformación son continuas y con derivadas primeras continuas en un conjunto abierto que contiene al conjunto A . Entonces para que $f(x_1, \dots, x_n)$ sea sumable en B es necesario y suficiente que

$$f[k_1(t_1 \dots t_n) \dots k_n(t_1 \dots t_n)] \left| \frac{\delta(k_1 \dots k_n)}{\delta(t_1 \dots t_n)} \right| = F(t_1 \dots t_n)$$

sea sumable en A y se tiene:

$$(17) \quad \int_B f(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_A F(t_1 \dots t_n) dt_1 \dots dt_n$$

Propiedades de paso al límite.

Las propiedades de paso al límite son las que dan mayor valor a la teoría de la integral de Lebesgue, precisamente por ser las más débiles en la teoría de la integral de Riemann; por ejemplo el límite de funciones acotadas e integrables Riemann puede ser una función no integrable Riemann. En el caso de la integral de Lebesgue tenemos las siguientes propiedades:

Teorema 16.- Sea $f_n(x)$ una sucesión de funciones que convergen p.p. en E hacia una función $f(x)$ y tales que se cumpla $|f_n(x)| \leq G(x)$, siendo $G(x)$ sumable en E . En-

tonces se tiene:

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx$$

Teorema 17.- Si las funciones $u_n(x)$ son p.p. no negativas en E y sumables en E se tiene siempre:

$$(19) \quad \int_E \sum_1^{\infty} u_n(x) dx = \sum_1^{\infty} \int_E u_n(x) dx,$$

en donde la igualdad significa que o los dos miembros son finitos e iguales o los dos valen $+\infty$.

Derivación bajo el signo de integral.

Daremos unicamente el siguiente teorema:

Teorema 18.- Sea $f(x,t)$ una función de las dos variables reales, definida para todos los valores de t de un intervalo I, salvo un conjunto de medida nula, y para todos los valores de x de otro intervalo J (I y J pudiendo ser finitos o infinitos).

Haremos las siguientes hipótesis:

1º - Para todo t de I, con la posible excepción de un conjunto de medida nula, $f'_x(x,t)$ existe y es continua en todo x, y es además inferior en módulo a una función $g(t)$ sumable en I.

2º - Existe un x_0 de J tal que $f(x_0,t)$ es sumable en I.

Entonces $f(x,t)$ es sumable en I cualquiera que sea x de J y la función

$$F(x) = \int_I f(x,t) dt$$

es continua y derivable en J y la derivada es

$$F'(x) = \int_I f'_x(x,t) dt.$$

DEFINICION DE DISTRIBUCIONES. EJEMPLOS.

5.- Espacios vectoriales.

Suponemos conocida la teoría de los espacios vectoriales y nos limitaremos a recordar las definiciones y resultados fundamentales.

Definición 1.- Un espacio vectorial L es un conjunto de entes, denominados vectores (que representaremos con letras griegas) en el que se define la suma de dos vectores y el producto de un vector por un número, que denominaremos escalares (representados con letras latinas) tales que se cumplan las siguientes propiedades:

$$G_1 : (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

$$G_2 : \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$G_3 : \text{Existe un vector } \theta \text{ tal que } \alpha + \theta = \alpha \text{ para todo } \alpha$$

$$G_4 : \text{Dado un vector existe otro que sumado con él da el vector } \theta.$$

$$L_1 : a (\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$$

$$L_2 : (a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$$

$$L_3 : a (b\alpha) = (a b)\alpha$$

$$L_4 : 1, \alpha = \alpha$$

Los espacios vectoriales son reales o complejos según que los escalares sean los números reales o los complejos.

Ejemplos: Además del espacio ordinario en n dimensiones con las definiciones corrientes de suma y producto por un escalar tenemos los siguientes ejemplos:

1)- El espacio de todas las sucesiones de números a_1, \dots, a_n, \dots tales que la serie de los cuadrados de sus módulos sea convergente con las definiciones corrientes de suma de sucesiones y de producto de una sucesión por un número. Es sabido que este espacio es el denominado espacio de Hilbert y que se puede de-

finir también en la forma siguiente:

2)- El espacio de las funciones complejas $\phi(x)$ definidas en un conjunto E del espacio real enedimensional y tales que $|\phi(x)|^2$ sea sumable en E. Este espacio también se denomina espacio L^2 .

3)- Si en vez de suponer que sea sumable en E $|\phi(x)|^2$ suponemos que sea sumable $|\phi(x)|^p$ tenemos el espacio L^p .

4)- Las funciones reales definidas en un intervalos (a,b) y contínuas en el.

En los tres últimos ejemplos la suma y el producto por un número se definen como la suma de funciones y el producto de una función por el número en el sentido ordinario.

en el espacio vectorial ordinario las definiciones de suma de vectores y de producto por un escalar son independientes de la unidad de longitud elegida. No lo es, en cambio, el concepto de producto escalar.

En los espacios vectoriales definidos en la forma axiomática que acabamos de establecer para hacer aparecer el concepto de producto escalar o el de longitud hay que introducir nuevos axiomas. Ello puede hacerse definiendo axiomáticamente el producto escalar y deduciendo de este concepto primitivo el de longitud o bien definiendo directamente en forma axiomática el concepto de longitud. Para ello se adoptan las siguientes definiciones:

Definición 2.- Un espacio hermitiano es un espacio vectorial complejo en el que se define el concepto de producto escalar de dos vectores como una correspondencia entre los pares ordenados de vectores y los números complejos, $a = \langle \alpha, \beta \rangle$, que satisface a las siguientes relaciones:

$$M_1 : \langle \alpha + \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$$

$$M_2 : \langle \alpha, \beta \rangle = \overline{\langle \beta, \alpha \rangle} \quad (\text{representamos con } \bar{a} \text{ al conjugado de } a)$$

$$M_3 : \langle \alpha, \beta \rangle = a \langle \alpha, \beta \rangle$$

$$M_4 : \langle \alpha, \alpha \rangle \geq 0 \text{ y } \langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \text{ si y sólo si } \alpha = \theta$$

El ejemplo 1) es un espacio hermitiano con la siguiente definición de producto escalar de $\alpha = \{a_n\}$ y $\beta = \{b_n\}$

$$(1) \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \sum_1^{\infty} \overline{a_n} b_n$$

El ejemplo 2) es un espacio hermitiano con la siguiente definición del producto escalar:

$$(2) \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \int_E \alpha(x) \cdot \overline{\beta(x)} dx$$

Si en vez de considerar un espacio vectorial complejo tomamos un espacio vectorial real, con la misma definición (M_2 tomará entonces la forma $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$) obtenemos los espacios denominados euclidianos.

En los ejemplos 3) y 4) no resulta adecuada la introducción de un producto escalar y se introduce directamente el concepto de longitud o norma de un vector con la siguiente definición.

Definición 3.- Un espacio vectorial se denomina normado, cuando se hace corresponder a cada vector α un número real $|\alpha|$ tal que se cumplen las siguientes relaciones:

$$N_1 : |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

$$N_2 : |a \cdot \alpha| = |a| |\alpha|$$

$$N_3 : |\alpha| \geq 0 \text{ y } |\alpha| = 0 \text{ si y sólo si es } \alpha = \theta$$

Un espacio hermitiano es un espacio normado si se adopta como definición de norma de α al número $(\langle \alpha, \alpha \rangle)^{\frac{1}{2}}$. Así en los ejemplos 1) y 2) la longitud de un vector viene expresada como

$$(3) \quad |\alpha| = \left[\sum_1^{\infty} |a_n|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(4) \quad |\alpha| = \left[\int_E |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

En los ejemplos 3) y 4) se puede definir directamente la norma de la manera siguiente:

$$(5) \quad \|d\| = \left[\int_E |f(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

$$(6) \quad \|d\| = \text{máximo de } |d| (x) \text{ en } (a \leq x \leq b)$$

Observación: en los espacios L^p , y en particular en el espacio funcional de Hilbert dos funciones que son iguales p.p. se considera que representan el mismo vector, o que es lo mismo son dos representaciones distintas del mismo ente, lo mismo que $3/5$ y $6/10$ son dos representaciones del mismo número racional.

6.- Espacios métricos y topológicos.-

A partir del concepto de longitud de un vector podemos definir la distancia de dos vectores o puntos del espacio por la expresión $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$. Se obtiene así lo que se denomina espacio métrico de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 4.- Un espacio métrico es un conjunto de entes, denominados puntos en el que se define una correspondencia entre un par de puntos α, β del espacio y un número real $d(\alpha, \beta)$ que satisface las propiedades siguientes:

$$D_1 : d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$$

$$D_2 : d(\alpha, \gamma) \leq d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma)$$

$$D_3 : d(\alpha, \beta) \geq 0 \text{ y } d(\alpha, \beta) = 0 \text{ si y sólo si } \alpha = \beta$$

Se ve fácilmente que definiendo en un espacio normado la distancia $d(\alpha, \beta)$ como $|\alpha - \beta|$ se obtiene un espacio métrico. Es claro que el concepto de espacio métrico es más amplio puesto que no necesita que se definan previamente en él las operaciones vectoriales.

El concepto de distancia es el que da una estructura al

espacio que hace posible la extensión a él de las propiedades del espacio ordinario. Nos fijaremos especialmente en la continuidad de funciones. Consideremos la función $y = f(x)$, en donde x es un punto de un espacio métrico X e y un punto de otro espacio métrico Y . Generalizando el concepto de continuidad del análisis clásico diremos que $f(x)$ es continua en x_0 si dado un ϵ existe un η tal que $d(x, x_0) \leq \eta$ implica $d[f(x), f(x_0)] \leq \epsilon$.

Lo mismo que análisis clásico puede también definirse la continuidad usando el concepto de entornos (entorno de un punto de un espacio métrico es el que contiene una hiperesfera de centro el punto) y entonces $f(x)$ es continua en x_0 si dado un entorno arbitrario de $f(x_0)$ W , existe un entorno V de x_0 , tal que si x está en V , $f(x)$ está en W . Esta forma de definición se extiende a los espacios métricos definiendo como hiperesfera de centro x al conjunto de los puntos y tales que $d(x, y) \leq r$.

Pero puede suceder que la estructura conveniente de un espacio sea imposible de definir mediante una distancia, pero en cambio sea posible definir los entornos de un punto; se obtiene así una categoría de espacios más amplios que los espacios métricos y que son los denominados espacios topológicos, que acá no haremos más que mencionar.

Existe también una tercera manera de definir la continuidad en el análisis clásico por intermedio del concepto de límite de una sucesión: $f(x)$ es continua en x_0 si dada una sucesión cualquiera x_n cuyo límite sea x_0 , la sucesión $f(x_n)$ tenga siempre como límite $f(x_0)$.

El concepto de límite de una sucesión se extiende a los espacios métricos; una sucesión x_n tiene como límite x_0 , si fijado un ϵ , existe un m tal que para $n \geq m$, $d(x_n, x_0) \leq \epsilon$, Así en el espacio L^2 la convergencia de funciones es la conver-

gencia en media cuadrática y en el ejemplo 4) la convergencia de funciones, en tanto que elementos del espacio, es la convergencia uniforme.

Puede suceder que la estructura de un espacio no pueda expresarse por una distancia ni comienza hacerlo por medio de entornos pero que sea posible o resulte más conveniente definirla mediante el concepto de límite. Tal es el caso de los espacios que se presentan en la teoría de distribuciones, que son espacios vectoriales en que la estructura, y por lo tanto la continuidad, se obtienen definiendo previamente en el espacio las sucesiones convergentes.

7.- Funciones lineales y continuas.- Espacio Dual.

Definición 5.- Una funcional sobre un espacio vectorial es una correspondencia $A(\alpha)$ que hace corresponder a cada punto del espacio un escalar. La funcional se denomina lineal si tiene la propiedad:

$$(7) \quad A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta); \quad A(m\alpha) = mA(\alpha).$$

Nosotros consideraremos únicamente las funcionales lineales y continuas. Naturalmente que para lo último es necesario que en el espacio esté definida una estructura sea mediante una norma, sea mediante una definición de sucesiones convergentes.

Dadas dos funciones A y B se puede definir la suma $C = A + B$ de las funcionales por la relación $C(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)$ y el producto de una funcional por un escalar $aA = B$ por la relación $B(\alpha) = aA(\alpha)$. Es claro que si A y B son funcionales continuas también lo son $A + B$ y aA .

Definición 6.- Dado un espacio vectorial L se denomina espacio dual de L al espacio L' de todas las funcionales lineales y continuas sobre L.

El espacio queda definido con las operaciones de suma y producto por un escalar que acabamos de exponer; en lo que

respecta a su estructura consideraremos primero el caso de los espacios normados:

Sea L un espacio normado y A una funcional lineal y continua en el. La norma de A es por definición el extremo superior de los valores de $A(\alpha)$ para todos los vectores α de L que cumplan la condición $|\alpha| = 1$.

En el caso particular del espacio de Hilbert puede probarse que si $A(\alpha)$ es una funcional lineal y continua se tiene un vector a del espacio tal que $A(\alpha)$ es igual al producto escalar $a\alpha$. Es muy fácil ver que además la norma de la funcional es la norma de a . Esto permite considerar al espacio de Hilbert como su propio dual y de acá generalizar el concepto de producto escalar definiendo el producto escalar de un vector de L por un vector A del espacio dual como el valor $A(\alpha)$ de la funcional A en el punto α . Representaremos este producto con la notación $\langle A, \alpha \rangle$.

Para los espacios no normados, que vamos a utilizar en la teoría de distribuciones, definiremos en cada caso las sucesiones convergentes del espacio dual.

8.- Espacios de funciones de prueba. Definición de distribución.

Definición 7.- Sea $f(x)$ una función compleja definida en el espacio real n -dimensional. El conjunto de los puntos x del espacio tales que $f(x)$ no es idénticamente nula en ningún entorno de x se denomina el soporte de $f(x)$. Se lo designa con la notación K_f

El conjunto complementario del soporte de $f(x)$ es el conjunto x de los puntos del espacio tales que $f(x)$ es idénticamente nula en un entorno del punto. Es inmediato que este conjunto es abierto, luego el soporte de una función es un conjunto cerrado.

Obsérvese que la función puede ser nula en los puntos del soporte.

Definiremos ahora los espacios básicos de la teoría: son los siguientes:

Espacio D^0 : es el espacio de las funciones complejas $\varphi(x)$ definidas en el espacio real n -dimensional R^n continuas y de soporte acotado. Este espacio también se denomina espacio C .

Espacio D^m : es el espacio de las funciones complejas $\varphi(x)$ definidas en R^n con derivadas continuas hasta el orden m y de soporte acotado.

Espacio D : es el espacio de las funciones complejas $\varphi(x)$ definidas en R^n , indefinidamente derivables y de soporte acotado.

Definiremos ahora las sucesiones convergentes en cada uno de estos espacios:

En D^0 : la sucesión φ_n converge hacia la sucesión φ si se cumplen las siguientes condiciones:

a) Los soportes $K\varphi_n$ están todos contenidos en un conjunto acotado K .

b) En R^n hay convergencia uniforme, en el sentido clásico de las funciones φ_n hacia φ .

En D^m : La misma condición a) y en b) se exige la convergencia uniforme de las φ_n y de todas sus derivadas hasta el orden m hacia la función límite y las correspondientes derivadas.

En D : La misma condición a) y en b) se exige la convergencia uniforme de las φ_n y de todas sus derivadas.

Se debe entender que la convergencia uniforme se refiere a cada una de las sucesiones formadas con las φ_n y sus derivadas y no considerándolas todas en conjunto.

Debe observarse que para definir la convergencia en un espacio vectorial basta definir las sucesiones que convergen hacia el vector nulo. Definidas estas, una sucesión de funciones del espacio tendrá como límite otra sucesión si la sucesión converge hacia el vector nulo, es decir en el caso de

los espacios que estamos considerando hacia la función nula en todos los puntos. Diremos entonces que la sucesión converge hacia cero.

Entre los espacios D y D^m hay la siguiente relación: todo punto de D es punto de D^m y si una sucesión de funciones de D converge hacia cero en D converge también hacia cero en D^m .

Definición 8.- El espacio D definido anteriormente se denomina el espacio de las funciones de prueba: el espacio D^m es el espacio de las funciones de prueba de orden m .

Como ejemplo de función del espacio D podemos citar la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ e^{-1/1-x^2} & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

Definición 9.- Una distribución es un elemento del espacio dual D' del espacio D de las funciones de prueba, es decir una funcional lineal y continua sobre D . Una distribución de orden m es un elemento del espacio dual del espacio D^m , es decir una funcional lineal y continua sobre D .

Las propiedades básicas de las distribuciones serán por lo tanto:

$$(9) \quad \langle aT + bS, \varphi \rangle = a \langle T, \varphi \rangle + b \langle S, \varphi \rangle$$

$$(10) \quad \text{Si } \lim \varphi_n = \varphi \text{ (en } D) \text{ entonces } \lim \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

Se puede ver que toda distribución de orden m es distribución de órdenes inferiores y en particular es una distribución. En efecto si T está definida para toda función de D^m está también definida para toda función de D (puesto que D es un subconjunto de D^m), es inmediato que T es también lineal en D y es continua puesto que si las φ_n convergen hacia φ en D tam-

bién convergen en D^m , por ser la convergencia menos exigente en este espacio y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

9.- Ejemplos de distribuciones: funciones localmente sumables.

Una función $f(x)$ se dice localmente sumable cuando es sumable en cualquier conjunto acotado; es claro que una función sumable (1) es localmente sumable, pero la recíproca no es cierta, x^2 es localmente sumable pero no sumable; la función x^{-1} no es localmente sumable pues no es sumable en ningún intervalo que contenga el origen.

Definición 10.- Dada la función $f(x)$ localmente sumable definimos la distribución de orden cero f por la relación:

$$(11) \quad \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$$

La integral se extiende únicamente sobre el soporte de φ ; en dicho conjunto φ es acotada y f es sumable, luego (teorema 4 del capítulo I) $f(x)\varphi(x)$ es sumable, la integral existe siempre.

Es inmediato que la distribución así definida es lineal; también es continua pues si las φ_n convergen hacia φ en D^0 , convergen únicamente hacia φ en el conjunto K que contiene todos sus soportes y se tiene para $n \geq n_0$

$$|\langle f, \varphi \rangle - \langle f, \varphi_n \rangle| \leq \int_K |f(x)| |\varphi(x) - \varphi_n(x)| dx \leq \varepsilon \int_K |f(x)| dx = \varepsilon I$$

es decir que se cumple $\langle f, \varphi \rangle = \lim \langle f, \varphi_n \rangle$

Observemos que dos funciones iguales p.p. definen la misma distribución y se puede probar la recíproca: si dos funciones definen la misma distribución son iguales p.p. (2), por

(1) Desde ahora cuando nos refiramos a una función sumable sin especificar el conjunto de definición se sobreentenderá que es sumable en todo el espacio.

(2) Ver SCHWARTZ [5], fascículo II pag. 5

esta razón y también por el hecho de que existen funciones como la x^{-1} que no definen distribuciones, vemos que las funciones no son estrictamente un caso particular de las distribuciones sino que lo que generalizan en el concepto de clases de funciones localmente sumables, dos funciones perteneciendo a la misma clase cuando son iguales p.p.

Por lo tanto cuando nos ocupemos de las propiedades de las funciones localmente sumables en tanto que distribuciones siempre que digamos que $f(x)$ tiene una propiedad (ser continua, anularse en un conjunto, ...) se sobreentiende que tiene esta propiedad cuando se modifican, si fuera necesario, sus valores en un conjunto de medida nula, así por ejemplo la función de Dirichlet (Capítulo I,1) es una función idénticamente nula.

Definición 11.- Definiremos las distribuciones de Dirac δ y $\delta_{(a)}$ por las fórmulas

$$(12) \quad \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad , \quad \langle \delta_{(a)}, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

Es inmediato que así se obtiene una funcional lineal y continua sobre D^0 , las distribuciones son por lo tanto de orden cero. Las fórmulas (12) se escriben con mucha frecuencia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) \varphi(x) dx = \varphi(a)$$

Esta escritura es incorrecta pues puede probarse que no existe ninguna función $\delta(x)$ localmente sumable que satisfaga una de estas relaciones para todas las funciones de D^0 .

Si ponemos para el caso de una variable (veremos más adelante la razón de la notación)

$$(13) \quad \langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0)$$

obtenemos, como se ve inmediatamente una distribución de orden 1.

Un ejemplo de distribución que no es distribución de ningún orden finito es

$$(14) \quad \langle \delta, \varphi \rangle = \sum_0^{\infty} \varphi^{(n)}(0)$$

La suma tiene siempre un número finito de sumandos por ser φ de soporte acotado. Puede probarse fácilmente que es una funcional lineal continua sobre D.

10.- Integral de Stieljes.- Medidas.

Hemos visto que las funciones localmente sumables eran distribuciones de orden cero que se expresaban como integrales del producto de la función por la de prueba. Con un nuevo concepto de integral, el de Stieljes, vamos a ver que todas las distribuciones de orden cero se expresan mediante integrales.

Sean dadas en un intervalo (a,b) una función f(x) continua y otra g(x) no decreciente y acotada. Dividamos el intervalo (a,b) en intervalos parciales mediante los números

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

en cada intervalo tomemos un punto arbitrario ξ_i y formemos la suma

$$S = \sum_1^n f(\xi_i) [g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

En las hipótesis dadas, se puede probar que para toda sucesión de subdivisiones, tales que la longitud de los intervalos tienda a cero, la sucesión de las sumas S así formadas tiene un límite que es independiente de la elección de la sucesión de subdivisiones y de la de los ξ_i en cada intervalo.

Definición 12.- El límite común de las sumas S para las sucesiones de subdivisiones tales que la longitud del mayor intervalo tienda a cero, es la integral de Stieljes de f(x) respecto de g(x).

En vez de ser no decreciente la función g(x) puede tomarse de variación acotada, caso que se reduce al anterior por ser toda función de variación acotada diferencia de dos funciones no decrecientes. La generalización al caso en que las funciones son complejas de variable real se hace descomponiénd-

dolas en partes reales e imaginarias y haciendo la combinación lineal de las integrales que resulten.

Claro está que puede definirse la integral de Stieljes para todo par de funciones tales que se cumpla la existencia y unicidad del límite de las sumas S .

En esta integral es importante precisar si se toma un intervalo con o sin los extremos, pues el valor puede cambiar si la función $g(x)$ tiene un salto en ellos. La integral de Stieljes se expresa con la notación

$$(15) \quad \int_a^b f(x) \, d g(x)$$

y tiene las siguientes propiedades

$$(16) \quad \int_a^b f(x) \, d g(x) + \int_b^c f(x) \, d g(x) = \int_a^c f(x) \, d g(x)$$

$$(17) \quad \int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] \, d g(x) = c_1 \int_a^b f_1(x) \, d g(x) + c_2 \int_a^b f_2(x) \, d g(x)$$

$$(18) \quad \left| \int_a^b f(x) \, d g(x) \right| \leq M.V$$

En la última fórmula, que es la generalización del teorema del valor medio, M representa el máximo del módulo de $f(x)$ y V la variación total de la función en el intervalo.

Supongamos ahora que $g(x)$ es una primitiva, es decir g' que se tenga

$$g(x) = \int_a^x h(x) \, dx$$

la integral en el sentido de Lebesgue; entonces (teorema 9 del capítulo I) $g(x)$ es continua y $g'(x) = h(x)$ p.p. Se puede ver que también $g(x)$ es de variación acotada en todo intervalo finito, descomponiendo el intervalo (a, x) en los conjuntos $P(x)$ y $N(x)$ en donde $h(x)$ es ≥ 0 , < 0 , respectivamente:

se tiene entonces

$$g(x) = \int_{P(x)} h(x) dx - \int_{N(x)} h(x) dx$$

y $g(x)$ es la diferencia de dos funciones acotadas no decrecientes. Dada $f(x)$ continua existe la integral de Stieljes de $f(x)$ respecto de $g(x)$ y se puede probar la relación

$$(19) \int_a^b f(x) d g(x) = \int_a^b f(x) h(x) dx = \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

las dos últimas integrales en el sentido de Lebesgue.

De la identidad (poniendo $\xi_{-1} = x_0 = a$; $\xi_{n+1} = x_{n+1} = b$)

$$\sum_0^n g(\xi_i) [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = \left| g(x) f(x) \right|_a^b - \sum_0^{n+1} f(x_i) [g(\xi_i) - g(\xi_{i-1})]$$

resulta que si existe la integral de Stieljes de $f(x)$ respecto de $g(x)$ también existe la integral de Stieljes de $g(x)$ respecto a $f(x)$ y se tiene la fórmula de integración por partes

$$(20) \int_a^b f(x) d g(x) = \left| f(x) \cdot g(x) \right|_a^b - \int_a^b g(x) d f(x).$$

Consideremos ahora una función $m(x)$ de variación acotada en todo intervalo finito; podemos definir la distribución de orden cero

$$(21) \langle \mu, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) d m(x) = \int_a^b \varphi(x) d m(x)$$

en donde (a, b) es un intervalo que contiene el soporte de φ .

Definición 13.- Toda distribución definida mediante la fórmula (21) se denomina una medida. Se ve inmediatamente que es lineal y la continuidad sale aplicando la fórmula (18).

De la fórmula (19) se deduce que toda función localmente sumable $h(x)$ es una medida. En efecto: si $g(x)$ es una primitiva de $h(x)$ se tiene

$$\langle h, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) d g(x)$$

Consideremos la función de Heaviside $Y(x)$ nula para $x < 0$ e igual a la unidad para $x \geq 0$. Aplicando la definición se ve que

$$(22) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dY(x) = \varphi(0)$$

luego la distribución δ es la medida definida por la función unitaria de Heaviside.

En general si $m(x)$ es escalonada con n saltos, $\nu_1 \dots \nu_n$ en los puntos $x_1 \dots x_n$ se tiene

$$(23) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) d m(x) = \sum_1^n \nu_n \varphi(x_n) = \left\langle \sum_1^n \nu_n \delta_{(x_n)} \varphi \right\rangle$$

En virtud de un teorema famoso de Riesz: toda funcional lineal y continua en el espacio D^0 se puede expresar mediante una integral de Stieljes, por lo tanto toda distribución de orden cero se puede definir mediante la fórmula (21); en otras palabras: hay identidad entre los conceptos de distribución de orden cero y de medida.

La denominación de medida se debe al hecho de que a partir de una integral de Stieljes puede definirse una medida de conjuntos, que abarca como caso particular la medida de Lebesgue, cuando $g(x) = x$.

Esbozaremos este método: podemos limitarnos a las funciones $g(x)$ reales y no decrecientes. Para cada intervalo (a, b) definiremos como medida del intervalo

$$\mathcal{M}(a, b) = \int_a^b d g(x)$$

De acuerdo con lo dicho al definir la integral hay que especificar si el intervalo contiene o no los extremos y debe también considerarse el caso en que se reduce a un punto.

A partir de esa definición para cada intervalo se puede definir, por métodos análogos a los usados para definir la medida de Lebesgue, una función $\mathcal{M}(E)$ definida para los conjun-

tos de una cierta familia y que goza de algunas propiedades análogas a las de la medida de Lebesgue, en particular la expresada por el teorema 1) del capítulo I. Para el caso de la medida de Dirac $\mu(E)$ es cero si E no contiene al origen y uno si lo contiene.

Modernamente se ha visto que es preferible definir las medidas como funcionales lineales y continuas y, a partir de la funcional $\langle M, \varphi \rangle$, determinar la función de conjunto $\mu(E)$, al revés de lo que se hacía anteriormente. Muchas propiedades pueden deducirse directamente de la funcional sin necesidad de determinar la función de conjunto.

La medida puede ser interpretada físicamente como una distribución (de ahí el nombre de la teoría) de masas materiales o cargas eléctricas o magnéticas. Una distribución definida por una función localmente sumable representa una distribución de cargas cuya densidad en el punto x es $f(x)$. La $\delta_{(a)}$ de Dirac representa una masa +1 concentrada en el punto a .

Hemos expuesto los conceptos y resultados para el caso de medidas sobre la recta, pero la teoría se extiende a las medidas definidas sobre el espacio n -dimensional.

Para finalizar daremos un resultado cuyo interés radica en que da un criterio para ver que ciertas distribuciones son medidas.

Definición 14.- Una distribución T se dice real si $\langle T, \varphi \rangle$ es real para toda función φ real. Una distribución T real es positiva si $\langle T, \varphi \rangle \geq 0$ cuando $\varphi \geq 0$.

Se puede probar (no daremos la demostración) que: toda distribución positiva es una medida. (1)

11.- Soporte de una distribución.

Vimos en el nº 8 que el soporte de una función era el

(1) Ver SCHWARTZ [1] vol I, pag 29

conjunto complementario del conjunto abierto N de los puntos en que la función $f(x)$ tenía la propiedad de ser nula en un entorno de dicho punto. Puede verse fácilmente que esto equivale a definir N como el mayor conjunto abierto en que $f(x)$ es idénticamente nula, es decir la reunión de todos los conjuntos abiertos en que $f(x)$ es idénticamente nula.

Sea ahora $f(x)$ nula en un conjunto abierto A . Si el soporte de $\varphi(x)$ está contenido en A , $f(x)\varphi(x)$ es nula para todo x y entonces $\langle f, \varphi \rangle = 0$, y se puede probar que la recíproca es cierta.

El soporte de $f(x)$ puede entonces definirse como el conjunto complementario del conjunto reunión de todos los abiertos tales que $\langle f, \varphi \rangle$ es nula si el soporte de φ está contenido en el abierto.

Este resultado permite generalizar el concepto de soporte para las distribuciones. Diremos que una distribución T es nula en un conjunto abierto A si $\langle T, \varphi \rangle = 0$ para todos los φ cuyo soporte esté contenido en A . Por ejemplo la distribución δ es nula en todo abierto que no contenga el origen. Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1: Si una distribución T es nula en cada uno de los conjuntos abiertos de una cierta familia es nula en la reunión de todos ellos. (1)

Hemos visto que este teorema es cierto cuando T es una función, es fácil de probar para algunas distribuciones particulares (para δ es inmediato), pero la demostración general se apoya en nociones topológicas que no suponemos conocidas y por lo tanto admitiremos este teorema sin demostración.

Apoyándonos en este teorema definiremos el soporte de una distribución de la forma siguiente:

(1) Ver SCHWARTZ [1] vol I pag. 270 Martineau y Tierres [1] pag. 14

Definición 15.- El soporte de una distribución T es el conjunto complementario del conjunto reunión de todos los abiertos en los que T es nula, o lo que es lo mismo, el complementario del mayor conjunto abierto en el que T es nula.

El soporte de la distribución δ_a es por lo tanto el punto a.

Sea T una distribución de soporte K, sea A un conjunto abierto que contiene a K, si φ_1 y φ_2 son iguales en A, el soporte de $\varphi_1 - \varphi_2$ está contenido en complementario de A y por lo tanto en el de K, luego

$$\langle T, \varphi_1 - \varphi_2 \rangle = 0 \quad \langle T, \varphi_1 \rangle = \langle T, \varphi_2 \rangle,$$

es decir:

Teorema 2: El valor de $\langle T, \varphi \rangle$ depende unicamente de los valores de φ en un conjunto abierto arbitrario que comprenda al soporte de T.

Debemos observar que el conocimiento de los valores de φ en el soporte de T no es en general suficiente para calcular $\langle T, \varphi \rangle$. Por ejemplo $\langle \delta'_0, \varphi \rangle = -\varphi'(0)$ y para calcular $\varphi'(0)$ necesitamos conocer el valor de φ en todos los puntos de un entorno del origen, y es inmediato que el soporte de δ'_0 se reduce al origen.

C A P I T U L O I I I

DERIVACION DE DISTRIBUCIONES. EJEMPLOS

12.- Derivada de una distribución.

Sea $f(x)$ una función de una variable, localmente sumable y que además sea una primitiva. Por el teorema 9 de Capítulo I, $f(x)$ admite p.p. una derivada $f'(x)$, que también suponemos que es localmente sumable. Vamos a ver la relación que hay entre $f(x)$ y $f'(x)$ consideradas como distribuciones.

Como φ es una función de soporte acotado, tenemos aplicando el teorema 11 de Capítulo I.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx = \left| f(x)\varphi(x) \right|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x) dx$$

es decir que tenemos la relación $\langle f', \varphi \rangle = - \langle f, \varphi' \rangle$.

Pasando ahora al caso de varias variables se tiene:

$$\int_{R^n} f(x)\varphi(x) dx = \int \dots \int \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\delta \varphi(x)}{\delta x_k} dx_k \right] dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n$$

y repitiendo la integración por partes se obtiene la relación

$$(1) \left\langle \frac{\delta f}{\delta x_k}, \varphi \right\rangle = - \left\langle f, \frac{\delta \varphi}{\delta x_k} \right\rangle$$

la que conserva un sentido si se pone en lugar de f una distribución cualquiera T lo que nos conduce a adoptar la siguiente definición:

Definición 1.- La derivada $\frac{\delta T}{\delta x_k}$ de una distribución T es la funcional lineal y continua definida mediante la relación:

$$(2) \left\langle \frac{\delta T}{\delta x_k}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\delta \varphi}{\delta x_k} \right\rangle$$

Hay que probar que esta relación define una funcional lineal y continua. Cualquiera que sea φ de D $\frac{\delta \varphi}{\delta x_k}$ pertenece también a D , luego la funcional está definida en todos los puntos del espacio D ; es inmediato que es lineal; también es continua,

en efecto supongamos que las φ_n convergen hacia φ en D; por la definición de convergencia en D, también las $\frac{\delta \varphi_n}{\delta x_k}$ convergen hacia $\frac{\delta \varphi}{\delta x_k}$ en D, luego los números $\langle T, \frac{\delta \varphi_n}{\delta x_k} \rangle$ convergen hacia $\langle T, \frac{\delta \varphi}{\delta x_k} \rangle$ y por lo tanto la sucesión numérica $\langle \frac{\delta T}{\delta x_k}, \varphi_n \rangle$ tiene como límite $\langle \frac{\delta T}{\delta x_k}, \varphi \rangle$.

Como las funciones de prueba son indefinidamente derivables, y admiten siempre la inversión del orden de las derivaciones, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.- Toda distribución es indefinidamente derivable y se puede siempre cambiar el orden de las derivaciones.

Esta propiedad de la derivabilidad indefinida es una de las más importantes entre las propiedades de las distribuciones. En particular una función es siempre indefinidamente derivable en el sentido de las distribuciones; si es una primitiva y su derivada es localmente sumable, la derivada en el sentido de las distribuciones coincide con la derivada en el sentido de las funciones, pero en general ello no será así; puede suceder que la derivada en el sentido de las funciones no exista y puede también suceder que exista y sea distinta de la derivada en el sentido de las distribuciones.

13.- Derivadas de las funciones con saltos.- Derivadas de la \mathcal{S} .

Consideremos una función $m(x)$ de variación acotada en todo intervalo finito; es localmente sumable y por lo tanto define una distribución; si φ pertenece a D, tomando un intervalo que comprenda al soporte de φ se tiene por la fórmula (20) del Capítulo II

$$\langle m', \varphi \rangle = - \int_a^b m(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b m(x) d\varphi(x) = - \left[m(x) \varphi(x) \right]_a^b + \int_a^b \varphi(x) d m(x) = 0 + \langle M, \varphi \rangle = \langle M, \varphi \rangle$$

Es decir se tiene:

Teorema 2.- Sea $m(x)$ una función que define una medida μ ; la derivada en el sentido de las distribuciones de la función $m(x)$ es la medida μ . En particular la derivada de la función unitaria de Heaviside es la δ de Dirac.

Las derivadas sucesivas de la δ se expresa mediante las fórmulas:

$$(3) \quad \gamma'(x) = \delta; \langle \delta, \varphi \rangle = -\varphi'(0); \dots \langle \delta^{(m)}, \varphi \rangle = (-1)^m \varphi^{(m)}(0).$$

En virtud de la fórmula (23) del Capítulo II la derivada de una función escalonada $m(x)$ con n saltos es

$$(4) \quad \gamma' = \langle m; \varphi \rangle = \langle \mu, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) d m(x) = \sum_1^n \sigma_m \varphi(x_m)$$

$$\langle m; \varphi \rangle = \sum_1^n \sigma_m \delta(x_m)$$

Pasemos ahora al caso de una función $f(x)$ que es continua y derivable salvo en un número finito de discontinuidades de primera especie. $f(x)$ admite en el sentido ordinario una derivada que no está definida en el conjunto finito de los puntos de discontinuidad.

Supongamos que esta derivada localmente sumable, entonces define una distribución que la representaremos con la notación $[f'(x)]$ para distinguirla de la derivada f' en el sentido de las distribuciones. Se tiene entonces la siguiente fórmula generalización de (4)

$$(5) \quad f' = [f'] + \sum \sigma_m \delta(x_m)$$

Haremos la demostración para el caso de un solo punto de discontinuidad; la extensión al caso de n puntos surge en forma inmediata. Se tiene, siendo a el punto de discontinuidad

$$\langle f'; \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \left[\int_{-\infty}^{a-\epsilon} f(x) \varphi'(x) dx + \int_{a+\epsilon}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[- \left. f(x) \varphi(x) \right|_{-\infty}^{a-\epsilon} - \left. f(x) \varphi(x) \right|_{a+\epsilon}^{\infty} - \right]$$

$$+ \int_{-\infty}^{a-\epsilon} f'(x) \varphi(x) dx \int_{a+\epsilon}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx] = \varphi(a) [f(a+0) - f(a-0)] + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx = \langle \mathcal{D}, \varphi \rangle + \langle [f'] , \varphi \rangle$$

como queríamos demostrar.

Supongamos ahora que la función $f(x)$ admite derivadas hasta el orden k , que cumplen las mismas condiciones que la $f(x)$, se obtiene derivando en el sentido de las distribuciones la fórmula (5)

$$(6) f^{(k)} \doteq [f^{(k)}] + \sum_m [\sigma_m \delta_{(x_m)}^{(k-1)} + \sigma_m^{-1} \delta_{(x_m)}^{(k-2)} + \dots + \sigma_m^{(k-1)} \delta_{(x_m)}]$$

en donde σ_m^i representa el salto de la derivada de orden i en el sentido ordinario en el punto x_m . Por ejemplo la derivada segunda de (x) es 2δ .

La fórmula (6) nos da un ejemplo de la diferencia entre derivada ordinaria de una función y la derivada en el sentido de las distribuciones. Muchas fórmulas que se expresan en forma no muy fácil cuando se consideran derivadas ordinarias se simplifican cuando se deriva en el sentido de las distribuciones; tal es en particular el caso, que veremos más adelante, de las fórmulas de la teoría de transformadas de Laplace.

La distribución \mathcal{D}' en la interpretación, matemáticamente correcta, del concepto muy usado, pero no matemáticamente bien definido, de dipolo de momento eléctrico $+1$ colocado en el origen de la recta; éste puede definirse como el límite (sin especificar en que sentido) de un sistema de dos cargas; una carga $-\frac{1}{\epsilon}$ situada en el origen y una carga $+\frac{1}{\epsilon}$ en el punto ϵ . Si llamamos T_ϵ a la distribución definida por estas dos cargas se tiene, de acuerdo con lo que dijimos en el párrafo 10

$$\langle T_\epsilon, \varphi \rangle = \frac{1}{\epsilon} \langle \mathcal{D}_\epsilon, \varphi \rangle - \frac{1}{\epsilon} \langle \mathcal{D}, \varphi \rangle = \frac{\varphi(\epsilon) - \varphi(0)}{\epsilon}$$

Si $\varepsilon \rightarrow 0$ el último miembro tiende a $\varphi'(0)$ El dipolo puede entonces definirse con corrección matemática como la distribución T definida por la fórmula $\langle T, \varphi \rangle = \varphi'(0)$, es decir la distribución, $-\delta'$.

14.- Distribuciones valor principal y deltas de Heinsenberg.

Consideremos la función $\log|x|$ que siendo localmente sumable define una distribución y vamos a calcular su derivada.(1)
Se tiene

$$\begin{aligned} \langle [\log|x|]', \varphi \rangle &= - \langle \log|x|, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} \log|x| \varphi'(x) dx = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log|x| \varphi'(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \log|x| \varphi'(x) dx \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \left| \log|x| \varphi(x) \right|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \left| \log|x| \varphi(x) \right|_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) \log \varepsilon + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] \end{aligned}$$

Y ahora bien

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)] \log \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\varepsilon \cdot \varphi'(\Theta\varepsilon) \cdot \log \varepsilon = 0$$

Luego

$$(7) \quad \langle [\log|x|]', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right].$$

El segundo miembro es el valor principal en el sentido de Cauchy de la integral, en general no convergente de la función

$$\frac{\varphi(x)}{x}.$$

$$(8) \quad \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right]$$

Definición 2.- Llamaremos distribución valor principal

de $\frac{1}{x}$ a la definida mediante la relación

$$(9) \quad \langle \text{v.p.} \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

(1) Se entiende la derivada en el sentido de las distribuciones. La derivada en el sentido de las funciones es la función no localmente sumable $\frac{1}{x}$.

Como hemos probado que esta relación nos dá la derivada de la distribución $\log |x|$ no necesitamos probar que es una funcional lineal y continua.

EJERCICIO: Probar directamente a partir de las fórmulas (8) y (9) que v.p. $\frac{1}{x}$ es una distribución

EJERCICIO: Probar que la derivada en el sentido de las distribuciones de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{" } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{es } \langle f', \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{2} \int_{\epsilon}^{\infty} \varphi(x) \cdot x^{-3/2} dx + \varphi(0) \epsilon^{-1/2} \right]$$

Definición 3.- Se llaman deltas de Heisenberg a las

distribuciones $\delta^+ = \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2\pi i} \text{ v.p. } \frac{1}{x}$; $\delta^- = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\pi i} \text{ v.p. } \frac{1}{x}$

La aparente inconsistencia de los signos de estas definiciones se explicará al estudiar sus transformadas de Fourier.

Las distribuciones δ^+ y δ^- pueden definirse como límites de integrales en el campo complejo, mediante las fórmulas

$$(10) \begin{cases} \langle \delta^+, \varphi \rangle = \frac{-1}{2\pi i} \lim_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x + iy} dx \\ \langle \delta^-, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi i} \lim_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x - iy} dx \end{cases}$$

En efecto: tomando los argumentos entre $-\pi$ y π

$$\frac{-1}{2\pi i} \lim_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x + iy} dx = \frac{-1}{2\pi i} \lim_{y \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \log(x + iy) \right]'$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) \log(x + iy) dx = \frac{1}{2\pi i} \lim_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) \log(x + iy) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) \left[\log(x^2 + y^2)^{1/2} + i \arg(x + iy) \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) \log|x| dx + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) [1 - Y(x)] \pi i dx \right]$$

$$= \frac{-1}{2\pi i} \langle [\log|x|]', \varphi \rangle - \frac{1}{2} \langle [1 - Y(x)]', \varphi \rangle =$$

$$= \frac{-1}{2\pi i} \langle \text{v.p. } \frac{1}{x}, \varphi \rangle + \frac{1}{2} \langle \delta, \varphi \rangle = \langle \delta^+, \varphi \rangle$$

Analogamente se prueba la segunda fórmula. Sumando ambas se tiene

$$(11) \quad \langle \delta, \varphi \rangle = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{y}{x^2 + y^2} dx$$

fórmula importante que encontraremos más adelante por otros medios.

De los cálculos de la demostración se deduce que si definimos las siguientes distribuciones mediante integrales en el plano complejo

$$(12) \quad \begin{cases} \langle \log^+ x, \varphi \rangle = \lim_{y \rightarrow +0} - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \log(x + iy) dx \\ \langle \log^- x, \varphi \rangle = \lim_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \log(x - iy) dx \end{cases}$$

se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} [\log^{\pm} x]' = \delta^{\pm}$$

15.- Partes finitas de Hadamard.

La distribución v.p. $\frac{1}{x}$ es un ejemplo de como puede definirse distribución a partir de una función no localmente sumable mediante un sistema de sumación de integrales divergentes: la integral de $\frac{1}{x} \varphi(x)$ no es, en general, convergente, pero, por el artificio de tomar límites simétricamente a la derecha y a la izquierda del origen, se le da a dicha integral un valor que coincide con el de la integral cuando esta converge. El 2º ejercicio del nº 14 es otro caso de esta manera de definir **distribuciones**, es un caso particular de la teoría de las partes finitas de Hadamard; esta teoría se aplica a las funciones que no son sumables por poseer un punto en el que el crecimiento de la función es demasiado grande, aunque siempre del tipo potencial. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que ese punto es el origen y consideraremos el caso en que el intervalo de inte-

gración es $(0, a)$. Precisando estas consideraciones consideraremos una función de la forma

$$(13) \quad g(x) = \sum_{\nu=1}^m A_{\nu} x^{\lambda_{\nu}} + h(x)$$

en donde $h(x)$ es sumable en $(0, a)$ y los números λ_{ν} son complejos cualesquiera. Consideraremos dos casos distintos:

a) Todos los números λ_{ν} son distintos de menos uno.

Si algunos de los λ_{ν} son tales que su parte real $R(\lambda_{\nu})$ es menor o igual que -1 , $g(x)$ no es sumable en $(0, a)$, pero si lo es en (ε, a) . Calculemos la integral en este intervalo:

$$(14) \quad \int_{\varepsilon}^a g(x) dx = \int_{\varepsilon}^a h(x) dx + \sum_{\nu=1}^m A_{\nu} \frac{a^{\lambda_{\nu}+1}}{\lambda_{\nu}+1} - \sum_{\nu=1}^m A_{\nu} \frac{\varepsilon^{\lambda_{\nu}+1}}{\lambda_{\nu}+1}$$

Hagamos ahora tender ε a cero en el segundo miembro. El primer sumando tiende a la integral desde cero hasta a . Si ningún λ_{ν} es tal que $R(\lambda_{\nu}) \leq -1$, o lo que es lo mismo, si $g(x)$ es sumable en $(0, a)$, el límite es cero. Si hay algún λ_{ν} de parte real mayor o igual que menos uno, o lo que es lo mismo, si $g(x)$ no es sumable en $(0, a)$, el límite es infinito.

Hadamard consideró en ambos casos (integral convergente o no convergente) como valor de la integral al límite para ε tendiendo a cero de los dos primeros sumandos y a este valor lo denominó parte finita de la integral que coincide con el valor ordinario de la integral cuando esta es convergente.

En consecuencia para funciones $g(x)$ de la forma (13) con todos los $\lambda_{\nu} \neq -1$.

Definición 4.- La parte finita de la integral de $g(x)$ en $(0, a)$ es por definición:

$$(15) \quad \text{p.f.} \int_0^a g(x) dx = \sum_{\nu=1}^m A_{\nu} \frac{a^{\lambda_{\nu}+1}}{\lambda_{\nu}+1} + \int_0^a h(x) dx$$

que según (14) puede también ponerse en la forma

$$(16) \quad \text{p.f.} \int_0^a g(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^a g(x) dx + \sum_{\nu=1}^m A_{\nu} \frac{\varepsilon^{\lambda_{\nu}+1}}{\lambda_{\nu}+1} \right]$$

(1) El segundo es constante. Respecto al tercer sumando caben dos casos

En el caso de que la integral se tome en $(0, \infty)$ se define:

$$\text{p.f.} \int_0^{\infty} g(x) dx = \text{p.f.} \int_0^1 g(x) dx + \int_1^{\infty} g(x) dx$$

Desde luego que se supone que $g(x)$ es sumable en $(1, \infty)$, y puede evidentemente reemplazarse el valor 1 por cualquier valor positivo. Esto equivale también a definir:

$$\text{p.f.} \int_0^{\infty} g(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \text{p.f.} \int_0^a g(x) dx$$

Ejemplo: tomemos la función $e^{-x} x^{s-1}$, con la condición: $-1 < R(s) < 0$. Esta función no es sumable en $(0, a)$ por su tipo de infinidad en el origen. Escribamos la función en la forma (13)

$$e^{-x} x^{s-1} = x^{s-1} + (e^{-x} - 1) x^{s-1}$$

y aplicando la definición de parte finita se tiene:

$$\text{p.f.} \int_0^a e^{-x} x^{s-1} dx = \frac{a^s}{s} + \int_0^a (e^{-x} - 1) x^{s-1} dx$$

$$\text{p.f.} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = \int_0^{\infty} (e^{-x} - 1) x^{s-1} dx = \left| (e^{-x} - 1) \frac{x^s}{s} \right|_0^{\infty} +$$

$$+ \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-x} x^s dx = 0 + \frac{1}{s} \Gamma(s-1) = \Gamma(s)$$

Este resultado nos aclara la idea esencial del empleo de las partes finitas. La función gamma, $\Gamma(s)$ queda definida para $R(s) > 0$, por la integral $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$. Si tomamos ahora s tal que $-1 < R(s) < 0$, la integral anterior diverge pero su parte finita nos da el valor de $\Gamma(s)$. Por este tipo de propiedades tiene importancia la teoría. En muchos casos la solución de un problema de matemáticas se expresa mediante una integral en la que aparece un parámetro o una función arbitraria que son datos del problema; en esta forma la solución sólo existe cuando la integral así construida a partir de los datos es convergente, pero sucede en casos muy importantes (en la integración de ecuaciones

en derivadas parciales, por ejemplo) que la integral es divergente, y la solución del problema es la parte finita de esa integral divergente.

La extensión de la definición de parte finita para el caso de un intervalo $(a,0)$ es inmediata y de ahí que se puede definir también la parte finita de una integral en cuyo intervalo de definición haya varios puntos en los que la función sea infinita del tipo potencial.

Consideremos ahora la función $g(x) x^\lambda$. Si $R(\lambda)$ es suficientemente grande la función es sumable y se tiene

$$(17) \quad F(\lambda) = \int_0^a g(x) x^\lambda dx = \sum_{\nu=1}^m A_\nu \frac{a^{\lambda+1+\lambda\nu}}{\lambda+\lambda\nu+1} + \int_0^a h(x) x^\lambda dx$$

El primer sumando del último miembro de la igualdad es una función de λ cuyos puntos singulares son los puntos $-\lambda\nu - 1$. Como hemos supuesto $\lambda\nu \neq -1$, entre ellos no está el origen; la integral del segundo sumando define una función holomorfa para $R(\lambda) > 0$ y continúa en el origen. Haciendo tender λ a cero se tiene:

$$(18) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} F(\lambda) = \sum_{\nu=1}^m A_\nu \frac{a^{1+\lambda\nu}}{1+\lambda\nu} + \int_0^a h(x) dx = \text{p.f.} \int_0^a g(x) dx$$

Vemos entonces que la parte finita de la integral queda definida por una prolongación analítica. Este resultado es de importancia en los desarrollos que van a seguir.

Consideremos ahora el siguiente caso:

b) Uno de los números $\lambda\nu$ es igual a -1 . Tenemos entonces que considerar funciones de la forma

$$(19) \quad g(x) = \frac{A_1}{x} + \sum_{\nu=2}^m A_\nu x^{\lambda\nu} + h(x)$$

y calculando la integral desde ϵ hasta a , se tiene:

$$\int_\epsilon^a g(x) dx = \int_\epsilon^a h(x) dx + \left[A_1 \log a + \sum_{\nu=2}^m A_\nu \frac{a^{\lambda\nu+1}}{\lambda\nu+1} \right]$$

$$- \left[A_1 \log \varepsilon + \sum_{\nu=2}^m A_\nu \frac{\varepsilon^{\lambda_\nu + 1}}{\lambda_\nu + 1} \right]$$

El tercer sumando tiende siempre a ε por la presencia del término $\log \varepsilon$ (1); como en el caso a) definiremos la parte finita de la integral como el límite de los dos primeros sumandos.

Tenemos entonces para una función de la forma (19):

Definición 4^o: La parte finita de la integral de $g(x)$ en $(0, a)$ es por definición:

$$(20) \quad p.f. \int_0^a g(x) dx = A_1 \log a + \sum_{\nu=2}^m A_\nu \frac{a^{\lambda_\nu + 1}}{\lambda_\nu + 1} + \int_0^a h(x) dx$$

que puede también escribirse en la forma:

$$(20') \quad p.f. \int_0^a g(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^a g(x) dx + A_1 \log \varepsilon + \sum_{\nu=2}^m A_\nu \frac{\varepsilon^{\lambda_\nu + 1}}{\lambda_\nu + 1} \right]$$

Hay diferencias importantes entre este caso y el anterior. Si queremos aplicar ahora el método de definición por prolongación analítica se tiene.

$$F(\lambda) = \int_0^a g(x) x^\lambda dx = \frac{A_1 a^\lambda}{\lambda} + \sum_{\nu=2}^m A_\nu \frac{a^{\lambda+1+\lambda_\nu}}{1+\lambda+\lambda_\nu} + \int_0^a h(x) x^\lambda dx$$

y entonces 0 es un polo. Poniendo

$$F(\lambda) - \frac{A_1}{\lambda} = A_1 \frac{a^\lambda - 1}{\lambda} + \sum_{\nu=2}^m A_\nu \frac{a^{\lambda+1+\lambda_\nu}}{1+\lambda+\lambda_\nu} + \int_0^a h(x) x^\lambda dx$$

y haciendo tender λ hacia cero se obtiene

$$(21) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[F(\lambda) - \frac{A_1}{\lambda} \right] = A_1 \log a + \sum_{\nu=2}^m A_\nu \frac{a^{1+\lambda_\nu}}{1+\lambda_\nu} + \int_0^a h(x) dx = \\ = p.f. \int_0^a g(x) dx$$

Pero la diferencia esencial está en el hecho siguiente: si ningún λ_ν es igual a 1, la parte finita es invariante respecto a los cambios de variable: es decir: si $t = t(x)$, $x = x(t)$ repre-

(1) Este infinito logarítmico es de interés en los desarrollos de la mecánica cuántica.

sentan una aplicación biunívoca e indefinidamente derivable de intervalo $(0, a)$ en el (b, c) ($b = t(0), c = t(a)$), se tiene:

$$(22) \quad \text{p.f.} \int_0^a g(x) dx = \text{p.f.} \int_b^c g[x'(t)] x'(t) dt$$

No daremos la demostración de este resultado; nos limitaremos a comprobar con un ejemplo que no se cumple si hay un salto; basta ver que se tiene

$$(23) \quad \text{p.f.} \int_0^1 \frac{dx}{x} = 0; \quad \text{p.f.} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = -\log 2$$

mientras que se pasa de una integral a la otra por el sencillísimo cambio de variable $x = 2t$.

Las dificultades en este caso pueden evitarse utilizando el concepto de parte finita logarítmica, que acá no desarrollaremos. (1)

16.- Pseudofunciones. Distribuciones \mathcal{Y}_m

La función x^m define, para $R(m) > -1$, una distribución por ser localmente sumable. Vamos ahora, utilizando la teoría de las partes finitas de Hadamard, a definir una distribución para cualquier valor complejo de m .

Definición 5.- Llamaremos pseudofunción monomía, p.f. (x^m) , $x > 0$ a la distribución definida por la relación:

$$(24) \quad \langle \text{p.f.} (x^m)_{x>0}, \varphi(x) \rangle = \text{p.f.} \int_0^\infty x^m \varphi(x) dx$$

Si $R(m) > -1$ el símbolo p.f. es innecesario y obtenemos la distribución $\mathcal{Y}(x) x^m$, que es una función localmente sumable.

Consideraremos primero el caso en que m no es un entero negativo. Sea k un número entero tal que $R(k+1+m) > -1$. Utilizando la fórmula de MacLauris se tiene

$$(25) \quad x^m \varphi(x) = \sum_{n=0}^k \frac{x^{n+m}}{n!} \varphi^{(n)}(0) + x^m \left[\varphi(x) - \sum_{n=0}^k \frac{x^n}{n!} \varphi^{(n)}(0) \right]$$

(1) Puede verse en Bureau [1]

lo que nos prueba que $\varphi(x)$ es de la forma (13), puesto que:

$$x^m \left[\varphi(x) - \sum_{n=0}^k \frac{x^n}{n!} \varphi^{(n)}(0) \right] = x^{m+k+1} \frac{\varphi^{(k+1)}(\theta x)}{(k+1)!}$$

es sumable en $(0, \infty)$. Aplicando la definición de parte finita se tiene:

$$(26) \langle \text{p.f.}(x^m)_{x>0}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} x^m \varphi(x) dx + \sum_{n=0}^k \frac{\varepsilon^{n+m+1}}{m+n+1} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \right]$$

$$= \int_0^a x^m \left[\varphi(x) - \sum_{n=0}^k \frac{x^n}{n!} \varphi^{(n)}(0) \right] dx + \sum_{n=0}^k \frac{a^{n+m+1}}{n+m+1} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}$$

en donde a es un punto tal que el soporte de φ esté contenido en $(-\infty, a)$.

Por la relación (26) hemos definido una funcional para toda φ del espacio D , que, evidentemente es lineal. Vemos que también es continua; tomemos una sucesión $\varphi_i(x)$ convergente hacia cero y sea $(0, a)$ un intervalo tal que el soporte de todas las φ_i esté contenido en $(-\infty, a)$. Se tiene entonces

$$\delta_i = \left| \langle \text{p.f.}(x^m)_{m>0}, \varphi_i(x) \rangle \right| \leq \int_{\varepsilon}^a \frac{x^{m+k+1}}{(k+1)!} \varphi_i^{(k+1)}(\theta x) dx +$$

$$+ \sum_{n=0}^k \frac{a^{n+m+1}}{n+m+1} \frac{|\varphi_i^{(n)}(0)|}{n!}$$

y por la convergencia uniforme de $\varphi_i^{(k+1)}(\theta x)$ hacia cero y la convergencia de $\varphi_i^{(n)}(0)$ hacia cero, δ_i tiende a cero para $i \rightarrow \infty$. Queda así probado que (26) define una distribución.

Observemos que este razonamiento vale también para el caso en que m es un entero negativo.

Consideremos ahora la siguiente igualdad, válida para λ suficientemente grande

$$-\int_0^{\infty} x^{m+\lambda} \varphi'(x) dx = \int_0^{\infty} (m+\lambda) x^{m+\lambda-1} \varphi(x) dx$$

Hagamos tender λ hacia cero y apliquemos (18); se tiene:

$$- \text{p.f.} \int_0^{\infty} x^m \varphi'(x) dx = \text{p.f.} \int_0^{\infty} m x^{m-1} \varphi(x) dx$$

luego se tiene la siguiente fórmula de derivación, cuando m no es un entero negativo

$$(28) \quad \left[\text{p.f.} (x^m)_{x>0} \right]' = m \text{p.f.} (x^{m-1})_{x>0}$$

Si es la parte real de $m > -1$, el primer miembro es la función $Y(x) x^m$, y si es > -2 ambos miembros son funciones.

Pasemos ahora al caso en que m es un entero negativo $-\ell$.

Se tiene

$$(28) \quad \left\langle \text{p.f.} \left(\frac{1}{x^\ell} \right)_{x>0}, \varphi(x) \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^\ell} dx + \sum_{n=0}^{\ell-2} \frac{\epsilon^{n-\ell+1}}{n-\ell+1} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(\ell-1)}(0)}{(\ell-1)!} \log \epsilon \right]$$

luego vemos que: el infinito logarítmico aparece siempre que m es un entero negativo.

Las fórmulas de derivación son ahora las siguientes

$$(29) \quad \left[Y(x) \cdot \log x \right]' = \text{p.f.} \left(\frac{1}{x} \right)_{x>0}$$

$$(30) \quad \left[\text{p.f.} \left(\frac{1}{x^\ell} \right)_{x>0} \right]' = -\ell \text{p.f.} \left(\frac{1}{x^{\ell+1}} \right)_{x>0} + (-1) \frac{\delta^{(\ell)}(0)}{\ell!}$$

Probaremos la segunda fórmula para el caso $\ell = 1$ y dejaremos como EJERCICIO la demostración en el caso general así como la prueba de la primera. Se tiene en efecto:

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[\text{p.f.} \left(\frac{1}{x} \right)_{x>0} \right]', \varphi(x) \right\rangle + \left\langle \text{p.f.} \left(\frac{1}{x^2} \right)_{x>0}, \varphi(x) \right\rangle = \\ & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{x} dx - \varphi'(0) \log \epsilon + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{\varphi(0)}{\epsilon} + \varphi'(0) \log \epsilon \right] = \\ & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\left. - \frac{\varphi(x)}{x} \right|_{\epsilon}^{\infty} - \frac{\varphi(0)}{\epsilon} \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\epsilon) - \varphi(0)}{\epsilon} = \varphi'(0) = - \langle \delta', \varphi(x) \rangle \end{aligned}$$

Puede definirse también la distribución p.f. $\left(\frac{1}{x^l}\right)_{x < 0}$

por la relación

$$(31) \langle \text{p.f.} \left(\frac{1}{x^l}\right)_{x < 0}, \varphi(x) \rangle = \text{p.f.} \int_{-\infty}^0 \varphi(x) \frac{1}{x^l} dx$$

y se prueba entonces de manera análoga a (30), que

$$(32) \left[\text{p.f.} \left(\frac{1}{x^l}\right)_{x < 0} \right]' = -l \text{p.f.} \left(\frac{1}{x^{l+1}}\right)_{x < 0} - (-1)^l \frac{\delta^{(l)}}{l!}$$

Se define ahora

$$(33) \text{p.f.} \left(\frac{1}{x^l}\right) = \text{p.f.} \left(\frac{1}{x^l}\right)_{x < 0} + \text{p.f.} \left(\frac{1}{x^l}\right)_{x > 0}$$

y se obtiene:

$$(34) \frac{d}{dx} \text{p.f.} \left(\frac{1}{x^l}\right) = -l \text{p.f.} \left(\frac{1}{x^{l+1}}\right)$$

En particular para $l = 1$, se tiene

$$\langle \text{p.f.} \left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \varphi(0) \log \varepsilon \right] +$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(x) \frac{dx}{x} + \varphi(0) \log \varepsilon \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x) \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(x) \frac{dx}{x} \right] = \langle \text{v.p.} \frac{1}{x}, \varphi \rangle$$

El valor principal es pues un caso particular de parte finita.

Vamos ahora a dar un método de obtención de las pseudofunciones, por medio de la prolongación analítica partiendo de las que, por tener el exponente mayor que -1, son funciones.

Tomemos una función φ cualquiera de D que consideraremos fija desde ahora en adelante. Para $R(m) > 0$, la integral convergente

$$\int_0^{\infty} x^{m-1} \varphi(x) dx = \Phi(m)$$

define una función holomorfa de la variable compleja m . Sea ahora n un entero positivo cualquiera, la integral anterior puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \Phi(m) &= \int_0^1 x^{m-1} \left[\varphi(x) + \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) \right] dx + \\ &+ \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k! (m+k)} + \int_1^{\infty} x^{m-1} \varphi(x) dx \end{aligned}$$

La función $\Phi(m)$ estaba solamente definida en el semiplano $\text{Re}(m) > 0$, en el que era convergente la integral que la definía. Con la nueva forma de escribirla está definida en el semiplano $\text{Re}(m) > -n$, en el que es convergente el primer sumando, con la excepción de los puntos $0, -1, -2, \dots, -(n-1)$ en los que se anula el denominador del segundo sumando; es claro que estos puntos son polos simples de la función, con un residuo en $m = -p$, que vale

$$\frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!}$$

Como n es cualquiera podemos por este método prolongar la función $\Phi(m)$ a todo el plano complejo y se obtiene así una función meromorfa con polos simples en los puntos $0, -1, -2, \dots, -n, \dots$ en los que el residuo vale

$$\frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!}$$

De la definición 5 se deduce que en los puntos que no son polos (m distinto de un entero negativo), el valor de la función es $\langle \text{p.f. } (x^{m-1})_{x>0}, \varphi(x) \rangle$

Para unificar el tratamiento de las partes finitas, que tiene diferencias según que m sea o no entero negativo, resulta conveniente introducir unas nuevas distribuciones, las Y_m , de forma que, fijado φ , la función de variable compleja m , $\langle Y_m, \varphi \rangle$ sea una función entera.

Para ello busquemos una función de m que no se anule nunca y que tenga los mismos polos que Φ y dividamos Φ por esta nueva función. Se ve que la solución de este problema es la fun-

ción gamma, $\Gamma(m)$ cuyos residuos en el polo simple $m = -p$ es

$$\frac{(-1)^p}{p!}$$

El cociente $\Phi(m) / \Gamma(m)$ será entonces una función entera si le asignamos el valor $(-1)^p \varphi^{(p)}(0)$ en los puntos $m = -p$.

Si hacemos ahora variar φ y definimos para cada m la funcional que hace corresponder a φ el cociente $\Phi(m) / \Gamma(m)$, obtenemos unas nuevas e importantes distribuciones las Y_m , cuya definición es, (según lo que acabamos de decir):

Definición 6.- Las distribuciones Y_m se definen por las fórmulas:

$$(35) \quad Y_m = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m)} \text{ p.f. } (x^{m-1})_{x>0} & \text{si } m \text{ es distinto de un entero negativo} \\ \delta(p) & \text{si } m = -p (p \text{ entero } \geq 0). \end{cases}$$

El símbolo p.f. es innecesario si $R(m) > 0$, en cuyo caso es

$$Y_m = \frac{1}{\Gamma(m)} x^{m-1} Y(x)$$

y en particular Y_1 es la función de Heaviside.

Es evidente que se cumple siempre la fórmula

$$(36) \quad Y'_m = Y_{m-1}$$

y de la forma en que se definió Y_m se deduce el siguiente teorema:

Teorema 3.- Si fijamos una función de prueba φ , el producto escalar $\langle Y_m, \varphi \rangle$ es, considerado como una función de la variable compleja m , una función entera.

17.- Derivada de una función discontinua sobre una superficie.

Sea $f(x)$ una función del espacio enedimensional que supondremos definida y localmente sumable en todos los puntos del espacio, salvo en los de una hipersuperficie S . Como S es de medida nula $f(x)$ está bien definida como distribución. Suponga-

mos además que cada derivada parcial sea localmente sumable y que la función y las derivadas parciales tengan límite a uno y otro lado de la hipersuperficie; la diferencia entre estos dos límites es el salto de la función o de la derivada parcial que queda definido cuando se fija el sentido en que se atraviesa la hipersuperficie y que cambiará de signo cuando se cambie el sentido. Para fijar las ideas consideraremos el caso de tres dimensiones, aun cuando el razonamiento que vamos a hacer vale en general.

Este caso es la generalización del tratado en el nº 13 de una función de una variable con un salto. Las derivadas parciales ordinarias están definidas en todos los puntos, salvo en S luego son distribuciones que representaremos con la notación $[f'_x], [f'_y], [f'_z]$. Vamos a determinar las derivadas de f en el sentido de las distribuciones. Se tiene:

$$\langle f'_x, \varphi \rangle = - \int_{R^3} f \frac{\delta \varphi}{\delta x} dx dy dz = - \int_{R^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f \frac{\delta \varphi}{\delta x} dx \right] dy dz$$

y aplicando la fórmula (5) tenemos

$$\langle f'_x, \varphi \rangle = \int_{R^2} \left[\sigma_0 \varphi + \int_{-\infty}^{\infty} [f'_x] \varphi dx \right] dy dz$$

en donde σ_0 es el salto de f en el punto en que S es cortada por una paralela al eje OX, trazada por un punto arbitrario del plano YZ.

Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} (36) \quad \langle f'_x, \varphi \rangle &= \int_S \sigma_0 \varphi dy dz + \int_{R^3} [f'_x] \varphi dx dy dz \\ &= \int_S \sigma_0 \varphi \cos \vartheta d\sigma + \langle [f'_x]^-, \varphi \rangle \end{aligned}$$

en donde ϑ es el ángulo de la normal a la superficie con el eje OX, orientada en la misma dirección en que la superficie

es atravesada; la fórmula anterior no depende del sentido pues al cambiar éste, cambian a la vez de signo los dos factores σ_0 y $\cos \alpha$.

La segunda integral define una distribución de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 7.- Sea S una hipersuperficie del espacio n -dimensional; las distribuciones $\delta(S)$ y $M(S)\delta(S)$ (en donde M es una función definida en los puntos de S) están definidas mediante las relaciones:

$$(37) \quad \langle \delta(S), \varphi \rangle = \int_S \varphi \, d\sigma; \quad \langle M(S)\delta(S), \varphi \rangle = \int_S M \varphi \, d\sigma$$

De acuerdo con esta fórmula obtenemos como expresión de la derivada

$$(38) \quad f'_x = [f'_x] + \sigma_0 \cos \alpha \delta(S)$$

Supongamos ahora que sea nula fuera de un volumen V ; como veremos más adelante, por ser de soporte compacto puede extenderse la funcional a las funciones indefinidamente derivables de soporte cualquiera, en particular el soporte puede ser todo el espacio. Aplicando la fórmula (36) al caso en que φ es la constante uno se obtiene la fórmula clásica de Gauss de reducción de integrales múltiples a integrales de superficie. Háganse los cálculos como EJERCICIO.

Vamos ahora a calcular el laplaciano de f en el sentido de las distribuciones. Aplicando la fórmula (38) y llamando $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ a los saltos de las derivadas parciales se tiene

$$\Delta f = [\Delta f] + (\sigma_x \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma) \delta(S) +$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta x} (\sigma_0 \cos \alpha \delta(S)) + \frac{\delta}{\delta y} (\sigma_0 \cos \beta \delta(S)) + \frac{\delta}{\delta z} (\sigma_0 \cos \gamma \delta(S)) \right]$$

El primer factor de segundo sumando es el salto de la derivada normal, que no es otra cosa que la suma de las dos derivadas normales a cada uno de los dos lados de S. Llamaremos a este salto σ_v . el tercer sumando vale

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\delta}{\delta x} (\sigma_0 \cos \alpha \delta_s) + \frac{\delta}{\delta y} (\sigma_0 \cos \beta \delta_s) + \frac{\delta}{\delta z} (\sigma_0 \cos \gamma \delta_s), \varphi \right\rangle = \\ & = - \int_S \sigma_0 \left[\frac{\delta \varphi}{\delta x} \cos \alpha + \frac{\delta \varphi}{\delta y} \cos \beta + \frac{\delta \varphi}{\delta z} \cos \gamma \right] d\sigma = - \int_S \sigma_0 \frac{\delta \varphi}{\delta v} d\sigma \\ & = \left\langle \frac{\delta}{\delta v} \sigma_0 \delta(s), \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

Esta expresión no depende tampoco del sentido de la normal puesto que si se cambia, cambian a la vez el signo de σ_0 y de los cosenos.

Tenemos finalmente la fórmula:

$$(39) \quad \Delta f = [\Delta f] + \sigma_v \delta(s) + \frac{\delta}{\delta v} (\sigma_0 \delta(s))$$

Supongamos que la superficie limite un volumen V y que f sea nula fuera de V. Tomemos una función de prueba, que solo necesitamos suponer con derivadas segundas continuas por ser Δf una distribución de orden 2. Aplicando (39) se obtiene la fórmula de Green del análisis clásico

$$\begin{aligned} \int_V [f \Delta \varphi - \varphi \Delta f] d\tau &= \langle \Delta f, \varphi \rangle - \langle [\Delta f], \varphi \rangle = \\ &= \langle \sigma_v \delta_s, \varphi \rangle + \left\langle \frac{\delta}{\delta v} (\sigma_0 \delta_s), \varphi \right\rangle = \\ &= \int_S \left(\frac{\delta f}{\delta v} \varphi - f \frac{\delta \varphi}{\delta v} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

18.- Pseudofunciones en el espacio euclidiano enedimensional.

Consideremos una función f del espacio ordinario enedimensional, tal que su expresión en coordenadas esféricas sea de la forma

$$r^m C(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1})$$

en donde $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}$, son las coordenadas angulares esféricas.

Si se quiere calcular ahora la integral de esta función en una corona esférica de radio ξ y a , se tiene, según fórmulas conocidas:

$$\int_{\xi \leq r \leq a} f(x) dx = \int_{\xi}^a r^{m+n-1} \left[\int_{\Omega} C(\partial_1 \dots \partial_{n-1}) d\Omega \right] dr =$$

$$= M \int_{\xi}^a r^{m+n-1} dr = M \frac{a^{m+n}}{m+n} - M \frac{\xi^{m+n}}{m+n}$$

En esta fórmula hay que reemplazar el último miembro por $M \log a - M \log \xi$, cuando sea $m = -n$. En particular si C es la constante uno, M es el área S_n de la esfera de radio uno del espacio de n dimensiones que vale

$$S_n = \frac{2 \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

Hagamos ahora tender ξ hacia cero; caben dos casos:

- a) $R(m) > -n$. El primer miembro de la igualdad tiende a la integral sobre la esfera de centro el origen y radio a . El primer sumando del último miembro es constante y el segundo tiende a cero, lo que equivale a decir que la integral es convergente, o lo que es lo mismo, que r^m es localmente sumable.
- b) $R(m) \leq -n$. El segundo sumando del segundo miembro tiende a infinito, la integral es divergente y r^m no es localmente sumable.

Generalizando lo dicho para el caso de una variable se toma siempre el primer sumando del último miembro como valor de la integral que será la parte finita si $R(n) \leq -n$ y el valor ordinario cuando sea $R(m) > -n$. El valor de la parte finita es por lo tanto

$$(40) \text{ p.f. } \int_{r \leq a} f(x) dx = M \frac{a^{m+n}}{m+n} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\int_{\xi \leq r \leq a} f(x) dx + M \frac{\xi^{m+n}}{m+n} \right]$$

debiendo ponerse $\log \xi$ en vez de $\frac{\xi^0}{0}$ cuando $m = -n$.

Naturalmente la definición se extiende a funciones que sean suma de una función localmente sumable y de un número fi-

nito de funciones de la forma anterior.

Vamos ahora a definir la distribución p.f. r^m . Sea φ de D . Apliquemos la fórmula de Taylor a φ y tomemos coordenadas esféricas. Se tiene:

$$\varphi(x) = \sum_0^k C_i r^{i+k+1} T_k$$

en donde los coeficientes C_i dependen de las coordenadas esféricas angulares y de los valores en el origen de φ y de sus derivadas hasta el orden i .

La pseudofunción p.f. r^m se define entonces como

$$\begin{aligned} \langle \text{p.f. } r^m; \varphi \rangle &= \text{p.f.} \int_{\mathbb{R}^n} r^m \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} r^m \left[\varphi(x) - \sum_0^k C_i r^i \right] dx + \\ &+ \sum_0^k \text{p.f.} \int_{r \leq a} r^{m+i} C_i dx \end{aligned}$$

en donde la esfera de radio a contiene el soporte de φ y $R(m+k+1) > -n$.

Por cálculos que no detallaremos se prueba que

$$\begin{aligned} \int_{r=i} C_{2i+1} d\sigma &= 0 \\ \int_{r=1} C_{2i} d\sigma &= \frac{\pi^{n/2} \Delta^i \varphi(0)}{2^{2i-1} i! \Gamma(\frac{n}{2} + i)} = H_i \Delta^i \varphi(0) \end{aligned}$$

Si S_n es el área de la esfera n -dimensional de radio uno puede escribirse también H_i en la forma

$$(40) \quad H_i = \frac{S_n}{i! 2^i n(n+2)\dots(n+2i-2)}$$

luego se tiene finalmente, razonando como en el caso de una variable

$$(41) \langle \text{p.f. } r^m; \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{r \geq \epsilon} r^m \varphi(x) dx + \sum_i H_i \Delta^i \varphi(0) \frac{\epsilon^{m+n+2i}}{m+n+2i} \right]$$

en donde hay que reemplazar $\frac{\xi^0}{0}$ por $\log. \xi$ en el caso $m+n+2i = 0$.

Como en el caso de una variable se tiene la siguiente igualdad

$$\int_{R^n} x^m \varphi(x) dx = \int_{r \leq 1} r^m \left[\varphi(x) - \sum_{i=0}^k C_i r^i \right] dx + \sum_i H_i \frac{\Delta^i \varphi(0)}{m+n+2i} + \int_{r \geq 1} r^m \varphi(x) dx$$

El primer miembro está definido para $R(m) > -n$, el segundo en $R(m) > -n - k - 1$, salvo en los puntos $m = -n - 2i$ que son polos simples. Puede entonces prolongarse analíticamente la primera integral y se obtiene una función meromorfa con polos simples en los puntos $-n, -n-2, \dots, -n-2p, \dots$; el residuo en esos puntos es $H_i \Delta^i \varphi(0)$.

En los puntos que no son polos el valor de la función es $\langle p.f. r^m, \varphi \rangle$.

Cuando $R(m)$ es suficientemente grande, se puede probar por cálculos elementales que se tiene

$$(42) \quad \Delta p.f. r^m = m(m+n-2) p.f. r^{m-2}$$

y por la prolongación analítica esa fórmula es válida para todo m que no sea uno de los valores $-n-2, -n-4, \dots, -n-2h, \dots$

Cuando sea $m = -n+2-h$ (h , entero ≥ 0) se tiene la siguiente relación que no demostraremos

$$(43) \quad \Delta p.f. r^m = m(m+n-2) p.f. r^{m-2} + \frac{(2-n-4h)\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2h-1}h! \Gamma(\frac{n}{2}-h)} \Delta^h \delta$$

En particular para $n \geq 3$, poniendo $m = 2-n$ se tiene

$$(44) \quad \Delta \frac{1}{r^{n-2}} = \frac{-(n-2)\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)} \delta - (n-2) S_n \delta$$

en donde S_n es el área de la esfera de radio 1 en el espacio

de n dimensiones.

Esto nos prueba que $\frac{-1}{(n-2)S_n r^{n-2}}$ es una solución elemental de la ecuación de Laplace, es decir una solución de la ecuación $\Delta_n = \delta$.

Para $n = 2$ la solución elemental es $(2\pi)^{-1} \log r$. Vamos a probar este resultado. En efecto:

$$\begin{aligned} \langle \Delta \log r, \varphi \rangle &= \langle \log r, \Delta \varphi \rangle = \iint_{R^2} \log r \Delta \delta \, dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{r \geq \varepsilon} \log r \Delta \varphi \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle P_\varepsilon, \Delta \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \Delta P_\varepsilon, \varphi \rangle \end{aligned}$$

en donde $P_\varepsilon = \log r$ en el exterior del círculo de radio ε y nula dentro de él. Aplicando la fórmula (39) y como $\Delta P_\varepsilon = 0$, y en la circunferencia $\frac{\delta}{\delta r_i} = \frac{\delta}{\delta r}$ se tiene:

$$\langle \Delta P_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{r=\varepsilon} \log \varepsilon \frac{\delta \varphi}{\delta r} \, ds + \int_{r=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \varphi \, ds$$

$$\left| \int_{r=\varepsilon} \log \varepsilon \frac{\delta \varphi}{\delta r} \, ds \right| \leq 2\pi \varepsilon \log \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{M \rightarrow 0} 0$$

$$\int_{r=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \varphi \, ds = 2\pi \varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \varphi(\xi) \rightarrow 2\pi \varphi(0) = 2\pi \langle \delta, \varphi \rangle$$

luego como queríamos probar

$$(45) \quad \Delta (2\pi)^{-1} \log r = \delta$$

EJERCICIO: Utilizando el mismo método que acabamos de emplear probar directamente que $\frac{-1}{(n-2)S_n r^{n-2}}$ es la solución elemental de la ecuación de Laplace de n variables.

19.- Pseudofunciones en el espacio de Lorentz.-

Consideremos el espacio enedimensional de las variables (t, x_1, \dots, x_{n-1}) con métrica de Lorentz; la longitud de un vector es $s = (t^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2)^{1/2}$, que se escribe en la forma $s^2 = t^2 - P^2$, siendo $P^2 = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2$, es decir P es la longitud euclidiana del vector $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ de las coordenadas o variables espaciales; a la variable t se le denomina variable temporal. Vamos a estudiar la convergencia de las integrales de s^m

En primer lugar observaremos que hay una diferencia importante con el caso de la distancia euclidiana, en éste r era nula sólo en el origen; acá s es nula en todos los puntos de la hipersuperficie de ecuación $t^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2 = 0$ que se denomina el cono de ondas. Por lo tanto cuando m es negativo s^m es infinita en todos los puntos de ese cono.

Sea D un conjunto acotado en el espacio total; tomemos coordenadas esféricas en el espacio de las variables temporales. Se tiene:

$$\int_D s^m dx dt = S_{n-1} \int_{\Delta} (t-P)^{\frac{m}{2}} (t+P)^{\frac{m}{2}} P^{n-2} dP dt$$

en donde la integral del primer miembro es enuple, la del segundo doble y S_{n-1} es el área de la esfera unitaria en el espacio de $n-1$ dimensiones. La integral doble converge para $R(m/2) > -1$ y diverge para $R(m/2) \leq -1$, luego la primera integral converge para $R(m) > -2$ y diverge para $R(m) \leq -2$, independientemente de la dimensión del espacio.

Para definir la pseudofunción $\langle p.f. s^m, \varphi \rangle$ tomaremos como dominio de integración el interior del cono de ondas, es decir los puntos que satisfacen a $t^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2 \geq 0$. En muchos casos se toma como dominio el cono del futuro, obtenido añadiendo a la ecuación anterior la $t \geq 0$. o el cono del pasado, con $t \leq 0$.

La pseudofunción queda definida por la integral convergente de $s^m \cdot \varphi$ para $R(m) > -2$. Para los otros valores puede definirse por métodos análogos a los de la distancia euclidiana, poniendo

$$(46) \langle \text{p.f. } s^m, \varphi(x) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{V(\varepsilon)} s^m \varphi(x, t) \, dx \, dt + I(\varepsilon) \right]$$

en donde V_ε es un volumen próximo al cono de ondas, por ejemplo el hiperboloide de ecuación $t^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2 \geq \varepsilon^2$ o el cono de ecuaciones $(1 - \varepsilon^2) t^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2 \geq 0$; $I(\varepsilon)$ tiene que cumplir, entre otras, la propiedad:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } R(m) > -2 \\ \infty & \text{si } R(m) \leq -2 \end{cases}$$

No daremos la forma de $I(\varepsilon)$ que es bastante complicada.

Podemos también usar el método de la prolongación analítica, fijando una función de prueba φ y considerando la función $\Phi(m)$ de la variable compleja m , definida para $R(m) \geq -2$ por la integral

$$\Phi(m) = \int_C s^m \varphi(x, t) \, dx \, dt$$

Se puede probar, no daremos la demostración, que la prolongación analítica de $\Phi(m)$ es una función meromorfa que tiene polos en los siguientes puntos:

a): $-2, -4, -6, \dots$

b): $-n, -n-2, -n-4, \dots$

Si n es impar los puntos singulares son todos polos simples; si n es par hay valores comunes a las dos series que son polos dobles. Al igual que en el caso de una variable dividiremos p.f. s^m por una función, de forma que desaparezcan los polos y quede una función entera. Se tiene así las nuevas distribuciones análogas a las Y_m , que denominaremos z_m^n (esta distribución depende del número de dimensiones del espacio) y que

están definidas en la forma siguiente; para los valores no singulares de m ,

$$(47) \quad Z_m^n = \frac{\text{p.f. } s^{m-n}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+2-n}{2}\right)};$$

En los puntos $0, -2, -4, \dots$, Z_m^n es una distribución de soporte el origen y se tiene para k entero y ≥ 0 ,

$$(48) \quad Z_{-2k}^n = \square^k \delta \quad \text{en particular} \quad Z_0^n = \delta$$

en donde \square^k representa la potencia de orden k (es decir la aplicación reiterada k veces) del operador lorentziano

$$\square u = \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} - \frac{\delta^2 u}{\delta x_1^2} - \dots - \frac{\delta^2 u}{\delta x_{n-1}^2}$$

Para los puntos singulares de la serie a) que no están al mismo tiempo en la serie b) es decir los puntos $n-2, n-4, \dots$

que no sean enteros pares ≤ 0 , Z_m^n es una distribución que tiene como soporte la superficie del cono.

Definida así la distribución Z_m^n para todos los valores de m , fijamos una función φ de prueba, $\langle Z_m^n, \varphi \rangle$ es una función entera de la variable compleja m .

Vamos a obtener fórmulas de derivación de las distribuciones Z . Si se toma $R(p)$ suficientemente grande se puede probar fácilmente que $\square s^p = p(p+n-2) s^{p-2}$ y por lo tanto para $R(m)$ suficientemente grande

$$\begin{aligned} \square Z_m^n &= \frac{(m-n)(m-2) s^{m-n+2}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+2-n}{2}\right)} = \\ &= \frac{(m-n)(m-2) s^{m-n+2}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{m-1} \frac{m-2}{2} \Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right) \frac{m-n}{2} \Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)} = Z_{m-2}^n \end{aligned}$$

y por prolongación analítica se deduce que es válida para todo m . Se tiene así la fórmula fundamental de derivación

$$(49) \quad \square Z_m^n = Z_{m-2}^n$$

y en particular de (48) y (49) se deduce

$$(50) \quad \square z_2^n = \delta$$

es decir que la distribución z_2^n es una solución elemental de la ecuación de las ondas $\square u = 0$.

En física interesa principalmente el caso de tres variables espaciales. Vamos a obtener en este caso la forma de la distribución solución elemental de la ecuación de las ondas. Tomemos una función fija de soporte contenido en el cono del futuro. Se tiene para $\alpha > 0$,

$$\langle z_{2+\alpha}^4, \varphi \rangle = \int_{t \geq 0} \frac{(t^2 - x^2 - y^2 - z^2)^{\frac{\alpha}{2} - 1} \varphi(x, y, z, t)}{\pi 2^{1+\alpha} \Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{\alpha+2}{2})} dx dy dz dt$$

En esta integral cuádruple convergente hagamos el siguiente cambio de variable: $x = x$; $y = y$; $z = z$; $t = (u + x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, y se tiene:

$$\langle z_{2+\alpha}^4, \varphi \rangle = \int_D \frac{u^{\frac{\alpha}{2} - 1} \varphi(x, y, z, \sqrt{u + r^2})}{\pi 2^{2+\alpha} \Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{\alpha+2}{2}) \sqrt{u + r^2}} dx dy dz du$$

en donde D es el dominio $u + x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$; se tiene entonces,

$$\langle z_{2+\alpha}^4, \varphi \rangle = \int_0^\infty \frac{u^{\frac{\alpha}{2} - 1}}{\pi 2^{\alpha+2} \Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{\alpha+2}{2})} \left[\int_{R^3} \frac{\varphi(x, y, z, \sqrt{u + r^2})}{\sqrt{u + r^2}} dx dy dz \right] du$$

y teniendo en cuenta la definición de las distribuciones

Y_m (def. 6)

$$\langle z_{2+\alpha}^4, \varphi \rangle = \frac{1}{\pi 2^{\alpha+2} \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \langle Y_{\alpha/2}, \int_{R^3} \frac{\varphi(x, y, z, \sqrt{u + r^2})}{\sqrt{u + r^2}} dx dy dz \rangle$$

Fijada la función de prueba, Z_m^4 e Y_m son funciones enteras de m ; para $\alpha \rightarrow 0$, tienden respectivamente hacia Z_2^4 e $Y_0 = \delta$. Por lo tanto tomando límites en la igualdad anterior y llamando D_r a la distribución Z_2^4 , con soporte en el cono del futuro, se tiene:

$$(51) \quad \langle D_r, \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{\varphi(x, y, z, r)}{r} dx dy dz$$

Si en lugar del cono del futuro hubiéramos tomado el cono del pasado hubiéramos obtenido esta otra distribución

$$(52) \quad \langle D_a, \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{\varphi(x, y, z, -r)}{r} dx dy dz$$

D_r y D_a son las denominadas deltas cónicas retardada y avanzada, su suma $D = D_r + D_a$ es la delta cónica, solución elemental de la ecuación de las ondas y la diferencia $D_i = D_a - D_r$ es la delta invariante de Pauli-Jordan, solución de la ecuación homogénea de las ondas.

Observación: El estudio que hemos hecho de las pseudofunciones en el caso de varias variables es bastante somero; daremos indicaciones bibliográficas para un posible completamiento.

El estudio sobre la base de la prolongación analítica fué hecho por Marcel Riesz en [1]. La obtención en forma directa puede verse en O'Keefe [1] y en Methée [1]. La primera definición de las partes finitas fué hecha por Hadamard y puede verse en Hadamard [1]. Una generalización muy interesante de esta teoría a las distribuciones llamadas homogéneas ha sido hecha por Gelfand y Sapiro [1].

20.- Primitivas de una distribución.-

Solo trataremos el caso de las funciones de una variable. (9)

El problema es el siguiente: Dada una distribución S encontrar todas las distribuciones T que tienen S como derivada. Supongamos que exista una de estas distribuciones T . Desde luego que entonces existen infinitas pues basta sumar a T una función constante. Conocemos por otra parte el valor $\langle T, \phi \rangle$ para todas funciones ϕ cuya primitiva ψ pertenezca al espacio D , puesto que $\langle T, \phi \rangle = \langle T, \psi' \rangle = -\langle S, \psi \rangle$

Las funciones ϕ son una clase bastante particular de las funciones del espacio D , toda función de D tiene una infinidad de primitivas que difieren en una constante; entre ella solo una, si existe, puede ser de soporte acotado. Para que exista una primitiva ψ de ϕ que pertenezca a D es necesario que

$$(53) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 0$$

puesto que esta integral vale $\psi(+\infty) - \psi(-\infty)$. Si esta condición se cumple entonces

$$(54) \quad \psi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt$$

es una primitiva de ϕ que pertenece a D . Es evidente que es primitiva e indefinidamente derivable. Sea (a, b) un intervalo que contenga el soporte de ϕ . Cuando $x_1 < a$, $\phi(t)$ es nulo en el intervalo $(-\infty, x_1)$ y por lo tanto $\psi(x_1) = 0$. Si es $x_2 > b$, se tiene

$$\psi(x_2) = \int_{-\infty}^b \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt - \int_b^{\infty} \phi(t) dt$$

puesto que la primera integral es nula por hipótesis y $\phi(t)$ es nula en (b, ∞) .

Conocemos ahora los valores del producto $\langle T, \phi \rangle$ para todas las ϕ que satisfagan la relación (53) Como T si está

(9) El estudio del caso de varias variables puede verse en Schwartz [1] vol. I páginas 59 y siguientes.

determinado, lo está salvo una constante aditiva podemos fijar arbitrariamente el valor $k = \langle T, \varphi_0 \rangle$ para una función fija φ_0 de D y siempre multiplicando φ_0 por una constante podemos suponer que φ_0 cumple con la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = 1$$

Cualquier φ de D puede descomponerse en la forma

$$(55) \quad \varphi = c \varphi_0 + \Phi \quad \text{siendo } c = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$$

$$\text{y como } \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx - c \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = c - c = 0$$

existe una ψ de D tal que $\psi' = \Phi$. Por lo tanto:

$$(56) \quad \langle T, \varphi \rangle = c \cdot k + \langle T, \Phi \rangle = c \cdot k - \langle S, \psi \rangle$$

Toda primitiva T de S se expresa por lo tanto en la forma anterior; consideremos otra primitiva T_1 de S , será

$$\langle T_1, \varphi \rangle = c \cdot k_1 + \langle T_1, \Phi \rangle = c \cdot k_1 - \langle S, \psi \rangle$$

$$\langle T - T_1, \varphi \rangle = c(k - k_1) = \int_{-\infty}^{\infty} (k - k_1) \varphi(x) dx = \langle k - k_1, \varphi \rangle$$

es decir tenemos el inverso del resultado enunciado al principio. Dos primitivas distintas de una misma distribución difieren en una función constante. Nos falta ahora probar la existencia de la primitiva. La relación (55) en donde k es una constante arbitraria define una funcional en D que se ve inmediatamente que es lineal y se puede probar sin gran dificultad que es continua; T es por consiguiente una distribución; por lo tanto se tiene: $\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$ pero φ' es una de las funciones Φ luego para φ' la descomposición (54) da $c = 0$ y por lo tanto $\langle T', \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle$ lo que prueba que $S = T'$.

Tenemos entonces el teorema siguiente:

Teorema 4.- Toda distribución de una variable admite una infinidad de primitivas y dos cualesquiera de ellas difieren en una función constante. Una distribución cuya derivada es nula es una función constante. Una primitiva queda determinada cuando se fija su valor $\langle T, \varphi_0 \rangle$ para una función fija arbitraria de D .

La demostración del teorema nos da un método para determinar la primitiva. Como EJERCICIO puede partirse de una distribución conocida (funciones localmente sumables, deltas de Dirac, ...) y calcular su primitiva por el método que acabamos de indicar.

C A P I T U L O I V

CONVERGENCIA DE DISTRIBUCIONES. DISTRIBUCIONES DE SOPORTE COMPACTO.

21.- Estructura del espacio de distribuciones.

Hemos definido las distribuciones como los elementos del espacio D' dual del espacio D , es decir como las funciones lineales y continuas sobre D , pero hasta ahora solo hemos considerado en D' las operaciones de producto por un escalar y de suma de distribuciones, en otras palabras hemos considerado unicamente la estructura de D' como espacio vectorial. Tenemos ahora que definir en este espacio una estructura de tipo topológico y para ello, de acuerdo con lo dicho en el nº 7, tenemos que definir las sucesiones convergentes de distribuciones.

La teoría de la convergencia es probablemente la que necesita un mayor conocimiento para su estudio completo de la teoría de los espacios vectoriales topológicos; como nosotros no presuponemos el conocimiento de esta teoría no podemos hacer en forma completa dicho estudio; sin embargo los conceptos y propiedades que vamos a dar se pueden comprender sin ningún conocimiento de la teoría de espacios vectoriales topológicos que solo interviene en las demostraciones de algunos teoremas (2).

Sin entrar en la definición general de la estructura de un espacio dual, nos limitaremos a dar la definición de sucesiones convergentes de distribuciones.

Definición 1.- Una sucesión T_n de distribuciones se dice que converge hacia la distribución T , si cualquiera que sea la función de prueba φ la sucesión numérica $\langle T_n, \varphi \rangle$ tiene por límite $\langle T, \varphi \rangle$.

Definida la convergencia para una sucesión numerable T_n queda definida la convergencia para las sucesiones T_y que dependen de un parámetro, que es un punto del espacio enedimensional; diremos entonces que T_y converge hacia T , para y ten-

(2) Para un estudio completo de la teoría de convergencia ver Schwartz [1] vol I, cap. III.

diendo a y_0 si cualquiera que sea la sucesión y_n que converja hacia y_0 la sucesión de distribuciones T_{y_n} converge hacia T ; se tiene

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \langle T_y, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

Definido el concepto de límite de una sucesión de distribuciones queda automáticamente definida la suma de una serie de distribuciones.

Hemos visto que la convergencia de distribuciones queda definida como convergencia simple o puntual de funcionales. En muchos casos puede asegurarse la convergencia de la sucesión numérica $\langle T_n, \varphi \rangle$ para toda función φ de prueba; en ese caso ese límite define una funcional T que se ve enseñada que es lineal; para que fuese una distribución tendría además que ser continua; admitiremos sin demostración esta continuidad de T y podemos así enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1.- Si cualquiera que sea la función de prueba φ , la sucesión numérica $\langle T_n, \varphi \rangle$ tiene un límite $T(\varphi)$, la funcional así definida es una distribución T y se tiene $\lim T_n = T$.

En lo que respecta a las relaciones entre convergencia de funciones en tanto que tales y la convergencia en tanto que distribuciones se tiene los siguientes teoremas:

Teorema 2.- Si las funciones f_n convergen p.p. con convergencia puntual hacia una función f y si las f_n están acotadas en módulo por una función localmente sumable g , se tiene: $\lim f_n = f$ en el sentido de las distribuciones.

Teorema 3.- Si las funciones f_n son tales que se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K |f_n - f| dx = 0$$

para todo conjunto acotado K , se tiene $\lim f_n = f$, en el sentido de las distribuciones.

El primer teorema resulta inmediatamente si se aplica a la sucesión f_n, φ el teorema 16 del capítulo I. El segundo se deduce también en forma casi inmediata del teorema 8 del Capítulo I. En ambos casos hay que tener en cuenta que la integral sólo se extiende al soporte de la función de prueba.

Observemos que las hipótesis de los teoremas anteriores se cumplen si las funciones f_n convergen uniformemente hacia f sobre todo conjunto acotado.

22.- Continuidad de la derivación.

Teorema 4.- Si las distribuciones T_n convergen hacia una distribución T , las distribuciones derivadas de T_n convergen hacia la distribución derivada de T . En efecto

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta T}{\delta x_i}, \varphi \right\rangle &= \left\langle T, \frac{\delta \varphi}{\delta x_i} \right\rangle = - \lim \left\langle T_n, \frac{\delta \varphi}{\delta x_i} \right\rangle \\ &= \lim \left\langle \frac{\delta T_n}{\delta x_i}, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

Este teorema es uno de los resultados más importantes de la teoría de distribuciones, pues, en contraste con las dificultades que se presentan en el análisis clásico para la derivación término a término de las series (para cuya legitimidad, ni siquiera es suficiente la convergencia uniforme) en la teoría de distribuciones es siempre legítimo derivar término a término una serie, o lo que es lo mismo, el límite de la derivada es siempre la derivada del límite.

Cuando se tengan las condiciones de los teoremas 2 y 3 a la sucesión f_n se la puede derivar cuantas veces sea necesario y la sucesión así obtenida tiene como límite el resultado de la misma operación de derivación hecho con la función f . Esto permite definir como distribución la suma de una serie divergente en el sentido ordinario. Veamos dos casos simples aplicados a las series trigonométricas de funciones de una variable.

Teorema 5.- Toda serie trigonométrica

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}$$

tal que sus coeficientes a_n cumplan la condición $|a_n| \leq A |n|^k$ siendo k un entero positivo es convergente en el sentido de las distribuciones. En

efecto: saquemos el término a_0 y consideremos la serie

$$(n \neq 0) \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{(2\pi i n)^{k+2}} e^{2\pi i n x}$$

cuyos coeficientes están mayorados por

$$\frac{A}{4\pi n^2}$$

por lo tanto la serie converge uniformemente hacia una función f luego esta convergencia es también cierta en el sentido de las distribuciones. Basta ahora derivar $k+2$ veces en el sentido de las distribuciones y se tiene:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x} = a_0 + f^{(k+2)}(x)$$

Consideremos ahora la función $f(x)$ de periodo 1 e igual a x en $(0,1)$. La teoría de la serie de Fourier nos dice que en todos los puntos de coordenadas no enteras se tiene

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\text{sen } 2n\pi x}{n}$$

Aplicando el teorema 2 y derivando término a término, se tiene:

$$1 - \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(n) = - \sum_1^{\infty} 2 \cos 2n\pi x = - \sum_1^{\infty} (e^{2n\pi i x} + e^{-2n\pi i x})$$

es decir

$$(1) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2n\pi i x}$$

y derivando de nuevo se tiene la fórmula:

$$(2) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k)}(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} (2n\pi i)^k e^{2n\pi i x}$$

23.- Aproximación por funciones del espacio D.

Para el estudio de las distribuciones de soporte compacto tenemos que introducir previamente algunas propiedades de las funciones de prueba y para ello recordaremos algunas nociones sobre los espacios cartesianos \mathbb{R}^n que son también válidas para un espacio métrico cualquiera.

La distancia de un punto x a un conjunto A , $d(x,A)$ es el extremo inferior de las distancias $d(x,y)$ del punto x a un punto variable cualquiera de A . Si x es variable y A fijo la función de x , $d(x,A)$ es continua en todo el espacio.

Definición 2.- Una esfera abierta (o entorno abierto), de radio r y centro A , es el conjunto $E(A,r)$ de los puntos del espacio cuya distancia al conjunto A es menor que r . Si ponemos menor o igual tenemos la esfera cerrada $\bar{E}(A,r)$.

Es fácil ver que $E(A,r)$ es un conjunto abierto y $\bar{E}(A,r)$ es un conjunto cerrado. Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 6.- Dada una función del espacio D^0 $f(x)$ de soporte A y dados dos números r y ε positivos cualesquiera, existe una función $\varphi(x)$ que tiene las siguientes propiedades:

- a) $\varphi(x)$ pertenece a D y su soporte está contenido en $E(A,r)$.
- b) $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ para todo x de \mathbb{R}^n .

Para probar el teorema observémos que $f(x)$ siendo continua y de soporte acotado es uniformemente continua en \mathbb{R}^n , luego dado ε existe η tal que para todo x $|t| \leq \eta$ implica $|f(x) - f(x-t)| < \varepsilon$. Sea a un número real positivo menor o igual que r y que ε .

Tomemos una función ψ_1 del espacio D cuyo soporte esté contenido en $|x| \leq 1$ (por ejemplo la función del número 8) y consideremos la función $\varphi(x) = k \psi_1(x/a)$ en donde k

es una constante tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \, dx = 1$$

El soporte de ψ está contenido en $|x| \leq a$. Consideremos ahora la convolución (más adelante veremos este concepto) de f y ψ , es decir la función

$$(3) \quad \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\psi(t) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\psi(x-t) \, dt$$

La segunda integral se extiende sobre la intersección de los soportes A y $|x-t| \leq a$, si x no pertenece a $\bar{E}(A, a)$, entonces para todo t de A , $|x-t| = d(x, t) > d(x, A) > a$ y por lo tanto $\varphi(x) = 0$; el soporte de φ está contenido en $E(A, a)$ y por lo tanto en $E(A, r)$.

Como cualquiera que sea x el soporte del integrando de la segunda integral es acotado, se puede derivar respecto a x bajo el signo integral luego φ es indefinidamente derivable. Queda así probado a).

Problema b). Se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) \, dt &= 1; \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi(t) \, dt = f(x) \\ |f(x) - \varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-t)|\psi(t) \, dt = \\ &= \int_{|t| \leq a} |f(x) - f(x-t)|\psi(t) \, dt \leq \epsilon \int_{|t| \leq a} \psi(t) \, dt = \epsilon \end{aligned}$$

Las funciones de D perteneces a D^0 ; dada f de D^0 , por el teorema anterior podemos definir φ_n de D tales que

$$|f - \varphi_n| < \frac{1}{n}.$$

Entonces tomando límites en el sentido de D^0 , $\lim \varphi_n = f$. Cada punto de D^0 es límite de una sucesión de puntos de D , lo que se expresa diciendo que D es denso en D^0 . Puede también probarse que D es denso en D^m .

Teorema 7.- Sea A un conjunto acotado de \mathbb{R}^n y r un número real > 0 . Se puede siempre definir una función φ de D de soporte contenido en $E(A, r)$ e igual a uno en los puntos de A.

Dados dos conjuntos M y N de \mathbb{R}^n , cerrados y sin puntos comunes, la función

$$\beta(x) = \frac{d(x, N)}{d(x, N) + d(x, M)}$$

es, como se ve fácilmente, una función continua definida en todo el espacio, nula en M, igual a la unidad en N, y $0 < \beta < 1$ en el resto de \mathbb{R}^n .

Tomemos dos números r_1 y r_2 tales que $0 < r_1 < r_2 < r$ y hagamos M igual al complementario de $E(A, r_2)$ y N igual a $E(A, r_1)$ y apliquemos a la función β el teorema anterior y obtenemos una función φ de D cuyo soporte está contenido en $E(A, r)$ y que se expresa por la fórmula

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \beta(x-t) \psi(t) dt$$

Podemos además suponer el soporte de ψ contenido en $|t| < r_1$. Sea x cualquiera de A. Para todo punto t del soporte K de ψ , como $|t| < r_1$, $x - t$ pertenece a $\bar{E}(A, r_1)$, luego $\beta(x - t) = 1$ y por lo tanto

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \beta(x-t) \psi(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) dt = 1$$

para todo punto x de A lo que prueba el teorema.

24.- Distribuciones de soporte compacto. Espacio E.

En todo lo desarrollado hasta ahora hemos visto el papel importante que jugaba el hecho de que las funciones de prueba tenían el soporte acotado. Siendo además cerrado era un conjunto compacto de \mathbb{R}^n , puesto que las dos propiedades de conjunto cerrado y acotado caracterizan en este espacio a los conjuntos compactos.

Es una regla casi general que una restricción impuesta a las funciones de prueba puede ser reemplazada por una restricción de la misma índole aplicada a las distribuciones. Por ejemplo al espacio D^m más amplio que el espacio D , le corresponde las distribuciones de orden m que son un caso particular de las distribuciones.

Vamos a ver ahora que si nos limitamos a las distribuciones de soporte compacto podemos suprimir la condición de acotación del soporte de las funciones de prueba. Para ello daremos las siguientes definiciones:

Definición 3.- Se denomina espacio E al espacio vectorial de las funciones indefinidamente derivables. Una sucesión φ_n de funciones de E tiene como límite en dicho espacio una función φ si las φ_n y todas sus derivadas convergen uniformemente en todo conjunto compacto hacia la φ y las correspondientes derivadas de φ .

El espacio de distribuciones E' es el espacio dual de E , es decir el espacio de las funciones lineales y continuas definidas en E .

Es claro que la continuidad de T se define por la condición de que, si en E , $\lim \varphi_n = \varphi$, entonces,

$$\lim \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Se ve que E es más amplio que D : toda función del espacio D pertenece a E ; además si una sucesión φ_n converge hacia φ en D , también converge hacia φ en E , por lo tanto toda distribución de E' es una distribución de D' .

Puede también verse que D es denso en E . En efecto: sea φ una función de E y α_n una función de D que es igual a 1 en la esfera $|x| \leq n$ (Teorema 7); las funciones $\varphi_n = \alpha_n \varphi$ pertenecen a D . Dado un compacto K siempre existe un m tal que K está comprendido en toda esfera de radio mayor o

igual que m , luego en K , para $n > m$, se tiene $\varphi_n = \varphi$, luego las funciones φ_n de D convergen en E hacia φ .

Consideremos ahora una distribución T de soporte no compacto.

T es nula en el exterior de la esfera $|x| \leq 1$, luego existe una función φ_1 de soporte contenido en $|x| > 1$ y tal que $\langle T, \varphi_1 \rangle \neq 0$, multiplicándola por una constante puede conseguirse que sea $\langle T, \varphi_1 \rangle = 1$.

Así sucesivamente puedo definir una sucesión de funciones φ_n de D tales que el soporte de φ_n está contenido en $|x| > n$, siendo $\langle T, \varphi_n \rangle = 1$.

En cada compacto de \mathbb{R}^n la sucesión es nula a partir de un cierto índice, luego los φ_n tienden hacia la función idénticamente nula en E mientras que se tiene $\langle T, \varphi_n \rangle = 1$, lo que prueba que T no es continua en E . Es decir tenemos así probado que una distribución de soporte no compacto no pertenece a E' .

Sea ahora T una distribución de soporte acotado K y sea φ una función de E ; tomemos una función α de D que sea igual a 1 en un entorno cerrado de K y definamos la funcional $T_\alpha^*(\varphi) = \langle T, \alpha \varphi \rangle$. El segundo miembro tiene sentido puesto que $\alpha \varphi$ pertenece a D . Esta funcional es independiente de la elección de α pues si β es otra función que cumple las mismas condiciones que α , $\alpha - \beta$ es nula en un conjunto abierto que contiene K , luego su soporte está contenido en el complementario de K , en el cual es nula T , luego

$$T_\alpha^*(\varphi) - T_\beta^*(\varphi) = \langle T, (\alpha - \beta) \varphi \rangle = 0.$$

Podemos suprimir el índice y hablar de la funcional $T^*(\varphi)$.

La funcional así definida sobre E es evidentemente lineal y es también continua pues si $\lim \varphi_n = \varphi$ en E , las $\alpha \varphi_n$ que tienen su soporte contenido en el entorno cerrado

de K , que es compacto, convergen hacia $\alpha \varphi$ en D y se tiene

$$T^*(\varphi) = \langle T, \alpha \varphi \rangle = \lim \langle T, \alpha \varphi_n \rangle = \lim T^*(\varphi_n)$$

T^* es por lo tanto una distribución del espacio E' y podemos poner $T^*(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$.

Si la función φ de E perteneciese además al espacio D se tiene que $(\alpha - 1)\varphi \in D$ y esta función es nula en un entorno de K , luego

$$\langle T^*, \varphi \rangle - \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi - \varphi \rangle = \langle T, (\alpha - 1)\varphi \rangle = 0,$$

es decir que la distribución T^* es una prolongación de la distribución T , la primera está definida para funciones de prueba de un espacio más amplio, el E' , y coincide con T para las funciones de prueba del espacio D . Podemos suprimir el asterisco y llamar T a la distribución así definida para las funciones de E' . Queda así prolongada para las funciones de E' cualquier distribución de soporte compacto.

En lo que respecta a la derivación tampoco influye para nada la introducción de la función α pues se tiene

$$\langle T'; \varphi \rangle = \langle T'; \alpha \varphi \rangle = -\langle T, \alpha' \varphi \rangle - \langle T, \alpha \varphi' \rangle = -\langle T'; \varphi \rangle$$

puesto que $\alpha' \varphi$ es nula en K .

Estos resultados pueden resumirse en el siguiente teorema:

Teorema 8.- Hay identidad entre las distribuciones del espacio E' y las distribuciones de soporte acotado.

Observación: El método que hemos utilizado puede utilizarse para prolongar una distribución T cuando cualquiera que sea la función indefinidamente derivable φ , los soportes de T y φ tengan como intersección un conjunto compacto K .

Bastará para ellos repetir el método anterior tomando una función α igual a 1 en un entorno cerrado K y definir

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle$$

Terminaremos dando sin demostración los siguientes teoremas: (2)

Teorema 9.- Toda distribución de soporte compacto K es de orden finito y puede ser obtenida de una infinidad de maneras como suma de un número finito de derivadas de funciones continuas cuyos soportes están contenidos en un entorno arbitrario del soporte.

Teorema 10.- Toda distribución cuyo soporte es el origen se expresa como una combinación lineal en número finito de la delta de Dirac y de sus derivadas y esta descomposición es única.

25.- Funciones que aproximan la delta de Dirac.

El estudio de la delta de Dirac se ha hecho en muchas ocasiones considerándola como límite, definido en general en forma imprecisa de funciones. Tiene bastante interés el dar en forma correcta condiciones que nos permitan obtener sucesiones de funciones, cuyo límite en el sentido de las distribuciones sea la delta de Dirac.

Las funciones $K_n(x)$ que aproximan la δ son las que cumplen la condición

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle K_n, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

para todas las funciones del espacio D^0 . Si las $K_n(x)$ fueren de soporte acotado entonces esa igualdad vale para todas las φ continuas de soporte cualquiera.

La relación (5) se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I \quad \text{siendo} \quad I_n = \int_{\mathbb{R}^n} K_n(x) \varphi(x) \, dx$$

Las integrales I_n son las integrales singulares y las funciones K_n son los núcleos singulares, algoritmo matemático.

(2) Ver Schwartz (1), vol I, cap 3.

tico de mucho interés.

De acuerdo con lo indicado en el número 21 se pueden considerar en vez de las sucesiones $K_n(x)$ las funciones $K_\alpha(x)$ en donde α es un parámetro continuo y tomar el límite para $\alpha \rightarrow \alpha_0$.

Nos limitaremos a probar un teorema que da condiciones suficientes para que un núcleo sea singular y que sirven para casi todos los casos importantes que se presentan en la teoría de integrales singulares.

Teorema 11.- Sea $K_n(x)$ una sucesión de funciones localmente sumables que cumple las siguientes condiciones:

1) Existen dos números reales > 0 r y M tales que

$$\int_{|x| \leq r} |K_n(x)| dx \leq M$$

Esta condición puede reemplazarse por la:

1') Existe un número r tal que $K_n(x) \geq 0$ para $|x| \leq r$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > a} |K_n(x)| dx = 0$ para todo valor de $a > 0$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq a} K_n(x) dx = 1$ para todo valor de $a > 0$

Para probar el teorema basta probar que

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} K_n(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

para toda función φ continua y de soporte acotado. Haremos la demostración suponiendo únicamente que φ es continua en el origen, acotada, es decir $|\varphi(x)| \leq L$ para todo x y que $K_n(x) \varphi(x)$ es sumable, condiciones que evidentemente se cumplen si φ es continua y de soporte acotado.

Cualquiera que sea a se tiene:

$$(6) \quad \langle K_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} K_n(x) \varphi(x) dx = \int_{|x| \leq a} K_n(x) \varphi(0) dx + \int_{|x| > a} K_n(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \int_{|x| > a} K_n(x) \varphi(x) dx.$$

Llamemos I_1 , I_2 e I_3 las tres integrales del último miembro de la igualdad (6). En virtud de la condición 3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = \varphi(0),$$

luego, para n suficientemente grande y un a fijo arbitrario I_1 difiere de $\varphi(0)$ en menos de ε .

Si se cumple la condición 1) se tiene, para cualquier n , tomando a suficientemente pequeño para que $|x| \leq a$, implique

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ y además } a \leq r,$$

$$|I_2| \leq \int_{|x| \leq a} |K_n(x)| |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \leq \frac{\varepsilon}{M} \int_{|x| \leq a} |K_n(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{M} \int_{|x| \leq r} |K_n(x)| dx \leq \varepsilon$$

Si se cumple la condición 1') tomando a suficientemente pequeño para $|x| \leq a$ implique $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y además $a \leq r$

$$|I_2| \leq \int_{|x| \leq a} K_n(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{|x| \leq a} K_n(x) dx$$

y para n suficientemente grande, por 3)

$$\int_{|x| \leq a} K_n(x) dx \leq 2 \quad ; \quad |I_2| \leq \varepsilon$$

Por lo tanto se cumpla la condición 1) a la 1') para un valor fijo de a y para n suficientemente grande, I_2 es en módulo menor que ε .

Por cumplirse la condición 2) se tiene

$$|I_3| \leq \int_{|x| \geq a} |K_n(x)| |\varphi(x)| dx \leq L \int_{|x| \geq a} |K_n(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

luego para n suficientemente grande y cualquiera que sea a I_3 es en módulo menor que ε . Queda así probado el teorema.

26.- Ejemplos de núcleos singulares que aproximan la delta de Dirac.-

El teorema anterior nos va a servir para determinar núcleos singulares que aproximen la delta de Dirac; tomaremos tanto núcleos K_n , con valores discretos del parámetro, como núcleos K_α , con valores continuos del parámetro, puesto que la extensión del teorema 11 a este caso es automática.

Consideraremos primero el núcleo del espacio de m dimensiones

$$(7) \quad K_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } |x| > \alpha \\ \frac{m}{\alpha^m S_m} & \text{para } |x| \leq \alpha \end{cases}$$

siendo S_m el área de la esfera de radio 1 del espacio y vamos a probar que

$$(8) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +0} K_\alpha(x) = \delta$$

En efecto se tiene $K_\alpha(x) \geq 0$ en todo el espacio; se cumple 1').

Se cumple 3) puesto que, para $\alpha \leq a$

$$\int_{|x| \leq a} K_\alpha(x) dx = \int_{|x| \leq \alpha} K_\alpha(x) dx = \frac{m}{\alpha^m S_m} V_m(\alpha) = 1$$

en donde $V_m(\alpha)$ es el volumen de la esfera de radio α del espacio que vale $\frac{\alpha^m S_m}{m}$.

También se cumple 2) puesto que para $\alpha \leq a$ es $K_\alpha(x) = 0$, en $|x| > a$.

Se tiene también en el mismo espacio

$$(9) \quad \delta = \lim_{\beta \rightarrow +0} \frac{1}{\beta^m (2\pi)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2\beta^2}}$$

En efecto se cumple 1') por ser $K_\beta(x) \geq 0$ en todo el espacio.

Se cumple 3) puesto que

$$\int_{|x| \leq a} \frac{1}{\beta^m (2\pi)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2\beta^2}} dx = \int_{|x| \leq \frac{a}{\beta}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx$$

que para $\beta \rightarrow +\infty$ tiende a

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx = 1$$

También se cumple 2) puesto que para un cierto b

$$\int_{|x| > a} K_{\beta}(x) dx \leq \int_{a < |x| \leq b} K_{\beta}(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{\beta^m (\sqrt{2\pi})^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{a^2}{2\beta^2}}$$

$$V_m(b) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

para $\beta \leq$ un cierto n .

Nos preocuparemos ahora de la delta en el espacio de una dimensión. Si en (9) ponemos

$$\beta = \sqrt{\frac{k d}{2}}, \text{ se tiene cualquiera que sea}$$

$k > 0,$

$$(10) \quad \delta = \lim_{d \rightarrow +0} (\pi k d)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi^2}{k d}}$$

Poniendo en esta expresión $k d = n^{-2}$ la expresión de la δ como límite de núcleos de Weierstraas.

$$(11) \quad \delta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$$

Otra expresión es la siguiente:

$$(12) \quad \delta = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2}$$

que ya probamos al obtener la fórmula (11) del Capítulo III

y que nos da la δ como límite de un núcleo de Poisson.
 Puede deducirse del teorema 11 directamente como EJERCICIO.,
 o derivando la relación $\dots = \dots$

$$Y(x) = \lim_{y \rightarrow +0} \left(1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arc. tg.} \frac{x}{y} \right),$$

De (12) por derivación obtenemos

$$(13) \quad \delta' = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \frac{-2xy}{(y^2+x^2)^2}$$

Si observamos que

$$\int_0^{\infty} e^{-y t} \cos x t \, d t = \left| e^{-y t} \frac{x \operatorname{sen} x t - \cos x t}{y^2 + x^2} \right|_0^{\infty} = \frac{y}{y^2 + x^2}$$

tenemos

$$(14) \quad \lim_{y \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-y t} \cos x t \, d t = \delta$$

EJERCICIO: Probar que la δ es límite de los siguientes núcleos:

$$(15) \quad \frac{1}{2} n e^{-n|x|} \quad (\text{Núcleo de Picard})$$

$$(16) \quad \frac{1}{\pi} \frac{n}{e^{n x} + e^{-n x}} \quad (\text{Núcleo de Stieltjes})$$

$$(17) \quad \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos n x}{n x^2} \quad (\text{Núcleo de Fejer})$$

PRODUCTO TENSORIAL Y MULTIPLICATIVO

27.- Definición del producto tensorial.

Consideremos dos espacios euclidianos, el X de m dimensiones (los puntos x de X serán vectores de componentes x_1, \dots, x_m) y el Y de n dimensiones (los puntos y de Y serán vectores de componentes y_1, \dots, y_n). El espacio producto de X por Y es el espacio Z de $m+n$ dimensiones cuyos puntos z son los vectores de componentes $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$.

Dos funciones $f(x)$ y $g(y)$ definidas respectivamente en los espacios X e Y definen una función $h(x,y) = f(x).g(y)$ en el espacio Z que se denomina el producto tensorial $f \times g$ de las dos funciones f y g.

Llamemos $D_x, D_y, D_{x,y}$ a los espacios de las funciones de soporte acotado e indefinidamente derivables definidas respectivamente en los espacios X, Y, Z; $D'_x, D'_y, D'_{x,y}$ serán los respectivos espacios de distribuciones.

Si las funciones $f(x)$ y $g(y)$ son localmente sumables se deduce de los teoremas 12 y 13 del Capítulo I generalizados para n dimensiones que su producto tensorial es localmente sumable y se tiene, si $\varphi(x,y)$ pertenece a $D_{x,y}$,

$$(1) \langle f \times g, \varphi(x,y) \rangle = \int_Z f(x).g(y) \varphi(x,y) d z =$$

$$= \int_x f(x) \left[\int_y g(y) \varphi(x,y) d y \right] d x = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle$$

En particular si $\varphi(x,y)$ es de la forma $\alpha(x). \beta(y)$ se tiene

$$(2) \langle f \times g, \varphi(x,y) \rangle = \langle f(x), \alpha(x) \rangle \cdot \langle g(y), \beta(y) \rangle$$

Las relaciones (1) y (2) nos van a servir de base para definir el producto tensorial de dos distribuciones (También llamado producto directo)

Definición 1.- Dadas dos distribuciones T_x y S_y pertenecientes respectivamente a los espacios D'_x y D'_y se denomina producto tensorial. (o directo) $T_x \times S_y$ a la distribución W de $D'_{x,y}$ definida mediante la relación

$$(3) \quad \langle W, \varphi(x,y) \rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x,y) \rangle \rangle$$

La función $\varphi(x,y)$ es del espacio $D_{x,y}$; cuando se fija el valor de x es evidentemente una función del espacio D'_y , luego $\langle S_y, \varphi(x,y) \rangle$ tiene sentido y es una función de x . Admitiremos sin demostración que pertenece al espacio D_x ; el segundo miembro de (3) define entonces una funcional en el espacio $D'_{x,y}$ que es lineal (lo que es inmediato) y continua (lo que admitiremos sin demostración). Con estos resultados (3) define una distribución. (2)

Si $\varphi(x,y)$ es de la forma $\alpha(x)\beta(y)$, (3) toma entonces la forma:

$$(4) \quad \langle W, \alpha(x)\beta(y) \rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x,y) \rangle \rangle$$

Tomemos una función de prueba $\varphi(x,y)$; aplicando los teoremas de aproximación de funciones por polinomios se puede probar que existe una sucesión de polinomios $P_i(x,y)$ es decir de polinomios con $m+n$ variables $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ tales que sobre cualquier conjunto acotado y cerrado la sucesión P_i converge uniformemente hacia φ y cada derivada de P_i converge también uniformemente hacia la derivada correspondiente de φ .

Tomemos ahora dos funciones $\lambda(x)$ y $\mu(y)$ tales que la primera sea igual a la unidad en la proyección del soporte de φ sobre el espacio X y la segunda igual a la unidad en la proyección del soporte de φ sobre el espacio Y .

(2) Las demostraciones de la teoría del producto tensorial pueden verse en SCHWARTZ (1), vol I, cap. IV o en MARTINEAU y TREVES (1) cap. IV.

Como es inmediato que el producto de una función de D_x por una función de D_y es una función de $D_{x,y}$, la función

$$\Phi_i(x,y) = \alpha(x) \beta(y) P_i(x,y)$$

es una función de $D_{x,y}$ igual a $P_i(x,y)$ en el soporte de φ y es además una suma finita de funciones de la forma $\alpha(x)\beta(y)$. La sucesión de las Φ_i converge en D hacia φ , por lo tanto: cualquier función de $D_{x,y}$ es límite en este espacio de una sucesión de funciones tales que cada una de ellas es una suma finita de funciones de la forma $\alpha(x)\beta(y)$.

El conocimiento de los valores de una distribución de $D'_{x,y}$ para funciones de la forma $\alpha(x)\beta(y)$ nos permite conocer por linealidad los valores para funciones de la forma

$$\sum_1^p \alpha_i(x) \beta_i(y)$$

y por continuidad para todas las funciones del espacio.

En otros términos: una distribución de $D'_{x,y}$ queda definida cuando se conocen sus valores en los puntos $\varphi \in D_{x,y}$ de la forma $\alpha(x)\beta(y)$.

De acá se deduce que toda relación referente a productos tensoriales quedará probada si se prueba que es cierta cuando nos limitamos a considerar las funciones de la forma $\alpha(x)\beta(y)$. En particular tendremos el siguiente teorema:

Teorema 1.- Si V es una distribución de $D'_{x,y}$, tal que para toda función de prueba de la forma $\alpha(x)\beta(y)$ se cumpla:

$$(5) \quad \langle V, \alpha(x)\beta(y) \rangle = \langle T, \alpha(x) \rangle \cdot \langle S, \beta(y) \rangle$$

entonces V es el producto tensorial $T \times S$.

De acá se deduce que el producto tensorial es conmutativo y coincide con el producto tensorial de funciones cuando S y T son funciones localmente sumables.

28.- Propiedades del producto tensorial.

Se puede probar con cierta facilidad que: el soporte de $S \times T$ es el producto de los soportes de S y de T , es decir, el conjunto de los puntos (x,y) en donde x pertenece al soporte de S e y pertenece al soporte de T . Si S y T son de soporte acotado también lo es $S \times T$.

Si se tiene $\lim S_m = S$ y $\lim T_n = T$, se tiene

$$\lim S_n \times T_n = S \times T.$$

En efecto, admitida la existencia del límite, se tiene para todo $\varphi(x,y)$ de la forma $\alpha(x) \beta(y)$

$$\begin{aligned} \lim \langle S_n \times T_n, \alpha(x) \cdot \beta(y) \rangle &= \lim \langle S_n, \alpha(x) \rangle \cdot \langle T_n, \beta(y) \rangle = \\ &= \langle S, \alpha \rangle \cdot \langle T, \beta \rangle \end{aligned}$$

y por lo tanto según el teorema 1

$$(6) \quad \lim S_n \times T_n = S \times T$$

Otra propiedad importante cuya demostración dejamos como EJERCICIO, es la siguiente:

Si D_x y D_y representan combinaciones lineales de derivaciones respecto de las variables x_1, \dots, x_m e y_1, \dots, y_m , respectivamente se tiene

$$(7) \quad D_x [D_y (S_x \times T_y)] = D_x S_x \times D_y S_y$$

Si se tiene ahora tres distribuciones R_x, S_y, T_z , pertenecientes respectivamente a los espacios D'_x, D'_y, D'_z , se podrá definir el producto tensorial $R \times S \times T$ que será una distribución de $D'_{x,y,z}$ definida por

$$(8) \quad R \times S \times T = R \times (S \times T)$$

es decir que se tendrá:

$$(9) \quad \langle R_x \times S_y \times T_z, \varphi \rangle = \langle R_x, \langle S_y, \langle T_z, \varphi(x,y,z) \rangle \rangle \rangle$$

La extensión a un número cualquiera de factores es inmediata y es también fácil de probar, hágase como EJERCICIO, la propiedad asociativa.

Pruébense como EJERCICIO las fórmulas

$$(10) \quad Y(x_1 \dots x_n) = Y(x_1) \times \dots \times Y(x_n); \quad \frac{\int Y(x_1 \dots x_n)}{\delta x_1 \dots \delta x_n} = \int$$

en donde $Y(x_1, \dots, x_n)$ es la función de Heaviside de n variables igual a 1 para $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ y a cero en los restantes puntos.

Podemos ahora definir una clase de distribuciones intermedias entre la función de Heaviside y la delta de Dirac, poniendo

$$(11) \quad Y_k = Y(x_1) \times \dots \times Y(x_k) \times \delta(x_{k+1}) \times \dots \times \delta(x_n)$$

y es fácil ver que se tiene:

$$(12) \quad \frac{\delta Y_k}{\delta x_k} = Y_{k-1}$$

29.- Definición del producto multiplicativo.

Vamos a ocuparnos ahora de la definición del producto multiplicativo de dos distribuciones pertenecientes al mismo espacio; esta definición es imposible cuando las dos distribuciones son arbitrarias; una de ellas debe ser sometida a bastantes restricciones para hacer posible la definición del producto.

Las dificultades se presentan ya en el caso, aparentemente simple, del producto de dos distribuciones que sean ambas localmente sumables, puesto que el producto de dos funciones localmente sumables puede no ser localmente sumable; tal es el caso de la función de una variable $1/\sqrt{|x|}$, que es localmente sumable, mientras su cuadrado $1/|x|$ no lo es.

La teoría se desarrolla fácilmente si nos limitamos a considerar productos en los que todos los factores, salvo uno, sean funciones derivables.

Definición 2.- El producto de dos distribuciones $d.T$, en donde d es una función es la distribución definida por la relación

$$(13) \quad \langle d.T, \varphi \rangle = \langle T, d\varphi \rangle$$

La definición tiene siempre sentido si α es una función indefinidamente derivable en el sentido de las funciones. (es decir si α pertenece al espacio E.)

Si α es indefinidamente derivable, $\alpha\varphi$ pertenece al espacio D, puesto que evidentemente es indefinidamente derivable y su soporte está contenido en el de φ ; (13) define una funcional lineal, puesto que,

$$\begin{aligned} \langle \alpha T, a\varphi_1 + b\varphi_2 \rangle &= \langle T, (a\varphi_1 + b\varphi_2)\alpha \rangle = a\langle T, \alpha\varphi_1 \rangle + \\ &+ b\langle T, \alpha\varphi_2 \rangle = a\langle \alpha T, \varphi_1 \rangle + b\langle \alpha T, \varphi_2 \rangle \end{aligned}$$

La funcional es también continua, en efecto: supongamos que $\varphi_i \rightarrow \varphi$ en D; el soporte de $\alpha\varphi_i$ está contenido en el conjunto fijo que contiene los soportes de las φ_i y las derivadas de $\alpha\varphi_i$ convergen uniformemente hacia las derivadas correspondientes de $\alpha\varphi$, como se ve aplicando la hipótesis de que $\lim \varphi_i = \varphi$ y la regla de derivación de Leibniz para los productos, luego se tiene $\lim \alpha\varphi_i = \alpha\varphi$ en D y por lo tanto

$$\lim \langle \alpha T, \varphi_i \rangle = \lim \langle T, \alpha\varphi_i \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle = \langle \alpha T, \varphi \rangle$$

La definición 2 se aplica al espacio D. En general, para las distribuciones definidas como los elementos del espacio dual de un espacio H de funciones es posible definir el producto por una función α que cumpla las siguientes condiciones:

- a) Si $\varphi \in H$, $\alpha\varphi \in H$;
- b) si las φ_n convergen hacia cero en H la sucesión $\alpha\varphi_n$ converge también hacia cero en H.

En particular si T es una distribución de orden k se puede multiplicar por cualquier función que tenga derivadas continuas hasta el orden k y si es de orden cero por cualquier función continua.

En el caso de que T sea una función $f(x)$ localmente sumable, $\alpha(x)$ debe ser continua en todo el espacio, por lo

tanto acotada en todo conjunto acotado y entonces $\alpha(x) \cdot f(x)$ es localmente sumable; la distribución producto de α por f coincide entonces con el producto ordinario $\alpha(x) f(x)$; basta ver que con ambas definiciones se llega al mismo resultado

$$\langle \alpha \cdot f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x) f(x) \varphi(x) dx$$

30.- Propiedades y ejemplos del producto multiplicativo.

Teorema 2. El soporte de $\alpha \cdot T$ está contenido en la intersección de los soportes de α y de T .

En efecto: sean A y A' los conjuntos abiertos complementarios de los soportes de α y T . Como la intersección de dos conjuntos es el complementario de la reunión de los complementarios, el teorema estará probado si demostramos que $\alpha \cdot T$ es nula en la reunión de A y A' . Sea φ una función de soporte contenido en $A \cup A'$, $\alpha \varphi$ tiene su soporte contenido en $(A \cup A') \cap CA$ que está contenido en A' , luego

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle = 0$$

lo que prueba el teorema.

Corolario: Si φT es la distribución nula para todas las funciones φ de D , T es la distribución nula.

En efecto como $\varphi \cdot T$ es de soporte acotado, se tiene

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle \varphi T, 1 \rangle = 0$$

para todo φ de D lo que prueba el corolario.

Este corolario tiene interés porque, como veremos enseguida, la multiplicación de distribuciones tiene divisores de cero, es decir que el producto de dos distribuciones puede ser nulo sin que lo sea ninguno de los factores.

Teorema 3.- El producto $\alpha \cdot T$ se deriva según la regla de derivación de los productos ordinarios.

$$(14) \quad \frac{\delta(\alpha T)}{\delta x_i} = \alpha \frac{\delta T}{\delta x_i} + \frac{\delta \alpha}{\delta x_i} \cdot T$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\alpha T)}{\delta x_i}, \varphi &= \langle \alpha T, -\frac{\delta \varphi}{\delta x_i} \rangle = \langle T, -\alpha \frac{\delta \varphi}{\delta x_i} \rangle \\ \frac{\delta \alpha}{\delta x_i} T, \varphi &= \langle T, \frac{\delta \alpha}{\delta x_i}, \varphi \rangle; \langle \alpha \frac{\delta T}{\delta x_i}, \varphi \rangle = \langle T, -\frac{\delta(\alpha \varphi)}{\delta x_i} \rangle \\ &= \langle T, -\alpha \frac{\delta \varphi}{\delta x_i} \rangle - \langle T, \frac{\delta \alpha}{\delta x_i}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

y como la suma de los segundos miembros de las dos igualdades últimas es igual al segundo miembro de la primera, el teorema está probado.

Teorema 4.- Se tiene la siguiente relación entre los productos tensorial y multiplicativo.

$$(15) \quad [\alpha(x) \times \beta(y)] : [S_x \times T_y] = [\alpha(x) S_x] \times [\beta(y) T_y]$$

Basta probar la igualdad de los dos términos de (15) para funciones de la forma $u(x) \cdot v(y)$

$$\begin{aligned} \langle (\alpha \times \beta)(S \times T), u \cdot v \rangle &= \langle S \times T, u \alpha \cdot v \beta \rangle = \langle S, u \alpha \rangle \langle T, v \beta \rangle \\ &= \langle \alpha S \times \beta T, u \cdot v \rangle = \langle \alpha S, u \rangle \langle \beta T, v \rangle = \langle S, u \alpha \rangle \langle T, v \beta \rangle \end{aligned}$$

Podemos ahora definir el producto de varias distribuciones cuando todas ellas, menos una, son funciones indefinidamente derivables; el producto es entonces asociativo. En efecto si α y β son funciones indefinidamente derivables se tiene:

$$\langle \alpha(\beta T), \varphi \rangle = \langle \beta T, \alpha \varphi \rangle = \langle T, \beta \alpha \varphi \rangle = \langle (\alpha \beta) T, \varphi \rangle$$

Ejemplos:

Sea α una función continua; se tiene

$$\langle \alpha \cdot \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \alpha \varphi \rangle = \alpha(0) \varphi(0)$$

es decir

$$(16) \quad \alpha \cdot \delta = \alpha(0) \cdot \delta$$

Si α tiene derivadas primeras continuas, se tiene

$$\langle \alpha \frac{\delta \delta}{\delta x_i}, \varphi \rangle = - \langle \delta \frac{\delta(\alpha \varphi)}{\delta x_i} \rangle = - \alpha(0) \frac{\delta \varphi(0)}{\delta x_i} - \frac{\delta \alpha(0)}{\delta x_i} \varphi(0)$$

es decir la fórmula

$$(17) \quad \alpha \frac{\delta \delta}{\delta x_i} = \alpha(0) \frac{\delta \delta}{\delta x_i} - \frac{\delta \alpha(0)}{\delta x_i} \cdot \delta$$

Para el caso unidimensional tenemos las siguientes fórmulas cuya demostración dejamos como EJERCICIO

$$(18) \quad x \cdot \delta = 0; \quad x \cdot \delta' = -\delta; \quad x^2 \delta' = 0$$

$$(19) \quad x \delta^{(m)} = -m \delta^{(m-1)}; \quad x^m \delta^{(m)} = (-1)^m m! \delta; \quad x(v.p. \frac{1}{x}) = 1$$

$$(20) \quad \delta(x \cdot v.p. \frac{1}{x}) = \delta; \quad (x \delta) v.p. \frac{1}{x} = 0$$

$$(21) \quad (x^k \cdot p.f. (x^m) x > 0) = p.f. (x^{m+k}) x > 0$$

Las fórmulas (18) nos muestran la existencia de divisores del cero en la multiplicación de distribuciones; las fórmulas (20) son un ejemplo de la no conservación de la propiedad asociativa cuando hay más de una distribución que no es una función indefinidamente derivable en el sentido de las funciones; en la fórmula (21), m es un número complejo cualquiera, pero k tiene que ser un entero positivo, si la parte real de $m+k$ es mayor que -1 , el símbolo de p.f. no es necesario en el segundo miembro, que vale entonces $\gamma(x) x^{m+k}$

31.- División por potencias de x .

El problema de la división se plantea en el caso general de la manera siguiente: sea $\alpha(x)$ una función indefinidamente derivable en el sentido de las funciones y S una distribución, se pide determinar las soluciones de la ecuación en distribuciones

$$(22) \quad \alpha(x) \cdot T = S$$

Si $\alpha(x)$ no se anula en ningún punto $1/\alpha(x)$ es una función

indefinidamente derivable, multiplicando los dos miembros de (22) por esta función se tiene $1/\alpha \cdot S = T$ luego el problema tiene una solución única.

El problema se complica mucho si $\alpha(x)$ se hace igual a cero. Nos limitaremos a tratar el caso, muy empleado en la mecánica cuántica, de la división de las distribuciones unidimensionales por potencias de x . El teorema fundamental es el siguiente:

Teorema 5.- Sea S una distribución unidimensional: existen una infinidad de distribuciones T que satisfacen la ecuación

$$(23) \quad x \cdot T = S$$

y dos soluciones distintas difieren en el producto de una constante arbitraria k por la distribución δ de Dirac.

Para probar este teorema vamos a demostrar dos lemas previos:

Lema 1: Para las funciones $\varphi(x)$ del espacio D las propiedades: a) $\varphi(x) = x \psi(x)$ en donde $\psi(x)$ es del espacio D y b) $\varphi(0) = 0$, son equivalentes.

En efecto: es evidente que a) implica b). Supongamos ahora que se cumpla b), se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \varphi'(0)$$

La función

$$(24) \quad \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$$

está definida para x distinto de cero y se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \varphi'(0)$$

luego poniendo $\psi(0) = \varphi'(0)$, $\psi(x)$ queda definida para todo x y es claro que si φ es de soporte acotado también lo

es ψ . Esta función es indefinidamente derivable para x distinto de cero y vamos a ver que para $x = 0$ se tiene:

$$\psi^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1} \varphi^{(n+1)}(0)$$

Esta fórmula es cierta para $n = 0$; supongámosla cierta para $n \leq p$. Se tiene

$$\begin{aligned} \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} &= \varphi'(0) + \frac{x}{2} \varphi''(0) + \dots + \frac{x^p}{(p+1)!} \varphi^{(p+1)}(0) + \\ &+ \frac{x^{p+2}}{(p+2)!} T(x) \end{aligned}$$

en donde $\lim_{x \rightarrow 0} T(x) = \varphi^{(p+2)}(0)$

Derivando p veces y teniendo en cuenta el valor de $\psi^{(p)}(0)$

$$\psi^{(p)}(x) = \psi^{(p)}(0) + \sum_{m=0}^p \frac{p!(p+1)p \dots (p-m+2)}{(p+2)! m!(p-m)!} x^{p-1-m} T^{(m-p)}(x)$$

$$\frac{\psi^{(p)}(x) - \psi^{(p)}(0)}{x} = \sum_{m=0}^p \frac{p!(p+1)p \dots (p-m+2)}{(p+2)! m!(p-m)!} x^{p-m} T^{(m-p)}(x)$$

Tomando límites para $x \rightarrow 0$

$$\psi^{(p+1)}(0) = \frac{1}{p+2} \varphi^{(p+2)}(0)$$

Queda así probado el lema 1.

Lema 2: Para que T , distribución unidimensional, cumpla la condición $x.T = 0$ es necesario y suficiente que T sea un múltiplo $T = k\delta$, de la delta de Dirac. (k siendo una constante numérica)

En virtud de (18) la condición es suficiente. Vamos a ver que es necesaria. En efecto fijemos una función φ_0 de D tal que $\varphi_0(0) = 1$. Dada una función cualquiera $\varphi(x)$ de D definimos

$$(25) \quad \mu(x) = \varphi(x) - \varphi(0) \varphi_0(x)$$

y se tiene:

$$(26) \quad \begin{cases} \varphi(x) = \varphi(0)\varphi_0(x) + \mu(x) ; \mu(0) = 0 \\ \mu(x) = x \cdot \lambda(x) ; \lambda(x) \text{ de } D \end{cases}$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \varphi(0) \langle T, \varphi_0(x) \rangle + \langle T, \mu \rangle = \\ \langle T, \varphi_0(x) \rangle \langle S, \varphi(x) \rangle + \langle x T, \lambda \rangle &= \langle k S, \varphi \rangle \end{aligned}$$

siendo k la constante $\langle T, \varphi_0(x) \rangle$, lo que prueba el lema.

De este lema se deduce que si la ecuación (23) tiene una solución T_0 , entonces $T_0 + k S$ (k constante arbitraria) es solución y que recíprocamente dos soluciones T_0 y T_1 difieren en un múltiplo de S , puesto que $x(T_0 - T_1) = 0$.

El teorema quedará demostrado si probamos que existe una solución; para ello tomemos la función anterior φ_0 y para toda φ de D hagamos la descomposición (26) y definimos entonces la funcional

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle S, \lambda(x) \rangle$$

que vamos a probar que es una distribución.

Es lineal pues la descomposición (26) aplicada a la función a $\varphi_1 + b\varphi_2$ nos da

$$a\varphi_1 + b\varphi_2 = [a\varphi_1(0) + b\varphi_2(0)]\varphi_0(x) + a\mu_1(x) + b\mu_2(x)$$

y por lo tanto

$$\langle T, a\varphi_1 + b\varphi_2 \rangle = \langle S, a\lambda_1 + b\lambda_2 \rangle = a\langle T, \varphi_1 \rangle + b\langle T, \varphi_2 \rangle$$

Además es continua; (lo admitiremos sin demostración)

Para probar que es solución basta observar que se tiene

$$\langle x T, \varphi \rangle = \langle T, x \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle$$

puesto que la descomposición (26) aplicada a $x\varphi(x)$ nos da $\lambda = \varphi(x)$.

Queda así probado el teorema, el cual nos suministra, junto con la prueba de la existencia un método para construir la solución.

Aún cuando los resultados se pueden prever y calcular sin necesidad de usar el método vamos a utilizarlo como ejercitación para los casos de la división por x de la función de Heaviside y de la δ .

Para la primera se tiene (siendo a tal que $(-\infty, a)$ contenga al soporte de φ y al de φ_0)

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi(x) \rangle &= \langle Y(x), \frac{\varphi(x) - \varphi(0) \varphi_0(x)}{x} \rangle = \int_0^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0) \varphi_0(x)}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^a \frac{\varphi(0) [1 - \varphi_0(x)]}{x} dx \right] \\ &= \langle \text{p.f. } \left(\frac{1}{x} \right)_{x>0}, \varphi(x) \rangle + k_0 \langle \delta, \varphi(x) \rangle \end{aligned}$$

siendo

$$k_0 = \int_0^{\infty} \frac{1 - \varphi_0(x)}{x} dx$$

La solución general es entonces

$$(27) \quad \text{p.f. } \left(\frac{1}{x} \right)_{x>0} + k \delta$$

Para la δ

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \langle \delta, \frac{\varphi(x) - \varphi(0) \varphi_0(x)}{x} \rangle = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) \varphi_0(x)}{x} = \varphi'(0) - \varphi(0) \varphi_0'(0) = \\ &= -\langle \delta', \varphi \rangle + \varphi_0'(0) \langle \delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

y la solución general es

$$(28) \quad -\delta' + k \delta$$

Observación: Es de notar la analogía de los métodos empleados para resolver el problema de la división por x y el problema de la primitiva (Capítulo III).

En los dos casos se puede determinar el valor de distribución en dos subespacios del espacio D . Para la primitiva

el de las funciones que tienen una primitiva en el espacio D y para la división el de las funciones que se anulan en el origen.

Después se ve que dado φ de D se puede siempre descomponer en la forma $\varphi = c\varphi_0 + \mu$, en donde c es constante y μ una función que no está en el subespacio, es decir el espacio D se descompone en la suma directa de la recta $c\varphi_0$ y del subespacio, que es entonces un hiperplano.

Finalmente se fija arbitrariamente el valor de $\langle T, \varphi_0 \rangle$ para introducir la constante arbitraria que implica cada uno de los dos problemas y por linealidad se deduce el valor $\langle T, \varphi \rangle$ para cualquier φ de D .

Para dividir ahora por x^2 , observemos que la solución de la ecuación

$$(29) \quad x^2 T = S$$

equivale a la resolución sucesiva de las ecuaciones

$$xR = S \quad ; \quad xT = R$$

lo que nos permite aplicando el resultado anterior encontrar la solución; dos soluciones de (29) difieren en una combinación lineal $c_0\delta + c_1\delta'$ de coeficientes arbitrarios. En efecto basta probar que $x^2T = 0$ si y solo si $T = c_0\delta + c_1\delta'$.

De las fórmulas (18) se deduce que la condición es suficiente; es también necesaria puesto que si $x^2T = 0$; $x(xT) = 0$, luego $xT = c\delta$; la solución de esta ecuación es, como se deduce de

$$(28) \quad T = -c\delta' + c_1\delta.$$

Generalizando este razonamiento para potencias enteras positivas de x se tiene:

Teorema 6.- Sea S una distribución unidimensional y m un entero positivo: existe una infinidad de distribuciones T que son soluciones de la ecuación

$$(30) \quad x^m T = S$$

y todas las soluciones se obtienen sumando a una cualquiera una combinación lineal de coeficientes

arbitrarios de la δ y de sus derivadas hasta el orden $n-1$.

La división por $(x-a)^n$ se hace en la misma forma, reemplazando la δ por $\delta_{(a)}$. Por sucesivas divisiones se puede entonces dividir por cualquier función de la forma

$$(31) \quad (x - a_1)^n \dots (x - a_m)^n \cdot f(x)$$

siendo $f(x)$ indefinidamente derivable en el sentido de las funciones y sin raíces reales.

32.- Producto generalizados de distribuciones.

En física teórica se calculan productos de distribuciones que no entran en la teoría que acabamos de exponer. Uno de los más usuales es el producto

$$\text{v.p. } \frac{1}{x} \cdot \delta$$

El valor de este producto se calcula fórmalmente por los físicos (ver por ejemplo W. Heitler: "The Quantum Theory of Radiation, pag 70) de la forma siguiente: se toman dos sucesiones de funciones cuyos límites sean las distribuciones δ y v.p. $1/x$, se hace su producto y se calcula el límite del producto. Así Heitler considera las dos sucesiones de funciones

$$(32) \quad \delta = \frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow +0} \frac{y}{x^2 + y^2} ; \text{ v.p. } \frac{1}{x} = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

la existencia del primer límite la establecimos en el Capítulo IV, fórmula (12); la del segundo se puede probar de la forma siguiente: por el teorema 2 del Capítulo IV, $1/2 \log(x^2 + y^2)$ cuando $y \rightarrow 0$, tiende a $\log|x|$ en el sentido de las distribuciones. Basta ahora derivar y aplicar el teorema 4 del Capítulo IV.

De acuerdo con la fórmula (13) del Capítulo IV se tiene

$$\frac{1}{\pi} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \frac{-2xy}{x^2 + y^2} \right]_{y \rightarrow +0} = \frac{1}{2} \delta'$$

que es el resultado obtenido por Heitler.

Ahora bien este resultado depende esencialmente de la elección de las sucesiones, es decir que si se tiene dos sucesiones T_n y S_n cuyos límites sean las distribuciones T y S y si es lícito hacer el producto $T_n \cdot S_n$ (es decir si uno de los factores es una función indefinidamente derivable) el límite del producto $T_n \cdot S_n$ no depende únicamente de las distribuciones T y S sino de cual es la sucesión elegida variando los resultados al variar las sucesiones que aproximan las distribuciones T y S .

Por ejemplo tomemos las anteriores funciones para aproximar el valor principal y hagamos su producto por la δ ; se tiene

$$\left\langle \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \delta, \varphi(x) \right\rangle = \left\langle \delta, \varphi(x) \frac{x}{x^2 + y^2} \right\rangle = 0$$

y tenemos la distribución nula como valor del producto.

Vemos por lo tanto que para definir el producto de dos distribuciones mediante los pasos al límite en la forma que acabamos de indicar es indispensable fijar condiciones suplementarias sobre la forma de aproximar las dos distribuciones cuyo producto se quiere definir. (2)

La dificultad que presenta la extensión de la definición de producto se pone más en evidencia si se tiene en cuenta un resultado de Schwartz (22) que vamos a enunciar:

Sea L un espacio vectorial que contenga como elementos a todas las funciones continuas y en el que se han definido la derivación y la multiplicación de la forma que cumplan las siguientes condiciones:

- 1: La derivación coincide con la derivación ordinaria para las funciones con derivada continua.
- 2: La multiplicación coincide con la multiplicación ordinaria cuando ambos factores son funciones continuas.

(2) Ver Gonzalez Dominguez y Scarfiello (1), y en otro orden de ideas König (1)
 (22) Ver Schwartz (2)

3: La multiplicación es bilineal y asociativa; tiene como elemento unidad la constante 1 y cumple la regla de derivación del producto.

Entonces con estas hipótesis no puede existir en L un elemento δ tal que $x \cdot \delta = 0$.

Esto nos prueba la imposibilidad de extender de una manera amplia y natural la multiplicación de distribuciones. Solo puede conseguirse una multiplicación que no cumple alguna propiedad fundamental o en la que exista un cierto grado de indeterminación.

oooOooo

C A P I T U L O VI

CAMBIO DE VARIABLE

33.- Definición del cambio de variable.

El problema del cambio de variable en distribuciones es bastante más complicado que el caso de las funciones; solo daremos acá algunas ideas incompletas y los cálculos no serán enteramente desarrollados.

La idea central es la generalización del cambio de variables del cálculo integral. Sea $T(t)$ una distribución definida en el espacio de las funciones de prueba $\varphi(t)$ en donde t es un punto del espacio de m dimensiones, $t = (t_1, \dots, t_m)$; sea $t(x)$ una aplicación del espacio de n dimensiones $x = (x_1, \dots, x_n)$ en el espacio t , estará definida por las m funciones.

$$t_1 = t_1(x_1, \dots, x_n) \dots t_m = t_m(x_1, \dots, x_n)$$

Queremos dar ahora un sentido a la expresión

$$\langle T(t(x)), \varphi(x) \rangle$$

definiéndola para las funciones de prueba $\varphi(x)$ del espacio de n dimensiones; para ello dada una función $\varphi(x)$ consideraremos la función

$$(1) \quad \psi(t) = \frac{\delta}{\delta t_1 \dots \delta t_m} \int_{t_i(x) \leq t_i} \varphi(x) \, dx$$

El dominio de la integral del segundo miembro depende de t , fijado un valor de t queda fijado el dominio y la integral que es entonces una función de t .

Suponemos además que la aplicación $t(x)$ cumple las condiciones siguientes:

1) Cualquiera que sea la función de prueba $\varphi(x)$, la función $\psi(t)$ definida por (1) es también una función de prueba.

2) Si las $\varphi_i(x)$ convergen hacia $\psi(x)$ en el espacio D_x

entonces definiendo por (1) las correspondientes funciones $\psi_i(t)$ y $\psi(t)$, las $\psi_i(t)$ convergen hacia $\psi(t)$ en el espacio D_t .

Definición 1.- Dada una distribución $T(t)$ y un cambio de variable $t=t(x)$, la distribución $T[t(x)]$ se define por la relación

$$(2) \quad \langle T[t(x)], \varphi(x) \rangle = \langle T(t), \psi(t) \rangle$$

en donde $\psi(t)$ se define por la fórmula (1).

La forma de definir la función ψ y las condiciones impuestas al cambio de variable nos muestran en forma inmediata que la relación (2) define una distribución en el espacio de las funciones de prueba $\varphi(x)$.

Para no alargar excesivamente este capítulo no nos ocuparemos de probar en los distintos casos que estudiaremos que el cambio de variable satisface estas condiciones.

Vamos a ver, limitándonos al caso más simple $m = n = 1$, que esta definición coincide con la del cambio de variable en las integrales.

De acuerdo con el teorema 14 del capítulo I debemos suponer que la función $x(t)$ es una integral indefinida y por lo tanto continua y con derivada p.p.; por la definición 5 del capítulo I es la diferencia de dos funciones no decrecientes y añadiendo t a las dos es la diferencia de dos funciones crecientes o la suma de una creciente y una decreciente.

Consideremos primeramente el caso de una función creciente $x(t)$; admite entonces una función inversa $t(x)$ y aplicando (1) se tiene:

$$\psi(t) = \frac{d}{dt} \int_{t(x) \leq t} \varphi(x) dx = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{x(t)} \varphi(x) dx = x'(t) \varphi[x(t)]$$

y por lo tanto

$$(3) \quad \langle T[t(x)], \varphi(x) \rangle = \langle T(t), x'(t) \varphi[x(t)] \rangle$$

Si T fuera una función localmente sumable, (3) toma la forma

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} T[t(x)] \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} T(t) \varphi[x(t)] x'(t) dt$$

que no es otra cosa que la fórmula del cambio de variable en integrales.

Si $T(x)$ es decreciente los límites en la integral que define (t) son $x(t)$ y $-\infty$ y se tiene entonces

$$(3') \quad \langle T[t(x)], \varphi(x) \rangle = \langle T(t), -x'(t) \varphi[x(t)] \rangle$$

Como la derivada de una función creciente es positiva y la de una decreciente es negativa las fórmulas (3) y (3') pueden resumirse en la

$$(5) \quad \langle T[t(x)], \varphi(x) \rangle = \langle T(t), |x'(t)| \varphi[x(t)] \rangle$$

EJERCICIO: Probar las fórmulas

$$(6) \quad \delta(\operatorname{sh} x) = \delta$$

$$(7) \quad \delta\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right) = a^2 \delta_{(a)}$$

34.- Cambios lineales. Definición de la derivada por paso al límite.-

Tomemos en el caso de una variable la transformación $t = ax+b$ ($a > 0$). Aplicando (5) y reemplazando en el segundo miembro t por x , tenemos

$$(8) \quad \langle T(ax+b), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right) \rangle$$

Casos particulares de (7) y (8) son las fórmulas siguientes de bastante empleo

$$(9) \quad \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|} \quad (a \neq 0); \quad \delta(-x) = \delta(x); \quad \delta'(-x) = -\delta'(x)$$

Consideremos ahora en el caso de m variables la traslación $t = x-h$. Aplicando (1) se tiene

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{\delta_m}{\delta t_1 \dots \delta t_n} \int_{-\infty}^{t_1+h_1} \dots \int_{-\infty}^{t_n+h_n} \varphi(x_1 \dots x_n) dx = \varphi(t_1+h_1 \dots t_n+h_n) = \\ &= \varphi(t+h) \end{aligned}$$

y por lo tanto obtenemos la fórmula

$$(10) \quad \langle T(x-h), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(x+h) \rangle$$

Definición 2.- La distribución definida por la fórmula (10) se denomina la trasladada al punto h de la distribución T . Se la representa con la notación $\tau_h T$. Es inmediato que $\delta(a) = \tau_a \delta$

Una función $f(x_1, \dots, x_m)$ es independiente de x_1 cuando su valor no depende del x_1 , o lo que es lo mismo, si para cualquier h_1

$$f(x_1+h_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Generalizando esta moción a las distribuciones se tiene:

Definición 3.- Una distribución T de n variables x_1, \dots, x_n , se dice independiente de la variable x_1 si T es invariante en toda traslación $\tau_h T$ en donde h es paralelo al eje OX_1 , es decir $h=(h_1, 0, \dots, 0)$

Se puede probar que si T es una función localmente sumable independiente de x_1 , en el sentido de la definición 3, T es igual p.p. a una función independiente de x_1 en el sentido ordinario.

El teorema siguiente nos da una definición de la derivada de una distribución que generaliza la forma usual de definición.

Teorema 1: Si T es una distribución se tiene

$$(11) \quad \frac{\delta T}{\delta x_m} = \lim_{h_m \rightarrow 0} \frac{\tau_{-h} T - T}{h_m}$$

siendo h el punto cuya m -ésima coordenada es h_m y las demás son todas nulas.

En efecto: sea $\varphi(x)$ una función de prueba cualquiera, se tiene

$$\left\langle \frac{\tau_{-h} T - T}{h_m} \varphi(x) \right\rangle = \frac{1}{h_m} \left[\langle T, \varphi(x_1, \dots, x_m - h_m, \dots, x_n) \rangle - \right.$$

$$-\langle T, \varphi(x_1 \dots x_m \dots x_n) \rangle = \langle T, \frac{\varphi(x_1 \dots x_m - h_m \dots x_n) - \varphi(x_1 \dots x_m \dots x_n)}{h_m} \rangle$$

Pongamos

$$\Phi_{h_m} = \frac{\varphi(x_1 \dots x_m - h_m \dots x_n) - \varphi(x_1 \dots x_m \dots x_n)}{h_m}$$

Para h_m menor que un cierto h , las Φ_{h_m} tienen todas su soporte contenido en un conjunto acotado, por ser acotado el soporte de φ ; para $h_m \rightarrow 0$ las Φ_{h_m} convergen uniformemente hacia

$$\Phi = - \frac{\delta \varphi}{\delta x_m}$$

y las derivadas de Φ_{h_m} converge también uniformemente hacia las correspondientes derivadas de Φ ; luego las Φ_{h_m} convergen hacia Φ en el espacio D y por la continuidad de la funcional T se tiene:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta T}{\delta x_m}, \varphi \right\rangle &= \langle T, - \frac{\delta \varphi}{\delta x_m} \rangle = \lim_{h_m \rightarrow 0} \langle T, \Phi_{h_m} \rangle \\ &= \lim_{h_m \rightarrow 0} \left\langle \frac{T - h T - T}{h_m}, \varphi(x) \right\rangle \end{aligned}$$

como queriamos probar.

Admitiremos sin demostración el siguiente teorema.

Teorema 2: La condición necesaria y suficiente para que una distribución sea independiente de x_m es

$$\text{que } \frac{\delta T}{\delta x_m} = 0$$

35.- El cambio t igual longitud de x .

Consideremos ahora el cambio de variable

$$t \equiv r \quad r = [x_1^2 + \dots + x_n^2]^{1/2}$$

de un espacio de n dimensiones a un espacio de una dimensión.

Comenzaremos por el caso de dos variables. Aplicando (1)

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \frac{d}{dt} \int_{r \leq t} \varphi(x, y) dx dy = \frac{d}{dt} \int_0^t dr \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \lambda, r \sin \lambda) \\ & \quad r d\lambda = t \int_0^{2\pi} \varphi(t \cos \lambda, t \sin \lambda) d\lambda \end{aligned}$$

Apliquemos este resultado a algunas distribuciones.

Tomemos una función de soporte contenido en el eje positivo $f(t)$. (Hay que observar que el cambio de variable $t = r$ exige que t sea positivo)

$$\langle f(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \varphi(x, y) \rangle = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) \left[\int_0^{2\pi} \varphi(t \cos \lambda, t \sin \lambda) d\lambda \right] dt$$

y pasando de coordenadas polares a cartesianas se tiene

$$\langle f[(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \varphi(x, y) \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} f[(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}] \varphi(x, y) dx dy$$

Apliquemos ahora este cambio a la distribución δ' . Se tiene

$$\begin{aligned} \langle \delta'(r), \varphi(x, y) \rangle &= \langle \delta'(t), t \int_0^{2\pi} \varphi(t \cos \lambda, t \sin \lambda) d\lambda \rangle \\ &= - \langle \delta, \frac{d}{dt} \left[t \int_0^{2\pi} \varphi(t \cos \lambda, t \sin \lambda) d\lambda \right] \rangle = - 2\pi \varphi(0, 0) \end{aligned}$$

Se tiene en consecuencia la fórmula

$$(14) \quad \delta'(r) = - 2\pi \delta(x, y)$$

Para el caso tridimensional, se tiene, pasado a coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t r^2 dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \varphi \cos \lambda, r \cos \varphi \sin \lambda, \\ & \quad r \sin \varphi) d\lambda = t^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \varphi \cos \lambda, r \sin \varphi \\ & \quad \sin \lambda, r \sin \varphi) d\lambda \end{aligned}$$

y tomando la distribución δ'' , se tiene

$$\begin{aligned} \langle \delta''(r), \varphi(x, y, z) \rangle &= \langle \delta''(t), \psi(t) \rangle = \langle \delta(t), \psi''(t) \rangle \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \varphi(0, 0, 0) d\lambda = 8\pi \cdot \varphi(0, 0, 0) \end{aligned}$$

es decir que obtenemos la fórmula

$$(15) \quad \delta''(r) = 8\pi \delta(x, y, z)$$

Con cálculos análogos se tiene para el caso de n dimensiones

$$(16) \quad \delta^{(n-1)}(r) = (n-1)! (-1)^{n-1} S_n \delta(x_1 \dots x_n)$$

siendo S_n el área de la esfera unitaria del espacio de n dimensiones. Reemplazando S_n por su valor se tiene

$$(16') \quad \delta^{(n-1)}(r) = \frac{(n-1)! (-1)^{n-1} 2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \delta(x_1 \dots x_n).$$

36.- El cambio $t = x^2 - a^2$.

Consideremos la aplicación $t = x^2 - a^2$ entre dos espacios unidimensional. La aplicación de la fórmula (1) nos da:

$$\Psi(t) = \frac{d}{dt} \int_{x^2 - a^2 \leq t} \varphi(x) dx = \frac{d}{dt} \int_{-\sqrt{t+a^2}}^{\sqrt{t+a^2}} \varphi(x) dx = \frac{\varphi(\sqrt{t+a^2}) + \varphi(-\sqrt{t+a^2})}{2\sqrt{t+a^2}}$$

y se obtiene así la fórmula

$$(17) \quad \langle T(x^2 - a^2), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \frac{\varphi(\sqrt{x+a^2}) + \varphi(-\sqrt{x+a^2})}{2\sqrt{x+a^2}} \rangle$$

El segundo miembro puede carecer de sentido ya que la función a la que se aplica T tiene una posible discontinuidad en el punto $x = -a^2$. Hay por consiguiente que proceder con cuidado al aplicar el cambio de variable.⁽⁹⁾; cuando el soporte de T está comprendido en la semirecta $x > -a^2$, no hay ninguna dificultad en aplicar la fórmula (17); en particular para la δ de Dirac se tiene la importante fórmula:

$$(18) \quad \delta(x^2 - a^2) =: \frac{\delta(a) + \delta(-a)}{2a}$$

Este cambio de variable puede también aplicarse a la distribución valor principal, considerando la $\Psi(t)$ como nula para $t \leq -a^2$. Aún cuando la función puede presentar

⁽⁹⁾ Un estudio de las condiciones de aplicación puede verse en Albertoni y Cuciani (1)

una discontinuidad en ese punto, la integral

$$v p \int_{-a^2}^{\infty} \frac{\varphi(\sqrt{x+a^2}) + \varphi(-\sqrt{x+a^2})}{2x\sqrt{x+a^2}}$$

tiene sentido y queda así definida la distribución. Se tiene:

$$\langle v p \frac{1}{x^2 - a^2}, \varphi(x) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-a^2}^{-\epsilon} \frac{\varphi(\sqrt{x+a^2}) dx}{2x\sqrt{x+a^2}} + \int_{-\epsilon}^{-a^2} \frac{\varphi(-\sqrt{x+a^2}) dx}{2x\sqrt{x+a^2}} + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(\sqrt{x+a^2}) dx}{2x\sqrt{x+a^2}} + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(-\sqrt{x+a^2}) dx}{2x\sqrt{x+a^2}} \right]$$

Haciendo en la primera y tercera integral el cambio de variable $\sqrt{x+a^2} = t$ y en la segunda y cuarta el cambio $\sqrt{x+a^2} = -t$, descomponiendo en fracciones simples, y pasando al límite, se obtiene finalmente

$$(19) \quad v p \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left[v p \frac{1}{x - a} - v p \frac{1}{x + a} \right]$$

Podemos ahora definir las distribuciones

$$(20) \quad \mathcal{S}_1(x^2 - a^2) = \mathcal{S}^+(x^2 - a^2) = \frac{\mathcal{S}^+(a) + \mathcal{S}^+(-a)}{2a}$$

$$(21) \quad \mathcal{S}_2(x^2 - a^2) = \mathcal{S}^-(x^2 - a^2) = \frac{\mathcal{S}^-(a) + \mathcal{S}^-(-a)}{2a}$$

en donde $\mathcal{S}^{\pm}(a)$ es $\mp_a \mathcal{S}^{\pm}$.

Por analogía con las anteriores se define las distribuciones

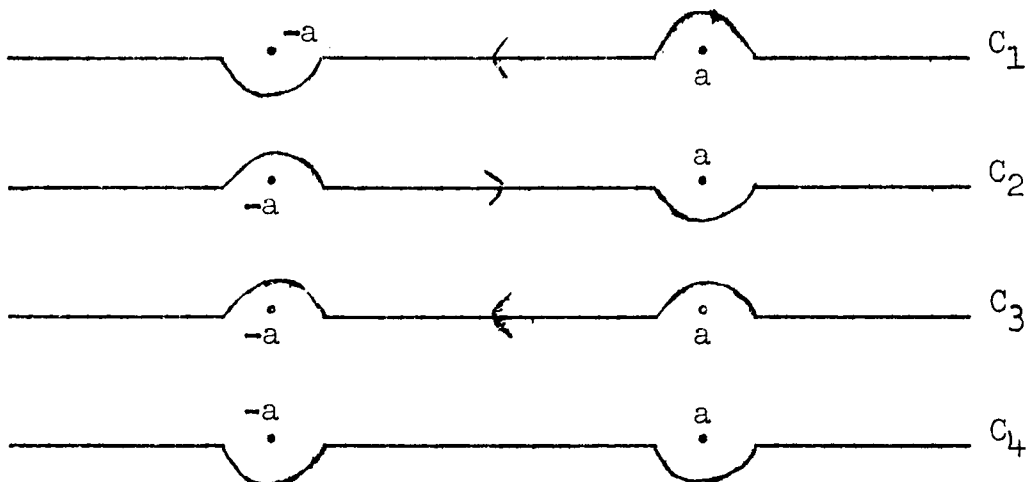
$$(23) \quad \mathcal{S}_3(x^2 - a^2) = \frac{\mathcal{S}^+(a) - \mathcal{S}^+(-a)}{2a}$$

$$(24) \quad \mathcal{S}_4(x^2 - a^2) = \frac{\mathcal{S}^-(a) - \mathcal{S}^-(-a)}{2a}$$

Si la función de prueba puede prolongarse en una función holomorfa en el campo complejo en los entornos de los puntos a y $-a$, las distribuciones anteriores pueden definirse como integrales en el campo complejo en la forma siguiente:

$$(25) \langle \delta_n(x^2 - a^2), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\varphi(x) dx}{x^2 - a^2}$$

(n = 1, 2, 3, 4,



Pueden probarse estas fórmulas a partir de las (10) del Capítulo III o bien descomponiendo en fracciones simples y aplicando las fórmulas

$$(26) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \langle \delta, \varphi \rangle$$



$$(27) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \langle \delta, \varphi \rangle$$



Probaremos la primera, la segunda se obtiene de la misma forma. Se tiene:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\gamma} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

siendo γ la semicircunferencia de radio ε . Haciendo en la tercera integral el cambio de variable $x = \varepsilon e^{it}$ y tomando límites para ε tendiendo a cero se tiene

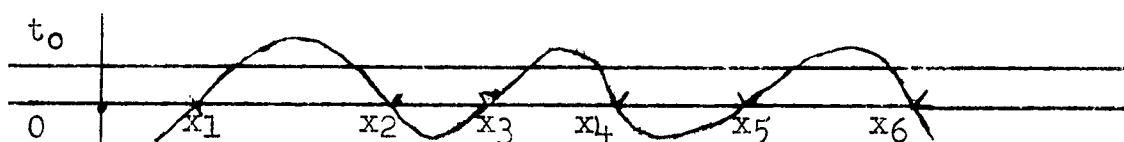
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \frac{1}{2\pi i} \langle \text{v.p. } \frac{1}{x}, \varphi(x) \rangle + \frac{\varphi(0)}{2}.$$

lo que prueba la fórmula.

Los resultados obtenidos con este cambio de variable pueden extenderse a un caso más general que es el cambio de variable $t = P(x)$, siendo $P(x)$ un polinomio cuyas raíces son todas reales y simples. Nos limitaremos al estudio de

$$\int [P(x)]^{\alpha} dx$$

Para aplicar la fórmula (1) sólo necesitamos considerar valores de t en un entorno del origen. El conjunto de los puntos en que $P(x) \leq t_0$, se descompone en los intervalos



$$(-\infty, Q_1(t_0)) ; (Q_2(t_0), Q_3(t_0)); \dots (Q_6(t_0), +\infty)$$

en donde $Q_i(t)$ es la función inversa uniforme de $P(x)$ en el entorno de la raíz x_i . Se tiene

$$\Psi(t) = + Q_1'(t) \varphi[Q_1(t)] - Q_2'(t) \varphi[Q_2(t)] + \dots$$

Para $t = 0$ se tiene $Q_i(0) = x_i$ y $Q_i'(0) = 1/P'(x_i)$; observamos además que en la fórmula anterior los signos menos corresponden a los puntos en que la derivada $P'(x)$ es negativa se obtiene la fórmula

$$(27) \quad \int [P(x)]^{\alpha} dx = \sum_{i=1}^n \frac{\int (x_i)^{\alpha}}{|P'(x_i)|}$$

que generaliza la fórmula (18).

37.- Deltas de los hiperboloides y del cono.

Consideremos la aplicación $u = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - m$ del espacio de 4 dimensiones (x, y, z, t) con el de una dimensión, siendo m un número real mayor que cero. Pondremos $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y aplicando (1) tenemos

$$\Psi(u) = \frac{d}{d u} \iiint_{t^2 - r^2 - m \leq u} \varphi(x, y, z, t) dx dy dz dt$$

(2) Resultados más completos pueden verse en Gonzales Domínguez (1).

Nos limitaremos a considerar las funciones φ que tienen su soporte en el cono de ondas $t^2 - r^2 \geq 0$. Entonces:

$$(28) \psi(u) = \frac{d}{d u} \iiint_{R^3} \left[\int_{-\sqrt{r^2+m+n}}^{\sqrt{r^2+m+n}} \varphi(x, y, z, t) dt \right] dx dy dz =$$

$$= \frac{1}{2} \iiint_{R^3} \left[\frac{\varphi(x, y, z, \sqrt{r^2+m+n}) + \varphi(x, y, z, -\sqrt{r^2+m+n})}{\sqrt{r^2+m+n}} \right] dx dy dz$$

De acá deducimos la expresión de la delta del hiperboloide (de ecuación $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = m$)

$$(29) \langle \delta(t^2 - r^2 - m), \varphi \rangle = \frac{1}{2} \iiint_{R^3} \left[\frac{\varphi(x, y, z, \sqrt{r^2+m}) + \varphi(x, y, z, -\sqrt{r^2+m})}{\sqrt{r^2+m}} \right]$$

$$dx dy dz$$

Si en la fórmula anterior hacemos $m = 0$ obtenemos la definición de la delta cónica obtenida en el § 20 del Cap. III.

C A P I T U L O VII
PRODUCTO DE CONVOLUCION

38.- Definición del producto de convolución.

El concepto de producto de convolución (también denominado producto de composición y producto integral) es de gran importancia en el análisis matemático clásico en el que se aplica a dos funciones. Su extensión al caso en que los factores son distribuciones permite ampliar su alcance y aplicar y simplificar aspectos de la teoría.

Definición 1.- Se denomina producto de convolución de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas en el espacio enedimensional a la función $h(x)$ definida por la relación

$$(1) \quad h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t) \, d.t = \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau)g(x-\tau) \, d\tau$$

La igualdad de las dos integrales se establece mediante el cambio vectorial de variable $x-t = \tau$, lo que prueba la conmutatividad del producto.

El producto se designa con la notación $h(x) = f(x) * g(x)$.

De la definición se deduce que para la existencia de $h(x)$ no es suficiente que $f(x)$ y $g(x)$ sean sumables localmente; es necesario además que la integral sea convergente, lo cual exige relaciones de decrecimiento de los factores en infinito; por ejemplo es suficiente que una de ellas sea sumable en \mathbb{R}^n y la otra acotada en \mathbb{R}^n .

También se deduce de la definición que el producto de convolución no alteran si se reemplazan $f(x)$ y $g(x)$ por dos funciones iguales p.p. Esto nos sugiere la posibilidad de extender el producto de convolución a las distribuciones, aún cuando ya se puede prever que no será posible en general para distribuciones cualesquiera puesto que ya no lo es

para funciones localmente sumables.

Para hacer extensión vamos a estudiar la forma de la funcional $\langle f * h, \varphi \rangle$. Se tiene

$$\langle f * h, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x-t) g(t) \varphi(x) dx dt$$

El cambio de variable $x = \xi + \eta$, $t = \eta$, nos dá

$$\begin{aligned} \langle f * h, \varphi(x) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(\xi) g(\eta) \cdot \varphi(\xi + \eta) d\xi d\eta = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(\eta) \cdot \varphi(\xi + \eta) d\eta \right] d\xi = \\ &= \langle f(\xi) \times g(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle \end{aligned}$$

Esta relación nos sugiere la siguiente definición del producto de convolución de dos distribuciones:

Definición 2.- Se denomina producto de convolución de dos distribuciones S y T a la distribución S*T, definida por la relación.

$$(2) \quad \langle S * T, \varphi(x) \rangle = \langle S(\xi) \times T(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle$$

Para ver cuando (2) tiene sentido tenemos que estudiar las propiedades de la función $\varphi(\xi + \eta)$, considerada como función de las dos variables ξ y η , cuando φ pertenece al espacio D. Es claro que la función es indefinidamente derivable.

En cambio, salvo en el caso trivial de la función idénticamente nula, $\varphi(\xi + \eta)$ no tiene soporte acotado. En efecto si en un punto ξ_0 es $\varphi(\xi_0) = h$, entonces es $\varphi(\xi + \eta) = h$ en todos los puntos del subespacio de \mathbb{R}^{2n} definidos por la condición $\xi + \eta = \xi_0$. El soporte es pues reunión de subespacios "paralelos al subespacio segunda bisectriz" (es decir al subespacio de ecuación $\xi + \eta = 0$); es una "banda de ancho finito".

Puesto que las dos funciones de prueba no satisfacen la condición de tener soporte acotado será preciso, para dar sen-

tido a (2), imponer condiciones a los soportes de S y de T. De acuerdo con lo que dijimos en la observación del nº 24 podremos dar un sentido a (2) y definir una funcional lineal y continua en todos los casos en que el soporte de $S \times T$ y el de $\varphi(\xi + \eta)$ tengan como intersección un conjunto acotado, cuando lo sea el soporte de φ , es decir cuando el soporte de $S \times T$ tenga como intersección con cualquier "banda de ancho finito" un conjunto acotado. Por lo tanto se tiene el teorema siguiente:

Teorema 1.- El producto de convolución tiene un sentido si los soportes K_S y K_T son tales que cualquier conjunto de puntos cuyas coordenadas ξ y η satisfagan las condiciones,

$$(3) \quad \xi \in K_S ; \quad \eta \in K_T ; \quad |\xi + \eta| \leq l \quad (l \text{ fijo})$$

tenga que satisfacer entonces las condiciones

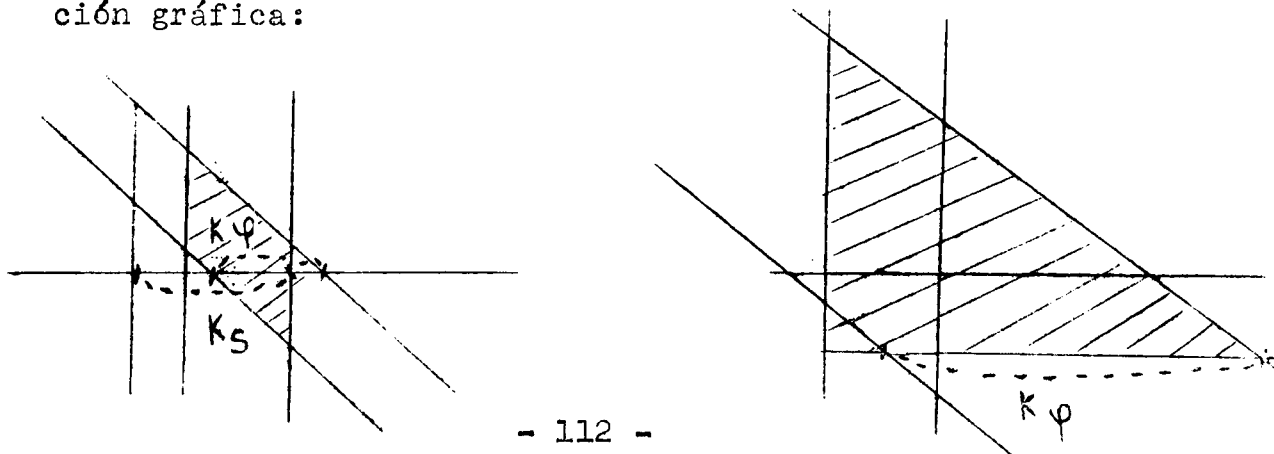
$$(4) \quad |\xi| \leq h \quad |\eta| \leq h \quad (\text{para un cierto } h \text{ fijo})$$

Ejemplos en que está definido el producto de convolución:

- 1) Cuando el soporte de una de las distribuciones sea acotado. En efecto: si $|\xi + \eta| \leq l$ y $|\xi| \leq k$, entonces se tiene, $|\eta| \leq |\xi + \eta| + |\xi| \leq l + k$
- 2) Cuando S y T sea distribuciones unidimensionales y los soportes estén los dos acotados a la izquierda (o los dos a la derecha). En efecto:

$$\text{si } |\xi + \eta| \leq l, \xi \geq a, \eta \geq b, \eta \leq l + \xi \leq l + a; \xi \leq l + b$$

Estos dos resultados se aclaran más con la interpretación gráfica:



En el primer ejemplo el soporte de $S \times T$ está contenido en una banda finita paralela al eje η , cuya intersección con cualquier banda de ancho finito paralela a la segunda bisectriz es acotada.

En el segundo ejemplo el soporte de $S \times T$ está en el interior del ángulo recto de lados paralelos a los semiejes positivos y su intersección con cualquier banda de ancho finito paralela a la segunda bisectriz es acotado.

Si un soporte estuviera en la semirecta positiva y el otro en la negativa no se cumplen las condiciones del teorema, como se ve considerando el conjunto de los puntos

$$\xi = n, \eta = -n \text{ o graficamente.}$$

3) Cuando las distribuciones están tomadas en el espacio cuatridimensional (x, y, z, t) , una de ellas tiene su soporte en el cono del futuro (o del pasado) de ecuaciones $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0; t \geq 0 (t \leq 0)$ y la otra en el semiespacio $t \geq 0. (t \leq 0)$

En efecto: si $|t_1 + t_2| \leq \ell$ se tiene $|t_1| \leq \ell$ y como ambos son positivos deben ser $|t_1| \leq \ell, |t_2| \leq \ell$

Por otra parte $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq t_1^2 \leq \ell^2$ implica $|x_1| \leq \ell;$

$|y_1| \leq \ell; (z_1) \leq \ell$ y como $|x_1 + x_2| \leq \ell$ se tiene $|x_2| \leq |\ell| + |x_1| \leq 2\ell$

y analogamente $|y_2| \leq 2\ell \quad |z_2| \leq 2\ell$

EJERCICIOS:

1) Probar la siguiente fórmula

$$(5) \quad [S(x) \times T(y)] * [M(x) \times N(y)] = [S(x) * M(x)] \times [T(y) * N(y)]$$

2) Probar para distribuciones unidimensionales las fórmulas

$$(6) \quad e^{ax} \cdot (S * T) = (e^{ax} \cdot S) * (e^{ax} \cdot T)$$

$$(7) \quad x \cdot (S * T) = (x \cdot S) * T + (x \cdot T) * S$$

39.- Ejemplos de producto de convolución.-

1º) Dadas dos funciones cuyos soportes cumplan la condición del teorema 1 existe siempre el producto de convolución y se tiene, haciendo el cambio de variable $\xi = x - t, \eta = t$:

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi(x) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(\xi) g(\eta) \varphi(\xi + \eta) d\eta d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x-t) g(t) \varphi(x) dx dt = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) g(t) dt \right] \varphi(x) dx = \\ &= \left\langle \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) g(t) dt, \varphi(x) \right\rangle \end{aligned}$$

Volvemos así a obtener la fórmula (1) y como la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) \varphi(x) dx$$

está definida para toda φ de D , basta tomarla igual a 1 en un conjunto acotado cualquiera para ver que $h(x)$ es localmente sumable.

Claro está que el producto de convolución de dos funciones puede tener sentido aun cuando no se cumplan las condiciones sobre los soportes que impone el teorema; tal es el caso de la fórmula

$$\begin{aligned} (8) \quad \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} * \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}} &= \\ = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} & \end{aligned}$$

cuya demostración dejamos como EJERCICIO.

2º) Se tienen las fórmulas

$$(9) \quad \delta * T = T$$

$$(10) \quad \delta'_{(a)} * T = \tau_a T$$

$$(11) \quad \delta' * T = T'$$

En efecto se tiene

$$\langle \delta * T, \varphi(x) \rangle = \langle T(\xi), \langle \delta(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle \rangle = \langle T(\xi), \varphi(\xi) \rangle$$

lo que prueba la primera fórmula, la cual se suele escribir en física teórica en la forma, matemáticamente incorrecta,

$$(9') \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(x-t) dt$$

Esta propiedad de la delta de Dirac de ser la unidad de convolución es de gran importancia.

La fórmula (10) se demuestra en forma análoga a la (9) y respecto a la (11) tenemos

$$\begin{aligned} \langle \delta' * T, \varphi(x) \rangle &= \langle T(\xi), \langle \delta'(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle \rangle = \\ &= \langle T(\xi), -\varphi'(\xi) \rangle = \langle T'(\xi), \varphi(\xi) \rangle \end{aligned}$$

Con razonamiento análogo se puede probar la generalización de la fórmula (11) para un operador diferencial cualquiera

$$(12) \quad D \delta * T = D T$$

3º) Por razonamientos análogos a los del ejemplo 1º, aunque un poco más delicados se puede probar que el producto de convolución de una función $f(x)$ por una medida μ (cap. II nº 10) es, cuando existe, la función $h(x)$ definida por

$$(13) \quad h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) d\mu(t)$$

4º) Si tenemos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ de soportes contenidos en la semirrecta $x \geq 0$, su producto de convolución existe por el teorema 1 y se expresa mediante la fórmula (1) que acá puede transcribirse

$$(14) \quad f(x) * g(x) = \int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt$$

puesto $f(t)$ es nula para $t \leq 0$, y $g(x-t)$ es nula para $t > x$.

Esta forma de expresar la convolución es básica en la teoría de las transformaciones de Laplace. En este caso el

producto de convolución existe siempre que las funciones sean localmente sumables; su comportamiento en el infinito no influye para nada en la existencia.

5º) La convolución en teoría del potencial.

Para el espacio de tres dimensiones el potencial de una distribución de cargas con densidad continua $f(P)$ con soporte acotado, viene dado por la fórmula

$$(15) \quad U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{f(Q)}{|P-Q|} dQ; \quad |P| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} = r$$

que se puede escribir

$$(16) \quad U(P) = f(P) * \frac{1}{4\pi r}$$

Podemos ahora definir el potencial de una distribución T cualquiera de soporte acotado (por ejemplo, con masas concentradas en un punto, dipolos, ...) como la distribución U dada por la fórmula

$$(17) \quad U = T * \frac{1}{4\pi r}$$

Si calculamos ahora el laplaciano de U , tenemos (fórmula (44) del capítulo III)

$$(18) \quad \Delta U = T * \Delta \frac{1}{4\pi r} = T * -\delta = -T$$

que es la extensión de la clásica fórmula de Poisson.

Analogamente se ve también que $-T$ es el potencial del laplaciano de T .

Los resultados se extienden inmediatamente para cualquier número de dimensión. El potencial de T es para $n = 2$

$$(16') \quad U = T * \frac{1}{2\pi \log r}$$

y para $n \neq 2$, cualquiera

$$(16'') \quad U = T * \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-2) 2\pi^{n/2}}$$

40.- Producto de convolución de varias distribuciones.-

El producto de convolución para tres o más distribuciones se define por la siguiente generalización de la fórmula (2)

$$(19) \langle R * S * T, \varphi \rangle = \langle R(\xi) \chi_S(\eta) \chi_T(\zeta), \varphi(\xi + \eta + \zeta) \rangle.$$

Razonamientos análogos a los que nos condujeron al teorema 1 nos prueban la existencia del producto de convolución cuando los soportes de los factores cumplan la condición siguiente: si M es un conjunto de puntos cuyas coordenadas ξ, η, ζ , cumplen las condiciones

$$(20) \quad \xi \in K_R; \eta \in K_S; \zeta \in K_T; |\xi + \eta + \zeta| \leq l \quad (l \text{ fijo})$$

entonces tienen que cumplir las condiciones

$$(21) \quad |\xi| \leq h; |\eta| \leq h; |\zeta| \leq h \quad (\text{para un } h \text{ fijo})$$

La extensión a un número cualquiera de factores es inmediata. De acuerdo con esta condición podemos afirmar la existencia del producto de convolución de varias distribuciones en los siguientes casos:

- a) Los soportes de todas las distribuciones, salvo una, son acotados.
- b) Las distribuciones son unidimensionales y todos los soportes están acotados a la derecha (o todos a la izquierda).
- c) Las distribuciones están definidas en el espacio cuatridimensional (x, y, z, t) , todos los soportes están contenidos en el semiespacio $t \geq 0$ ($t \leq 0$) y todos menos uno en el cono del futuro (cono del pasado)

De las propiedades asociativa y conmutativa del producto tensorial se deducen estas propiedades para el producto de convolución siempre y cuando se cumpla las condiciones que aseguran la existencia de dicho producto para toda función de prueba. Si esto no se cumple, puede suceder que los pro-

ductos $S * (R * T)$ y $(S * R) * T$ tengan sentido y no sean iguales. Claro que entonces no tiene sentido el producto $R * S * T$. Basta en efecto observar que

$$(22) \quad (1 * \delta') * Y = (0 * Y) = 0; \quad 1 * (\delta' * Y) = (1 * \delta) = 1.$$

Las fórmulas (10 y (11) que muestran que la traslación y la derivación son casos particulares del producto de convolución nos permite enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2: Para trasladar o derivar un producto de convolución basta trasladar o derivar uno cualquiera de los factores. En efecto:

$$(23) \quad D (S * R * T) = D S * R * T = S * (D S * R) * T = S * D R * T$$

y lo mismo se prueba para las traslaciones.

Observemos que si D implica varias operaciones sucesivas de derivación puede aplicarse parcialmente a varios factores. Así por ejemplo:

$$(24) \quad \frac{\partial^3 (S * R * T)}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial S}{\partial x} * \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial^2} * T = \frac{\partial S}{\partial x} * \frac{\partial R}{\partial y} * \frac{\partial R}{\partial z}$$

En las aplicaciones del teorema hay que tener siempre presente que la derivación debe hacerse en el sentido de las distribuciones. Con las derivadas en el sentido de las funciones el teorema es solo válido con condiciones restrictivas; en la teoría clásica la extensión a casos más amplios exige la consideración de varios casos particulares con distintas fórmulas. Todos ellos quedan englobados en el teorema 2 cuando se deriva en el sentido de las distribuciones.

41.- Regularización de distribuciones.

Definición 3.- Dada una función $\phi(x)$ indefinidamente derivable en el sentido de las funciones y una distribución T se denomina regularizada de T por ϕ al producto de convolución $\phi * T$, cuando éste existe.

Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 3.- Sea T una distribución y $\alpha(x)$ una función indefinidamente derivable, siendo el soporte de una de las dos compacto, entonces, la regularizada de T por α es una función indefinidamente derivable.

Se entiende naturalmente que la derivabilidad indefinida es en el sentido de las funciones.

En efecto se tiene:

$$\begin{aligned} \langle T * \alpha, \varphi(x) \rangle &= \langle T(\xi), \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(\eta) \varphi(\xi + \eta) d\eta \rangle = \\ &= \langle T(\xi), \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x - \xi) \varphi(x) dx \rangle = \langle T(\xi), \langle \varphi(x), \alpha(x - \xi) \rangle \rangle \end{aligned}$$

El último miembro tiene sentido puesto que siendo $\varphi(x)$ de soporte compacto, considerada como distribución es del espacio E' (Cap IV, nº 25) y por lo tanto tiene sentido el aplicarla a una función φ del espacio E .

Tenemos ahora

$$\langle T(\xi), \langle \varphi(x), \alpha(x - \xi) \rangle \rangle = \langle T(\xi) \chi \varphi(x), \alpha(x - \xi) \rangle$$

El segundo miembro tiene sentido, por el teorema 1, cuando α es de soporte compacto puesto que siendo φ de soporte acotado el soporte de $T \chi \varphi$ corta a la banda de ancho finito paralela esta vez a la primera bisectriz en un conjunto acotado; también lo tiene si T es de soporte compacto, puesto que el soporte del producto $T \chi \varphi$ de dos distribuciones de soporte compacto es compacto. Por lo tanto:

$$\langle T * \alpha, \varphi(x) \rangle = \langle \varphi(x), \langle T(\xi), \alpha(x - \xi) \rangle \rangle$$

$\langle T(\xi), \alpha(x - \xi) \rangle$ es una función $h(x)$. En el nº 27 del Capítulo V dijimos que si α es del espacio D , también $h(x)$

pertenece al espacio D ; puede probarse que este resultado vale si se reemplaza el espacio D por el E . En cualquier caso se tiene que $h(x)$ es indefinidamente derivable. Por otra parte:

$$\langle T * \varphi, \varphi(x) \rangle = \langle \varphi(x), h(x) \rangle = \langle h(x), \varphi(x) \rangle$$

es decir $T * \varphi = h(x)$, como queríamos probar.

Corolario: si T es de soporte compacto, su regularizada por un polinomio de grado m , es otro polinomio de grado $\leq m$.

La demostración de este corolario se apoya en los desarrollos que acabamos de hacer; dejamos como EJERCICIO el desarrollo de los cálculos.

La regularización tiene gran importancia en los problemas de aproximación. Para ver como se aplica este concepto daremos, sin demostración, el siguiente teorema de continuidad de la convolución.

Teorema 4.- Si S_n y T_n son dos sucesiones de distribuciones cuyos límites (en el espacio D') son las distribuciones S y T , y si las distribuciones S_n y T_n tienen sus soportes contenidos en dos conjuntos A y B que tienen la propiedad de que cualquier conjunto de puntos cuyas coordenadas ξ y η satisfagan las condiciones

$$\xi \in A ; \eta \in B ; |\xi + \eta| \leq l \quad (l \text{ fijo})$$

tenga que satisfacer las condiciones

$$|\xi| \leq h ; |\eta| \leq h \quad (\text{para un cierto } h \text{ fijo})$$

el límite de las distribuciones $S_n * T_n$ es la distribución $S * T$.

Tomemos ahora la sucesión de funciones indefinidamente derivables:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } |x| \geq \frac{1}{n} \\ K_n e^{-\frac{1}{1-|\frac{x}{n}|^2}} & \text{para } |x| < \frac{1}{n} \end{cases}$$

en donde K_n está elegido de forma que

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_n(x) dx = 1$$

Es claro que la sucesión $f_n(x)$ cumple las condiciones del teorema 11 del Capítulo IV y que en D' se tiene,

$$\lim. f_n(x) = \delta.$$

Sea ahora T una distribución cualquiera; los soportes de las f_n están todos contenidos en el conjunto acotado $|x| < 1$; se puede aplicar el teorema anterior y se tiene, poniendo

$$d_n = f_n * T:$$

$$\lim d_n = \delta * T = T$$

Las funciones $d_n(x)$ no tienen por que ser de soporte compacto; si las multiplicamos por las funciones $\beta_n(x)$ de D iguales a 1 en $|x| \leq \frac{1}{n}$, obtenemos una sucesión

$$\gamma_n(x) = d_n(x) \beta_n(x)$$

de funciones de soporte acotado e indefinidamente derivables.

Sea φ de D , como φ es de soporte compacto para $n \geq n_0$ es $d_n(x) \cdot \varphi(x) = \gamma_n(x) \varphi(x)$, y por lo tanto para todo $n \geq n_0$ es $\langle \gamma_n, \varphi \rangle = \langle d_n, \varphi \rangle$ y por lo tanto:

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle d_n, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \gamma_n, \varphi \rangle$$

luego en D' , $T = \lim. \gamma_n$. Es decir se tiene el teorema:

Teorema 5.- Toda distribución es límite de una sucesión de funciones indefinidamente derivables y de soporte compacto.

42.- Traza del producto de convolución.-

Dada una distribución \check{T} designaremos con la notación \check{T} , a la distribución $T(-x)$. De acuerdo con la definición de cambio de variable del Capítulo anterior se tiene:

$$(25) \quad \langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle; \quad \langle \check{T}, \check{\varphi} \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

Sea ahora $T \in D'$ y $\varphi \in D$ (o $T \in E'$ y $\varphi \in E$); en virtud del teorema 3, $T * \check{\varphi}$ es la función de x , $\langle T(\xi), \varphi(\xi - x) \rangle$ cuyo valor en el origen es $\langle T, \varphi \rangle$. Análogamente el valor en el origen de $\langle \check{T} * \varphi \rangle$ es $\langle T, \varphi \rangle$.

Recordando que se llama traza de una función continua $\text{Tr. } f(x)$ a su valor en el origen tenemos la fórmula

$$(26) \quad \langle T, \varphi \rangle = \text{Tr. } (T * \check{\varphi}) = \text{Tr. } (\check{T} * \varphi)$$

De (26) se deduce que si $T * \varphi = 0$ para todas las funciones de prueba, T es la distribución nula. También se deduce que en un producto escalar de funciones de prueba y de distribuciones en donde intervienen productos de convolución, se puede pasar un elemento T o φ de un lado al otro reemplazándolo por \check{T} o $\check{\varphi}$. Así, por ejemplo se tiene:

$$\begin{aligned} \langle A * B * C, D * \varphi * \psi \rangle &= \langle A * \check{\varphi}, \check{B} * \check{C} * \check{D} * \psi \rangle = \\ &= \langle \delta, \check{A} * \check{B} * \check{C} * \check{D} * \varphi * \psi \rangle = \text{Tr. } (A * B * C * \check{D} * \check{\varphi} * \check{\psi}) \end{aligned}$$

De acá se obtiene (teniendo en cuenta que, por la fórmula (9) del Capítulo VI, $\check{\delta}' = -\delta'$) como caso particular la fórmula conocida

$$\langle T; \varphi \rangle = \langle \delta' * T, \varphi \rangle = \langle T, \check{\delta}' * \varphi \rangle = \langle T, -\varphi' \rangle$$

EJERCICIO: Sea $\langle a, x \rangle$ el producto escalar ordinario del espacio n -dimensional. Probar las fórmulas:

$$(27) \quad e^{\langle a, x \rangle} (S * T) = (e^{\langle a, x \rangle} S) * (e^{\langle a, x \rangle} T)$$

$$(28) \quad \langle a, x \rangle (S * T) = (\langle a, x \rangle S) * T + (\langle a, x \rangle T) * S$$

La energía definida por una densidad de carga $f(x,y,z)$ continua y de soporte acotado es $\langle U, f \rangle$ siendo U el potencial; luego, salvo un factor constante, se tiene:

$$(29) \quad E(f) = \langle U, f \rangle = \left\langle \frac{1}{r} * f, f \right\rangle = \text{Tr} \left(\frac{1}{r} * f * f^{\vee} \right)$$

que nos permite definir la energía definida por una distribución T como:

$$(30) \quad E(T) = \text{Tr} \left(\frac{1}{r} * T * T^{\vee} \right)$$

Esta fórmula se generaliza para n dimensiones reemplazando $1/r$ por $1/r^{n-2}$ y por $1/\log.r$ para dos dimensiones.

43.- Algebra de convolución.

Recordemos que se denomina álgebras los espacios vectoriales en los que se ha definido una multiplicación interna (que hace corresponder a dos elementos del espacio otro elemento del espacio) con las propiedades asociativa y bilineal. El producto de convolución tiene estas dos propiedades: además es conmutativo y tiene un elemento unidad, la δ . Puede tener divisores de cero, ya que, por ejemplo, se tiene $\delta'' * x = 0$.

En el espacio D' no está siempre definido el producto de convolución; esto nos obliga, para definir álgebras, a considerar subconjuntos de ese espacio, que son las denominadas álgebras de convolución. Precisando

Definición 4.- Un álgebra de convolución es un subespacio vectorial del espacio de las distribuciones D' en el que tiene sentido el producto de dos (y por lo tanto de un número finito) de sus elementos; dicho producto debe además pertenecer al álgebra y finalmente la δ pertenece al subespacio.

Ejemplos de álgebras de convolución:

- 1) El espacio E' de todas las distribuciones de soporte acotado.
- 2) El espacio $D'_+ (D'_-)$ de todas las distribuciones unidimensionales de soportes contenidos en la semirrecta $x \geq 0$ ($x \leq 0$).
- 3) El espacio $D'_{+T} (D'_{-T})$ de todas las distribuciones del espacio cuatridimensional (x, y, z, t) contenidas en el cono del futuro (cono del pasado).

Es claro que cada uno de estos espacios es un subespacio de D' ya que toda combinación lineal de elementos del subespacio pertenece al mismo subespacio; todos contienen la δ ; también como vimos en el nº 38 el producto de convolución de dos elementos de uno cualquiera de los subespacios está bien definido; falta probar que dicho producto pertenece también al subespacio. Para ello probaremos previamente el teorema:

Teorema 6.- Si S y T son dos distribuciones para las que está bien definido el producto de convolución, si A y B son dos conjuntos que contienen a los soportes de S y de T, entonces el soporte de $S * T$ está contenido en la adherencia del conjunto $A + B$.

El conjunto $A + B$ está formado por todos los puntos de la forma $\xi + \eta$ en donde $\xi \in A$ y $\eta \in B$. Su adherencia $\overline{A + B}$ está formada por los puntos de $A + B$ y todos sus puntos límites. Por lo tanto es un conjunto cerrado.

Para probar el teorema habrá que demostrar que si φ es una función cuyo soporte está contenido en el complementario abierto de $\overline{A + B}$, $\langle S * T, \varphi \rangle = 0$. Se tiene:

$$(31) \quad \langle S * T, \varphi \rangle = \langle S(\xi) \times T(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle$$

El soporte de $S(\xi) \times T(\eta)$ está contenido en el pro-

ducto $A(\xi) \times B(\eta)$, es decir el conjunto de los puntos (ξ, η) en que $\xi \in A$ y $\eta \in B$; el soporte de $\varphi(\xi + \eta)$ es el conjunto de los puntos (ξ, η) tales que $\xi + \eta \in K\varphi$; por consiguiente no tiene ningún punto común con $A(\xi) \times B(\eta)$, puesto que $\xi \in A$ y $\eta \in B$ implican que $\xi + \eta$ no pertenece a $K\varphi$; siendo vacía la intersección de los soportes de la distribución y de la función el valor de (31) es cero lo que prueba el teorema.

Del teorema se deduce fácilmente el corolario que sigue, que prueba que los tres ejemplos dados son álgebras de convolución:

Corolario: Si las distribuciones S y T tienen soporte acotado, también es acotado el soporte de $S * T$; si las distribuciones unidimensionales S y T tienen sus soportes en las semirrectas $x \geq a$ ($x \leq a$) y $x \geq b$ ($x \leq b$), $S * T$ tiene su soporte en la semirrecta $x \geq a + b$ ($x \leq a + b$); si las distribuciones S y T tienen sus soportes en el cono del futuro (pasado) $S * T$ tiene su soporte en el mismo cono.

Observación: Del teorema 6 se deduce que el soporte del producto de convolución está contenido en la adherencia de la suma de los soportes pero puede no ser igual; por ejemplo en el producto de convolución $\delta * 1 = 0$, δ tiene como soporte el origen, la constante 1 tiene como soporte el espacio entero; la suma es el espacio entero y el soporte del producto de convolución es vacío.

Definición 5.- En un álgebra de convolución una ecuación de convolución es una ecuación de la forma

$$(32) \quad A * X = B$$

en donde tanto el coeficiente A como el segundo miembro B, como la incógnita, tienen que pertenecer al álgebra de convolución dada.

Las ecuaciones de convolución comprenden como casos particulares ecuaciones de gran importancia matemática.

Si el coeficiente es combinación lineal de derivadas de la δ , $A = D\delta$, obtenemos las ecuaciones en derivadas parciales de coeficientes constantes.

Si suponemos que A es una función $K(x)$, o la suma $K(x) + \delta$, X una función incógnita $f(x)$ y el segundo miembro B una función conocida $g(x)$ obtenemos las ecuaciones integrales

$$(33) \quad \int_{\mathbb{R}^n} K(x-t) f(t) dt = g(x)$$

$$(34) \quad f(x) + \int_{\mathbb{R}^n} K(x-t) f(t) dt = g(x)$$

Si suponemos ahora que las funciones son de una variable y que sus soportes están contenidos en la semirrecta positiva, obtenemos la ecuación integral de Volterra con límites variables

$$(35) \quad f(x) + \int_0^x K(x-t) f(t) dt = g(x)$$

Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 7.- Dado un coeficiente A para que la ecuación (32) tenga una solución única, cualquiera que sea B , es necesario y suficiente que A tenga un inverso en el álgebra, es decir un elemento A^{-1} tal que $A \times A^{-1} = \delta$.

En efecto: si la solución existe siempre, existe cuando el segundo miembro es la δ , luego existe el inverso.

Recíprocamente si existe el inverso, se ve que la solución de (32) es $A^{-1} * B$ y es única pues de $A * X = A * Y$, se obtiene concluyendo con A^{-1} , $X = Y$.

Observemos que el inverso de A no es otra cosa que la solución elemental de la ecuación de convolución (segundo miembro $= \delta$.)

Un ejemplo de ecuación que no tiene solución elemental se obtiene en el álgebra E' cuando A es una función indefinidamente derivable, pues por el teorema 3, $A * X$ será siempre una función indefinidamente derivable y por lo tanto no puede ser la δ .

La validez del teorema 7 exige que se consideren únicamente las distribuciones del álgebra, lo que permite efectuar los productos de convolución y aplicar las propiedades asociativa y conmutativa. Si no se está en un álgebra el teorema deja de ser cierto.

Por ejemplo en el espacio de tres dimensiones la ecuación de Laplace se escribe $\Delta \delta * X = B$. La solución elemental de esta ecuación es (Capítulo III nº 18) $(-4\pi r)^{-1} + H$ siendo H una distribución armónica, es decir solución de la ecuación homogénea, cualquiera por consiguiente hay infinitos inversos de $\Delta \delta$.

En el caso del álgebra de convolución cuando A no tenga inverso, la solución de (32) depende de cual sea el segundo miembro, en unos casos la ecuación no tendrá solución, en otros tendrá solución única y en otros puede tener infinitas soluciones.

44.- Derivación de orden no entero.

Las distribuciones Y_m (Capítulo III nº 16) pertenecen al álgebra D'_+ . Su convolución con cualquier distribución de esta álgebra nos va a permitir definir las derivadas de orden complejo cualquiera de la distribución.

Definición 6.- La primitiva $I^m T$ y la derivada $D^m T$ de una distribución T de soporte contenido en la semirrecta $x \geq 0$, se definen cualquiera que sea el número complejo m por las fórmulas:

$$(36) \quad I^m T = Y_m * T \quad ; \quad D^m T = \underline{Y}_m * T$$

Vamos a probar primero que estas primitivas e integrales generalizadas coinciden con las ordinarias cuando m es un número natural $\ell \geq 0$. Se tiene:

$$D^\ell T = Y_{-\ell} * T = \delta^{(\ell)} * T = T^{(\ell)}$$

lo que prueba la coincidencia con la derivación ordinaria. Aplicando la fórmula de derivación de los Y_m se tiene:

$$(37) \quad \frac{d^\ell}{dx^\ell} [I^\ell T] = \frac{d^\ell}{dx^\ell} [Y_\ell * T] = \frac{d^\ell Y_\ell}{dx^\ell} * T = Y_0 * T = \delta * T = T$$

lo que prueba que $I^\ell T$ es una primitiva de orden ℓ de T .

Esta primitiva queda además caracterizada por ser la única que tiene su soporte contenido en la semirrecta $x \geq 0$. En efecto dos primitivas distintas difieren en un polinomio arbitrario de orden ℓ . Si las dos tienen su soporte en la semirrecta también tiene que tenerlo el polinomio, pero el único polinomio que cuyo soporte no es la recta entera es el idénticamente nulo, luego ambas primitivas son idénticas.

Cuando T es una función $f(x)$ este resultado puede probarse directamente a partir de la fórmula (1). Así por ejemplo

$$I^\ell f(x) = \int_0^x f(t) Y(x-t) dt = \int_0^x f(t) dt$$

Una fórmula fundamental de esta teoría es la siguiente

$$(38) \quad IP [I^q T] = IP + q T, \text{ o lo que es lo mismo}$$

$$DP [D^q T] = DP + q T$$

Como

$$IP [I^q T] = Y_p * (Y_q * T) = (Y_p * Y_q) * T$$

la fórmula (38) quedará probada si probamos la fórmula

$$(39) \quad Y_p * Y_q = Y_{p+q}$$

Quando p y q tiene su parte real ≥ 0 , las distribuciones Y_p e Y_q son funciones y la fórmula (33) toma la forma

$$\int_0^{\infty} \frac{(x-t)^{p-1}}{\Gamma(p)} \frac{x^{q-1}}{\Gamma(q)} = \frac{x^{p+q-1}}{\Gamma(p+q)} \quad \text{para } x > 0$$

y esta fórmula es un resultado de la teoría clásica de las funciones eulerianas.

Tomemos ahora una función fija de prueba y fijemos el valor de q . Las funciones de la variable compleja p

$$\Phi(p) = \langle Y_p * Y_q, \varphi(x) \rangle \quad \Phi_1(p) = \langle Y_{p+q}, \varphi(x) \rangle$$

son funciones enteras e iguales en el semiplano parte real de $p \geq 0$; luego son iguales en todo el plano. La fórmula (39) queda ahora probada para cualquier valor de p y valores de q de parte real positiva. Repitiendo el mismo razonamiento para las funciones anteriores consideradas como funciones de q para un p fijo se prueba la fórmula (39) para todos los valores de p y de q .

De acuerdo con lo establecido en el teorema 4 si las distribuciones T_n tienen como límite, en D'_+ , la distribución T , el límite de $I^m T_n$ es $I^m T$.

Resultados análogos pueden establecerse para el álgebra D'_+ .

También pueden obtenerse resultados de este tipo para el álgebra D'_+ reemplazando las distribuciones Y_m por las Z_m de Marcel Riesz; se define así para m complejo el lorentziano de orden m de una distribución mediante la fórmula

$$(40) \quad \square^m T = Z_{-2m} * T \quad \text{que cumple} \quad \square^m [\square^q T] = \square^{m+q} T$$

5.- Componentes de Plemelj.

Tomemos una distribución unidimensional T . Se denominan componentes de Plemelj, a las distribuciones

$$(41) \quad T^+ = T * \delta^+ \quad T^- = T * \delta^-$$

cuando tienen sentido los productos de convolución. Es cla-

ro que se tiene:

$$(42) \quad T^+ + T^- = T * (\delta^+ - \delta^-) = T * \delta = T$$

Si se tiene en cuenta la fórmula (34) del Capítulo III obtenemos como componentes de Plemelj de $\delta^{(n)}$,

$$\delta^{(n)+} = \frac{\delta^{(n)}}{2} - \frac{1}{2\pi i} \frac{d^n}{dx^n} \vee_p \frac{1}{x} = \frac{\delta^{(n)}}{2} - \frac{(-1)^n n!}{2\pi i} \text{pf} \left(\frac{1}{x^{n+1}} \right)$$

y análogamente

$$\delta^{(n)-} = \frac{\delta^{(n)}}{2} + \frac{(-1)^n n!}{2\pi i} \text{pf} \left(\frac{1}{x^{n+1}} \right)$$

Si consideramos ahora distribuciones cuatridimensionales del espacio (x, y, z, t) sus componentes de Plemelj se definen como las convoluciones con las distribuciones unidimensionales δ^{\pm} definidas en el espacio de la coordenada temporal t .

Son interesantes las componentes de Plemelj de las distribuciones (Capítulo VI nº 19) D_r y D_a que nos dan las cuatro dimensiones D_r^+ , D_r^- , D_a^+ y D_a^- . En particular tiene interés la distribución $D_c = D_r^+ + D_a^-$ que es la denominada delta causal de Feynman. (9)

(9) Un estudio algo más detallado de estas distribuciones puede verse en González Domínguez (1).

C A P I T U L O V I I I
TRANSFORMADAS DE FOURIER.

46.- Transformadas integrales.

La teoría de las transformaciones integrales, de gran importancia en Matemáticas desde hace cerca de dos siglos, es un instrumento poderoso para resolver los problemas de contorno de las ecuaciones de la física.

La teoría de las transformaciones integrales queda incluida como caso particular de la teoría de las aplicaciones lineales entre dos espacios vectoriales abstractos, que, en el caso de las transformaciones integrales, son espacios funcionales; la aplicación es la que a una función $f(x)$ de un cierto espacio hace corresponder otra función $F(t)$ mediante la fórmula

$$(1) \quad I [f] = F(t) = \int_{\Delta} K(x,t) f(x) dx$$

Tenemos así la siguiente definición:

Definición 1.- Una transformación integral de núcleo $K(x,t)$ es una aplicación que hace corresponder a las funciones $f(x)$ de un cierto espacio vectorial de funciones, la función $F(t)$ definida por (1).

La existencia de la transformación depende de la convergencia de la integral para los distintos valores de t .

Es inmediato que la transformación es lineal es decir que se tiene:

$$I [a f(x) + b g(x)] = a I [f(x)] + b I [g(x)]$$

Las transformaciones más utilizadas para las funciones de una variable son las siguientes:

a) Transformadas de Fourier:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathcal{F}[f(x)] = C(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \lambda x} dx \\ \overline{\mathcal{F}}[f(x)] = \overline{C}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i \lambda x} dx \end{cases}$$

b) Transformada de Laplace:

$$(3) \quad F(p) = \int_0^{\infty} e^{-p x} f(x) dx$$

c) Transformada coseno de Fourier:

$$(4) \quad c_1(\lambda) = 2 \int_0^{\infty} \cos(2\pi \lambda x) f(x) dx$$

d) Transformada seno de Fourier:

$$(5) \quad c_2(\lambda) = 2 \int_0^{\infty} \sin(2\pi \lambda x) f(x) dx$$

e) Transformada de Hankel:

$$(6) \quad \phi_{\nu}(\xi) = \frac{2\pi}{\xi^{\nu}} \int_0^{\infty} x^{\nu+1} J_{\nu}(2\pi \xi x) f(x) dx$$

en donde J es la función de Bessel de primera especie y orden ν .

f) Transformada de Mellin:

$$(7) \quad M(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx$$

Nos ocuparemos únicamente de las dos primeras; estudiaremos la de Fourier en este capítulo y el estudio de la de Laplace será objeto del siguiente.

Extenderemos estas teorías a las distribuciones: esta extensión es de importancia fundamental pues con ella la teoría alcanza una generalidad y una armonía imposible de conseguir si no se sale del dominio de las funciones.

47.- Definición y propiedades elementales de la transformada de Fourier de una función.-

Definición 2.- Dada una función de una variable real sumable en toda la recta su transformada de Fourier $\mathcal{F}[f(x)]$ es la función $C(\lambda)$ definida por la fórmula (2). Se define también la transformada $\mathcal{F}[f(x)]$ cambiando en (2) el signo del exponente.

Es inmediato que, con la hipótesis que hemos hecho de sumabilidad de $f(x)$, la transformada $C(\lambda)$ está bien definida para todo valor de λ ; como más adelante ampliaremos enormemente el campo de definición al extender la transformada de Fourier a las distribuciones trabajaremos por el momento con la hipótesis de sumabilidad de $f(x)$. Se tiene:

Teorema 1.- La transformada de Fourier es una función $C(\lambda)$ continua en todos los puntos, acotada y cumple con la condición $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} C(\lambda) = 0$

Demostraremos solamente la primera parte del teorema.

Sea $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$; la continuidad quedará probada si probamos que $C(\lambda_n) \rightarrow C(\lambda_0)$. Las funciones $e^{-2\pi i \lambda_n x} f(x)$ convergen para $n \rightarrow \infty$ hacia la $e^{-2\pi i \lambda_0 x} f(x)$ y como su módulo es el de $f(x)$ se puede aplicar el teorema de Lebesgue de paso al límite bajo el signo integral y se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} C(\lambda_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \lambda_n x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \lambda_0 x} f(x) dx \\ &= C(\lambda_0) \end{aligned}$$

lo que prueba la continuidad; para probar la acotación basta observar que, cualquiera que sea λ se tiene

$$(8) \quad |C(\lambda)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \leq M$$

Supongamos ahora que $f(x)$ sea además derivable y que su

derivada $f'(x)$ sea también sumable. Entonces se tiene:

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f'(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - f(0)$$

Analogamente se prueba que existe el límite de $f(x)$ para $x \rightarrow -\infty$, y como $f(x)$ es sumable ambos límites tienen que ser cero. Teniendo esto en cuenta si en (2) integramos por partes se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \lambda x} f(x) dx = \frac{1}{2\pi i \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \lambda x} f(x) dx$$

es decir si $C(\lambda) = \mathcal{F}[f(x)]$,

$$\mathcal{F}[f'(x)] = 2\pi i \lambda C(\lambda)$$

Este proceso puede repetirse si $f(x)$ admite derivadas todas sumables hasta el orden m y se tiene:

Teorema 2: Si $f(x)$ admite derivadas sumables hasta el orden m y si $C(\lambda)$ es su transformada de Fourier se tiene:

$$(9) \quad \mathcal{F}[f^{(m)}(x)] = (2\pi i \lambda)^m C(\lambda)$$

Analogamente se obtiene para la transformada $\overline{\mathcal{F}}$

$$(9') \quad \overline{\mathcal{F}}[f^{(m)}(x)] = (-2\pi i \lambda)^m \overline{\mathcal{F}}[f(x)]$$

En lo sucesivo estableceremos únicamente las fórmulas para la transformada \mathcal{F} ; las análogas para la $\overline{\mathcal{F}}$ se obtiene generalmente en forma inmediata cambiando $-2\pi i \lambda$ en $2\pi i \lambda$.

De (9) se deduce la importante acotación

$$(10) \quad |C(\lambda)| \leq \frac{1}{|2\pi \lambda|^m} \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m)}(x)| dx = \frac{K}{|\lambda|^m}$$

que nos indica que, cuanto mayor sea el orden de las derivadas sumables que admite $f(x)$, mayor es el decrecimiento de

$C(\lambda)$ en el infinito.

Derivemos formalmente (2) respecto de λ . Tenemos:

$$(11) \quad C'(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \lambda x} (-2\pi i x) f(x) dx$$

Según el teorema 18 del Capítulo I, la derivación es válida si el integrando de (11) es una función sumable, es decir si es sumable la función $xf(x)$. Reiterando m veces la derivación, obtenemos:

Teorema 3.- Si $x^m f(x)$ es sumable, la transformada de Fourier $C(\lambda)$ de $f(x)$ es derivable hasta el orden m y se tiene:

$$(12) \quad C^{(m)}(\lambda) = \mathcal{F}[(-2\pi i x)^m f(x)]$$

de la que se deduce la acotación

$$(13) \quad |C^{(m)}(\lambda)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |2\pi x|^m |f(x)| dx$$

Vamos a obtener ahora las fórmulas de los cambios elementales de variable.

Se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(Kx)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \lambda x} f(Kx) dx = (\text{poniendo } Kx = t) \\ &= \frac{1}{|K|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \frac{\lambda}{K} t} f(t) dt = \frac{1}{|K|} C\left(\frac{\lambda}{K}\right) \end{aligned}$$

es decir

$$(14) \quad \mathcal{F}[f(Kx)] = \frac{1}{|K|} C\left(\frac{\lambda}{K}\right)$$

y poniendo $\frac{1}{K} = h$

$$(14') \quad C(h\lambda) = \frac{1}{|h|} \mathcal{F}\left[f\left(\frac{x}{h}\right)\right]$$

En particular

$$(15) \quad C(-\lambda) = \mathcal{F}[f(-x)]$$

por lo tanto si una función es par o impar lo mismo le sucede a su transformada de Fourier.

Se tiene:

$$(16) \mathcal{F}[f(x + K)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \lambda x} e^{-2\pi i \lambda K} f(x) dx = e^{-2\pi i \lambda K} \mathcal{F}[f(x)]$$

$$(17) c(\lambda + h) = \mathcal{F}[e^{-2\pi i h x} f(x)]$$

Otra fórmula que puede resultar de utilidad es

$$(18) \mathcal{F}[f(x)^*] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \lambda} f(x)^* dx = \mathcal{F}[f(x)]^*$$

en donde con el signo $*$ designamos el complejo conjugado.

Observación: No existe uniformidad en la definición de la transformada de Fourier según los autores; algunos definen la transformada en forma ligeramente diferente de la que hemos adoptado. Todas las definiciones entran dentro de la fórmula general

$$D(\lambda) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \omega \lambda x} f(x) dx \quad (\omega \text{ y } h \text{ reales y } \neq 0).$$

Además de los valores $h = 1, \omega = \pm 2\pi$ que hemos adoptado es también muy usual el tomar como valores

$$\omega = \pm 1, h = \sqrt{2\pi}; \quad \omega = \pm 1, h = 1$$

La adaptación de las fórmulas en los diferentes casos se hace teniendo en cuenta la siguiente fórmula de cambio de variable,

$$D(\lambda) = \frac{1}{h} c\left(\frac{\omega}{2\pi} \lambda\right)$$

EJERCICIOS:

1) Probar las fórmulas

$$(19) \quad \mathcal{F}[f(x)] = \frac{d^m}{d\lambda^m} \frac{\text{sen } 2\pi\lambda a}{\pi\lambda}$$

siendo $f(x) = (-2\pi i x)^m$ para $|x| \leq a$ y cero en los demás puntos.

$$(20) \quad \mathcal{F}\left[Y(x) e^{-a|x|} \frac{x^m}{n!}\right] = \frac{1}{(a+2\pi i\lambda)^{m+1}} \quad (n \text{ entero})$$

$$(21) \quad \mathcal{F}[e^{-\pi x^2}] = e^{-\pi \lambda^2}$$

$$(21') \quad \mathcal{F}[e^{-K x^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{K}} e^{-\frac{\pi^2}{K} \lambda^2}$$

$$(22) \quad \mathcal{F}[e^{-a|x|}] = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 \lambda^2}$$

Indicaciones: en (19) y (20) probar primero la fórmula para $m = 0$. En (21) hacer en la integral el cambio de variable $z = x + i\lambda$, y aplicar después el teorema de la integral de Cauchy al rectángulo de vértices $(-a, a, a + i\lambda, -a + i\lambda)$.

Hacer en todos los casos el estudio de la aplicación de los teoremas 2 y 3 y de las cotaciones (10) y (13).

2) Probar las fórmulas

$$(23) \quad \mathcal{F}[\cos(2\pi x a) f(x)] = \frac{c(\lambda+a) + c(\lambda-a)}{2}$$

$$(24) \quad \mathcal{F}[\text{sen}(2\pi x a) f(x)] = \frac{c(\lambda-a) - c(\lambda+a)}{2i}$$

3) Probar que si f es par $\mathcal{F}[f] = \overline{\mathcal{F}[f]}$ y que si f es impar $\mathcal{F}[f] = -\overline{\mathcal{F}[f]}$

48.- El espacio S.

Vamos a tratar de extender la transformación de Fourier a las distribuciones y para ello vamos a ver lo que ocurre con la teoría anterior cuando consideramos la función $f(x)$ como una distribución.

Es evidente que se cumple la primera condición necesaria para poder hacer la extensión: si se reemplaza la función $f(x)$ por otra $\tilde{f}(x)$ igual a $f(x)$ p.p., la transformada de Fourier, $C(\lambda)$ no se altera.

$C(\lambda)$ es una función continua, luego es localmente sumable, (aún cuando pueda no ser sumable, lo que es uno de los serios inconvenientes de la teoría clásica), podemos entonces considerarla como una distribución y se tiene:

$$\langle C(\lambda), \varphi(\lambda) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \lambda} f(x) dx d\lambda$$

pero como $\varphi(x) e^{-2\pi i x \lambda} f(x)$ es sumable en el espacio producto de las x por las λ , se puede invertir las integraciones y se tiene:

$$\langle C(\lambda), \varphi(\lambda) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \lambda} \varphi(\lambda) d\lambda dx = \langle f(x), \mathcal{F}[\varphi] \rangle$$

Esta relación sugiere la extensión de la transformada de Fourier a las distribuciones por la relación

$$(25) \quad \langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi] \rangle$$

Para dar sentido a esta fórmula habrá que ver las propiedades que tienen las funciones que son transformadas de Fourier de una función $\varphi(x)$ del espacio D .

La existencia y la derivabilidad de la transformada de Fourier dependen de que las funciones $e^{-2\pi i \lambda x} \varphi(x)$ y $e^{-2\pi i \lambda x} (-2\pi i x) \varphi(x)$ sean sumables; para los valores reales de λ , únicos que hasta ahora hemos considerado, la exponencial tiene módulo 1 y no influye para nada en la sumabilidad pero si tomamos valores complejos de λ , $\lambda = \alpha + i \beta$, la exponencial tiene un término con exponente real y ello en general alterará las propiedades de sumabilidad, y por ser el intervalo de integración infinito, pero si φ perte-

nece a D la integración se hace sobre un intervalo finito y por lo tanto las funciones $e^{-2\pi i \lambda x} \varphi(x)$ y $e^{-2\pi i \lambda x} (-2\pi i x) \varphi(x)$ son sumables para los valores complejos de λ . La fórmula (2) define en este caso una función $C(\lambda)$ definida en todo el plano complejo y derivable en él, es decir una función entera; se tiene entonces:

Teorema 4: La transformada de Fourier de una función $\varphi(x)$ de soporte acotado es una función $C(\lambda)$ que se puede prolongar al campo complejo y dicha prolongación nos da una función entera.

La función entera $C(\lambda)$ no puede ser nula en un segmento del eje OX sin ser idénticamente nula; luego:

Corolario: La transformada de Fourier de una función de soporte acotado no es una función de soporte acotado, salvo que sea idénticamente nula. Más adelante

veremos que la anulación de la transformada de f implica que f es nula p.p.

Por lo tanto, si para mantener la definición clásica de la transformada de una función, queremos definir la transformada de una distribución por la fórmula (26) tenemos que sacar de las funciones de prueba la restricción de ser de soporte acotado.

A primera vista podría pensarse en considerar las distribuciones del espacio E' , distribuciones de soporte acotado, que definimos en el Capítulo IV nº 25, pero acabamos de ver que si nos limitamos a las funciones de soporte compacto sus transformadas de Fourier no son ya de soporte compacto y no se podrá reiterar la transformación de Fourier.

La posibilidad de la extensión fué conseguida por Schwartz, creando un nuevo espacio de prueba, el de las funciones indefinidamente derivables de decrecimiento rápido en el infinito, en las que se reemplaza la condición de

ser soporte acotado, es decir de ser nulas en un entorno del infinito, por la condición de que las funciones en el infinito sean infinitésimas de un orden mayor que cualquier infinito potencial. Precizando tenemos:

Definición 3.- Se denomina S al espacio vectorial de las funciones complejas de variable real que son indefinidamente derivables y tales que se tenga, cualesquiera que sean los números enteros l y m mayores o iguales que cero,

$$(26) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^l \varphi^{(m)}(x) = 0$$

Un ejemplo de función del espacio S es la función e^{-x^2} . La estructura del espacio S se define en la forma siguiente:

Definición 4.- Una sucesión de funciones $\varphi_i(x)$ del espacio S se dice que converge hacia la función $\varphi(x)$ del mismo espacio, si cualesquiera que sean los enteros $> 0, l$ y m , cada una de las sucesiones $x^l \varphi_i^{(m)}(x)$ convergen uniformemente sobre el eje real hacia la función $x^l \varphi_i(x)$.

Si comparamos las definiciones 3 y 4 con la dada en el Capítulo IV (def. 3) para el espacio E de las funciones indefinidamente derivables y con la definición del espacio D se ve que toda función de D lo es de S y toda de S lo es de E. Por otra parte si φ es límite de las φ_i en D, también lo es en S, pues al estar todas contenidas en un compacto fijo la convergencia uniforme de las $\varphi_i^{(m)}$ hacia $\varphi^{(m)}$ implica la convergencia uniforme de las $x^l \varphi_i^{(m)}$ hacia $x^l \varphi^{(m)}$, puesto que la potencia está acotada en el compacto fijo. Es además inmediato que si las φ_i convergen hacia φ en S converge hacia φ en E.

Por lo tanto D es denso en S que a su vez es denso en E, entonces D es denso en S.

De la definición 3 se deduce inmediatamente:

Teorema 5.- Si $\varphi(x)$ pertenece a S, la función $P(x) \varphi^{(m)}(x)$, en donde $P(x)$ es un polinomio pertenece también a S.

Antes que estudiar la transformación de Fourier en el espacio S observemos que las funciones $x^l \varphi^{(m)}(x)$ siendo continuas y con límite cero en el infinito son acotadas; son también sumables puesto que siendo acotada $x^{l+2} \varphi^{(m)}(x)$, se tiene

$$|x^l \varphi^{(m)}(x)| = \frac{|x^{l+2} \cdot \varphi^{(m)}(x)|}{|x|^2} \leq \frac{M}{|x|^2}$$

es decir que para $x \rightarrow \infty$, $x^l \varphi^{(m)}(x)$ es un infinitésimo de orden menor o igual que dos, luego es sumable.

Por lo tanto si $\varphi(x)$ pertenece al espacio S la función

$$\frac{d^m}{dx^m} [x^l \varphi^{(m)}(x)]$$

pertenece a S por ser combinación lineal de potencias de x y de derivadas de φ .

Sea $\psi(\lambda)$ la transformada de Fourier de una función $\varphi(x)$ del espacio S; por ser sumable $x^l \varphi(x)$ para cualquier valor de l , $\psi(\lambda)$ es indefinidamente derivable; además por tener $\varphi(x)$ derivadas sumables de cualquier orden podemos aplicar para valores cualesquiera de los índices de derivación y de los exponentes de x las igualdades (9) y (12) y se tiene:

$$(27) \quad \psi^{(m)}(\lambda) = \mathcal{F} [(-2\pi i x)^m \varphi(x)]$$

$$(2\pi i \lambda)^{l+1} \psi^{(m)}(\lambda) = \mathcal{F} \left[\frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}} (-2\pi i x)^m \varphi(x) \right]$$

El segundo miembro es la transformada de Fourier de una función del espacio S; luego es sumable y se tiene:

$$(28) \quad |\lambda|^l \psi^{(m)}(\lambda) \leq \frac{K}{|\lambda|} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

por lo tanto la transformada de Fourier de una función del espacio S es también del espacio S .

Tomemos una sucesión $\varphi_n(x)$ que convergen en S hacia 0; vamos a ver que las $\mathcal{F}[\varphi_n(x)] = c_n(\lambda)$ convergen en S hacia 0. Aplicando (27) y (27')

$$(2\pi i \lambda)^m c_n^{(m)}(\lambda) = \mathcal{F}\left[\frac{d^m}{dx^m} (-2\pi i x)^m \varphi_n(x)\right] = \mathcal{F}[\phi_n(x)]$$

$$|\lambda|^m |c_n^{(m)}(\lambda)| \leq \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n(x)| dx$$

Pero la convergencia de las φ_n en S implica la convergencia uniforme en toda la recta de las ϕ_n hacia cero luego se puede pasar al límite bajo el signo integral y se tiene:

$$\text{para } n \geq n_0 \quad |\lambda|^m |c_n^{(m)}(\lambda)| \leq \epsilon$$

lo que de acuerdo con la definición 4 prueba lo afirmado.

Resultados idénticos se obtienen para la transformación \mathcal{F} .

Podemos entonces enunciar el siguiente teorema:

Teorema 6.- Si la función φ pertenece al espacio S , sus transformadas $\mathcal{F}[\varphi]$ y $\mathcal{F}[\varphi]$ son también funciones del espacio S ; si las φ_n convergen hacia φ en S , sus transformadas convergen hacia las correspondientes transformadas de φ .

Las dos transformaciones \mathcal{F} y $\overline{\mathcal{F}}$ aplican el espacio S de las funciones $\varphi(x)$ en el espacio S de las funciones $\varphi(\lambda)$; esta aplicación conserva, por ser lineal, las operaciones vectoriales, y, según acabamos de ver, conserva los límites es decir la estructura; son por consiguiente operadores lineales continuos. Más adelante probaremos que la aplicación es biunívoca, por lo tanto los operadores serán isomorfismos y además veremos también que son inversos el uno del otro.

491.- Distribuciones temperadas.-

Definición 5.- Denominaremos distribuciones temperadas a los elementos del espacio D' dual del S .

Las distribuciones temperadas son por lo tanto las funcionales lineales y continuas definidas en el espacio S ; la estructura será dada, como en todos los casos anteriores, por la convergencia puntual: $\lim. T_n = T$ en S' si para toda φ de S se tiene $\lim. \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$.

Las distribuciones temperadas son un caso particular de las distribuciones 5.- En efecto si $T \in S'$, como D está contenido en S , $\langle T, \varphi \rangle$ está definida para toda φ de D . Además si $\lim. \varphi_n = 0$ en D , se tiene $\lim \varphi_n = 0$ en S luego $\lim \langle T, \varphi_n \rangle = 0$. Por otra parte si T es temperada el conocimiento de $\langle T, \psi \rangle$ para toda ψ de D permite, por continuidad definir $\langle T, \varphi \rangle$ para todo valor φ de S .

Un razonamiento análogo nos prueba que toda distribución de soporte compacto es temperada.

Vamos ahora a dar un ejemplo de una distribución no temperada; dicho ejemplo puede tomarse dentro de las funciones localmente sumables. Sea $f(x)$ una función localmente sumable positiva; para que $f(x)$ no sea temperada es suficiente que exista una función $\varphi(x)$ positiva del espacio S tal que el producto de la f y de la φ no sea sumable. En efecto sabemos que existe una sucesión de funciones φ_n de D cuyo límite en S es φ , y que podemos suponer además positivas; el producto escalar de la f por las φ_n de D , es

$$\langle f, \varphi_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_n(x) dx$$

Como las φ_n convergen puntualmente hacia la φ podemos aplicar el teorema 17 del capítulo I y se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, \varphi_n \rangle = \infty$$

lo que prueba que es imposible definir el producto escalar de $\langle f, \varphi \rangle$ ya que este valor debe ser el límite de $\langle f, \varphi_n \rangle$ y ese límite no existe.

En particular si tomamos $f(x) = e^x$ y $\varphi(x) = e^{-x}$ ^{2/3} vemos que e^x no es una distribución temperada.

Ejemplos de distribuciones temperadas: Además del primer ejemplo de las distribuciones de soporte compacto tenemos los siguientes:

2º Las funciones sumables o de cuadrado sumable: En efecto si $f(x)$ es sumable o de cuadrado sumable, poniendo

$$(29) \quad \langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x), \varphi(x) dx$$

esta funcional lineal está definida para toda φ de S por ser φ acotada y de cuadrado sumable. Si las $\varphi_n(x)$ convergen hacia $\varphi(x)$ en S , convergen uniformemente en toda la recta y se puede pasar al límite bajo el signo integral lo que asegura la continuidad de la funcional.

3º Las funciones localmente sumables de crecimiento lento. Se entiende por una función de crecimiento lento a la que en el infinito es de orden menor que algún infinito potencial, es decir cuando existe un número natural k tal que en un entorno del infinito se cumpla la condición

$$|f(x)| \leq A |x|^k \quad (A \text{ constante})$$

En efecto en este caso (29) está definida para toda φ de S ya que ésta cumple con la condición

$$\varphi(x) \leq \frac{A}{|x|^{k+2}}$$

en un entorno del infinito, lo que asegura la sumabilidad de $f(x)\varphi(x)$.

Se puede también probar fácilmente la continuidad de la funcional. Hágase como EJERCICIO.

(1) Hay que detallar más

4º La derivada y el producto por x de una distribución temperada son también distribuciones temperadas.

Basta ver que T' y xT están definidas para toda función de D por las fórmulas

$$\langle T', \varphi(x) \rangle = \langle T, -\varphi'(x) \rangle ; \langle xT, \varphi(x) \rangle = \langle T, x\varphi(x) \rangle$$

que se extienden por continuidad a las funciones de S puesto que T es por hipótesis de S' y $\varphi'(x)$ y $x \cdot \varphi(x)$ son de S cuando lo es φ .

De acá se deduce que todo polinomio de una distribución temperada de derivación con coeficientes que sea polinomios en x es una distribución temperada.

En particular las pseudofunciones (Cap. III, nº 16) siendo derivadas de potencias de x , es decir de funciones de crecimiento lento son distribuciones temperadas.

El estudio de las condiciones necesarias y suficientes para que una distribución sea temperada puede verse en Schwartz (1) vol II, pag. 95.

50.- Transformada de Fourier de una distribución temperada.

Definición 6.- Si T es una distribución temperada sus transformadas de Fourier quedan definidas por las relaciones:

$$(30) \quad \langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}[\varphi]} \rangle ; \langle \overline{\mathcal{F}[T]}, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi] \rangle$$

En virtud del teorema 6 estas relaciones definen funcionales lineales y continuas en el espacio S . Se obtiene entonces distribuciones temperadas. Además vimos en (26) que en el caso en que T sea una función la relación (30) coincide con la definición clásica.

Vamos ahora a generalizar para las distribuciones las fórmulas (9), (12), (14) y (16) que probamos para las funciones. Se tiene:

Teorema 7.- Si T es una distribución temperada se cumplen las siguientes relaciones:

$$(31) \quad \mathcal{F}[T^{(m)}(x)] = (2\pi i \lambda)^m \mathcal{F}[T(x)]$$

$$(32) \quad \mathcal{F}[(-2\pi i x)^m T(x)] = \frac{d^m}{d\lambda^m} \mathcal{F}[T(x)]$$

$$(33) \quad \mathcal{F}[T(kx)] = \frac{1}{|k|} v\left(\frac{\lambda}{|k|}\right); \quad v(\lambda) = \mathcal{F}[T(x)]$$

$$(34) \quad \mathcal{F}[\tau_a T(x)] = e^{-2\pi i \lambda a} \mathcal{F}[T(x)]$$

Para probar la primera si $\gamma(x) = \mathcal{F}[\varphi(\lambda)]$ se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[T^{(m)}(x)], \varphi(\lambda) \rangle &= \langle T^{(m)}(x), \gamma(x) \rangle = \langle T(x), (-1)^m \gamma^{(m)}(x) \rangle = \\ &= \langle T(x), (-1)^m \mathcal{F}[(-2\pi i \lambda)^m \varphi(\lambda)] \rangle = \\ &= \langle \mathcal{F}[T(x)], (2\pi i \lambda)^m \varphi(\lambda) \rangle = \langle (2\pi i \lambda)^m \mathcal{F}[T(x)], \varphi(\lambda) \rangle \end{aligned}$$

Probemos ahora (32). Se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[(-2\pi i x)^m T(x)], \varphi(\lambda) \rangle &= \langle T(x), (-2\pi i x)^m \gamma(x) \rangle = \\ &= \langle T(x), (-1)^m \mathcal{F}[\varphi^{(m)}(\lambda)] \rangle = \langle \mathcal{F}[T(x)], (-1)^m \varphi^{(m)}(\lambda) \rangle = \\ &= \langle \frac{d^m}{d\lambda^m} \mathcal{F}[T(x)], \varphi(\lambda) \rangle \end{aligned}$$

Para probar (33) se tiene, teniendo en cuenta (8) del Capítulo VI:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[T(kx)], \varphi(\lambda) \rangle &= \langle T(kx), \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \lambda x} \varphi(\lambda) d\lambda \rangle = \\ &= \langle T(x), \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \lambda \frac{x}{k}} \varphi(\lambda) d\lambda \rangle = \\ &= \langle T(x), \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \lambda x} \varphi(k\lambda) d\lambda \rangle = \langle T(x), \mathcal{F}[\varphi(k\lambda)] \rangle = \\ &= \langle v(\lambda), \varphi(k\lambda) \rangle = \frac{1}{|k|} \langle v(\lambda), |k| \varphi(k\lambda) \rangle = \frac{1}{|k|} \langle v\left(\frac{\lambda}{k}\right), \varphi(\lambda) \rangle \\ &= \langle \frac{1}{|k|} v\left(\frac{\lambda}{k}\right), \varphi(\lambda) \rangle. \end{aligned}$$

Finalmente probaremos (34)

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[\tau_a T(x)], \varphi(\lambda) \rangle &= \langle \tau_a T(x), \gamma(x) \rangle = \langle T(x), \gamma(x+a) \rangle = \\ &= \langle T(x), \mathcal{F}[e^{-2\pi i \lambda a} \varphi(\lambda)] \rangle = \langle e^{-2\pi i \lambda a} \mathcal{F}[T(x)], \varphi(\lambda) \rangle \end{aligned}$$

Naturalmente fórmulas análogas cambiando i en $-i$ se obtienen para la transformada $\overline{\mathcal{F}}$.

Las transformadas de las distribuciones de Dirac, son las siguientes:

$$(35) \quad \mathcal{F}[\delta] = 1 \quad \overline{\mathcal{F}}[\delta] = 1$$

En efecto

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[\delta(x)], \varphi(x) \rangle &= \langle \delta(x), \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \lambda x} \varphi(x) dx \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \\ &= \langle 1, \varphi(x) \rangle \end{aligned}$$

y lo mismo se prueba la segunda. Aplicando el teorema 7 se tiene

$$(36) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}[\delta^{(m)}(x)] &= (2\pi i \lambda)^m \\ \mathcal{F}[\delta_{(a)}(x)] &= e^{-2\pi i \lambda a} \end{aligned}$$

Estas fórmulas se pueden también deducir del siguiente **teorema** que generaliza el teorema 4:

Teorema 8.- La transformada de Fourier de una distribución T de soporte acotado es una función de la variable λ que se puede prolongar al campo complejo y dicha prolongación nos da una función entera.

En efecto: siendo T de soporte compacto se puede aplicar a la función $e^{-2\pi i x \lambda}$, cualquiera que sea el valor real o complejo del parámetro λ . Se obtiene así una función $V(\lambda)$ del parámetro:

$$V(\lambda) = \langle T, e^{-2\pi i x \lambda} \rangle$$

que, de acuerdo con lo dicho en el nº 41, es indefinidamente

derivable; por lo tanto es una función entera.

Limitémosnos ahora a considerar los valores reales de λ y sea $\varphi(\lambda)$ una función de D . Se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[T(x)], \varphi(\lambda) \rangle &= \langle T(x), \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \lambda} \varphi(\lambda) d\lambda \rangle = \\ &= \langle T(x), \langle \varphi(\lambda), e^{-2\pi i x \lambda} \rangle \rangle = \langle T(x) \times \varphi(\lambda), e^{-2\pi i x \lambda} \rangle = \\ &= \langle \varphi(\lambda), \langle T(x), e^{-2\pi i x \lambda} \rangle \rangle = \langle \varphi(\lambda), v(\lambda) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) v(\lambda) d\lambda = \langle v(\lambda), \varphi(\lambda) \rangle. \end{aligned}$$

Todos los pasos están rigurosamente justificados puesto que $T(x) \times \varphi(\lambda)$ pertenece a $E'(x, \lambda)$ y $e^{-2\pi i x \lambda}$ pertenece a $E(x, \lambda)$; $\varphi(\lambda)$ pertenece a E' y $v(\lambda)$ pertenece a E ; $v(\lambda)$ pertenece a D' y $\varphi(\lambda)$ pertenece a D .

Las dos distribuciones $\mathcal{F}[T(x)]$ y $v(\lambda)$ coinciden en todos los puntos del espacio D y la primera es temperada, luego la segunda también lo es y coincide con la primera. Tenemos entonces probado el teorema y obtenemos la fórmula

$$(37) \quad \mathcal{F}[T(x)] = \langle T, e^{-2\pi i \lambda x} \rangle$$

de la transformada de Fourier de una distribución de soporte acotado,

51.- Fórmula de reciprocidad de la transformada de Fourier.

Comenzaremos por probar la fórmula

$$(38) \quad \mathcal{F}[1] = \delta \quad \overline{\mathcal{F}[1]} = \delta$$

En efecto: sea $\mathcal{F}[1] = S(\lambda)$; aplicando (31) se tiene:

$$0 = \mathcal{F}[0] = 2\pi i \lambda S(\lambda)$$

Es decir se tiene $\lambda S(\lambda) \equiv 0$, pero esto implica (lema 2 del nº 31) $S(\lambda) \equiv k\delta$. Apliquemos los dos miembros de

esta igualdad a $e^{-\pi \lambda^2}$ y obtenemos, teniendo en cuenta (37)

$$\begin{aligned} k &= \langle k \delta, e^{-\pi \lambda^2} \rangle = \langle \delta(\lambda), e^{-\pi \lambda^2} \rangle = \langle \mathcal{F}[1], e^{-\pi \lambda^2} \rangle = \\ &= \langle 1, \overline{\mathcal{F}[e^{-\pi \lambda^2}]} \rangle = \langle 1, e^{-\pi x^2} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1 \quad \delta(\lambda) = \delta \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar; de manera análoga se obtiene la demostración para $\overline{\mathcal{F}}$.

La fórmula (38) se acostumbra a escribir en forma incorrecta,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm 2\pi i x \lambda} d\lambda = 2 \int_0^{\infty} \cos(2\pi x \lambda) d\lambda = \delta(x)$$

Tomemos ahora una función $\varphi(x)$ de S y sea $\chi(\lambda) = \mathcal{F}[\varphi(x)]$ y $\phi(x) = \overline{\mathcal{F}}[\chi(\lambda)]$. Demos a x un valor a fijo pero arbitrario. Tenemos:

$$\begin{aligned} \phi(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i a \lambda} \chi(\lambda) d\lambda = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i \lambda (x-a)} \varphi(x) d x d \lambda = \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i \lambda t} \varphi(t+a) dt d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}[\varphi(t+a)] d\lambda = \\ &= \langle 1, \overline{\mathcal{F}}[\varphi(t+a)] \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}}[1], \varphi(t+a) \rangle \\ &= \langle \delta(t), \varphi(t+a) \rangle = \varphi(a) \end{aligned}$$

y como a es arbitrario se tiene para cualquier función $\varphi(x)$ de S ,

$$(39) \quad \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}[\varphi]] = \varphi \quad \mathcal{F}[\overline{\mathcal{F}}[\varphi]] = \varphi$$

la segunda probándose de forma análoga a la primera.

Podemos ahora completar el enunciado del teorema 6 en la forma que indicamos al establecerlo. Las dos aplicaciones \mathcal{F} y $\overline{\mathcal{F}}$ del espacio S de la x en el espacio S de la λ , son biunívocas puesto que dada una $\varphi(\lambda)$ se tiene

$$\varphi(\lambda) = \mathcal{F}[\varphi_1(x)]; \text{ siendo } \varphi_1(x) = \overline{\mathcal{F}}[\varphi(\lambda)]$$

y por otra parte de $\mathcal{F}[\varphi_1(x)] = \mathcal{F}[\varphi_2(x)]$, se deduce

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}[\varphi_1(x)] - \mathcal{F}[\varphi_2(x)]] = 0$$

es decir $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$.

Hemos probado así que las aplicaciones son biunívocas y (39) nos prueba que son inversas, luego podemos enunciar el siguiente teorema que completa el 6:

Teorema 9.- Las transformaciones \mathcal{F} y $\overline{\mathcal{F}}$ establecen entre los espacios S de las variables x y λ dos isomorfismos recíprocos.

Vamos ahora a extender el teorema 8 y la fórmula (39) al espacio S' de las distribuciones temperadas.

Ya hemos visto que $\mathcal{F}[T(x)]$ es una aplicación lineal del espacio S' con la variable x , en el espacio S' con la variable λ . Esta aplicación es además continua puesto que si $T = \lim T_n$ en S' se tiene

$$\lim \langle \mathcal{F}[T_n], \varphi \rangle = \lim \langle T_n, \overline{\mathcal{F}}[\varphi] \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}}[\varphi] \rangle = \langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle$$

es decir $\mathcal{F}[T] = \lim \mathcal{F}[T_n]$. Por otra parte

$$\langle \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}[T]], \varphi \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}}[\overline{\mathcal{F}}[\varphi]] \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

y por lo tanto probamos la fórmula de reciprocidad,

$$(40) \quad \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}[T]] = T ; \quad \mathcal{F}[\overline{\mathcal{F}}[T]] = T$$

y podemos enunciar el

Teorema 10.- Las transformaciones \mathcal{F} y $\overline{\mathcal{F}}$ establecen entre los espacios S' de las distribuciones temperadas en las variables x y λ dos isomorfismos recíprocos.

En particular si $\mathcal{F}[T] = 0$, entonces $T = 0$; el conocimiento de la transformada de Fourier de una distribución temperada T , caracteriza T .

La fórmula de reciprocidad (40) tiene un papel esencial

en la teoría de la transformación de Fourier. En la teoría clásica, la validez de la fórmula solo se puede establecer con condiciones generales restrictivas y aplicando métodos particulares para su extensión en diferentes casos.

Por ejemplo, si partimos de una función sumable $f(x)$ y definimos su transformada por la fórmula (2) en general la función $C(\lambda)$ no será sumable; para ello será necesario, pero desde luego no suficiente, que sea $f(x)$ igual p.p. a una función continua. En efecto si $C(\lambda)$ es sumable, la fórmula (40) establece la igualdad, en tanto que distribuciones, es decir la igualdad p.p., de $f(x)$ y de la función

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \lambda x} C(\lambda) d\lambda$$

que es continua. Si $f(x)$ fuese además continua sería igual en todos los puntos a $f_1(x)$ ya que dos funciones continuas iguales p.p. son iguales en todos los puntos.

Cuando $C(\lambda)$ no es sumable se puede todavía en la teoría clásica dar sentido a la fórmula de reciprocidad definiendo la transformada de Fourier de una función no sumable por distintos métodos de cálculo; todos ellos quedan comprendidos dentro de la teoría de transformada de Fourier para distribuciones.

Como consecuencia de la fórmula de reciprocidad vamos a demostrar las recíprocas de las fórmulas (35) y (36)

$$(41) \quad \mathcal{F} [(-2\pi i x)^m] = \delta^{(m)}(\lambda)$$

$$(42) \quad \mathcal{F} [e^{2\pi i a x}] = \delta_{(a)}(\lambda)$$

$$\text{En efecto } \overline{\mathcal{F}} [\delta^{(m)}(\lambda)] = (-2\pi i x)^m$$

$$\delta^{(m)}(\lambda) = \mathcal{F} [\overline{\mathcal{F}} [\delta^{(m)}(\lambda)]] = \mathcal{F} [(-2\pi i x)^m]$$

$$\overline{\mathcal{F}} [\delta_{(a)}(\lambda)] = e^{2\pi i a x}$$

$$\delta_{(a)}(\lambda) = \mathcal{F} [\overline{\mathcal{F}} [\delta_{(a)}(\lambda)]] = \mathcal{F} [e^{2\pi i a x}]$$

EJERCICIOS:

1º - Comprobar, haciendo el cálculo de las integrales por residuos la reciprocidad en las fórmulas (20) (21) y (22).

2º - Aplicando la fórmula de reciprocidad en (19) probar

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \quad (k > 0)$$

52.- Fórmula sumatoria de Poisson.

Consideremos la distribución $S(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_{(n)}(x)$. Esta

distribución es temperada puesto que

$$(43) \quad \langle S(x), \varphi(x) \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(n)$$

y esta serie es convergente por las condiciones de decrecimiento de la función $\varphi(x)$ de S , las cuales aseguran también la continuidad de la funcional definida por (43) en el espacio S . Se tiene:

$$(44) \quad \mathcal{F} \left[\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_{(n)}(x) \right] = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n(\lambda)$$

En efecto: sea

$$S_m(x) = \sum_{-m}^m \delta_n(x)$$

$$\mathcal{F}[S_m(x)] = \sum_{-m}^m e^{-2\pi i n \lambda}$$

y teniendo en cuenta la continuidad de la transformada de Fourier y la fórmula (1) del Capítulo IV

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_{(n)}(x) \right] &= \mathcal{F} \left[\lim S_m(x) \right] = \lim \mathcal{F} [S_m(x)] = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-2n\pi i \lambda} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n(\lambda) \end{aligned}$$

Por lo tanto si $\varphi(x)$ es una función del espacio S y $\gamma(\lambda)$ es su transformada de Fourier se tiene:

$$(45) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(n)$$

que es la denominada fórmula sumatoria de Poisson.

Aplicándola a la función $e^{-t\lambda^2}$ se tiene la siguiente fórmula de importancia en varias teorías matemáticas y de física teórica:

$$(46) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-t n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{t} n^2}$$

53.- Fórmula de Parseval-Plancherel.

Sea $\varphi(x)$ una función del espacio S y $\gamma(\lambda)$ su transformada de Fourier. Ambas funciones son evidentemente de cuadrado sumable en $(-\infty, \infty)$ y la longitud de φ en L^2 es:

$$|\varphi|_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \varphi(x)^* dx$$

Aplicando la fórmula (18) y la de reciprocidad se tiene:

$$|\varphi|_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda)^* e^{-2\pi i x \lambda} d\lambda dx$$

y como $\gamma(\lambda)$ es de S, $\gamma(\lambda) e^{-2\pi i x \lambda}$ es sumable y se tiene

$$|\varphi|_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda)^* \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i x \lambda} dx d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda)^* \gamma(\lambda) d\lambda = |\gamma|_{L^2}$$

es decir que se tiene la fórmula de Parseval-Plancherel

$$(47) \quad |\varphi|_{L^2} = |\mathcal{F}[\varphi]|_{L^2}$$

Sea ahora una función $f(x)$ perteneciente a L^2 ; pertenece también a S' . Consideremos el sistema de las funciones

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$$

en donde los $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite; es claro que las funciones ψ_n son del espacio S. Sean $C_1 \dots C_n$, los coeficientes de Hermite Fourier de $f(x)$ y sean $\sigma_m(x)$ las sumas parciales

$$\sum_{-m}^m C_n \psi_n$$

Las σ_m pertenecen al espacio S y lo mismo ocurre con sus transformadas de Fourier $\gamma_m(\lambda)$. Las σ_m convergen en L^2 (es decir en media cuadrática) hacia f . Por la fórmula (47)

$$\|\sigma_{m+p} - \sigma_m\|_{L^2} = \|\gamma_{m+p} - \gamma_m\|_{L^2}$$

y como L^2 es completo y la sucesión σ_m tiene límite, la sucesión γ_m es también convergente en L^2 , sea $C(\lambda)$ su límite es una función de L^2 que cumple la condición $\|C\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. Por otra parte las funciones f, σ_m, γ_m y C son también de S' .

La convergencia en L^2 implica la convergencia en S' ; en efecto basta tomar una φ de S , que es también de L^2 , y por continuidad del producto escalar en L^2 , se tiene:

$$\lim \langle \sigma_m, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

Por lo tanto teniendo en cuenta la continuidad de la transformación de Fourier, se tiene

$$C(\lambda) = \lim \mathcal{F}[\sigma_m(x)] = \mathcal{F}[\lim \sigma_m(x)] = \mathcal{F}[f(x)]$$

Hemos probado por lo tanto que: si $f(x)$ es de L^2 , su transformada de Fourier es también de L^2 y ambas tienen la misma longitud.

Debemos hacer notar que la transformada de Fourier de $f(x)$, que hemos probado que es una función, no siempre puede ser obtenida aplicando la fórmula (2), puesto que $f(x)$ es de cuadrado sumable, pero no forzosamente sumable y entonces (2) puede no tener sentido. Los métodos clásicos de definición de la transformada de Fourier en estos casos quedan incluidos dentro de la teoría de transformadas de Fourier de distribuciones.

Podemos entonces enunciar, recordando que se denominan operadores unitarios a los que conservan la longitud,

Teorema 11.- En el espacio L^2 , las transformaciones de Fourier son operadores unitarios recíprocos.

Es sabido también que entonces se conserva también el producto escalar, es decir que se tiene si $C(\lambda)$ y $D(\lambda)$ son las transformadas de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$,

$$(48) \quad (f.g)_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \overline{g(x)} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) \overline{D(\lambda)} \, d\lambda = (C.D)_{L^2}$$

54.- Transformación de Fourier, multiplicación y convolución.

Una propiedad de gran importancia de la teoría de la transformación de Fourier es la de invertir mutuamente los productos multiplicativo y de convolución.

Desde luego que previamente hay que estudiar en que casos dichos productos existen y son distribuciones temperadas cuando los factores sean ellos mismos distribuciones temperadas. El estudio completo de este problema y de sus relaciones con la transformación de Fourier puede hacerse en Schwartz (1) vol II, Cap. VII, 5 y 8. Acá nos vamos a limitar a dar un esbozo de la cuestión y a enunciar los principales resultados.

Para el producto multiplicativo $\mathcal{A} \cdot T$, es claro que uno de los factores tiene que ser una función indefinidamente derivable, sea \mathcal{A} este factor. Entonces para definir $\mathcal{A} T$ por la condición $\langle \mathcal{A} T, \varphi \rangle = \langle T \mathcal{A} \varphi \rangle$ la función \mathcal{A} debe ser tal que multiplicada por una función cualquiera φ de S , el producto $\mathcal{A} \varphi$ sea también una función de S .

Este resultado se consigue con las funciones \mathcal{A} tales que ella y todas sus derivadas sean funciones de crecimiento lento, es decir, según ya dijimos, deben ser todas ellas funciones que en el infinito crezcan menos rápidamente que una función potencial $|x|^k$. (El número k no tiene por qué ser el mismo para \mathcal{A} y sus derivadas).

Entonces, como φ es de decrecimiento rápido, la función $\alpha\varphi$ pertenece a S . También se ve fácilmente que si las φ_n de S tienden a cero en S , también en este espacio la sucesión $\alpha\varphi_n$ tiende a cero.

Como toda combinación lineal de funciones de crecimiento lento es una función de crecimiento lento, el conjunto de todas estas funciones es un espacio vectorial que se denomina O_M (simbolismo de operadores de multiplicación). La estructura de O_M se define de la forma siguiente: la sucesión α_n converge hacia cero en O_M , si y solo si, cualesquiera que sean el número entero (mayor o igual que cero) p y la función φ de S , la sucesión $\alpha_n^{(p)}\varphi$ converge hacia cero en S .

Pasemos ahora al producto de convolución. Si S y T son distribuciones temperadas puede muy bien suceder que su producto de convolución no exista (basta tomar la constante uno y ver que no existe el producto de convolución de esta constante consigo misma).

Consideremos ahora el espacio O_M y designemos con O'_C el conjunto de las distribuciones que son transformadas de Fourier de una función α de O_M , es decir $S \in O'_C$ si y solo si existe α de O_M tal que $\mathcal{F}(\alpha) = S$. Se prueba entonces: que O'_C , puede definirse como el conjunto de las distribuciones cuyas transformadas de Fourier son funciones de O_M , que si T es temperada y S es de O'_C , el producto de convolución $S * T$ es una distribución temperada y que se pueden intercambiar los productos multiplicativo y de convolución. Se puede entonces probar el siguiente teorema:

Teorema 12.- Las transformaciones \mathcal{F} y $\overline{\mathcal{F}}$ establecen entre los espacios O_M y O'_C dos isomorfismos recíprocos e intercambian los productos multiplicativos y de convolución.

Se tiene entonces las fórmulas:

$$(49) \begin{cases} \text{Si } \alpha \in O'_M \text{ y } T \in S', \text{ entonces:} \\ \mathcal{F}(\alpha) \in O'_C ; \alpha \cdot T \in S' \text{ y } \mathcal{F}(\alpha \cdot T) = \mathcal{F}(\alpha) \end{cases}$$

$$(50) \begin{cases} \text{Si } S \in O'_C \text{ y } T \in S' \text{ entonces} \\ \mathcal{F}(S) \in O'_M ; S * T \in S' \text{ y } \mathcal{F}(S * T) = \mathcal{F}(S) \cdot \mathcal{F}(T) \end{cases}$$

Estas fórmulas subsisten para la transformación

En particular: la fórmula (50) es válida cuando S es una distribución de soporte acotado.

La propiedad de intercambio de los productos convolutivo y de multiplicación puede ser cierta también con otras hipótesis, pero las condiciones del teorema 12 son de aplicación en muchos de los casos que se presentan en las aplicaciones; por otra parte la propiedad de α , o de $\mathcal{F}(S)$ de ser una función de crecimiento lento es de comprobación fácil.

A título de Ejercicio, daremos la demostración de (50) en el caso muy simple de dos distribuciones de soporte compacto. Se tiene:

$$\mathcal{F}(S * T) = \langle S * T, e^{-2\pi i x \lambda} \rangle = \langle S(\xi), e^{-2\pi i \xi \lambda} \rangle.$$

$$\langle T(\eta), e^{-2\pi i \eta \lambda} \rangle = \mathcal{F}(S) \cdot \mathcal{F}(T)$$

EJECRICIO:

Utilizando las fórmulas (21') y (22) demostrar las fórmulas

$$(51) \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} * \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}$$

$$(52) \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} * \frac{b}{\pi(b^2 + x^2)} = \frac{a + b}{\pi[(a + b)^2 + x^2]}$$

55.- Aplicación de la transformación de Fourier a la aproximación de la δ .

Vamos ahora a utilizar la transformada de Fourier para probar la fórmula de aproximación de la delta de Dirac, por núcleos de Dirichlet

$$(53) \quad \delta = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen } a x}{x}$$

cuya demostración no resulta fácil por los métodos aplicados en el nº 26. Tomemos una función φ del espacio D se tiene

$$\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \langle 1, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \lambda} \varphi(x) dx \right] d\lambda$$

y como $\varphi(x)$ es de soporte acotado, poniendo $a = 2\pi b$

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \int_{-b}^b e^{-2\pi i x \lambda} d\lambda dx =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{\text{sen } 2\pi b x}{\pi x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen } a x}{x}, \varphi(x) \right\rangle$$

lo que nos prueba (53)

56.- Transformadas de Fourier del valor principal y de las deltas de Heisenberg.

La función $\log |x|$ es localmente sumable y el límite de $\frac{1}{|x|} \cdot \log |x|$ es cero para x tendiendo a infinito, es por lo tanto una distribución temperada, y lo mismo le sucede a su derivada v.p. $1/x$.

Para determinar la transformada $C(\lambda)$ de Fourier del valor principal partiremos de la fórmula

$$\mathcal{F}[x] * \mathcal{F}\left[\text{v.p. } \frac{1}{x}\right] = \mathcal{F}\left[x \cdot \text{v.p. } \frac{1}{x}\right] = \mathcal{F}[1] = \delta$$

de donde

$$-\frac{1}{2\pi i} \delta' * C(\lambda) = \delta; \quad C'(\lambda) = -2\pi i \delta$$

y por lo tanto (teorema 4 del capítulo III)

$$C(\lambda) = -2\pi i Y(\lambda) + k$$

Para determinar la constante observamos que el valor principal es una distribución impar puesto que

$$\langle v.p. \left(\frac{-1}{x}\right), \varphi(x) \rangle = \langle v.p. \frac{1}{x}, \varphi(-x) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(-x)}{x} dx \right] = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] = - \langle v.p. \frac{1}{x}, \varphi(x) \rangle$$

y por lo tanto según la fórmula (33) $C(\lambda)$ es también impar luego

$$-2\pi i + k = C(1) = -C(-1) = -k ; \quad k = \pi i$$

Obtenemos así la importante fórmula

$$(54) \quad \mathcal{F} \left[v.p. \frac{1}{x} \right] = \pi i [1 - 2Y(\lambda)] = -\pi i \operatorname{Sg}(\lambda)$$

en donde $\operatorname{Sg}(\lambda)$ vale 1 para $x > 0$ y -1 para $x < 0$.

Por procedimiento enteramente análogo se demuestra la fórmula

$$(55) \quad \overline{\mathcal{F}} \left[v.p. \frac{1}{x} \right] = \pi i [2Y(\lambda) - 1] = \pi i \operatorname{Sg}(\lambda)$$

Las transformadas de Fourier de las partes finitas pueden verse en Gelfand and Sapiro (1) y por derivación y aplicando la fórmula (34) del Capítulo III, se tiene:

$$(56) \quad \mathcal{F} \left[p.f. \frac{1}{x^{\ell+1}} \right] = \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell!} (2\pi i \lambda)^{\ell} \pi i \operatorname{Sg}(\lambda)$$

Si se convoluciona v.p. $1/x$ con ella misma, haciendo el cambio de convolución en multiplicación se tiene

$$\mathcal{F} \left[v.p. \frac{1}{x} * v.p. \frac{1}{x} \right] = -\pi^2$$

y por lo tanto;

$$(57) \quad v.p. \frac{1}{x} * v.p. \frac{1}{x} = -\pi^2 \delta$$

De acá se deduce aplicando la definición de las deltas de Heisenberg

$$(58) \quad \mathcal{F}[\delta^+] = Y(\lambda) \quad \mathcal{F}[\delta^-] = 1 - Y(\lambda)$$

$$(59) \quad \overline{\mathcal{F}}[\delta^+] = 1 - Y(\lambda) \quad \overline{\mathcal{F}}[\delta^-] = Y(\lambda)$$

y aplicando la fórmula de reciprocidad se obtiene

$$(60) \quad \overline{\mathcal{F}}[Y(\lambda)] = \delta^- \mathcal{F}[1 - Y(\lambda)] = \delta^+$$

$$(61) \quad \overline{\mathcal{F}}[Y(\lambda)] = \delta^+ \quad \overline{\mathcal{F}}[1 - Y(\lambda)] = \delta^-$$

Las fórmula (60) se suelen escribir en la forma matemáticamente incorrecta:

$$(61') \quad \delta^- = \int_{-\infty}^0 e^{-2\pi i \lambda x} d\lambda; \quad \delta^+ = \int_0^{\infty} e^{-2\pi i \lambda x} d\lambda$$

Estos resultados sobre la transformada de Fourier de las deltas de Heisenberg nos muestran la razón de la posición de los signos que en la definición aparecen algo contradictorios puesto que se denomina δ^+ a la que en su definición aparece un signo menos y viceversa. La razón de los signos es que la transformada de Fourier $\mathcal{F}[\delta^+]$ tiene como soporte la semirecta positiva.

Se dá el nombre de espectro de una distribución temperada al soporte de su transformada de Fourier. Las fórmulas (58) expresan que los soportes de las δ^+ y δ^- son respectivamente el semieje positivo y el semieje negativo.

De las fórmulas (58) se deducen también las siguientes, relativas a las componentes de Plancherel de una distribución (fórmulas (36) del Capítulo anterior)

$$(62) \quad \mathcal{F}[s^+] = Y(\lambda) \mathcal{F}[s]; \quad \mathcal{F}[s^-] = (1 - Y(\lambda)) \mathcal{F}[s]$$

Como aplicación vamos a determinar la transformada de Fourier de $\log|x|$; Si $C(\lambda)$ es dicha transformada se tiene derivando

$$(63) \quad \mathcal{F}[\log|x|] = C(\lambda); \quad 2\pi i \lambda C(\lambda) = \mathcal{F}\left[v.p. \frac{1}{x}\right] = \pi i \operatorname{sg}(\lambda)$$

$$\lambda C(\lambda) = -\frac{i}{2} \operatorname{sg} \lambda$$

Una solución de la ecuación (63) es evidentemente

$$C_0(\lambda) = -\frac{1}{2} p f\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$$

y por lo tanto (nº 31) la solución general de (63) se obtiene sumando a $C_0(\lambda)$ el producto de la δ por una constante arbitraria. Se tiene

$$(64) \quad \mathcal{F}[\log|x|] = -\frac{1}{2} p f\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) + K \delta$$

siendo K una constante a determinar. Para determinarla hagamos el producto escalar de los dos miembros de la igualdad anterior por la función de prueba del espacio S , $e^{-\lambda^2}$.

Se tiene

$$(65) \quad \langle \mathcal{F}[\log|x|], e^{-\lambda^2} \rangle = \langle -\frac{1}{2} p f\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) + K \delta, e^{-\lambda^2} \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[\log|x|], e^{-\lambda^2} \rangle &= \langle \log|x|, \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 x^2} \rangle = \\ &= 2\sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\pi^2 x^2} \log x \, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} \log\left(\frac{\sqrt{t}}{\pi}\right) dt = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} \log t \, dt - \frac{\log \pi}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

Las dos últimas integrales son conocidas; pueden verse en una buena tabla de integrales las fórmulas,

$$\int_0^{\infty} e^{-p t} t^{-\frac{1}{2}} \log t \, dt = -\sqrt{\frac{\pi}{p}} \log(4 p e^{\gamma}) \text{ para } p > 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-p t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \text{ para } p > 0$$

en donde γ es la constante de Euler. Se tiene entonces

$$(66) \quad \mathcal{F}[\log|x|, e^{-\lambda^2}] = -\left(\log 2\pi + \frac{\gamma}{2}\right)$$

Por otra parte

$$\langle -\frac{1}{2} p f\left(\frac{1}{\lambda}\right) + K \delta, e^{-\lambda^2} \rangle = -\frac{1}{2} p f\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda^2} d\lambda + K =$$

$$= - \left[p f \int_0^1 \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda} d\lambda + \int_1^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda} d\lambda \right] + k = - \left[\int_0^1 \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda} d\lambda + \int_1^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda} d\lambda \right] + k$$

$$+ \int_1^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda} d\lambda + k = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right] + k$$

La suma de las dos integrales del último es conocida y vale γ . Luego

$$(67) \quad \left\langle -\frac{1}{2} p f \frac{1}{|\lambda|} + k \delta, e^{-\lambda^2} \right\rangle = \frac{\gamma}{2} + k$$

y de esta fórmula y de (66) se deduce

$$-\log 2\pi - \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2} + k \quad ; \quad k = (\log 2\pi + \gamma)$$

y por lo tanto se tiene la fórmula

$$(68) \quad \mathcal{F}[\log |x|] = -\frac{1}{2} p f \frac{1}{|\lambda|} - (\log 2\pi + \gamma) \delta$$

58.- La transformación de Fourier para varias variables.

La extensión de la teoría de la transformada de Fourier a las distribuciones enedimensionales se hace siguiendo normas completamente análogas a las que hemos desarrollado para las de una dimensión; nos limitaremos a citar los resultados.

Dada una función $f(x)$; $x = (x_1, \dots, x_n)$, sumable, su transformada de Fourier es la función $C(\lambda)$; $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ definida por

$$(69) \quad C(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \lambda, x \rangle} f(x) dx = \mathcal{F}[f(x)]$$

en donde $\langle \lambda, x \rangle = x_1 \lambda_1 + \dots + x_n \lambda_n$ es el producto escalar en el espacio enedimensional de los vectores x y λ . $C(\lambda)$ es continua y tiene límite cero cuando $|\lambda| \rightarrow \infty$

Cambiando el signo de la exponencial se define $\overline{\mathcal{F}}[f(x)]$.

Si $f(x) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$, es claro que

$$C(\lambda) = C_1(\lambda_1) \dots C_n(\lambda_n)$$

En particular para $r = |x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ y

$P = |\lambda| = (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)^{1/2}$ se tiene:

$$(70) \quad \mathcal{F} [e^{-\pi r^2}] = e^{-\pi \lambda^2}$$

Se define el espacio funcional S de la misma forma que para una variable: sus funciones son indefinidamente derivables y tales que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} P(x) D\varphi = 0$$

cualesquiera que sean el polinomio P y el operador de derivación D . La convergencia de las φ_i hacia 0 en S se define por la convergencia uniforme en el espacio $P(x)D\varphi_i$ hacia 0.

Los teoremas 6 y 9 se extienden a las funciones de varias variables. Las distribuciones temperadas son los elementos del espacio dual S' de S y la transformación de Fourier se define mediante la fórmula (29). Se tiene las siguientes fórmulas:

$$(71) \quad \mathcal{F} \left[\frac{\partial T}{\partial x_k} \right] = 2\pi i \lambda_k \mathcal{F} [T]$$

$$(72) \quad \mathcal{F} [\Delta T] = -4\pi^2 P^2 \mathcal{F} [T]$$

$$(73) \quad \mathcal{F} [(-2\pi i x_k) T] = \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \mathcal{F} [T]$$

$$(74) \quad \mathcal{F} [T(kx)] = \frac{1}{|k|^n} \mathcal{C} \left(\frac{\lambda}{k} \right)$$

$$(75) \quad \mathcal{F} [e^{-k r^2}] = \left(\frac{\pi}{k} \right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi \lambda^2}{k}}$$

$$(76) \quad \mathcal{F} [(\tau_h T)] = e^{-2\pi i \langle \lambda, h \rangle} \mathcal{F} [T]$$

$$(77) \quad \mathcal{F} [\delta] = \overline{\mathcal{F} [\delta]} = 1; \quad \overline{\mathcal{F} [1]} = \mathcal{F} [1] = \delta$$

Se extienden también para las distribuciones enedimensionales la fórmula (40) de reciprocidad y los teoremas 10, 11 y 12.

Otro resultado interesante, fácil de probar, es que la transformada de Fourier de un producto tensorial es el producto tensorial de las transformadas de Fourier.

59.- Transformadas que dependen solo de la distancia.

Presenta interés particular el caso de la transformada de Fourier de una función que depende únicamente de la distancia de x al origen

$$f(x) = \phi(r) \quad ; \quad r = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

Entonces la transformada de Fourier depende sólo de la distancia P . En efecto se tiene llamando θ al ángulo de los vectores x y λ ,

$$(78) \quad C(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i r P \cos \theta} \phi(r) dx$$

Tomemos otro vector λ^* del mismo módulo y sea θ^* el ángulo que forma con el vector x . Se tiene:

$$(79) \quad C(\lambda^*) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i r P \cos \theta^*} \phi(r) dx$$

El paso de λ a λ^* se puede hacer por una rotación en el espacio enedimensional, haciendo la rotación inversa en las variables de integración, r queda invariable, $\cos \theta^*$ se transforma en $\cos \theta$ y como el jacobiano es de módulo 1 se deduce la igualdad de (78) y (79) y por lo tanto que el valor de $C(\lambda)$ depende únicamente del módulo P de λ , es una función $\psi(P)$, como queríamos probar.

Tomemos ahora el caso bidimensional. Se tiene:

$$\psi(P) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i \langle x, \lambda \rangle} \phi(r) dr$$

y tomando coordenadas polares y suponiendo que el ángulo de λ con OX es cero (lo que siempre es posible puesto que

ψ solo depende del módulo) se tiene:

$$\psi(P) = \int_0^{\infty} r \phi(r) \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i r P \cos \theta} d\theta dr$$

y teniendo en cuenta la conocida fórmula

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\pm i x \cos \theta} d\theta = J_0(x)$$

tenemos

$$(80) \quad \psi(P) = \mathcal{F}[\phi(r)] = \bar{\mathcal{F}}[\phi(r)] = 2\pi \int_0^{\infty} r J_0(2\pi r P) \phi(r) dr$$

Por cálculos de análoga índole, pero más complicados se puede generalizar la fórmula (82) y se obtiene para el caso de n dimensiones:

$$(81) \quad \psi(P) = \frac{2\pi}{P \frac{n-2}{2}} \int_0^{\infty} r \frac{n}{2} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r P) \phi(r) dr$$

que nos expresa la transformada de Fourier mediante una transformación de Hankel.

Por aplicación de la fórmula de reciprocidad se tiene:

$$(82) \quad \phi(r) = \frac{2\pi}{r \frac{n-2}{2}} \int_0^{\infty} P \frac{n}{2} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r P) \psi(P) dP$$

Para $n=3$, como $J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$, se tiene

$$(83) \quad \psi(P) = \frac{2}{P} \int_0^{\infty} r \sin(2\pi r P) \phi(r) dr$$

Tomemos ahora $\phi(r) = r^m$ y obtenemos

$$\mathcal{F}[r^m] = \frac{2\pi}{P \frac{n-2}{2}} \int_0^{\infty} r^{m + \frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r P) \phi(r) dr$$

En la teoría de las funciones de Bessel se demuestra la fórmula

$$\int_0^{\infty} J_{\nu}(kz) z^{\mu-1} dz = \frac{2^{\mu-1}}{k^{\mu}} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\mu-\nu}{2}\right)^{-1}$$

y reemplazando se tiene

$$\mathcal{F}[r^m] = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2} + m} \Gamma\left(-\frac{m}{2}\right)} p^{-m-n}$$

En esta fórmula para que r^m y P^{-m-n} puedan ser consideradas como distribuciones, deben ser localmente sumables y por lo tanto deben ser ambos exponentes mayores que $-n$, es decir se debe tener $-n < m < 0$. Para estos valores se tiene, poniendo delante de las potencias parte finita (lo que no altera nada) para una función fija $\varphi(\lambda)$.

$$\langle \mathcal{F}[p.f. r^m], \varphi(\lambda) \rangle = \left\langle \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2} + m} \Gamma\left(-\frac{m}{2}\right)} p.f. (P^{-m-n}), \varphi(\lambda) \right\rangle_{P>0}$$

Pero los dos miembros son, cuando se fija λ , funciones meromorfas de m (nº 18 del capítulo III), por lo tanto son iguales en todos los puntos que no son singulares es decir se tiene la siguiente fórmula

$$(84) \quad \mathcal{F}[p.f. r^m] = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2} + m} \Gamma\left(-\frac{m}{2}\right)} p.f. \left(\frac{1}{P^{m+n}}\right)_{P>0}$$

para todos los valores de m distintos de $-n - 2h$, en donde h es entero mayor o igual que cero.(2)

Observación. Consideremos la fórmula (84) Si $\delta(r)$ es la constante 1, la fórmula carece de sentido; sin embargo como $\mathcal{F}[1] = \delta$; algunos autores escriben la fórmula (80) igualando la delta a la integral divergente y obtienen lo que se suele denominar expresión polar de la δ , fórmula no correcta matemáticamente,

$$(85) \quad \delta(x,y) = 2\pi \int_0^\infty P J_0(r\pi r P) dP; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

que se transforma en la denominada expresión polar de la δ

(2) Los valores de las transformadas para los valores excepcionales pueden verse en Schwartz (1) vol II pag. 114

unidimensional

$$(86) \quad \mathcal{S}'(x) = -4\pi^2 \int_0^{\infty} J_0(2\pi x P) dP$$

por la aplicación de la fórmula (14) del capítulo VI.

60.- Transformación de Fourier para las distribuciones no temperadas.

La aplicación de la teoría de distribuciones a la transformación de Fourier ha representado un inmenso progreso con respecto a los métodos clásicos; en particular ese progreso ha tenido una enorme repercusión en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales; en esta teoría la aplicación de la transformada de Fourier es de gran importancia, pero en muchos casos es inaplicable por tener que aplicarse a funciones que no tenían una función como transformada de Fourier; la consideración de las distribuciones permitió ampliar enormemente la aplicación del método y puso de manifiesto analogías que anteriormente habían pasado desapercibidas.

Sin embargo quedaban fuera del alcance de la teoría los casos en que debía de aplicarse la transformada de Fourier a funciones no temperadas, como la exponenciales. Se planteaba así el problema de generalizar la teoría de la transformación de Fourier de modo que comprendiese a la teoría de Schwartz y tuviese un campo de aplicación más amplio que permitiese, en particular, suprimir las restricciones sobre el comportamiento en el infinito.

Vamos ahora a indicar someramente una de las soluciones dadas a este problema, la dada en la memoria Gelfand y Silow (1).

La idea esencial de la nueva teoría es la extensión del dominio de las funciones de prueba utilizando funciones de una o de varias variables complejas. Para ello se introducen al lado de los espacios D y S de Schwartz otros nuevos espacios que vamos a definir:

1º - Espacio K_p ; formado por las funciones de S que cumplen la siguiente condición:

$$(87) \quad |\varphi^{(q)}(x)| \leq A e^{-B|x|^p}$$

en donde las constantes A y B dependen sólo del número q y de la función φ . Se supone siempre $p > 1$.

La estructura del espacio queda definida por la siguiente condición: la sucesión φ_n converge hacia cero en K si, para todo q se cumplen las siguientes condiciones:

a) $\varphi_n^{(q)}(x)$ converge hacia cero uniformemente en toda la recta.

b) La condición (87) se cumple con dos constantes A y B fija cualquiera que sea n , es decir que se tiene:

$$|\varphi_n^{(q)}(x)| \leq A e^{-B|x|^p}$$

en donde las constantes A y B dependen únicamente del número q .

La convergencia de las φ_n en K_p implica la convergencia de las φ_n en S .

2) Espacio Z_p ($p \geq 1$), formado por las funciones enteras enteras, $\varphi(z) = \varphi(x + iy)$ tales que $\varphi(x)$ pertenece a S y cualquiera que sea el polinomio P , $P(z)\varphi(z)$ es, para cada y fijo, una función de x de cuadrado sumable en $(-\infty, \infty)$ y se cumple además la condición:

$$(88) \quad \int_{-\infty + iy}^{\infty + iy} |P(x + iy) \cdot \varphi(x + iy)|^2 dx \leq A e^{B|y|^p}$$

en donde las constantes A y B dependen del polinomio P y de la función φ .

La estructura de este espacio se define por la regla siguiente: una sucesión φ_n de funciones converge hacia cero en Z_p si se cumple las siguientes condiciones:

a) En cada dominio acotado la sucesión $\varphi_n(z)$ converge uniformemente hacia cero

b) Cualesquieran que sena $P(z)$ y el valor fijo de y se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty + iy}^{\infty + iy} |P(x + iy) \varphi_n(x + iy)|^2 dx = 0$$

c) la condición (88) se cumple con dos constantes A y B independientes de n , es decir se tiene

$$\int_{-\infty + iy}^{\infty + iy} |P(x + iy) \cdot \varphi_n(x + iy)|^2 dx \leq A e^{B|y|^p}$$

en donde las constantes A y B sólo dependen del polinomio.

Los autores consideran además otros espacios de los que no nos vamos a ocupar.

Definidos estos espacios hay que estudiar la transformación de Fourier en los mismos. Se parte de la fórmula de la transformada de Fourier para funciones $\varphi(x)$ y supondremos primeramente que x es real. La transformada de Fourier

$$\mathcal{F}[\varphi(x)] = C(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \lambda} \varphi(x) dx$$

es una función $C(\lambda)$ y siempre que la integral sea convergente puede definirse para valores complejos de λ .

Así por ejemplo nosotros vimos (teorema 8) que si $\varphi(x)$ es de D , $C(\lambda)$ es prolongable a todo el campo complejo. Se puede probar además que pertenece a Z_1 , es decir que se tiene:

$$(89) \quad \text{Si } \varphi(x) \in D, \quad \mathcal{F}[\varphi(x)] = C(\lambda) \in Z_1$$

y también que

$$(90) \quad \text{Si } C(\lambda) \in Z_1, \text{ existe } \varphi \in D \text{ tal que } C(\lambda) = \mathcal{F}[\varphi].$$

En su trabajo Gelfand y Silov prueban los siguientes resultados: si $\varphi \in K_p$, su transformada de Fourier $C(\lambda)$ queda definida en todo el plano complejo y es una función de Z_q (con $1/p + 1/q = 1$) y reciprocamente si $C(\lambda)$ es de Z_q con $q \neq 1$

es la transformada de Fourier de una función de K_p . Es decir se tienen las fórmulas siguientes:

$$(91) \text{ Si } \varphi \in K_p, \quad [\varphi] \in Z_q \quad (1/p + 1/q = 1)$$

$$(92) \text{ Si } C(\lambda) \in Z_q, \text{ existe } \varphi(x) \in K_p \text{ tal que } C(\lambda) = \mathcal{F}[\varphi]$$

Por aplicación de la fórmula de reciprocidad se tienen las siguientes fórmulas recíprocas de las (89) y (91):

$$(89') \text{ Si } \varphi \in Z_1, \quad \mathcal{F}[\varphi] \in D$$

$$(91') \text{ Si } \varphi \in Z_q \quad (q \neq 1), \quad \mathcal{F}[\varphi] \in K_p \quad (1/p + 1/q = 1)$$

Los espacios K_p y Z_p tienen como espacios duales los espacios de distribuciones K_p' y Z_p' : estos espacios son por consiguiente los de las funcionales lineales y continuas definidas en K_p y Z_p ; la estructura se define como en todos los demás espacios de distribuciones: $\lim T_n = T$ si para cada φ del espacio de las funciones de prueba, $\lim \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$.

Un resultado importante que hay que destacar es que en los espacios Z_p , como sus elementos son funciones de variable compleja se puede definir la distribución de Dirac $\delta_{(a)}$ para valores complejos de a .

Dada ahora una distribución T de uno cualquiera de los cuatro espacios D , K_p , Z_1 y Z_p ($p > 1$) se puede definir su transformada de Fourier que será una distribución respectivamente de los espacios Z_1 , Z_q , D y K_q ($1/p + 1/q = 1$) por la fórmula

$$(93) \quad \langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi] \rangle$$

Las propiedades de esta transformación de Fourier son las mismas que en la teoría de las distribuciones temperadas.

En particular la fórmula (93) nos permite obtener la transformada de Fourier de cualquier distribución de D , es decir de cualquier distribución en el sentido de Schwartz. Estas transformadas serán distribuciones del espacio Z_1 y pueden ser entonces distribuciones en el sentido de Schwartz. En particular podemos obtener las transformadas de Fourier de

cualquier función localmente sumable.

Como ejemplo vamos a obtener las transformadas de Fourier de las exponenciales e^{cx} y e^{ax^2} , para cualquier valor real o complejo de c y para a real y mayor que cero.

Tomemos en el espacio Z_1 la distribución $\delta_{(a)}$, en donde a puede ser complejo cualquiera; su transformada de Fourier será una distribución de D' . Vamos a calcularla: para $\varphi \in D$,

$$\begin{aligned} \langle \overline{\mathcal{F}}[\delta_{(a)}], \varphi(x) \rangle &= \langle \delta_{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \lambda} \varphi(x) dx \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i a x} \varphi(x) dx = \langle e^{2\pi i a x}, \varphi(x) \rangle \end{aligned}$$

poniendo $2\pi i a = c$

$$e^{cx} = \overline{\mathcal{F}}[\delta_{(a)}]$$

$$(94) \quad \mathcal{F}[e^{cx}] = \delta_{(a)} ; \quad a = -\frac{ic}{2\pi}$$

Se puede probar que la relación

$$(95) \quad \langle T, \varphi(\lambda) \rangle = -i\sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\pi^2 \frac{\lambda^2}{a}} \varphi(\lambda) d\lambda$$

en donde $\varphi(\lambda)$ es una función del espacio Z_1 define una distribución de Z_1' . Se tiene para $\varphi \in D$

$$\begin{aligned} \langle \overline{\mathcal{F}}[T], \varphi(x) \rangle &= -i\sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\pi^2 \frac{\lambda^2}{a}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \lambda} \varphi(x) dx \right] d\lambda = \\ &= -i\sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{ax^2} \left[\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{i\left(\frac{\pi\lambda}{a} - x\sqrt{a}\right)^2} d\lambda \right] dx \end{aligned}$$

y haciendo el cambio de variable $\frac{\pi\lambda}{a} - x\sqrt{a} = \sqrt{x} t$, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \overline{\mathcal{F}}[T], \varphi(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2} \varphi(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2} \varphi(x) dx \\ &= \langle e^{ax^2}, \varphi(x) \rangle \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$e^{-ax^2} = \overline{\mathcal{F}}[T]$$
$$(96) \quad \mathcal{F}[e^{-ax^2}] = T$$

es decir que la transformada de Fourier de

$$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$$

es la distribución T de Z_1' definida por la relación (95).

C A P I T U L O IX
TRANSFORMADAS DE LAPLACE

61.- Transformada de Laplace de una función.-

Definición 1.- Se denomina transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ de una función $f(t)$ de variable real t , localmente sumable, a la función de variable compleja $F(s)$ definida por la relación:

$$(1) \quad \mathcal{L}\{f(t)\} \triangleq F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

El dominio de definición de la función $F(s)$ es el de los valores de s que hacen convergente la integral. Sólo consideraremos la convergencia absoluta, es decir la sumabilidad en el sentido de Lebesgue ⁽²⁾. Si ponemos $s = \xi + i\eta$ el módulo del integrando es $e^{-\xi t} |f(t)|$, luego la sumabilidad depende solo de la parte real de s . Caben tres casos:

- a) $e^{-\xi t} |f(t)|$ es sumable en $(0, +\infty)$ para todo valor de ξ (por ejemplo cuando $f(t) = e^{-t^2}$), $F(s)$ está definida para todo valor de s .
- b) $e^{-\xi t} |f(t)|$ no es sumable en $(0, +\infty)$ para ningún valor de ξ . $F(s)$ no está definida para ningún valor de s . (Por ejemplo cuando $f(t) = e^{t^2}$).
- c) $e^{-\xi t} |f(t)|$ es sumable para algunos valores de T y no lo es para otros; por ejemplo si $f(t) = 1$, es sumable para $\xi > 0$ y no lo es para $\xi \leq 0$.

En este último caso la sumabilidad para un valor ξ_0 implica la sumabilidad para todo valor de ξ mayor que ξ_0 . puesto que

$$|f(t)| e^{-\xi t} = |f(t)| e^{-\xi_0 t} e^{(\xi_0 - \xi)t} \leq |f(t)| e^{-\xi_0 t}$$

y se vé además que la convergencia de la integral es unifor-

⁽²⁾Recordemos que existen integrales impropias en el sentido de Riemann que no son absolutamente convergentes y que por lo tanto no son sumables en el sentido de Lebesgue. No nos ocuparemos del estudio de la transformada de Laplace en estos casos.

me respecto a ξ , es decir uniforme en $R(s) > \xi_0$. Por lo tanto existe un número real a tal que para $\xi > a$ la integral (1) es convergente y no lo es para $\xi < a$. Tenemos entonces el siguiente teorema:

Teorema 1.- Dada una función localmente sumable $f(t)$ existe siempre un número real a (que puede ser $+\infty$ o $-\infty$), que se denomina la abscisa de su-
tabilidad de la transformada de Laplace de $f(t)$,
 tal que para $R(s) > a$, la integral (1) es absolu-
 tamente convergente y no lo es para $R(s) < a$.

Por lo tanto dada una función localmente sumable o su transformada de Laplace no existe, o está definida en un semiplano $R(s) > a$, o está definida en todo el plano. En este último caso están evidentemente las funciones localmente sumables de soporte acotado.

El dominio de existencia de la transformada de Laplace de $f(t)$ es el mismo que el de $t^m f(t)$, cualquiera que sea el número positivo m . En efecto sea $\xi > a$ y tomemos ξ_0 tal que $a < \xi_0 < \xi$; para $t > t_0$, es $t^m \leq e^{(\xi - \xi_0)t}$ y por lo tanto

$$|t^m f(t)| e^{-\xi t} \leq |f(t)| e^{-\xi_0 t}$$

y como el segundo miembro es sumable en $(0, \infty)$, también lo es el primero. Si $\xi < a$, para $t \geq k$,

$$|t^m f(t)| e^{-\xi t} \geq |f(t)| e^{-\xi t}$$

y como el segundo miembro no es sumable en $(0, \infty)$ tampoco lo es el segundo.

De acá se deduce que, en el dominio de definición de $F(s)$, está permitido derivar bajo el signo integral en (1) y por lo tanto:

$$(2) \quad F^{(m)}(s) = \int_0^{\infty} f(t) (-t)^m e^{-st} dt$$

Podemos por lo tanto enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2.- La transformada de Laplace de una función $f(t)$ es una función holomorfa en el semiplano de definición y sus derivadas sucesivas satisfacen a la relación:

$$(3) \quad \alpha \{ (-t)^m f(t) \} = F^{(m)}(s)$$

siendo además idénticos los dominios de definición de las transformadas de $f(t)$ y de $t^m f(t)$.

62.- Transformada de Laplace de una distribución.

Vamos a estudiar la extensión de la transformada de Laplace de las distribuciones unidimensionales (9).

Observemos primero que si $f(t)$ y $g(t)$ son iguales como distribuciones, es decir iguales p.p., tienen la misma transformada de Laplace.

Observemos también que en la definición de la transformada de Laplace sólo influyen los valores positivos de t , luego podemos siempre suponer que todas las funciones a las que se aplica la transformada de Laplace tienen su soporte en la semirecta $x \geq 0$.

Es importante insistir sobre este aspecto; en general los autores de trabajos y tablas de transformadas de Laplace admiten implícitamente la nulidad para $t < 0$ y escriben, por ejemplo

$$\alpha \{ t^m \} \quad \alpha \{ \text{sen } k t \}$$

cuando lo que correspondería escribir es

$$\alpha \{ Y(t) t^m \} \quad \alpha \{ Y(t) \text{sen } k t \}$$

Esto puede dar lugar a confusiones en particular cuando haya que derivar la función en el sentido de las distribuciones, en cuyo caso, la presencia de la función

(9) El estudio para las enedimensionales puede verse en SCHWARTZ (3)

$Y(t)$ de Heaviside es esencial.

Consideraremos unicamente en este capítulo distribuciones de D_+^1 . Utilizando un razonamiento análogo al empleado en el capítulo IV (teorema 7) puede probarse:

1º Existen funciones $\psi(t)$ indefinidamente derivables, de soporte acotado a la izquierda e iguales a uno en la semirecta $t \geq 0$. Designaremos con P el conjunto de estas funciones.

2º Para toda ψ de D se tiene

$$(4) \quad \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \cdot \varphi \rangle$$

siempre que uno de los dos miembros tenga sentido.

Un resultado análogo puede hacerse para n variables.

Si T tiene su soporte en $t_i \geq 0$, existen funciones indefinidamente derivables, de soporte contenido en $t_i \geq a_i$ e iguales a la unidad en $t_i \geq 0$, cumpliéndose además la condición (4).

Tomemos una distribución T ; supongamos que exista un número real ξ tal que $e^{-\xi t} \cdot T$ sea una distribución temperada. Tomemos un valor complejo s tal que $R(s) > a$. La distribución $e^{-st} \cdot T$ se obtienen multiplicando la distribución $e^{-\xi t} \cdot T$ que es temperada y de soporte contenido en $t \geq 0$, por la función $e^{-(s-\xi)t}$, que es de decrecimiento rápido en $+\infty$, luego $e^{-st} \cdot T$ es temperada.

Inversamente supongamos ahora que $e^{-\xi_0 t} \cdot T$ no es temperada. Si $\xi_0 < \xi$ el resultado anterior nos dice que $e^{-\xi_0 t} \cdot T$ no es temperada y lo mismo vale para $e^{-st} \cdot T$ si $R(s) < \xi$, pues la exponencial imaginaria no influye en este resultado.

Podemos por lo tanto enunciar el teorema siguiente:

Teorema 3.- Dada una distribución T de D_+^1 existe un número real a (que puede ser $+\infty$ o $-\infty$) tal que para $R(s) > a$, la distribución $e^{-st} \cdot T$ es temperada y no lo es para $R(s) < a$.

Si T es una función $f(t)$, de soporte contenido en $t \geq 0$, el número real a definido por el teorema anterior es la abscisa de sumabilidad de su transformada de Laplace. En efecto:

Si $R(s) > a$, $e^{-st}f(t)$ es sumable, luego es temperada. Si $R(s) < a$, consideremos la función $\psi(t)e^{-(\xi_0 - s)t}$, en donde ψ es una función de P y $R(s) < \xi_0 < a$. Esta función es del espacio S . Si $e^{-st}f(t)$ fuese temperada tendría que tener sentido su producto escalar por esta función, el cual debería expresarse por la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\psi(t)e^{-(\xi_0 - s)t} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\xi_0 t} dt$$

y esta integral es divergente.

Podemos entonces generalizar el concepto de abscisa de convergencia con la siguiente definición:

Definición 2.- El número real definido por el teorema 3 se denomina la abscisa de sumabilidad de la transformada de Laplace de T y el semiplano $R(s) > a$ el dominio de definición de la transformada de Laplace de T .

Nos queda ahora definir la transformada de Laplace en dicho dominio. Observemos que la fórmula (1) puede escribirse en la forma

$$(5) \quad \alpha \{ f(t) \} = \langle f(t), e^{-st} \rangle$$

y esto nos sugiere como definición de la transformada de Laplace de una distribución la fórmula

$$(6) \quad \alpha \{ T \} = \langle T, e^{-st} \rangle$$

pero es claro que hay que precisar el sentido de esta fórmula.

Empecemos por un caso particular. Si T es de soporte compacto, $e^{-st} \cdot T$ es siempre temperada luego el dominio de

definición de su transformada de Laplace es el plano entero y dicha transformada viene definida directamente por la fórmula (6), que tiene siempre sentido en este caso.

Pasemos ahora al caso de una distribución T tal que no sea $+0$ la abscisa de sumabilidad a . Tomemos un valor de s tal que $R(s) > a$ y un ξ_0 tal que $a < \xi_0 < R(s)$, y sea ψ una función de P .

La función $\psi(t) e^{(\xi_0 - s)t}$ es del espacio S y la distribución $e^{-\xi_0 t} \cdot T$ es temperada; puede siempre definirse el producto escalar de la distribución por una función y se pone por definición:

$$(7) \quad \langle T, e^{-st} \rangle = \langle e^{-\xi_0 t} \cdot T, \psi(t) e^{(\xi_0 - s)t} \rangle$$

es claro que el valor de (7) es independiente de la elección de ψ dentro de P . También es independiente del valor de ξ_0 ; en efecto: sean ξ_1 y ξ_2 tales que $a < \xi_1 < \xi_2 < R(s)$. Se tiene:

$$\langle e^{-\xi_1 t} \cdot T, \psi(t) e^{(\xi_1 - s)t} \rangle = \langle e^{-\xi_1 t} e^{-\xi_2 t} \cdot T, \psi(t) e^{(\xi_1 - s)t} \rangle$$

$$e^{-st} e^{\xi_1 t} \cdot e^{\xi_2 t} \rangle = \langle e^{-\xi_2 t} \cdot T, \psi(t) e^{(\xi_2 - s)t} \rangle$$

Es claro que esta definición de (6) coincide con el producto escalar de T por e^{-st} , cuando T es de soporte acotado.

Tenemos entonces la siguiente definición:

Definición 3.- Sea T una distribución de D_+^1 .

Su transformada de Laplace $\alpha\{T\}$ está definida,

para todo valor s del dominio de definición por

la fórmula (6) con el sentido que acabamos de darle.

Puede probarse que se tiene el siguiente teorema generalización del teorema 2. (no daremos la demostración).

Teorema 4.- La transformada de Laplace de una dis-

tribución T de D_+^1 es una función holomorfa en el

semiplano de definición y sus derivadas sucesivas satisfacen a la relación:

$$(8) \quad \alpha \{ (-t)^m T \} = F^{(m)}(s).$$

siendo además idénticos los dominios de definición de las transformadas de T y de $t^m T$.

Observemos bien que la transformada de Laplace hace corresponder a una distribución una función holomorfa, a diferencia de las transformadas de Fourier que son aplicaciones entre espacios de distribuciones. La transformación de Laplace es evidentemente lineal y el dominio de definición de la transformada de Laplace de $kT + hS$ es el menor de los dos dominios de definición de S y T.

63.- Propiedades de la transformada de Laplace.

Sea T una distribución, F(s) su transformada de Laplace y h un número real mayor que cero. Consideremos las distribuciones $T(ht)$ y $\tau_h T$. Es claro que ambas pertenecen a D_+^1 . Sus transformadas de Laplace vienen definidas por las fórmulas

$$(9) \quad \alpha \{ T(ht) \} = \frac{1}{h} F\left(\frac{s}{h}\right)$$

$$(10) \quad \alpha \{ \tau_h T \} = e^{-hs} F(s)$$

En efecto:

$$\alpha \{ T(ht) \} = \langle e^{-\xi_0 t} \cdot T(ht), \psi(t) e^{(\xi_0 - s)t} \rangle$$

$$\text{y poniendo } \xi_1 = \xi_0/h$$

$$\alpha \{ T(ht) \} = \langle e^{-\xi_1(ht)} \cdot T(ht), \psi(t) e^{(h\xi_1 - s)t} \rangle$$

y aplicando la fórmula (8) del capítulo VI

$$\alpha \{ T(ht) \} = \langle e^{-\xi_1 t} \cdot T(t), \psi(t/h) e^{(\xi_1 - \frac{s}{h})t} \rangle$$

y como $\psi(t/h)$ es de P queda probada (9).

Con un razonamiento análogo se prueba la fórmula (10).

Sea inmediatas las fórmulas:

$$(11) \quad \alpha \{ \delta \} = 1$$

$$(12) \quad \alpha \{ \delta^{(m)} \} = s^m$$

$$(13) \quad \alpha \{ \delta_{(a)} \} = e^{-sa}$$

Tomemos ahora dos distribuciones S y T. Sabemos que su producto de convolución existe siempre y es una distribución de D_1^+ . Sean a y b las respectivas abscisas de sumabilidad y sea ξ_0 mayor que ambas. Se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha \{ S \} \cdot \alpha \{ T \} &= \langle e^{-\xi_0 x} S(x), \psi_1(x) e^{(\xi_0 - s)x} \rangle \cdot \langle e^{-\xi_0 y} T(y), \\ &\psi_2(y) e^{(\xi_0 - s)y} \rangle = \langle e^{-\xi_0 x} S(x) \chi e^{-\xi_0 y} T(y), \psi_1(x) \cdot \psi_2(y) \\ &e^{(\xi_0 - s)x} e^{(\xi_0 - s)y} \rangle \end{aligned}$$

El soporte de $S(x) \chi T(y)$ está contenido en el cuadrante $(x \geq 0; y \geq 0)$ en dicho cuadrante es igual a uno la función $\psi_1 \cdot \psi_2$. Por lo tanto en la fórmula anterior se puede reemplazarse $\psi_1(x) \psi_2(y)$ por $\psi(x+y)$, siendo ψ de P , puesto que esta función de dos variables es igual a uno en el semiplano $x+y \geq 0$ que contiene al cuadrante; se tiene entonces:

$$\begin{aligned} \alpha \{ S \} \cdot \alpha \{ T \} &= \langle e^{-\xi_0 x} S \chi e^{-\xi_0 y} T, \psi(x+y) e^{(\xi_0 - s)(x+y)} \rangle \\ &= \langle (e^{-\xi_0 t} S) * (e^{-\xi_0 t} T), \psi(t) e^{(\xi_0 - s)t} \rangle \end{aligned}$$

y aplicando la fórmula (6) del capítulo VII, tenemos

$$\alpha \{ S \} \cdot \alpha \{ T \} = \langle e^{-\xi_0 t} (S * T), \psi(t) e^{(\xi_0 - s)t} \rangle$$

es decir

$$\alpha \{ S * T \} = \alpha \{ S \} \cdot \alpha \{ T \}$$

y por lo tanto se tiene el siguiente teorema:

Teorema 5.- La transformada de Laplace del producto de convolución $S * T$ de dos distribuciones es igual al producto multiplicativo de las transformadas de S y T .

De acá se deduce:

$$\alpha \{T^{(m)}\} = \alpha \{\delta^{(m)} * T\} = \alpha \{\delta^{(m)}\} \cdot \alpha \{T\}$$

es decir que se obtiene la importante fórmula

$$(14) \quad \alpha \{T^{(m)}\} = s^m \alpha \{T\}$$

Al aplicar esta fórmula hay que tener siempre cuidado de derivar en el sentido de las distribuciones y no olvidar la existencia de la función de Heaviside $Y(t)$ que muchas veces no suele ponerse explícitamente en las fórmulas. Con esta precaución pueden resumirse en la simple fórmula (14) los distintos casos que se consideran al estudiar la derivación en la teoría clásica.

La fórmula (14) es también útil para resolver ecuaciones de convolución en el álgebra D_+^1 , reduciéndolas a ecuaciones algebraicas.

Aplicando la transformación de Laplace a la ecuación $A * X = B$, tenemos $\alpha \{A\} \cdot \alpha \{X\} = \alpha \{B\}$, lo que permite calcular $\alpha \{X\}$ como cociente; después hay que determinar la distribución cuya transformada de Laplace es ese cociente, es el problema de inversión de la transformada que estudiaremos más adelante.

La fórmula (14) puede generalizarse para las derivaciones de orden no entero, de acuerdo con la definición dada en el nº 44. En particular para las primitivas de orden entero se tiene:

$$\alpha \{I^m T\} = \alpha \{Y_m * T\} = \alpha \{Y_m\} \cdot \alpha \{T\}$$

∴ Pero Y_m es la función $Y(t) \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$ cuya transformada es,

como probaremos enseguida, $1/s^m$. Luego se tiene:

$$(15) \quad \mathcal{L} \{ I^m T \} = \frac{1}{s^m} \mathcal{L} \{ T \}$$

Al aplicar (15) no hay que olvidar que de acuerdo con lo que dijimos en el n.º 43 $I^m T$ está determinada unívocamente por la condición de tener su soporte contenido en el semieje positivo.

En particular si T es una función $f(t)$ se tiene las fórmulas

$$(16) \quad \frac{1}{s} \mathcal{L} \{ f(t) \} = \mathcal{L} \left\{ Y(t) \int_0^t f(x) dx \right\}$$

$$(17) \quad \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \{ f(t) \} = \mathcal{L} \left\{ Y(t) \int_0^t dx \int_0^x f(y) dy \right\}$$

64.- Ejemplos de transformada de Laplace.

Vamos a dar algunos ejemplos simples de cálculos de transformadas de Laplace que servirían además para ver los métodos más importantes que se usan en dichos cálculos. En la práctica se utilizan las tablas para la determinación de las transformadas de funciones.

Las transformadas de $Y(t) t^\alpha$ para $R(\alpha) > 0$

$$(18) \quad \mathcal{L} \{ Y(t) t^\alpha \} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \quad \text{para } R(s) > 0$$

que vamos a probar para α real. Haciendo el cambio de variable $st = u$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ Y(t) t^\alpha \} &= \int_0^\infty t^\alpha e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{u^\alpha}{s^{\alpha+1}} e^{-u} \frac{du}{s} = \\ &= \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty u^\alpha e^{-u} du = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1). \end{aligned}$$

Para α complejo se hace el mismo cambio de variable y se calcula la integral en el campo complejo.

Sea ahora T una distribución de soporte en el semieje positivo y h su abscisa de sumabilidad. De las definiciones 2 y 3 se deduce que la abscisa de sumabilidad de $e^{\lambda t} T$ es

$h + \lambda$ y que se tiene:

$$(19) \quad \mathcal{A} \{ e^{\lambda t} T \} = F(S - \lambda) \quad \text{siendo} \quad F(S) = \mathcal{A} \{ T \}$$

de (18) y (19) se deduce

$$(20) \quad \mathcal{A} \{ Y(t) e^{\lambda t} t^{\alpha} \} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(S - \lambda)^{\alpha + 1}} \quad \text{para } R(S) > R(\lambda)$$

y en particular se tiene

$$(21) \quad \mathcal{A} \{ Y(t) e^{\lambda t} \} = \frac{1}{S - \lambda} \quad \text{para } R(S) > R(\lambda)$$

y de (21) se deduce descomponiendo $\sin \lambda t$ y $\cos \lambda t$ en exponenciales

$$(22) \quad \mathcal{A} \{ \sin \lambda t \} = \frac{\lambda}{S^2 + \lambda^2} \quad \text{para } R(S) > 0$$

$$(23) \quad \mathcal{A} \{ \cos \lambda t \} = \frac{S}{S^2 + \lambda^2} \quad \text{para } R(S) > 0$$

Derivemos respecto de α la fórmula (18) escrita en la forma

$$\frac{1}{S^{\alpha + 1}} \Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha} dt$$

y se tiene

$$\frac{1}{S^{\alpha + 1}} \frac{d \Gamma(\alpha + 1)}{d \alpha} + \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{S^{\alpha + 1}} \log \frac{1}{S} = \int_0^{\infty} t^{\alpha} \log t e^{-st} dt$$

$$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{S^{\alpha + 1}} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{d \Gamma(\alpha + 1)}{d \alpha} + \log \frac{1}{S} \right] = \mathcal{A} \{ Y(t) t^{\alpha} \log t \}$$

Una fórmula conocida de la teoría de la función gamma es

$$\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{d \Gamma(\alpha + 1)}{d \alpha} \right]_{\alpha = 0} = -\gamma$$

en donde γ es la constante de Euler. Haciendo $\alpha = 0$ y reemplazando

$$(24) \quad \mathcal{A} \{ Y(t) \cdot \log t \} = -\frac{\gamma + \log S}{S}$$

Aplicando ahora la fórmula (14) y las (29) y (30) del capítulo III se tiene:

$$(25) \quad \mathcal{L} \left\{ \text{p.f.} \left(\frac{1}{t} \right)_{t > 0} \right\} = -(\log s + \gamma)$$

$$\mathcal{L} \left\{ - \text{p.f.} \left(\frac{t}{t^2} \right)_{t > 0}^{-\delta'} \right\} = -s (\log s + \gamma)$$

$$(26) \quad \mathcal{L} \left\{ \text{p.f.} \left(\frac{1}{t^2} \right)_{t > 0} \right\} = s (\log s + \gamma - 1)$$

y aplicando sucesivamente la regla de derivación pueden obtenerse las transformadas de Laplace de p.f. $(1/t^n)_{t > 0}$ para n entero positivo.

La fórmula (26) puede escribirse en la forma

$$(27) \quad -s(\log s + \gamma) = \langle e^{-\xi_0 t} \text{p.f.} \left(\frac{1}{t} \right)_{t > 0} \psi(t) e^{(\xi_0 - s)t} \rangle = \\ = \text{p.f.} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t s}}{t} dt$$

y haciendo $s = 1$, se tiene la fórmula

$$(28) \quad \text{p.f.} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -\gamma$$

Análogamente se obtiene la fórmula

$$(29) \quad \text{p.f.} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = \gamma - 1$$

Consideremos ahora una sucesión creciente de números reales $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ con $\lim \lambda_n = \infty$ y formemos la distribución

$$T = \sum_1^{\infty} c_n \delta(\lambda_n)$$

Su transformada de Laplace es

$$(30) \quad \mathcal{L} \{T\} = \sum_1^{\infty} c_n e^{-\lambda_n s}$$

que es la expresión general de una serie de Dirichlet.

Vemos por lo tanto que toda serie de Dirichlet es una transformada de Laplace.

EJERCICIO: Probar las fórmulas

$$(31) \quad \mathcal{A} \left\{ Y(t) (\sin k t - k t \cos k t) \right\} = \frac{2 k^3}{(s^2 + k^2)^2}$$

$$(32) \quad \mathcal{A} \left\{ Y(t) \frac{\sin k t}{t} \right\} = \text{arc ctg } \frac{s}{k}$$

$$(33) \quad \mathcal{A} \left\{ Y(t) \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx \right\} = \frac{1}{s} \text{ arc ctg } s$$

$$(34) \quad \mathcal{A} \left\{ Y(t) \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \right\} = \log \frac{s + b}{s + a}$$

65.- Transformadas de funciones de Bessel.

La función $J_0(t)$ satisface a la ecuación

$$(35) \quad Y(t) \left[t J_0''(t) + J_0'(t) + t J_0(t) \right] = 0$$

y sea

$$f(s) = \mathcal{A} \left\{ Y(t) \cdot J_0(t) \right\}$$

Se tiene entonces

$$s f(s) = \mathcal{A} \left\{ \delta \cdot J_0(t) \right\} + \mathcal{A} \left\{ Y(t) J_0'(t) \right\} = \mathcal{A} \left\{ \delta \right\} +$$

$$\mathcal{A} \left\{ Y(t) J_0'(t) \right\} = 1 + \mathcal{A} \left\{ Y(t) \cdot J_0'(t) \right\}$$

$$(36) \quad \mathcal{A} \left\{ Y(t) J_0'(t) \right\} = s f(s) - 1$$

$$s^2 f(s) - s = \mathcal{A} \left\{ \delta J_0'(t) \right\} + \mathcal{A} \left\{ Y(t) J_0''(t) \right\}$$

El primer sumando es nulo, luego

$$(37) \quad \mathcal{A} \left\{ Y(t) J_0''(t) \right\} = s^2 f(s) - s$$

y aplicando (3)

$$- \mathcal{A} \left\{ Y(t) t J_0''(t) \right\} = 2 s f(s) + s^2 f'(s) - 1$$

y reemplazando en (35)

$$-2s f(s) - s^2 f'(s) + 1 + s f(s) - 1 - f'(s) = 0$$

$$-f'(s)(1+s^2) = s f(s)$$

$$f(s) = \frac{C}{(1+s^2)^{1/2}}$$

Para determinar C, en la relación

$$\frac{C}{(1+s^2)^{1/2}} = f(s) = \int_0^{\infty} J_0(t) e^{-st} dt$$

hagamos $s = 0$ y se tiene

$$C = \int_0^{\infty} J_0(t) dt = 1$$

y por lo tanto tenemos la fórmula

$$(38) \quad \mathcal{L}\{Y(t) J_0(t)\} = (1+s^2)^{-1/2}$$

Si aplicamos ahora la fórmula (14) se tiene:

$$\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = \mathcal{L}\{\delta J_0(t)\} + \mathcal{L}\{Y(t) J_0'(t)\} = \mathcal{L}\{\delta\} + \mathcal{L}\{-Y(t) J_1(t)\}$$

$$(39) \quad \mathcal{L}\{Y(t) J_1(t)\} = 1 - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$$

La fórmula (20) nos dá

$$\mathcal{L}\left\{Y(t) e^{it} t^{\nu-1/2} \frac{1}{\Gamma(\nu+1/2)}\right\} = \left(\frac{1}{s-i}\right)^{\nu+1/2}$$

$$\mathcal{L}\left\{Y(t) e^{-it} t^{\nu-1/2} \frac{1}{\Gamma(\nu+1/2)}\right\} = \left(\frac{1}{s+i}\right)^{\nu+1/2}$$

y aplicando el teorema 5 se tiene

$$\mathcal{L}\left\{\frac{Y(t)}{\Gamma(\nu+1/2)^2} \int_0^t e^{i(t-u)} e^{-i\nu(t-u)} t^{\nu-1/2} u^{\nu-1/2} du\right\} = \left(\frac{1}{1+s^2}\right)^{\nu+1/2}$$

El cambio de Variable $u = t \frac{x+1}{2}$ nos da

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{Y(t)}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2\nu} \int_{-1}^1 e^{-i t x} (1-x^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dx \right\} = \left(\frac{1}{1+s^2}\right)^{\nu + \frac{1}{2}}$$

Pero una fórmula conocida de las funciones de Bessel es

$$J_\nu(t) = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 e^{-i t x} (1-x^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dx$$

y reemplazando en la fórmula anterior obtenemos

$$(40) \quad \mathcal{L} \left\{ Y(t) t^\nu J_\nu(t) \right\} = 2^\nu \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{1+s^2}\right)^{\nu + \frac{1}{2}}$$

Hagamos ahora tender ν hacia $-1/2$ y admitiendo que se pueden invertir los algoritmos de límite y de transformada de Laplace obtenemos

$$\mathcal{L} \left\{ \lim_{\nu \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{Y(t) \sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{t}{2}\right)^\nu J_\nu(t) \right\} = 1 = \mathcal{L} \{ \delta \}$$

y por la unicidad de las transformadas de Laplace, que vamos a demostrar enseguida, obtenemos la fórmula de aproximación de la delta de Dirac,

$$(41) \quad \lim_{\nu \rightarrow -\frac{1}{2}} Y(t) \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{t}{2}\right)^\nu J_\nu(t) = \delta$$

EJERCICIOS:

1º- Comprobar la fórmula (38) formando la serie de las transformadas de Laplace del desarrollo en serie de potencias de t de $J_0(t)$.

2º- Probar la fórmula

$$(42) \quad \mathcal{L} \left\{ Y(t) \frac{J_1(t)}{t} + \delta' \right\} = \sqrt{1+s^2}$$

3º- Probar la fórmula (41) directamente utilizando el teorema 13 del Capítulo IV.

66.- Casos sencillos de antitransformadas.

Dada una función $f(s)$ de la variable compleja s , se plantea el problema de saber si es la transformada de Laplace de una distribución y , en caso afirmativo, determinar dicha distribución.

Antes de abordar el estudio general de este problema vamos a resolverlo en algunos sencillos utilizando los resultados obtenidos hasta ahora.

Dada una función racional de s las fórmulas (12), (21), (22) y (23) nos permiten calcular la antitransformada $\mathcal{A}^{-1}\{f(s)\}$ es decir la distribución T tal que $\mathcal{A}\{T\} = f(s)$, sin más que descomponer $f(s)$ en fracciones simples.

Por ejemplo:

$$\mathcal{A}^{-1}\left\{\frac{s^4+s^3+3s^2+3}{s^3+s^2+3s-s}\right\} = \mathcal{A}^{-1}\left\{s + \frac{1}{s-1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{3}{(s+1)^2+4}\right\}$$

$$= \delta' + Y(t) \left[e^t - e^{-t} \cos 2t + \frac{3}{2} e^{-t} \sin 2t \right]$$

Consideremos otro ejemplo de otra clase. Sea

$$f(s) = \sqrt{1+s^2}$$

Descomponemos $f(s)$ en la forma

$$\frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

y apliquemos la fórmula (38)

$$\mathcal{A}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right\} = Y(t) \cdot J_0(t)$$

$$\mathcal{A}^{-1}\left\{\frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}}\right\} = (Y(t) \cdot J_0(t))'';$$

$$(Y(t) \cdot J_0(t))' = \delta \cdot J_0(t) + Y(t) J_0'(t) = \delta + Y(t) J_0'(t)$$

$$(Y(t) \cdot J_0(t))'' = \delta' + \delta J_0'(t) + Y(t) J_0''(t).$$

$$\delta J_0'(t) = J_0'(0) \delta = 0$$

luego

$$(43) \quad \mathcal{L}^{-1} \{ \sqrt{1+s^2} \} = \delta' + Y(t) [J_0(t) + J_0''(t)]$$

EJERCICIOS:

1.- Probar la fórmula

$$(44) \quad \int_0^t J_0(u) J_0(u-t) \, du = \sin t$$

2.- Probar las fórmulas

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2+2s} \right\} = \frac{-Y(t)}{2} (1 + e^{-2t})$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^6 + 11s^4 + 19s^2 + s + 9}{s^4 + 10s^2 + 9} \right\} = \delta'' + \delta + \frac{Y(t)}{8} (\cos t - \cos 3t)$$

3.- Resolver la ecuación integral

$$y(t) = at + \int_0^t \sin(t-u) y(u) \, du :$$

4.- Probar que en el álgebra de convolución D_+^1 las inversas de $Y(t) \cos t$ y de $Y(t) J_0(t)$ son respectivamente

$$\delta'' + Y(t) ; \quad Y(t) \frac{J_1(t)}{t} + \delta'$$

5.- Calcular usando transformadas de Laplace

$$(\delta'' + a^2 \delta) * Y(t) \frac{\sin at}{a}$$

y comprobar el resultado por cálculo directo/

67.- Inversión de la transformada de Laplace de una función.

El problema de inversión de la transformada de Laplace consiste en la determinación de las condiciones que debe cumplir una función $F(s)$ de la variable compleja s , holomorfa en un semiplano, para ser la transformada de Laplace de una distribución y en la obtención de las fórmulas que permitan determinar una distribución cuando se conoce su transformada de Laplace.

Comenzaremos por considerar una función $f(t)$ que admita

una transformada de Laplace $F(s)$; si fijamos la parte real ξ de $s = \xi + i\eta$ se tiene:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(\xi + i\eta) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\xi t} e^{-i\eta t} dt$$

Tomemos una variable auxiliar, $\eta = 2\pi\lambda$; como $f(t)$ tiene su soporte en el semieje positivo se tiene: (para ξ fijo y mayor que la abscisa de sumabilidad de $f(t)$)

$$(45) \quad F(\xi + 2\pi i\lambda) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\xi t} e^{-2\pi i\lambda t} dt = \mathcal{F}[f(t) e^{-\xi t}]$$

Es decir que cuando se fija la parte real y se considera $F(s)$ como función solo de la parte imaginaria, entonces F es la transformada de Fourier de $f(t) e^{-\xi t}$, es decir que:

la transformada de Laplace puede considerarse como una familia de transformadas de Fourier.

Si $\mathcal{L}\{f(t)\}$ es nula, entonces, fijado un ξ , $\mathcal{F}[f(t) e^{-\xi t}]$ es nula y por el teorema 10 del Capítulo VIII, $f(t) e^{-\xi t}$, es nula como distribución y como $e^{-\xi t}$ no es nula se deduce que $f(t)$ es nula p.p.

Podemos por consiguiente enunciar el teorema de unicidad de la transformada de Laplace:

Teorema 6.- Si las dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ tienen la misma transformada de Laplace son iguales p.p.

De (45) y de la fórmula de inversión de la transformada de Fourier se deduce

$$f(t) e^{-\xi t} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\lambda t} F[\xi + 2\pi i\lambda] d\lambda$$

y por el cambio de variable $2\pi\lambda = \eta$,

$$f(t) e^{-\xi t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta t} F(\xi + i\eta) d\eta$$

$$(46) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\xi + i\eta)t} F(\xi + i\eta) d\eta$$

y por el cambio de variable $\xi + i\eta = s$,

$$(47) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} F(s) e^{st} ds$$

Por lo tanto las fórmulas (46) o (47) nos permiten calcular una función $f(t)$ cuando se conoce su transformada de Laplace.

Ejemplo: vamos a comprobar la fórmula (18) para $\alpha = 1$; la fórmula (46) nos dá, tomando $\gamma = 1$;

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i t \eta} d\eta}{(1 + i\eta)^2}$$

La teoría de residuos nos dice que si $t > 0$, la integral es el producto por $2\pi i$ de los residuos en el semiplano superior; el único punto singular es el punto i , luego se tiene,

$$f(t) = i e^t R_i = i e^t (-i t e^{-t}) = t$$

Si $t < 0$ hay que tomar el semiplano inferior; como en él no hay puntos singulares se tiene $f(t) = 0$; obtenemos finalmente $f(t) = Y(t) t$ de acuerdo con la fórmula (18).

La aplicación de la fórmula (46) en el ejemplo es legítima porque sabíamos previamente que $1/s^2$ era la transformada de Laplace de una función; para poder aplicarla a una función $F(s)$ dada hay que resolver el problema siguiente: Que condiciones tiene que cumplir una función $F(s)$ para ser transformada de Laplace de una función? Para resolver este problema vamos a demostrar el teorema siguiente:

Teorema 7.- Si $F(s)$ es una función de la variable compleja s , holomorfa en un semiplano $\text{Re}(s) > a > 0$ y que en dicho semiplano cumple la condición

$$|F(s)| \leq K |s|^{-2}$$

entonces $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función $f(t)$ que queda definida por la fórmulas (46) o (47).

Es claro que si $F(s)$ es la transformada de Laplace de una cierta función $f(t)$, esta función tiene que quedar definida mediante las fórmulas (46) o (47).

Para probar el teorema consideraremos la integral de

la fórmula (47) tomando para ξ un valor mayor que a , y demostraremos:

- a) la integral es convergente.
- b) es independiente del valor de ξ .

Estas dos propiedades nos permiten definir correctamente $f(t)$.

Probaremos despues:

- c) $f(t)$ es nula para valores negativos de t .
- d) $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$.

La convergencia de la integral (47) se prueba observando que

$$|F(s) e^{st}| \leq \frac{K}{\xi^2 + \eta^2} e^{\xi t}$$

y por lo tanto la función es sumable en η desde $-\infty$ a ∞ , luego la integral converge y probamos a)

Vamos a probar b). Para ello tomemos dos valores ξ_1 y ξ_2 de ξ y supongamos por ejemplo $\xi_1 < \xi_2$; por el teorema de Cauchy se tiene

$$\int_C F(s) e^{st} d s = 0$$

siendo C el contorno del rectángulo de vértices

$$\xi_1 - i h; \xi_2 - i h; \xi_2 + i h; \xi_1 + i h$$

cualquiera que sea h , luego

$$\int_{\xi_1 - i \infty}^{\xi_1 + i \infty} F(s) e^{st} d s - \int_{\xi_2 - i \infty}^{\xi_2 + i \infty} F(s) e^{st} d s = \lim_{h \rightarrow \infty} \left[\int_{\xi_2 + i h}^{\xi_1 + i h} F(s) e^{st} d s - \int_{\xi_2 - i h}^{\xi_1 - i h} F(s) e^{st} d s \right]$$

Por otra parte

$$\left| \int_{\xi_2 + i h}^{\xi_1 + i h} F(s) e^{st} d s \right| \leq \frac{(\xi_2 - \xi_1) K e^{\xi_2 t}}{\xi_1^2 + h^2} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0$$

y analogamente se ve que es cero el límite de la segunda integral, luego podemos escribir

$$\int_{\xi_1 - i \infty}^{\xi_1 + i \infty} F(s) e^{st} d s = \int_{\xi_2 - i \infty}^{\xi_2 + i \infty} F(s) e^{st} d s \quad \text{y tenemos probado b).}$$

De la fórmula (46) se deduce

$$|f(t)| \leq \frac{e^{\xi t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K}{a^2 + \eta^2} d\eta = M e^{\xi t}$$

en donde M es una constante y esta acotación vale para todo $\xi > a$; luego, si $t < 0$.

$$|f(t)| \leq \lim_{\xi \rightarrow \infty} M e^{\xi t} = 0$$

es decir $f(t) = 0$ para $t < 0$; hemos probado c).

Por otra parte

$$|f(t)| \leq \lim_{\xi \rightarrow a} M e^{\xi t} = M e^{a t}$$

y para $\xi > a$:

$$|f(t) e^{-\xi t}| \leq M e^{(a - \xi)t}$$

luego $f(t) e^{-\xi t}$ es sumable y como

$$\begin{aligned} f(t) e^{-\xi t} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta t} F(\xi + i\eta) d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\lambda t} F(\xi + 2\pi i\lambda) d\lambda = \mathcal{F}^{-1} [F(\xi + 2\pi i\lambda)] \end{aligned}$$

se puede aplicar la fórmula de reciprocidad de la transformada de Fourier para funciones y se tiene

$$F(\xi + 2\pi i\lambda) = \mathcal{F} [e^{-\xi t} f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi + 2\pi i\lambda)t} f(t) dt$$

$$F(\xi + i\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi + i\eta)t} f(t) dt$$

pero como $f(t)$ tiene su soporte en el semieje positivo

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

con lo que queda probado d) y por lo tanto el teorema.

EJERCICIO:

Partiendo de la transformada de Laplace, calcular la transformada de Fourier de la función $Y(x)J_0(x) e^{-kx}$ (k real y 0)

$$\text{Solución } \left[1 + (k + 2\pi i\lambda)^2 \right]^{-1/2}$$

68.- Inversión de la transformada de Laplace para distribuciones,

Se puede demostrar, no lo haremos, que si T es una distribución que admite una transformada de Laplace, entonces T es la derivada de un cierto orden de una función $f(t)$ que admite una transformada de Laplace, $T = f^{(m)}$.

Fijado ξ en el semiplano de sumabilidad de la transformada de Laplace de $f(t)$, la fórmula (45) nos dice que $f(t)e^{-\xi t}$ tiene una transformada de Fourier $C(\lambda)$. Derivemos respecto de t , aplicando la fórmula (31) del Capítulo VIII y se tiene:

$$\mathcal{F}[f'(t) e^{-\xi t} - \xi f(t) e^{-\xi t}] = 2\pi i \lambda C(\lambda)$$

$$\mathcal{F}[f'(t) e^{-\xi t}] = (\xi + 2\pi i \lambda) C(\lambda)$$

y repitiendo la operación m veces, se tiene

$$\mathcal{F}[f^{(m)}(t) e^{-\xi t}] = (\xi + 2\pi i \lambda)^m C(\lambda)$$

Si aplicamos ahora (45) se tiene:

$$\mathcal{F}[T e^{-\xi t}] = (\xi + 2\pi i \lambda)^m F(\xi + 2\pi i \lambda)$$

siendo $F(s) = \mathcal{d}\{f(t)\}$, luego si $\Phi(s) = \mathcal{d}\{T\}$, sabemos que

$$\Phi(\xi + i\eta) = (\xi + i\eta)^m F(\xi + 2\eta)$$

$$\Phi(\xi + 2\pi i \lambda) = (\xi + 2\pi i \lambda)^m F(\xi + 2\pi i \lambda)$$

y finalmente se obtiene la generalización de la fórmula (45)

$$(49) \quad \Phi(\xi + 2\pi i \lambda) = \mathcal{F}[e^{-\xi t} T]$$

que nos prueba que también en el caso de las distribuciones la transformada de Laplace puede considerarse como una familia de transformadas de Fourier. De acá se deduce, como en el caso de la funciones, el teorema:

Teorema 8.- Dos distribuciones que tienen la misma y transformada de Laplace son idénticas.

Vamos ahora a generalizar el teorema 7 para distribucio-

nes y obtendremos así en forma precisa la condición para que una función sea una transformada de Laplace.

Teorema 9.- Para que una función de variable compleja $F(s)$ sea la transformada de Laplace de una distribución de D' , es necesario y suficiente que en un semiplano $R(s) > a > 0$, sea holomorfa y satisfaga a la condición:

$$(50) \quad |F(s)| \leq k |s|^n \quad (k \text{ y } n \text{ constantes})$$

La condición es necesario; en efecto si $F(s)$ es la transformada de Laplace de T , existe una función f , tal que $f^{(m)} = T$ y que tiene una transformada de Laplace $F_0(s)$; sea c un número real mayor que la abscisa de sumabilidad de F_0 ; para $R(s) > c$ se tiene

$$|F_0(s)| \leq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-st} dt \leq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-ct} dt = k$$

y por lo tanto

$$|F(s)| \leq |F_0(s) \cdot s^m| \leq k |s|^m$$

lo que prueba la necesidad de la condición. Es también suficiente puesto que de (50) se deduce

$$\left| \frac{F(s)}{s^{n+2}} \right| \leq \frac{k}{|s|^2}$$

y por el teorema 7 existe $f(t)$ tal que

$$\frac{F(s)}{s^{n+2}} = \alpha^{-1} \{f(t)\}$$

y derivando $n+2$ veces en el sentido de las distribuciones

$$F(s) = \alpha^{-1} \{f^{(n+2)}(t)\}$$

lo que prueba el teorema 9.

Como ejemplo de aplicación supongamos que queremos calcular $\alpha^{-1} \{s^m\}$ para m entero y positivo, La fórmula de

reciprocidad aplicada a s^{-2} nos da como vimos en el número anterior

$$\alpha^{-1} \{s^{-2}\} = t \cdot Y(t)$$

y derivando $m + 2$ veces

$$\alpha^{-1} \{s^{-1}\} = \delta \cdot \delta + Y(t) = Y(t)$$

$$\alpha^{-1} \{1\} = \delta$$

$$\alpha^{-1} \{s^{-m}\} = \delta^{(m)}$$

de acuerdo con la fórmula (12)

69.- Transformada de Laplace de una función periódica.

Sea $f(t) = Y(t) g(t)$, siendo $g(t)$ una función periódica de periodo a . Calculemos su transformada de Laplace

$$\alpha \{f(t)\} = \int_0^{\infty} g(t) e^{-s t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n a}^{(n+1)a} g(t) e^{-s t} dt$$

Haciendo el cambio de variable $u = t - na$ y teniendo en cuenta la periodicidad se tiene

$$\alpha \{f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a e^{-s(u + n a)} g(u) du = \int_0^a e^{-s u} G(u) du \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n a s}$$

y por lo tanto se deduce la fórmula

$$(51) \quad \alpha \{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-a s}} \int_0^a e^{-s t} g(t) dt$$

Es interesante ver que da la fórmula de inversión aplicada a la función (51) Tomemos $a = 2\pi$. La fórmula de inversión nos da

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \frac{e^{s t}}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-s t} g(t) dt ds$$

Sabemos que para $t < 0$, $f(t) = 0$. Para $t > 0$ la teoría de residuos nos dice que esta integral es igual a la suma de los residuos en los puntos singulares del semiplano $R(s) > \xi$, es decir en los puntos $s = \frac{1}{2} ni$. Los residuos son

$$\frac{e^{\frac{t}{2\pi} i n t}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{F i n t} g(t) dt$$

luego para $t > 0$, se tiene

$$(52) \quad f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{i n t} ; \quad C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-i n t} dt$$

es decir que la fórmula de inversión nos da el producto de $Y(t)$ por el desarrollo en serie de Fourier de $g(t)$.

EJEMPLO: Sea $g(t)$ de periodo $2c$ e igual a 1 en $0 < t < c$ y a -1 en $c < t < 2c$. Apliquemos (51) se tiene

$$\int_0^{2c} g(t) e^{-st} dt = \int_0^c e^{-st} dt - \int_c^{2c} e^{-st} dt = \frac{1}{s} [1 - e^{-sc}]$$

$$e^{-sc} + e^{-2sc}] \text{ y } \frac{(1 - e^{-cs})^2}{s(1 - e^{-2cs})}$$

$$\mathcal{L}\{Y(t) \cdot g(t)\} = \frac{(1 - e^{-cs})^2}{s(1 - e^{-2cs})} = \frac{1}{s} \operatorname{th} \frac{cs}{2}$$

Puede también llegarse a este resultado observando que

$$f'(t) = \delta + 2 \sum_1^{\infty} (-1)^n \delta(nc)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{1}{s} \left[1 + 2 \sum_1^{\infty} (-1)^n e^{-n e s} \right] =$$

$$= \frac{1}{s} \left[1 - \frac{2 e^{-cs}}{1 + e^{cs}} \right] = \frac{1}{s} \frac{1 - e^{-cs}}{1 + e^{cs}} = \frac{1}{s} \operatorname{th} \frac{cs}{2}$$

Ejercicio: Calcular la transformada de Laplace de la función $|\sin t|$ y comprobar el resultado aplicando la fórmula de reciprocidad.

70.- Aplicación a las ecuaciones diferenciales.

La teoría de las transformadas de Fourier y Laplace es de gran importancia para las ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como en derivadas parciales. No siendo nuestro

objeto el estudio de esta teoría vamos limitaremos a dar algunos ejemplos simples que nos muestran las posibilidades de aplicación.

Primeramente vamos a ver como se puede obtener la resolución de una ecuación lineal de coeficientes constantes con segundo miembro. Sea la ecuación

$$(53) \quad a x'' + b x' + c x = \varphi(t)$$

Para obtener la integral general basta con una solución particular $x(t)$, por ejemplo, con las condiciones $x(0) = x'(0) = 0$. Reemplazando esta solución en (53) y multiplicando por la función de Heaviside $Y(t)$ se tiene:

$$(54) \quad a Y(t) x'' + b Y(t) x' + c Y(t) x = \varphi(t)$$

$$\text{Sean } y(s) = \mathcal{L}\{Y(t) x(t)\}, \quad f(s) = \mathcal{L}\{Y(t) \varphi(t)\}.$$

Se tiene

$$s y(s) = \mathcal{L}\{x(t) \delta + Y(t) x'(t)\} = \mathcal{L}\{Y(t) x'(t)\}$$

$$s^2 y(s) = \mathcal{L}\{x'(t) \delta + Y(t) x''(t)\} = \mathcal{L}\{Y(t) x''(t)\}$$

luego aplicando transformada de Laplace a (54) se deduce

$$a s^2 y(s) + b s y(s) + c y(s) = f(s)$$

$$y(s) = (a s^2 + b s + c)^{-1} f(s)$$

y antitransformando los dos miembros de la última igualdad se obtiene la solución

$$(55) \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a s^2 + b s + c}\right\} * Y(t) \varphi(t)$$

Obsérvese que el método vale cualquiera que sea el orden de la ecuación, que el cálculo de la antitransformada se reduce, como vimos en el paragrafo 65, a una descomposición en fracciones simples y que no es necesario conocer la transformada del segundo miembro.

Tomemos otro ejemplo: vamos a determinar la solución de la ecuación $x'' + tx' - x = 0$ con las condiciones iniciales $x(0) = 0$; $x'(0) = 1$. Multiplicando por $Y(t)$ y aplicando transformadas de Laplace se tiene

$$Y(t) x'' - Y(t) t x' - Y(t) x(t) = 0$$

$$\mathcal{L}\{Y(t) \cdot x(t)\} = y(s)$$

$$s y(s) = \mathcal{L}\{x(t)\delta + Y(t) x'(t)\} = \mathcal{L}\{Y(t) \cdot x'(t)\}$$

$$- y(s) - s y'(s) = \mathcal{L}\{Y(t) x'(t)\}$$

$$s^2 y(s) = \mathcal{L}\{x'(t)\delta + x''(t) Y(t)\} = \mathcal{L}\{\delta\} + \mathcal{L}\{x''(t) Y(t)\}$$

$$s^2 y(s) - 1 = \mathcal{L}\{x''(t) Y(t)\}$$

Reemplazando se tiene

$$s^2 y - 1 - s y' - y = 0$$

$$y' + \left(\frac{1}{s} - s\right) y = -\frac{1}{2}$$

ecuación lineal cuya solución es $\frac{1}{s^2} + C \frac{1}{s^2} e^{\frac{s^2}{2}}$

pero como hemos supuesto que $y(s)$ es una transformada de Laplace, no puede crecer, como vimos en el párrafo anterior como una exponencial, luego $C = 0$ y antitransformando obtenemos la solución $x(t) = t$.

EJERCICIO: Encontrar la integral general de la ecuación

$$tx'' - (2t + 1)x' + (1 + t)x = 0$$

Solución: $C_1 t^2 e^t + C_2 e^t$.

En lo que respecta a las ecuaciones en derivadas parciales de la física se suele usar como método de resolución la transformada de Fourier respecto a las variables espaciales y la de Laplace respecto a la variable temporal.

oooooooooooooooo

jt

B I B L I O G R A F I A

Nos limitaremos a dar la mencionada en el texto sobre puntos concretos y a recordar que Schwartz (1) es la obra fundamental para el estudio de la teoría de las distribuciones. Un estudio más somero pero riguroso puede hacerse en Martineau y Trèves (1). Schwartz (4) es adecuado para un estudio elemental.

ALBERTONI & CUGLIANI:

- (1).- "Sul problema del cambiamento di variabili nella teoria delle distribuzioni". Nuovo Cimento, vol VIII, nº 11 (1951), pags. 1-15 y vol X, nº 2 (1953) pags 1-17.

BUREAU:

- (1).- "Divergent integrals and partial differential equations". University of Chicago (1954)

GEL'FAND & SÁDDEG:

- (1).- "Fourier transforms of rapidly increasing functions and questions of uniqueness of the solution of Cauchy's problem". American Mathematical Society Translations, Series 2, vol 5, pags 221-274.

GEL'FAND & SAPIRO:

- (1).- "Homogeneous functions and their extensions". American Mathematical Society Translations, Series 2, vol 5, pags 221-274.

GONZALEZ DOMINGUEZ & SCARFIELLO:

- (1).- "Nota sobre la fórmula $v.p. \int \frac{1}{x} \delta = - \frac{1}{2} \delta$ ". Revista de la Unión Matemática Argentina, vol 17 (1955) pags. 53-67.

GONZALEZ DOMINGUEZ:

- (1).- "Distribuciones y funciones analíticas". Symposium de UNESCO en Punta del Este (1951) pags. 91-106.

HADAMARD:

- (1).- "Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques". Paris, Hermann (1932).

O'KEEFFE:

- (1).- "Singularities of Hadamard's finite part of improper integrals in the distributions of Schwartz". Rendiconti di Palermo, vol. VI (1957) pags. 65-82

KONIG:

- (1).- "Multiplikation von Distributionen". Math. Annalen, vol. 128 (1955) pags. 420-452.

MARTINEAU & TREVES:

- (1).- "Elements de la théorie des espaces vectoriels topologiques et des distributions". Paris. C.D.U. (1955)

METHEE:

- (1).- "Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz". Commentarii Math. Helvetici, vol 28 (1954) pags. 1-49

RIESZ (M.):

- (1).-"L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy". Acta Mathematica, vol.89 (1949) pags.1-223.

SCHWARTZ:

- (1).-"Théorie des distributions". Paris, Hermann, 1^o vol (1957) 2^o edición) 2^o vol (1951).
- (2).-"Sur L'impossibilité de la multiplication des distributions". Comptes Rendus Acad. Sciences, vol. 239 (1954) pags. 847-848.
- (3).-"Transformation de Laplace des distributions". Seminaire Math. Université Lund, tome supplémentaire (1952) pags 196-206
- (4).-"Cours de Methodes mathématiques de la physique". Paris, C.D.U. (1955).

I N D I C E

Introducción.....	4
Capítulo I.- BOSQUEJO DE LA INTEGRAL DE LEBESGUE	
1.- Evolución del concepto de integral.....	4
2.- Medida de conjuntos.....	5
3.- Definición de la integral de Lebesgue.....	8
4.- Propiedades de la integral de Lebesgue.....	11
Capítulo II.- DEFINICION DE DISTRIBUCIONES. EJEMPLOS	
5.- Espacios vectoriales.....	16
6.- Espacios métricos y topológicos.....	19
7.- Funcionales lineales y continuas. Espacio dual.....	21
8.- Espacios de funciones de prueba. Definición de distribución.....	22
9.- Ejemplos de distribuciones; funciones localmente sumables.....	25
10.- Integral de Stieltjes. Medidas.....	27
11.- Soporte de una distribución.....	31
Capítulo III.- DERIVACIÓN DE DISTRIBUCIONES. EJEMPLOS	
12.- Derivada de una distribución.....	34
13.- Derivadas de las funciones con saltos. Derivadas de la	35
14.- Distribuciones valor principal y deltas de Heisenberg	38
15.- Partes finitas de Hadamard.....	40
16.- Pseudofunciones. Distribuciones Y_m	45
17.- Derivada de una función discontinua sobre una superficie.....	50
18.- Pseudofunciones en el espacio euclidiano enedimensional.....	53
19.- Pseudofunciones en el espacio de Lorentz.....	58
20.- Primitivas de una distribución.....	63
Capítulo IV.- CONVERGENCIA DE DISTRIBUCIONES. DISTRIBUCIONES DE SOPORTE COMPACTO	
21.- Estructura del espacio de distribuciones.....	66
22.- Continuidad de la derivación.....	68
23.- Aproximación por funciones en el espacio D	70
24.- Distribuciones de soporte compacto. Espacio E	72
25.- Funciones que aproximan la delta de Dirac.....	76
26.- Ejemplos de nucleos singulares que aproximan la delta de Dirac.....	79
Capítulo V.- PRODUCTOS TENSORIAL Y MULTIPLICATIVO	
27.- Definición del producto tensorial.....	82
28.- Propiedades del producto tensorial.....	85
29.- Definición del prducto multiplicativo.....	88
30.- Propiedades y ejemplos del producto multiplicativo..	88
31.- División por potencias de x	90
32.- Productos generalizados de distribuciones.....	96

Capítulo VI.- CAMBIO DE VARIABLE

33.- Definición del cambio de variable.....	99
34.- Cambios lineales, Definición de la derivada por paso al límite.....	101
35.- El cambio t igual longitud de x	103
36.- El cambio $t = x^2 - a^2$	105
37.- Deltas de los hiperboloides y del cono.....	108

Capítulo VII.- PRODUCTO DE CONVOLUCION

38.- Definición del producto de convolución.....	110
39.- Ejemplos de producto de convolución.....	114
40.- Producto de convolución de varias distribuciones..	117
41.- Regularización de distribuciones.....	118
42.- Traza del producto de convolución.....	122
43.- Algebras de convolución.....	123
44.- Derivación de orden no entero.....	127
45.- Componentes de Plemelj.....	129

Capítulo VIII.- TRANSFORMADAS DE FOURIER

46.- Transformadas integrales.....	131
47.- Definición y propiedades elementales de la transformada de Fourier de una función.....	133
48.- El espacio S	137
49.- Distribuciones temperadas.....	143
50.- Transformada de Fourier de una distribución temperada.....	145
51.- Fórmula de reciprocidad de la transformada de Fourier.....	148
52.- Fórmula sumatoria de Poisson.....	152
53.- Fórmula de Parseval-Plancherel.....	153
54.- Transformación de Fourier, multiplicación y convolución.....	155
55.- Aplicación de la transformación de Fourier a la aproximación de la	158
56.- Transformadas de Fourier del valor principal y de las deltas de Heisenberg.....	158
58.- La transformación de Fourier para varias variables	162
59.- Transformadas que dependen sólo de la distancia...	164
60.- Transformación de Fourier para las distribuciones no temperadas.....	167

Capítulo IX.- TRANSFORMADAS DE LAPLACE

61.- Transformada de Laplace de una función.....	173
62.- Transformada de Laplace de una distribución.....	175
63.- Propiedades de la transformada de Laplace.....	179
64.- Ejemplos de transformadas de Laplace.....	182
65.- Transformadas de funciones de Bessel.....	185
66.- Casos sencillos de antitransformadas.....	188
67.- Inversión de la transformada de Laplace de una función.....	189
68.- Inversión de la transformada de Laplace para distribuciones.....	194
69.- Transformada de Laplace de una función periódica..	196
70.- Aplicación de las ecuaciones diferenciales.....	197
Bibliografía.....	200