

02.68.19

C.N.E.A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
NO 2	AÑO 1983

Formulación operacional del metodo
de la captura resonante intermedia en
sistemas heterogéneos multinucleares
CNEA-Rx-32 R. PAVIOTTI CORCUERA
R. SOLANILLA



INTRODUCCION

El problema de la absorcion resonante en sistemas homogeneos con aproximacion I.R. aplicada al absorbente fue tratado recientemente con dos tipos de operadores ⁴, uno dependiente del parametro de resonancia intermedia λ y otro independiente de él.

Los resultados numéricos aplicados a la resonancia de 192ev del U-238 dieron mejor resultado con el primer tipo de operador. Sin embargo esta situacion se invierte para cierto tipo de resonancias como lo demuestran nuestros resultados numéricos.

El mismo tipo de conclusion vale cuando se aplican ambos tipos de operadores a sistemas heterogéneos tratados con aproximación I.R. en el absorbente, en el diluyente y en el moderador.

La formulación operacional se extiende además para sistemas heterogéneos constituidos por N diluentes y M moderadores.

En cuanto a la función de prueba que anteriormente se introducía en forma arbitraria tanto para sistemas homogéneos ^{3,5} como para sistemas heterogéneos ¹ aqui en cambio aparecerán como consecuencia de una aproximación lineal empleada para los operadores de moderación.

Por ultimo, una discusión sobre equivalencia entre sistemas heterogéneos y homogéneos nos da un nuevo criterio para establecer la mencionada equivalencia.

RESUMEN

El empleo del cálculo operacional permite extender en forma inmediata la aproximación I.R. a sistemas heterogéneos multinucleares.

Se introducen con significado físico los parámetros de resonancia intermedia, esto permite obtener en forma coherente funciones de prueba generales que pueden adaptarse a sistemas heterogéneos u homogéneos según sea el caso.

Se analizan dos tipos de aproximaciones y se aplica cada una de ellas a sistemas homogéneos y heterogéneos para una resonancia muy absorbente y una muy dispersante del U_{238} .

Se discute la equivalencia entre un sistema heterogéneo y uno homogéneo para ambas aproximaciones.

SISTEMAS HETEROGENEOS MULTINUCLEARES

Consideremos una celda cilíndrica formada por una barra constituida por combustible que está uniformemente mezclado con N diluentes de secciones eficaces ($S_1, S_2, \dots, S_N$)

La sección eficaz S_j es igual a $\sum_{N_j} \frac{V_j}{V_c}$ donde $\sum_{N_j}$ es la sección eficaz macroscópica de la especie "j" del moderador y V_j/V_c es el cociente entre volumen del moderador a volumen del combustible y N_j es el número de átomos por cm^3 para el absorbente.

Suponiendo flujo plano, las ecuaciones de balance para un problema a dos regiones pueden escribirse:

$$\sigma_T(E) \psi_f(E) = (1 - P_f^*) \left[K_f(\sigma_f(E) \psi_f(E)) + \sum_{i=1}^N \sigma_i K_{oi}(\psi_f(E)) \right] + P_f^* \sum_{j=1}^M S_{mj} K_{mj}(\psi_m(E)) \quad (1)$$

$$S_m \psi_m(E) = P_m^* \left[K_f(\sigma_f(E) \psi_f(E)) + \sum_{i=1}^N \sigma_i \psi_f(E) \right] + (1 - P_m^*) \sum_{j=1}^M S_{mj} K_{mj}(\psi_m(E)) \quad (2)$$

donde:

$\psi_f(E)$ es el flujo en el combustible por unidad de letargo.

$\psi_m(E)$ es el flujo en el moderador por unidad de letargo.

$\sigma_a, \sigma_p, \sigma_T$ son secciones eficaces microscópicas de absorción, potencial y de dispersión resonante (excluida interferencia) respectivamente para el absorbente.

$$\begin{aligned} \sigma_S &= \sigma_f + \sigma_p \\ \sigma_T &= \sigma_a + \sigma_S + \sum_{i=1}^N \sigma_i \end{aligned}$$

$$K(\psi) = \int_{u-\Delta_f}^u \frac{e^{-(u-u')}}{(1-\alpha_f)} \psi(u') du$$

$$\Delta_f = \ln \frac{1}{\epsilon_f} \quad \alpha_f = \left(\frac{A_f - 1}{H_f + 1} \right)^2$$

A_f masa atómica de la especie q

Si se emplea para la probabilidad de escape de combustible (P_f^*) la aproximación racional mejorada con el factor de Bell dado por "eslie" ⁴ y P_m^* deducida de la relación de reciprocidad.

$$P_f^* \sigma_f = P_m^* S_m$$

donde $S_m = S_1 + S_2 + \dots + S_M$

Entonces las (1) y (2) pueden escribirse:

$$(s + \sigma_f) \psi_f(\epsilon) = K(\sigma_f(\epsilon) \psi_f(\epsilon)) + \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i K_{\sigma_i}(\psi_f(\epsilon)) + \frac{s}{S_m} \sum_{j=1}^M S_j K_{\sigma_j}(\psi_m) \quad (3)$$

$$(s + \sigma_f) \psi_m(\epsilon) = \frac{s}{S_m} \left[K_{\sigma_f}(\sigma_f(\epsilon) \psi_f(\epsilon)) + \sum_{i=1}^N \sigma_i K_{\sigma_i}(\psi_f(\epsilon)) \right] + \frac{[s + \sigma_f(1 - \frac{s}{S_m})]}{S_m} \sum_{j=1}^M S_j K_{\sigma_j}(\psi_m(\epsilon)) \quad (4)$$

Empleando notación operacional estas admiten la siguiente forma:

$$H_f \psi_f = \frac{s}{S_m} \sum_{j=1}^M S_j K_{\sigma_j}(\psi_m) \quad (5)$$

$$H_m \psi_m = K(\sigma_f \psi_f) + \sum_{i=1}^N \sigma_i K_{\sigma_i}(\psi_f) \quad (6)$$

donde los operadores H_f y H_m están dados por:

$$H_f = \sigma - K_f \sigma_s - \sum_{i=1}^N \sigma_{m_i} K_{m_i} \quad (7)$$

$$H_m = \frac{s_m}{s} \sigma - \frac{1}{s} [\sigma - \sigma_T \frac{s}{s_m}] \sum_{j=1}^M s_j K_{m_j} \quad (8)$$

$$\sigma = \sigma_T + s$$

Si expresamos H_f de la siguiente manera:

$$H_f = H_f^{(0)} + H_f^{(1)}$$

Entonces:

$$\psi_f = (H_f^{(0)})^{-1} \sum_{m=1}^M s_m \sum_{j=1}^M s_j K_{m_j} \psi_m - (H_f^{(0)})^{-1} H_f^{(1)} \psi_f \quad (10)$$

En primera aproximación podemos despreciar el operador H_f entonces ec. (10) se transforma en:

$$H_f^{(0)} \psi_f^{(1)} = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^M s_j K_{m_j} \psi_m$$

Sin embargo esta expresión no determina por sí sola $H_f^{(0)}$, por eso pedimos que $H_f^{(0)}$ cumple una condición mas: la de que sea un operador multicopativo, es decir:

$$H_f^{(0)} = \frac{\sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^M s_j K_{m_j} \psi_m}{\psi_f^{(1)}} \quad (11)$$

Vemos aque entonces que para conocer H_f necesitamos conocer a la cual llamaremos función de prueba.

APROXIMACION N. R.

La resonancia se considera tan angosta que su contribución en el rango de integración es despreciable. Fuera de la resonancia. $\psi_s \rightarrow \psi_p$ y $\sigma_s \rightarrow \sigma_p$

Luego la densidad de colisión

$$F(E) = \int_E^{\infty} \sum_S (E') \psi(E') \frac{dE'}{(1-\alpha) E'} \quad (12)$$

puede aproximarse por:

$$F(E) \Rightarrow \sigma_p \psi_\infty$$

APROXIMACION W. R.

El rango de integración es pequeño con respecto al ancho de la resonancia de forma tal que ^{el límite} puede considerarse constante dentro de la integral ($\psi(E) \approx \psi(E)$)

$$F(E) \Rightarrow \sigma_s(E) \psi(E)$$

APROXIMACION I. R.

Quando la pérdida de energía media por colisión es comparable al ancho de la resonancia, no es posible emplear ninguna de las aproximaciones anteriores. Sin embargo, la densidad de colisión, está comprendida entre ambos casos límite.

$$F(E) = \lambda \sigma_p \psi_\infty + (1-\lambda) \sigma_s \psi \quad (13)$$

donde λ puede interpretarse como "la probabilidad promedio" de que un neutrón que tuvo una colisión de dispersión con un átomo absorbente sea degradado a energías fuera de la resonancia² utilizando esta aproximación tendremos

$$K_g(\sigma_s \psi_g) = \lambda \sigma_p + (1-\lambda) \psi_g$$

$$K_{om_i}(\psi_g) = \kappa_i + (1-\kappa_i) \psi_g \quad (14)$$

$$K_{m_j}(\psi) = \mu_j + (1-\mu_j) \psi_m$$

donde hemos considerado flujos asintóticos unitarios.

Esto da como resultado las siguientes funciones de prueba:

$$\psi_f^{(1)} = \frac{1+x}{\gamma^2+x^2} \quad (15)$$

$$\psi_{m1}^{(1)} = \frac{\xi^2+x^2}{\gamma^2+x^2} \quad (16)$$

con $\gamma^2 = 1 + \frac{\gamma_0}{\lambda \sigma_p + \sum_{i=1}^N \kappa_i \sigma_i + s \mu'} \frac{\gamma_0 + \lambda \gamma_m}{\gamma}$

$$\xi^2 = 1 + \mu' \left(1 - \frac{s}{s_m}\right) (\gamma^2 - 1) \quad \mu' = \frac{\sum_{j=1}^m \mu_j s_j}{\sum_{j=1}^m \mu_j s_j \left(1 - \frac{s}{s_m}\right) + s} \quad (17)$$

Entonces ahora de (11) y (15) podemos expresar $H_g^{(0)}$

$$H_g^{(1)} = \frac{\gamma_0 + \lambda \sigma_p + \sum_{i=1}^N \kappa_i \sigma_i + s \mu'}{\lambda \sigma_p + \sum_{i=1}^N \kappa_i \sigma_i + s \mu'} \frac{s}{s_m} \sum_{j=1}^m s_j K_{mj} \psi_m \quad (18)$$

De (10) y (18) resulta:

$$\begin{aligned} \psi_g = & \psi_g^{(1)} + \psi_g^{(1)} \frac{1}{\lambda \sigma_p + \sum_{i=1}^N \kappa_i \sigma_i + s \mu'} \left[\lambda (\sigma_s \psi_g - \sigma_p) + K_g (\sigma_s \psi_g) - \sigma_s \psi_g + \right. \\ & + \sum_{i=1}^N \kappa_i \sigma_{m_i} (\psi_g - 1) + \sum_{j=1}^m \sigma_{m_j} K_{mj} (\psi_g) - \sum_{i=1}^N \kappa_i \psi_g + \\ & \left. + s \mu' (\psi_g - 1) + \frac{s}{s_m} \sum_{j=1}^m s_j K_{mj} (\psi_m) - s \psi_g \right] \quad (19) \end{aligned}$$

La integral de resonancia en primer orden viene dada por:

$$I_{\lambda, \kappa_i, \mu'}^{(1)} = [\sigma_a, \psi_f^{(1)}] = \frac{I_0}{\alpha}$$

Donde (a, b) indica producto escalar y I_0 es la integral de resonancia a dilución infinita.

$$I_0 = \frac{\pi \epsilon_0 \Gamma}{2 \epsilon_r}$$

La integral de resonancia exacta se expresa por:

$$I_{\text{exa}} = [\sigma_a, \psi_f] \quad (20)$$

Igualando

$$I_{\lambda, \kappa_i, \mu'}^{(1)} = I_{\text{exa}}$$

se pueden obtener los parámetros de resonancia λ, κ_i, μ' para calcular

$$I_{\text{exa}} = \frac{I_0}{\alpha} \quad (21)$$

De (19), (20) y (21) se tiene:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_a(x') \psi_f^{(1)}(x') [\sigma_p - K_f(\sigma_s(x') \psi_f(x'))] dx'}{\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_a(x') \psi_f^{(1)}(x') [\sigma_p - \sigma_s(x') \psi_f(x')] dx'} \\ \kappa_i &= 1 - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_a(x') \psi_f^{(1)}(x') [\sigma_p - K_{f_m}(\sigma_s(x') \psi_f(x'))] dx'}{\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_a(x') \psi_f^{(1)}(x') [1 - \psi_f(x')] dx'} \\ \mu' &= 1 - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_a(x') \psi_f^{(1)}(x') \left[1 - \frac{1}{S_m} \sum_{j=1}^m s_j K_{f_m}(\psi_{f_m}(x')) \right] dx'}{\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_a(x') \psi_f^{(1)}(x') [1 - \psi_f(x')] dx'} \end{aligned} \quad (22)$$

Si en (22) empleamos para ψ_j y ψ_m la aproximación en primer orden $\psi_j^{(1)}$ y $\psi_m^{(1)}$ y además por simplicidad para los núcleos $K(\phi)$ la aproximación de Goldstein³

$$K_i(\phi) = \frac{1}{\delta_i} \int_{\alpha}^{\alpha+\delta_i} \phi(x') dx'; \text{ con } \delta_i = \frac{2}{\Gamma} E_f (1 - \alpha_i)$$

tendremos el siguiente conjunto de ecuaciones para los parámetros intermedios en primer orden

$$\lambda = 1 - \sum f_i \quad K_i = 1 - \sum \sigma_{am_i} \quad i = 1 \dots N$$

$$u' = \frac{\sum_{j=1}^m s_j - \sum_{j=1}^m s_j K_i^{m_j}}{\sum_{j=1}^m s_j - (1 - \frac{\epsilon}{\sum m_j}) \sum s_j X^{m_j}} \quad (23)$$

$$X^f = \frac{\text{outing } x^f}{x^f} \quad X^{\sigma_{am_i}} = \frac{\text{outing } x^{\sigma_{am_i}}}{x^{\sigma_{am_i}}} \quad X^{m_j} = \frac{\text{outing } x^{m_j}}{x^{m_j}}$$

$$x^f = \frac{\delta^f}{2\alpha} \quad (24)$$

El índice q representa a f, σ_{am_i} , m_j según corresponda al combustible a los diluentes o a los moderadores respectivamente.

Si en vez de elegir para $H_f^{(0)}$ la expresión (11) se elegi

$$H_f^{(0)} = \sigma$$

$$H_f^{(1)} = K_f \sigma_s + \sum_{i=1}^N \sigma_i K_{\sigma_{am_i}} \quad (25)$$

Entonces se tiene para los parametros intermedios las soluciones de "al Naj bengal" y otros, que son analogas a las (24) excepto que

$$x_i = \frac{\delta_i}{\alpha_i + \alpha} \quad (26)$$

donde $\alpha_i = \alpha$ ($\lambda = K_i = \dots = \mu_j = 1$) $\begin{matrix} i = 1 \dots N \\ j = 1 \dots M \end{matrix}$

COMPARACION DE RESULTADOS

Aplicamos ahora (24) y (26) al caso de un sistema homogéneo formado por ^{238}U O_2 y un moderador de sección eficaz microscópica por átomo absorbente igual a S .

Tratando al moderador en aproximación N.R. se obtienen los valores de tabla I para la resonancia de 6.7 ev. del U^{238} y los de tabla II para la resonancia 192 ev del U^{238} .

Para un sistema heterogeneo se obtienen los valores de tabla III para la resonancia de 6.7 ev. y de tabla IV ~~XXXX~~ ~~XX~~ para la de 192 ev.

Observando los valores tabulados podemos concluir que: la elección del H_2 de ec. (18) es mejor para resonancias fuertemente dispersantes, pero cuando se trata de resonancias muy absorbentes es mejor emplear el H_2 de ec. (25).

PRINCIPIOS DE EQUIVALENCIA ENTRE INTEGRALES DE RESONANCIA

Consideremos ahora la equivalencia entre un sistema heterogéneo formado por combustible (U) y moderador (M) y otro homogéneo formado por (U-M)

Las ecuaciones para el segundo caso son:

$$I = \frac{I_0}{\alpha} \quad \alpha^2 = 1 + \frac{C_2}{\lambda q_p + \mu \bar{v}_{im}} \frac{\Gamma_0 \lambda \Gamma_m}{\Gamma}$$

$$\lambda = 1 - \sum^i \quad \mu = 1 - \sum^m \quad \sum^i = \frac{\alpha_i \tan \frac{\delta_i}{2\alpha}}{\delta_i/2\alpha}$$

Y si esta se compara con las correspondientes al sistema heterogéneo mencionado se concluyen inmediatamente que para que ambos sistemas sean equivalentes basta con elegir:

$$\sigma_m = \sigma'_m \quad \frac{N_{am}}{N_g} = \frac{\mu'_m}{\mu(\text{long})} S \quad (27)$$

Esta conclusión permite obtener un principio de equivalencia más general que el obtenido por Bal Raj Sehgal y otros¹:

Efectivamente ellos necesitan como condición (Homogéneo) y esto lleva a $S=S_m = \sigma'_m$ condición que está contenida en (27).

CONCLUSIÓN

Bal Raj Sehgal y otros¹ determinan las funciones de prueba imponiendo las condiciones:

$$\psi(\lambda = \dots = \kappa_i = \dots = \mu_j = \dots = 1) = \psi_{NR} \quad i = 1 \dots N$$

$$\psi(\lambda = \kappa_i = \dots = \mu_j = \dots = 0) = \psi_{WR} \quad j = 1 \dots M$$

Sin embargo a veces, estas condiciones no determinan unívocamente la dependencia funcional, $\psi = \psi(\lambda, \kappa_i, \mu_j)$, como sucede por ejemplo para el caso de sistemas heterogéneos en $\psi_m(\lambda, \kappa_i, \mu_j)$

Para nuestro caso, en cambio, la introducción de la aproximación lineal para los núcleos $K(\phi)$ elimina esa ambigüedad dando también coherencia al método.

El análisis de los resultados numéricos, nos muestra que aunque la elección de H_f de ec. (11) teóricamente aparenta ser

mas exacta, no conduce en el caso de resonancias muy absorbentes a mejores resultados que los que daba la eleccion

Podemos decir que si se trata de resonancias dispersantes es mas conveniente usar los resultados que da el empleo de ec. (11) pero si la resonancia es muy absorbente entonces es preferible usar $H_f^0 = S + G_r$

Finalmente con respecto a equivalencia entre sistemas homogéneo y heterogéneos podemos decir que la eleccion de ec. (11) nos conduce a una equivalencia de utilidad practica cosa que no sucede con la otra eleccion de $H_f^{(0)}$

TABLA I

Comparación de Integrales de Resonancia

6.7 energía de resonancia del U238 en

UO₂ como combustible (Sin dispersion de intererencia

Ec (24)				Ec. (26)			EXACT
S	K	λ	I	K	λ	I	
10	0.313	0.004	3.16	0.368	0.004	3.28	3.39
20	0.423	0.007	4.31	0.452	0.008	4.44	4.50
30	0.489	0.009	5.20	0.505	0.010	5.34	5.38
50	0.569	0.015	6.60	0.574	0.015	6.77	6.79
70	0.618	0.021	7.73	0.618	0.021	7.92	7.95
100	0.667	0.028	9.16	0.664	0.028	9.39	9.41

TABLA 11

Comparación de integrales de resonancia
 Resonancia de 192ev. del U238 en UO_2 como
 combustible (sin dispersión de interferencia)

Ec. (26)				Ec. (24)			EXACT
S	K	A	I	K	A	I	I
10	0.899	0.247	0.161	0.911	0.290	0.156	0.152
20	0.913	0.297	0.189	0.923	0.344	0.183	0.180
30	0.922	0.335	0.211	0.931	0.383	0.204	0.202
50	0.933	0.392	0.245	0.941	0.437	0.238	0.237
70	0.940	0.435	0.273	0.947	0.477	0.266	0.265
100	0.948	0.482	0.308	0.953	0.519	0.301	0.300

Valores obtenidos por YUKIO ISHIGURA

TABLA III

Comparación de Integrales de Resonancia

6.7 ev Energía de Resonancia de V U 783

			Ec. (26)			Ec. (24)			MONTE CARLO
A_m	V_m/V_f	R	λ	μ	I	λ	μ	I	I
1	0.5	0.762	0.002	0.848	2.25	0.002	0.810	2.17	2.30 $\pm$ 0.01
	0.5	0.3175	0.003	0.830	2.52	0.003	0.793	2.41	2.64 $\pm$ 0.02
	4.0	0.762	0.005	0.968	3.52	0.004	0.964	3.52	3.54 $\pm$ 0.05
	4.0	0.3175	0.009	0.954	5.02	0.009	0.951	5.01	5.01 $\pm$ 0.07
9	4.0	0.762	0.004	0.841	3.13	0.003	0.808	3.05	3.14 $\pm$ 0.02
	4.0	0.3175	0.007	0.801	4.07	0.005	0.773	3.97	4.15 $\pm$ 0.02
	16.0	0.762	0.005	0.954	3.62	0.004	0.947	3.53	3.63 $\pm$ 0.05
	16.0	0.3175	0.010	0.935	5.27	0.009	0.930	5.25	5.33 $\pm$ 0.05
12	4.0	0.762	0.002	0.639	2.27	0.009	0.509	1.91	2.35 $\pm$ 0.01
	4.0	0.3175	0.003	0.605	2.58	0.002	0.489	2.14	2.75 $\pm$ 0.01
	40	0.762	0.005	0.954	3.51	0.004	0.935	3.49	3.57 $\pm$ 0.05
	40	0.3175	0.010	0.926	5.21	0.01	0.917	5.17	5.29 $\pm$ 0.05

TABLA IV

Comparación de integrales de resonancia 192 ev. Energía de resonancia del U 238

			Ec. (26)			Ec. (24)		
A_m	V_m/V_f	R	λ	μ	I	λ	μ	I
1	0.5	0.762	0.214	0.985	0,122	0.409	0,9916	0,109
	0.5	0.3175	0,241	0,981	0,133	0,438	0,990	0,119
	4.0	0.762	0.283	0,997	0,152	0,481	0,998	0,135
	4.0	0.3175	0,368	0,995	0,196	0,565	0,997	0,173
9	4.0	0.762	0,275	0,986	0,148	0,473	0,992	0,132
	4.0	0.3175	0,346	0,979	0,184	0,545	0,989	0,162
	16.0	0.762	0,286	0,996	0,154	0,484	0,998	0,136
	16.0	0.3175	0,382	0,994	0,204	0,578	0,9965	0,180
12	4,0	0.762	0,250	0,967	0,138	0,448	0,982	0,123
	4,0	0,3175	0,28507	0,9959	0,453	0,483	0,998	0,136

Los resultados numéricos se obtuvieron mediante el programa Resonancias (1989) escrito para GE-625 por la Prof. M. T. Calandria de Schillman.

REFERENCIAS

- 1.- Bal Raj Seghal and R. Goldstein. "Intermediate Resonance absorption in Heterogeneous Media" Nucl. Sci. Eng. 25,174,(1966).
- 2.- Guido Forti "Evaluation of Resonance Integral in Homogeneous and Heterogeneous Systems" 19, 449 (1964). *NUCL. Sci. Eng.*
- 3.- Ruben Goldstein and E. R. Cohen, "Theory of Resonance Absorption of Neutrons" Nucl. Sci, Eng. 13,132, (1962)
- 4.- Ruben Goldstein "Interaction and Intermediate Resonance Absorption Nucl. Sci. Eng. 30, 146.(1967).
- 5.- Ruben Goldstein "Intermediate resonance Absorption at Low Energies" Nucl. Sci. Eng. 22, 387,(1965).