

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
GERENCIA DE ENERGIA

DETERMINACION DE PARAMETROS CINETICOS EN UN MODELO
ACOPLADO USANDO LAS TECNICAS DE RUIDO NEUTRONICO EN
EL DOMINIO TEMPORAL.

R. WALDMAN; J. PIÑEYRO; H. LESCANO

CNEA-Re- 143

DEPARTAMENTO DE REACTORES



COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPARTAMENTO DE REACTORES NUCLEARES

OCTUBRE 1977

DETERMINACION DE PARAMETROS CINETICOS EN UN MODELO
ACOPLADO USANDO LAS TECNICAS DE RUIDO NEUTRONICO EN
EL DOMINIO TEMPORAL.

R. WALDMAN; J. PINERO; H. LESCO

CNEA-Re- 143

INTRODUCCION

En un trabajo anterior /1/, se desarrolló un modelo consistente en dos núcleos asimétricos débilmente acoplados. Se suponía que en cada núcleo era válida la cinética puntual y que la interacción entre núcleos se realizaba a través de términos adicionales de acoplamiento, considerando instantáneo el tiempo de traspaso de los neutrones de un núcleo a otro. El modelo fue aplicado a experiencias con una fuente de neutrones pulsados obteniéndose expresiones que ligan datos experimentales con parámetros cinéticos característicos. Las experiencias realizadas en la facilidad crítica RA-2 confirmaron en líneas generales el modelo.

En este informe se extiende el uso del modelo a las técnicas de medición del ruido neutrónico propio del reactor. La razón para estos estudios, es tratar de describir núcleos de reactores mas o menos extendidos en los cuales la cinética puntual falla /2/.

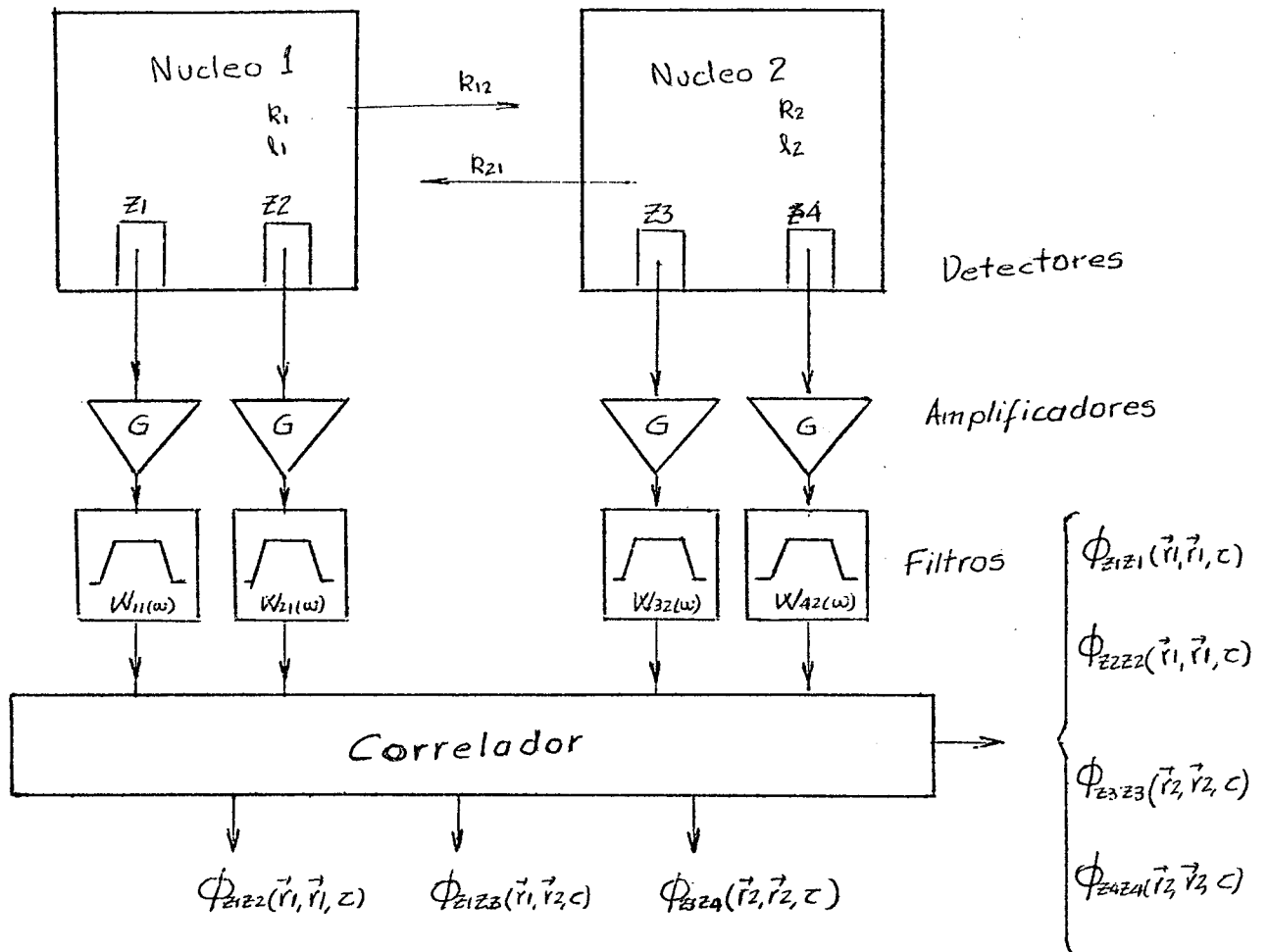
Los trabajos publicados hasta el presente, analizan la información en el dominio de frecuencias, suponiendo núcleos simétricos /3/, /4/ o leves asimetrías en las dos zonas fisionables /5/.

Este es el primer trabajo en que se analiza la información en el dominio temporal, a través de la técnica de cruce en cero de las funciones de correlación /6/. Se utiliza en la deducción las funciones de Green del sistema /7/ y se analiza en detalle las fuentes equivalentes de ruido neutrónico/8/ (apéndice 2).

Otras contribuciones son: análisis de las funciones de traspaso de un núcleo a otro (apéndice 1); errores estadísticos en la determinación del punto de cruce en cero, en función del tiempo de medición (apéndice 5); influencia de la frecuencia de filtro pasaaltos (apéndice 3).

Las expresiones obtenidas en este informe serán aplicadas a futuras mediciones en el reactor RA-2.

ESQUEMA DEL SISTEMA DE MEDICION



Z_i : detector i

k_i : constante efectiva del núcleo i

l_i : vida media efectiva del núcleo i

k_{ij} : probabilidad de que un neutrón que desaparezca en el núcleo i produzca un neutrón de fisión en el núcleo j .

W_{ij} : filtro asociado al detector i en el núcleo j .

$\phi_{Z_i Z_i}(\vec{r}_i, \vec{r}_i, \tau)$: autocorrelación del detector i en el núcleo j .

$\phi_{Z_i Z_j}(\vec{r}_m, \vec{r}_n, \tau)$: correlación cruzada de los detectores i y j en los núcleos m y n .

FUNDAMENTOS TEORICOS:

De acuerdo a la referencia /7/, la densidad neutrónica dentro de un reactor, puede obtenerse a partir de la distribución de fuentes y la función de Green del sistema mediante la convolución:

$$(1) \quad N_m(\vec{x}, t) = \int_{x', t} G_m(\vec{x}', t, \vec{x}, t) Y(\vec{x}', t) d\vec{x}' dt'$$

donde:

$$d\vec{x}' = dr' d\epsilon'$$

es un elemento de volumen en el espacio de las fases

$G_m(\vec{x}', t, \vec{x}, t)$: Función de Green del sistema para el detector m.

$Y(\vec{x}, t)$: Distribución de fuentes dentro del reactor (entrada).

$N_m(\vec{x}, t)$: Densidad Neutrónica (señal de entrada al correlador proveniente del detector m).

Por definición la función de correlación cruzada entre dos detectores Z_i y Z_j es:

$$(2) \quad \phi_{Z_i Z_j}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T N_i(\vec{x}_1, t) N_j(\vec{x}_2, t+\tau) dt$$

utilizando la relación (1), la Ec. (2) puede escribirse:

$$(3) \quad \phi_{Z_i Z_j}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\tau_1 \int_{\vec{x}_1'} d\vec{x}_1' G_i(\vec{x}_1', \vec{x}_1, \tau_1) \int_0^\infty d\tau_2 \int_{\vec{x}_2'} d\vec{x}_2' G_j(\vec{x}_2', \vec{x}_2, \tau_2) \phi_{Y_1 Y_2}(\vec{x}_1', \vec{x}_2', \tau_1 + \tau_2 - \tau)$$

Suponiendo que la fuente de ruido neutrónico del sistema es blanca, y considerando un solo grupo de energía, la función de correlación cruzada del ruido de fuente puede escribirse:

$$(4) \quad \phi_{Y_1 Y_2}(\vec{x}_1', \vec{x}_2', \tau_1 + \tau_2 - \tau) = A(\vec{r}_1', \vec{r}_2') \delta(E_1' - E_0) \delta(\tau_1 + \tau_2 - \tau) \delta(E_2' - E_0)$$

reemplazando (4) en (3)

$$(5) \quad \phi_{Z_i Z_j}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\tau_1 \int_{\vec{r}_1'} d^3 r_1' G_i(\vec{r}_1', \vec{r}_1, \tau_1) \int_{\vec{r}_2'} d^3 r_2' G_j(\vec{r}_2', \vec{r}_2, \tau_2) A(\vec{r}_1', \vec{r}_2') d^3 r_2'$$

Como únicamente existe correlación para neutrones generados en un mismo punto:

$$(6) \quad A(\vec{r}_1', \vec{r}_2') = A(\vec{r}_1') \delta(\vec{r}_2' - \vec{r}_1')$$

que reemplazado en la Ec. (5) se obtiene

$$(7) \quad \phi_{zizj}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\tau_1 \int_{\vec{r}_1} d^3\vec{r}_1' G_i(\vec{r}_1', \vec{r}_1, \tau_1) G_j(\vec{r}_1', \vec{r}_2, \tau + \tau_1) A(\vec{r}_1')$$

Suponiendo un modelo binodal de un reactor:

$$(8) \quad A(\vec{r}_1') = A_1(\vec{r}_1) \delta(\vec{r}_1' - \vec{r}_1) + A_2(\vec{r}_2) \delta(\vec{r}_1' - \vec{r}_2)$$

y se obtiene para la función de correlación cruzada entre núcleos:

$$(9) \quad \phi_{ziz3}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\tau_1 \left[G_1(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau_1) G_3(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau + \tau_1) A_1(\vec{r}_1) + G_1(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \tau_1) G_3(\vec{r}_2, \vec{r}_2, \tau + \tau_1) A_2(\vec{r}_2) \right]$$

donde $G_m(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \tau)$ es la respuesta del sistema de detección asociado al detector m al tiempo τ de inyectado un neutrón en $\vec{r}_i$, estando el detector en $\vec{r}_j$. Por lo tanto $G_m(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \tau) = 0$ si $\tau < 0$.

Idénticamente, las funciones de correlación cruzada cuando ambos detectores se encuentran en un mismo núcleo son:

$$(10) \quad \phi_{ziz2}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\tau_1 \left[G_1(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau_1) G_2(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau + \tau_1) A_1(\vec{r}_1) + G_1(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \tau_1) G_2(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \tau + \tau_1) A_2(\vec{r}_1) \right]$$

$$(11) \quad \phi_{z3z4}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\tau_1 \left[G_3(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau_1) G_4(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau + \tau_1) A_1(\vec{r}_1) + G_3(\vec{r}_2, \vec{r}_2, \tau_1) G_4(\vec{r}_2, \vec{r}_2, \tau + \tau_1) A_2(\vec{r}_2) \right]$$

El cálculo de las Funciones de Green del sistema, se derivan de las Ecs. cinéticas puntuales del modelo de núcleos acoplados, como veremos a continuación.

FUNCIONES TRANSFERENCIAS DE DOS NÚCLEOS ACOPLADOS Y FUNCIONES DE GREEN.

La función transferencia es la respuesta en el dominio de frecuencia a la introducción de un neutrón en el medio multiplicativo. Es decir es la transformada de Fourier de la función de Green del sistema. En el caso de dos núcleos puntuales acoplados, hay 4 funciones transferencias: la introducción de un neutrón en el núcleo i ($i=1,2$) y su respuesta en el núcleo j ($j=1,2$).

De acuerdo a la referencia /1/ las ecuaciones que describen a este sistema son:

$$(12) \quad \frac{dN_1(t)}{dt} = -\alpha_1 N_1(t) + \lambda_{21} \int_0^t P(\tau) N_2(t-\tau) d\tau + \sum_i \lambda_{i1} C_{i1}(t) + S_1(t)$$

$$(13) \quad \frac{dC_{i1}(t)}{dt} = \Gamma_{i1} N_1(t) - \lambda_{i1} C_{i1}(t)$$

$$(14) \quad \frac{dN_2(t)}{dt} = -\alpha_2 N_2(t) + \lambda_{12} \int_0^t P(\tau) N_1(t-\tau) d\tau + \sum_j \lambda_{j2} C_{j2}(t) + S_2(t)$$

$$(15) \quad \frac{dC_{j2}(t)}{dt} = \Gamma_{j2} N_2(t) - \lambda_{j2} C_{j2}(t)$$

donde:

$N_i(t)$: Número total de neutrones en la región i al tiempo t .

α_i : constante de tiempo para la región i .

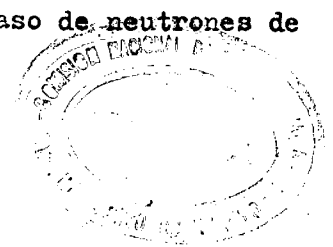
$C_{ij}(t)$: Número total de precursores de neutrones retardados del tipo j en la región i .

m_i : Número total de grupos de precursores de neutrones retardados en la región i .

λ_{ij} : constante de decaimiento del precursor j en la región i .

$S_i(t)$: Fuente de neutrones en la región i .

$P(t)$: representa la función de probabilidad de traspaso de neutrones de un núcleo a otro.



Aplicando la transformada de Laplace, con condiciones iniciales nulas, se obtiene de las Ecs. (12) a (15):

$$(16) \quad \eta_1(s) = \frac{S_1(s) \left[(s+\alpha_2) - \sum_j \frac{\lambda_{2j} \Gamma_{2j}}{(s+\lambda_{2j})} \right] + S_2(s) \lambda_{21} P(s)}{\left[(s+\alpha_1) - \sum_i \frac{\lambda_{1i} \Gamma_{1i}}{(s+\lambda_{1i})} \right] \left[(s+\alpha_2) - \sum_j \frac{\lambda_{2j} \Gamma_{2j}}{(s+\lambda_{2j})} \right] - \lambda_{12} \lambda_{21} [P(s)]^2}$$

$$(17) \quad \eta_2(s) = \frac{S_1(s) \lambda_{12} P(s) + S_2(s) \left[(s+\alpha_1) - \sum_i \frac{\lambda_{1i} \Gamma_{1i}}{(s+\lambda_{1i})} \right]}{\left[(s+\alpha_1) - \sum_i \frac{\lambda_{1i} \Gamma_{1i}}{(s+\lambda_{1i})} \right] \left[(s+\alpha_2) - \sum_j \frac{\lambda_{2j} \Gamma_{2j}}{(s+\lambda_{2j})} \right] - \lambda_{12} \lambda_{21} [P(s)]^2}$$

Definamos:

$$(18) \quad H_1(s) = \frac{1}{\left[(s+\alpha_1) - \sum_i \frac{\lambda_{1i} \Gamma_{1i}}{(s+\lambda_{1i})} \right]} ; \quad H_2(s) = \frac{1}{\left[(s+\alpha_2) - \sum_j \frac{\lambda_{2j} \Gamma_{2j}}{(s+\lambda_{2j})} \right]}$$

que son las funciones transferencias para los núcleos 1 y 2 respectivamente, si estuvieran aislados. Las ecuaciones (16) y (17) pueden escribirse ahora:

$$(19) \quad \eta_1(s) = \frac{S_1(s) H_1(s) + \lambda_{21} S_2(s) P(s) H_1(s) H_2(s)}{1 - \lambda_{12} \lambda_{21} H_1(s) H_2(s) P^2(s)}$$

$$(20) \quad \eta_2(s) = \frac{\lambda_{12} S_1(s) P(s) H_1(s) H_2(s) + S_2(s) H_2(s)}{1 - \lambda_{12} \lambda_{21} H_1(s) H_2(s) P^2(s)}$$

por lo tanto:

$$(21) \quad H_{11}(s) = \frac{H_1(s)}{B(s)} ; \quad H_{12}(s) = \frac{\lambda_{21} P(s) H_1 H_2}{B(s)}$$

$$(22) \quad H_{12}(s) = \frac{\lambda_{12} P(s) H_1 H_2}{B(s)} ; \quad H_{22}(s) = \frac{H_2}{1 - \lambda_{12} \lambda_{21} H_1 H_2 P^2(s)}$$

donde:

$$(23) \quad B(s) = 1 - \lambda_{12} \lambda_{21} H_1 H_2 P^2(s)$$

$H_{ij}(s)$: Respuesta en frecuencia en el núcleo j , ante un neutrón puesto en el núcleo i , en el instante inicial.

Las densidades espectrales que se obtienen son:

$$(24) \quad |n_1(s)|^2 = \frac{|H_1(s)|^2}{A(s)} \left[|S_1(s)|^2 + \lambda_{21}^2 |S_2(s)|^2 |P(s)|^2 |H_2(s)|^2 \right]$$

$$(25) \quad |n_2(s)|^2 = \frac{|H_2(s)|^2}{A(s)} \left[|S_2(s)|^2 + \lambda_{12}^2 |S_1(s)|^2 |P(s)|^2 |H_1(s)|^2 \right]$$

$$(26) \quad \langle n_1 n_2^* \rangle = \frac{\lambda_{12} |S_1(s)|^2 H_2(s) P^*(s) + \lambda_{21} |S_2(s)|^2 H_1(s) P(s)}{A(s)}$$

$$(27) \quad A(s) = 1 + (\lambda_{12} \lambda_{21})^2 |H_1(s)|^2 |H_2(s)|^2 |P(s)|^2 - \lambda_{12} \lambda_{21} (H_1(s) H_2(s) P^2(s) + H_1^*(s) H_2^*(s) P^{2*}(s))$$

El estudio en frecuencia más completo hecho hasta el presente para este sistema, puede verse en la referencia /5/.

Para obtener las funciones de Green del sistema hay que antitransformar las funciones transferencias del sistema, teniendo en cuenta la presencia de detectores y filtros:

$$G_m(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \tau) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ U_{mj} W_{mj} H_{ij} \right\}$$

donde U_{mj} es la función transferencia del detector m puesto en el núcleo j y W_{mj} la función transferencia de los filtros y amplificador asociados. Para una cámara de ionización y una combinación de un RC pasabajas y otro pasabajas, las funciones transferencias son /6/:

$$(28) \quad U_{mj} = \frac{\epsilon_{mj} \bar{q}_{mj} k_j}{V \rho_j}, \quad W_j = \frac{s \gamma_H}{(s + \gamma_4)(s + \gamma_1)}$$

donde γ_1 y γ_4 son las frecuencias de corte del filtro pasabajas y pasabajas respectivamente. Para resolver la Ec. (27) utilizaremos la técnica de los residuos. Los polos son $-\gamma_1, -\gamma_4$ y las raíces de la Ec. (23). Estas comprenden raíces instantáneas: $-\gamma_2, -\gamma_3, -\gamma_4$ y $-\gamma_5$ y raíces asociadas a los neutrones retardados /2/. Estas últimas pueden descartarse eligiendo adecuadamente al filtro pasabajas.

Como función $p(s)$ utilizaremos $\frac{1}{(1+s\tau_0)}$ (ver apéndice 1). Debido a la presencia del filtro pasabajas, las funciones transferencias de los núcleos aislados podemos aproximarla por la parte instantánea:

$$(29) \quad H_1 = \frac{1}{s + \alpha_1}; \quad H_2 = \frac{1}{s + \alpha_2}$$

donde $-\alpha_1$ y $-\alpha_2$ son respectivamente las constantes de decaimiento instan-

táneas de los núcleos 1 y 2 aislados.

Usando estas relaciones, se obtiene:

$$(30) \quad G_m(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau_1) = \frac{\epsilon_{m1} q_{m1} R_1 \lambda_1}{V_1 \ell_1} \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i (\alpha_2 - \lambda_i) (1 - \lambda_i \tau_0) e^{-\lambda_i \tau_1}}{\prod_{j=1, j \neq i}^6 (\lambda_j - \lambda_i)}$$

$$(31) \quad G_m(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau + \tau_1) = \frac{\epsilon_{m2} q_{m2} R_2 \lambda_1 \lambda_2}{V_2 \ell_2} \sum_{R=1}^6 \frac{\lambda_R (1 - \lambda_R \tau_0) e^{-\lambda_R (\tau + \tau_1)}}{\prod_{j=1, j \neq R}^6 (\lambda_j - \lambda_R)}$$

$$(32) \quad G_m(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \tau_1) = \frac{\epsilon_{m1} q_{m1} R_1 \lambda_1 \lambda_2}{V_1 \ell_1} \sum_{k=1}^6 \frac{\lambda_k (1 - \lambda_k \tau_0) e^{-\lambda_k \tau_1}}{\prod_{j=1, j \neq k}^6 (\lambda_j - \lambda_k)}$$

$$(33) \quad G_m(\vec{r}_2, \vec{r}_2, \tau_1) = \frac{\epsilon_{m2} q_{m2} R_2 \lambda_1}{V_2 \ell_2} \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i (\alpha_1 - \lambda_i) (1 - \lambda_i \tau_0) e^{-\lambda_i (\tau + \tau_1)}}{\prod_{j=1, j \neq i}^6 (\lambda_j - \lambda_i)}$$

CALCULO DE LAS FUNCIONES DE CORRELACION CRUZADA Y DE LAS AUTOCORRELACIONES

De acuerdo a las Ecs. (9) a (11):

$$(34) \quad \phi_{z1z2}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\tau_1 [G_1(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau_1) G_2(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau + \tau_1) A_1 + G_1(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \tau_1) G_2(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \tau + \tau_1) A_2]$$

$$(35) \quad \phi_{z1z3}(\vec{r}_1, \vec{r}_3, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\tau_1 [G_1(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau_1) G_3(\vec{r}_1, \vec{r}_3, \tau + \tau_1) A_1 + G_1(\vec{r}_2, \vec{r}_1, \tau_1) G_3(\vec{r}_2, \vec{r}_3, \tau + \tau_1) A_2]$$

$$(36) \quad \phi_{z3z4}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\tau_1 [G_3(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau_1) G_4(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau + \tau_1) A_1 + G_3(\vec{r}_2, \vec{r}_2, \tau_1) G_4(\vec{r}_2, \vec{r}_2, \tau + \tau_1) A_2]$$

y teniendo en cuenta las expresiones (30) a (33) se obtiene:

$$(37) \quad \phi_{z1z2}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \frac{\epsilon_{11} \epsilon_{21} q_{11} q_{21} R_1^2 \lambda_1^2}{2\pi V_1^2 \ell_1^2} \sum_{i=1}^6 \sum_{R=1}^6 \frac{\lambda_i \lambda_R (1 - \lambda_i \tau_0) (1 - \lambda_R \tau_0) [A_1 (\alpha_2 - \lambda_i) (\alpha_2 - \lambda_R) + A_2 \lambda_i^2]}{(\lambda_i + \lambda_R) \prod_{j=1}^6 (\lambda_j - \lambda_i) \prod_{j \neq R}^6 (\lambda_j - \lambda_R)} e^{-\lambda_i \tau}$$

$$(38) \quad \phi_{z1z3}(\vec{r}_1, \vec{r}_3, \tau) = \frac{\epsilon_{11} \epsilon_{32} q_{11} q_{32} R_1 R_2 \lambda_1^2}{2\pi V_1 V_2 \ell_1 \ell_2} \sum_{i=1}^6 \sum_{R=1}^6 \frac{\lambda_i \lambda_R (1 - \lambda_i \tau_0) (1 - \lambda_R \tau_0) [(\alpha_2 - \lambda_i) \lambda_{12} A_1 e^{-\lambda_R \tau} + (\alpha_1 - \lambda_i) \lambda_{21} A_2 e^{-\lambda_i \tau}]}{(\lambda_i + \lambda_R) \prod_{j=1}^6 (\lambda_j - \lambda_i) \prod_{j \neq R}^6 (\lambda_j - \lambda_R)}$$

$$(39) \quad \phi_{z3z4}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, \tau) = \frac{\epsilon_{32} \epsilon_{42} q_{32} q_{42} R_2^2 \lambda_1^2}{2\pi V_2^2 \ell_2^2} \sum_{i=1}^6 \sum_{R=1}^6 \frac{\lambda_i \lambda_R (1 - \lambda_i \tau_0) (1 - \lambda_R \tau_0) [(\alpha_1 - \lambda_i) (\alpha_1 - \lambda_R) A_2 + A_1 \lambda_{12}^2]}{(\lambda_i + \lambda_R) \prod_{j=1}^6 (\lambda_j - \lambda_i) \prod_{j \neq R}^6 (\lambda_j - \lambda_R)} e^{-\lambda_i \tau}$$

Si se desprecia el tiempo de traspaso de los neutrones de un núcleo a otro y se eliminan los términos correspondientes al decaimiento de las raíces instantáneas en valor absoluto más grandes en los núcleos acoplados (por la presencia del filtro pasabajos), las ecs. anteriores se simplifican a (ver apéndice 1):

$$(40) \quad \phi_{z1z2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{\epsilon_{11} \epsilon_{21} q_{11} q_{21} R_1^2 R_2^2}{4\pi v_1^2 \lambda_1^2} \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 \frac{\lambda_i \lambda_k [A_1 (\alpha_2 - \delta_i)(\alpha_2 - \delta_k) + A_2 \lambda_{21}^2]}{(\delta_i + \delta_k)^4 \prod_{j \neq i} (\delta_j - \delta_i) \prod_{j \neq k} (\delta_j - \delta_k)} e^{-\delta_i \tau}$$

$$(41) \quad \phi_{z1z3}(\vec{r}_1, \vec{r}_3, \tau) = \frac{\epsilon_{11} \epsilon_{32} q_{11} q_{32} R_1 R_2}{4\pi v_1 v_2 \lambda_1 \lambda_2} \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 \frac{\lambda_i \lambda_k [A_1 \lambda_{12} (\alpha_2 - \delta_i) e^{-\delta_k \tau} + A_2 \lambda_{21} (\alpha_1 - \delta_k) e^{-\delta_i \tau}]}{(\delta_i + \delta_k)^4 \prod_{j \neq i} (\delta_j - \delta_i) \prod_{j \neq k} (\delta_j - \delta_k)}$$

$$(42) \quad \phi_{z3z4}(\vec{r}_3, \vec{r}_4, \tau) = \frac{\epsilon_{32} \epsilon_{42} q_{32} q_{42} R_2^2}{4\pi v_2^2 \lambda_2^2} \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 \frac{\lambda_i \lambda_k [A_2 (\alpha_1 - \delta_i)(\alpha_1 - \delta_k) + A_1 \lambda_{12}^2]}{(\delta_i + \delta_k)^4 \prod_{j \neq i} (\delta_j - \delta_i) \prod_{j \neq k} (\delta_j - \delta_k)} e^{-\delta_i \tau}$$

suponiendo $\lambda_1 \gg \lambda_2 > \lambda_3$ se obtiene desarrollando:

$$(43) \quad \phi_{z1z2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{\epsilon_{11} \epsilon_{21} q_{11} q_{21} R_1^2}{4\pi v_1^2 \lambda_1^2 (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)} \left\{ \frac{e^{-\delta_2 \tau} \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_4) [A_1 (\lambda_2^2 - \alpha_2^2) A_2 \lambda_{21}^2]}{(\delta_2 + \lambda_3)(\delta_2 + \lambda_4)} + \frac{e^{-\delta_3 \tau} \lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)} \right. \\ \left. * [A_1 (\alpha_2^2 - \lambda_3^2) + A_2 \lambda_{21}^2] - \frac{e^{-\delta_4 \tau} \lambda_4 (\lambda_2 - \lambda_3) [A_1 (\alpha_2^2 - \lambda_4^2) + A_2 \lambda_{21}^2]}{(\delta_2 + \lambda_4)(\delta_3 + \lambda_4)} \right\}$$

$$(44) \quad \phi_{z1z3}(\vec{r}_1, \vec{r}_3, \tau) = \frac{\epsilon_{11} \epsilon_{32} q_{11} q_{32} R_1 R_2}{4\pi \lambda_1 \lambda_2 v^2 (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)} \left\{ \frac{e^{-\delta_2 \tau} \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_4) [\lambda_2 (\lambda_{12} A_1 - \lambda_{21} A_2)]}{(\delta_2 + \lambda_3)(\delta_2 + \lambda_4)} \right. \\ \left. + (\alpha_1 \lambda_{21} A_2 + \alpha_2 \lambda_{12} A_1) + \frac{e^{-\delta_3 \tau} \lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_4) [\lambda_3 (\lambda_{12} A_1 - \lambda_{21} A_2) + (\alpha_1 \lambda_{21} A_2 + \alpha_2 \lambda_{12} A_1)]}{(\delta_2 + \lambda_3)(\delta_3 + \lambda_4)} \right. \\ \left. + e^{-\delta_4 \tau} \lambda_4 (\lambda_2 - \lambda_3) \frac{[\lambda_4 (\lambda_{12} A_1 - \lambda_{21} A_2) + (\alpha_1 \lambda_{21} A_2 + \alpha_2 \lambda_{12} A_1)]}{(\delta_2 + \lambda_4)(\delta_3 + \lambda_4)} \right\}$$

$$(45) \quad \phi_{z3z4}(\vec{r}_3, \vec{r}_4, \tau) = \frac{\epsilon_{32} \epsilon_{42} q_{32} q_{42} R_2^2}{4\pi \lambda_2^2 v^2 (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)} \left\{ \frac{e^{-\delta_2 \tau} \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_4) [A_2 (\lambda_2^2 - \alpha_1^2) A_1 \lambda_{12}^2]}{(\delta_2 + \lambda_3)(\delta_2 + \lambda_4)} \right. \\ \left. + \frac{e^{-\delta_3 \tau} \lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_4) [A_2 (\alpha_1^2 - \lambda_3^2) + A_1 \lambda_{12}^2]}{(\delta_2 + \lambda_3)(\delta_3 + \lambda_4)} - \frac{e^{-\delta_4 \tau} \lambda_4 (\lambda_2 - \lambda_3) [A_2 (\alpha_1^2 - \lambda_4^2) + A_1 \lambda_{12}^2]}{(\delta_2 + \lambda_4)(\delta_3 + \lambda_4)} \right\}$$

que para el caso en que ambos núcleos sean iguales: $\lambda_{12} A_1 = \lambda_{21} A_2 = \lambda_{21} A$ y $K_1 = K_2 = K$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, se reducen a:

$$(46) \quad \phi_{Z_1 Z_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \frac{Q_{11} Q_{21} A_1 K_1^2 \epsilon_{11} \epsilon_{21}}{4\pi \lambda_1^2 v_1^2 (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)} \left\{ \frac{e^{-\lambda_2 \tau} \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_4) (\lambda_2^2 - \lambda_{21}^2 - \alpha^2)}{(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_4)} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-\lambda_3 \tau} \lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_4) (\lambda_{21}^2 + \alpha^2 - \lambda_3^2)}{(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)} - \frac{e^{-\lambda_4 \tau} \lambda_4 (\lambda_2 - \lambda_3) (\lambda_{21}^2 + \alpha^2 - \lambda_4^2)}{(\lambda_2 + \lambda_4)(\lambda_3 + \lambda_4)} \right\}$$

$$(47) \quad \phi_{Z_1 Z_3}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{\epsilon_{11} \epsilon_{32} Q_{11} Q_{32} \alpha_{12} \lambda_{21} A_1 K_1^2}{2\pi \lambda_1^2 v_1^2 (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)} \left\{ \frac{\lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_4) e^{-\lambda_2 \tau}}{(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_4)} + \frac{\lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_4) e^{-\lambda_3 \tau}}{(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)} - \frac{\lambda_4 (\lambda_2 - \lambda_3) e^{-\lambda_4 \tau}}{(\lambda_2 + \lambda_4)(\lambda_3 + \lambda_4)} \right\}$$

$$(48) \quad \phi_{Z_3 Z_4}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, \tau) = \frac{Q_{32} Q_{42} \epsilon_{32} \epsilon_{42} A_2 K_2^2}{4\pi \lambda_2^2 v_2^2 (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)} \left\{ \frac{e^{-\lambda_2 \tau} \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_4) (\lambda_2^2 - \lambda_{12}^2 - \alpha^2)}{(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_4)} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-\lambda_3 \tau} \lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_4) (\lambda_{12}^2 + \alpha^2 - \lambda_3^2)}{(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)} - \frac{e^{-\lambda_4 \tau} \lambda_4 (\lambda_2 - \lambda_3) (\lambda_{12}^2 + \alpha^2 - \lambda_4^2)}{(\lambda_2 + \lambda_4)(\lambda_3 + \lambda_4)} \right\}$$

En el apéndice 2, se obtienen las siguientes expresiones para las fuentes equivalentes de ruido:

$$(49) \quad A_i = F_i \left[(\lambda_i - 2)(1 - \beta_i) \lambda_i + \frac{\lambda_i}{K_i} (\beta_i R_i + K_{im} + 2 - k_2) \right]$$

si $i \neq 1$; $m=2$ y viceversa

F_i : fission rate de la zona i

La función de autocorrelación del detector Z_i ubicado en el núcleo j es /5/:

$$(50) \quad \phi_{Z_i Z_i}(\vec{r}_j, \vec{r}_j, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \psi_{Z_i Z_i}(\vec{r}_j, \vec{r}_j, \omega) \cos \omega \tau d\omega + \int_0^\tau G_i(\vec{r}_1, \vec{r}_j, \tau_1) G_i(\vec{r}_1, \vec{r}_j, \tau - \tau_1) A_1 + G_i(\vec{r}_2, \vec{r}_j, \tau_1) * \\ * G_i(\vec{r}_2, \vec{r}_j, \tau - \tau_1) A_2 \Big]$$

donde:

$$\psi_{Z_i Z_i}(\vec{r}_j, \vec{r}_j, \omega) = 2 F_j \epsilon_{ij} \bar{Q}_{ij}^2 |W_{ij}(\omega)|^2$$

la función ψ representa a la densidad espectral que aparece como ruido blanco en el proceso de fisión.

Con las mismas hipótesis que fueron utilizadas en las deducciones de las funciones de correlación cruzada, se obtiene:

$$(51) \quad \phi_{Z_i Z_i}(\vec{r}_j, \vec{r}_j, \tau) = \frac{Q_{ij} \epsilon_{ij} K_j}{4\pi \lambda_j^2 v_j^2 (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)} \left\{ \frac{e^{-\lambda_2 \tau} \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_4) [A_j (\lambda_2^2 - \alpha_{jm}^2) - A_2 \lambda_{mj}^2]}{(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_4)} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-\lambda_3 \tau} \lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_4) [A_j (\alpha_{2m}^2 - \lambda_3^2) + A_{jm} \lambda_{mj}^2]}{(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4)} - \frac{\lambda_4 (\lambda_2 - \lambda_3) [A_j (\alpha_{2m}^2 - \lambda_4^2) + A_{jm} \lambda_{mj}^2]}{(\lambda_2 + \lambda_4)(\lambda_3 + \lambda_4)} \right\} - \\ - \frac{\lambda_4}{2\pi} \bar{Q}_{ij}^2 \epsilon_{ij} F_j$$

si los dos núcleos son iguales se simplifica a:

$$(52) \quad \phi_{ZAZA}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, c) = \frac{\bar{q}_{ij}^2 \epsilon_{ij}^2 k_j^2 A}{4\pi \delta_j^2 v_j^2 (\delta_2 - \delta_3)(\delta_2 - \delta_4)(\delta_3 - \delta_4)} \left\{ \frac{e^{-\delta_2 c} \delta_2 (\delta_3 - \delta_4) (\delta_2^2 - \lambda_m^2 - \lambda_{mj}^2)}{(\delta_2 + \delta_3)(\delta_2 + \delta_4)} + \frac{e^{-\delta_3 c} \delta_3 (\delta_2 - \delta_4) (\delta_m^2 + \lambda_{mj}^2 - \delta_3^2)}{(\delta_2 + \delta_3)(\delta_3 + \delta_4)} \right. \\ \left. - \frac{e^{-\delta_4 c} \delta_4 (\delta_2 - \delta_3) (\lambda_m^2 + \lambda_{mj}^2 - \delta_4^2)}{(\delta_2 + \delta_4)(\delta_3 + \delta_4)} \right\} - \frac{\delta_4}{2\pi} \bar{q}_{ij}^2 \epsilon_{ij}^2 F_j$$

PUNTO DE CRUCE EN CERO EN NÚCLEOS ACOPLADOS IGUALES:

Existen valores τ_{11} , τ_{22} y τ_{12} (en las correlaciones cruzadas en un mismo núcleo y entre núcleos, respectivamente) que cumplen las ecuaciones:

$$(53) \quad \phi_{ZAZA}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau_{11}) > 0, \quad \phi_{ZAZA}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, \tau_{22}) = 0, \quad \phi_{ZAZA}(\vec{r}_1, \vec{r}_3, \tau_{12}) = 0$$

En el apéndice 3 se deducen las siguientes expresiones analíticas para estos tiempos, si no se considera al término en $e^{-\delta_2 c}$. El error que se comete en esta suposición es despreciable para estados cercanos a crítico y una frecuencia de filtro pasabajas igual a 20 ciclos/seg. Se analiza también en dicho apéndice, la influencia de estas frecuencias de filtro:

$$(54) \quad \tau_{12} \simeq \frac{1}{(\delta_3 - \delta_4)} \ln \left[\frac{\delta_3 (\delta_2^2 - \delta_4^2)}{\delta_4 (\delta_2^2 - \delta_3^2)} \right]$$

$$(55) \quad \tau_{11} = \tau_{22} \simeq \frac{1}{(\delta_3 - \delta_4)} \ln \left[\frac{\delta_3 (\delta_2^2 - \delta_4^2) (\lambda_{12}^2 + \alpha^2 - \delta_3^2)}{\delta_4 (\delta_2^2 - \delta_3^2) (\lambda_{12}^2 + \alpha^2 - \delta_4^2)} \right]$$

En la referencia /1/ se demuestra que el estado crítico de dos núcleos acoplados se caracterizan por tener un único valor del producto $(\delta_2 \delta_3)_c$. El valor experimental obtenido en el núcleo estudiado fue:

$$(56) \quad (\delta_2 \delta_3)_c \simeq 9 \cdot 10^4 \text{ } \gamma_{\text{seg}}^2$$

y que para los cálculos lo consideraremos como un valor típico. Este valor junto al de δ_4 permiten obtener los valores de los puntos de cruce en cero, para distintas formas de llegar al estado crítico. Los valores que re-

sultan, pueden observarse en la tabla I.

Además el modelo dado en la ref. /1/ predice las siguientes relaciones entre los parámetros cinéticos:

$$(57) \quad \gamma_2 + \gamma_3 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$(58) \quad \gamma_2 \gamma_3 = \alpha_1 \alpha_2 - \lambda_{12} \lambda_{21}$$

Desde el punto de vista experimental es más importante tratar el problema inverso, es decir, medidos τ_{12} , τ_{11} y fijado γ_1 determinar $\gamma_2, \gamma_3, \alpha_2, \lambda_{21}$. Esto en principio puede obtenerse usando las ecs. (54) a (58) aunque las dos primeras forman un sistema de difícil solución. En el apéndice 4 se describe un programa para núcleos iguales por el cual se resuelve este problema. En la tabla II se muestran los resultados obtenidos con los datos de entrada tomados de la tabla I. Se observa que en algunos casos no existe unicidad en la respuesta, pero que un conocimiento aproximado del grado del acoplamiento o de la reactividad de cada núcleo por separado, permite obtener el conjunto de parámetros $\gamma_2, \gamma_3, \alpha_2, \lambda_{21}$ correcto.

Para estudiar la factibilidad del método habría que precisar tiempos de medición. En el apéndice 5 se describe la forma de calcular el tiempo necesario para analizar la información a fin de obtener un error estadístico en τ_{11} y τ_{12} adecuado.

Este estudio fue realizado para núcleos iguales por simplicidad, para independizarnos del modelo empleado en calcular la fuente equivalente de ruido. Es fácilmente generalizable para el caso de núcleos asimétricos. En esta caso aparecerá como otro dato a fijar el cociente de los fission rate que se obtiene a partir de las funciones de autocorrelación /5/.

TABLA I

K	λ	α	λ_{21}	γ_2	γ_3	τ_{11}	τ_{12}
	seg.	1/seg.	1/seg.	1/seg.	1/seg.	seg.	seg.
0,95	$9,532 \cdot 10^{-5}$	604,27	524,54	1128,8	79.730	$23,075 \cdot 10^{-3}$	$23,235 \cdot 10^{-3}$
0,96	$8,650 \cdot 10^{-5}$	551,22	462,43	1013,7	88.787	$21,563 \cdot 10^{-3}$	$21,719 \cdot 10^{-3}$
0,97	$7,644 \cdot 10^{-5}$	494,01	392,49	886,50	101,52	$19,774 \cdot 10^{-3}$	$20,083 \cdot 10^{-3}$
0,98	$6,456 \cdot 10^{-5}$	431,26	308,81	741,07	121,45	$17,526 \cdot 10^{-3}$	$18,047 \cdot 10^{-3}$
0,99	$4,957 \cdot 10^{-5}$	361,53	201,74	563,27	159,78	$14,321 \cdot 10^{-3}$	$15,468 \cdot 10^{-3}$
0,995	$3,986 \cdot 10^{-5}$	325,17	125,45	450,63	199,73	$11,814 \cdot 10^{-3}$	$14,020 \cdot 10^{-3}$
0,999	$2,979 \cdot 10^{-5}$	301,88	33,571	335,44	268,30	$8,468 \cdot 10^{-3}$	$14,567 \cdot 10^{-3}$

Los datos de esta tabla fueron calculados con la condición de que el sistema acoplado estuviera crítico y $(\gamma_2 \gamma_3)_c = 9 \cdot 10^4 \text{ l/seg.}^2$;

$$\gamma_4 = 20 \text{ l/seg.}; \beta = 8 \cdot 10^{-3}.$$

En general el modelo desarrollado es válido para acoplamientos ni muy fuertes, ni demasiados débiles, es decir, en el rango de 0.95 a 0.99 en K.



TABLA II

K	$\tau_{12} (10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2})$	γ_2	γ_3	α	λ	Comentario
0.95	23,236	1128.8	79.773	604.25	524.52	Unica Solución
0.96	21,779	1013.6	88.790	551.21	462.42	"
0.97	20,089	886.54	101.52	494.03	392.51	"
0.99	15,468	563.29	159.78	361.53	201.76	Caso Real
		322.89	278.73	300.81	22.076	Otra Solución
0.995	14,020	450.62	199.72	325.17	125.45	Caso Real
		350.85	256.52	303.69	47.167	Otra Solución
0.999	14,567	497.50	180.90	339.20	158.30	Otra Solución
		335.45	268.30	301.87	33,576	Caso Real
0.98	18,047	741.03	121.45	431.21	309.79	Unica Solución

APENDICE I

Las funciones de distribución temporal de los neutrones que viajan del núcleo i al j que más se utilizan en la práctica, están resumidas en la siguiente tabla, junto con sus transformadas /9/,/10/:

N°	Función de distribución en el tiempo	$P(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\delta(t-\tau_0)$	$e^{-s\tau_0}$
3	$\frac{1}{\tau_0} e^{-t/\tau_0}$	$\frac{1}{1+s\tau_0}$
4	$(t/\tau_0^2) e^{-t/\tau_0}$	$\frac{1}{(1+s\tau_0)^2}$

La primera considera un pasaje instantáneo, la segunda un tiempo finito y constante, y las últimas una distribución en el tiempo centrada alrededor de τ_0 .

Experiencias realizadas en agua pesada y grafito /9/,/10/ llevaron a la conclusión que para tiempos τ_0 pequeños (≈ 0.2 mseg.), las expresiones 2,3 y 4 para las funciones de distribución llevan a resultados equivalentes en la determinación de parámetros cinéticos.

En el trabajo de Seifritz et al /4/ se demuestra que el tiempo medio de retardo τ_0 es sensible al espectro energético y que este tiempo de pasaje se puede aproximar por el tiempo de moderación de los neutrones en el material presente en la zona limítrofe de ambos núcleos.

En reactores de agua liviana tipo RA-2 el tiempo de moderación es del orden de $5 \cdot 10^{-6}$ seg., por lo cual este es el orden de magnitud que se espera tenga τ_0 y que es muy difícil de medir.

La ecuación

$$P(s) = 1 - \lambda_{12} \lambda_{21} H_1 H_2 p^2(s) = 0$$

define los polos para antitransformar las densidades espectrales. Utilizan-

de la aproximación pronta en las funciones transferencias de los núcleos aislados:

$$H_1 = \frac{1}{s + \alpha_1} \quad ; \quad H_2 = \frac{1}{s + \alpha_2}$$

y como función de distribución en el espacio transformado

$$p(s) = \frac{1}{1 + s\tau_c}$$

se obtiene que las raíces cumplen con la ecuación:

$$(1) \quad s^4 \tau_c^2 + s^3 [2\tau_c + \tau_c^2 (\alpha_1 + \alpha_2)] + s^2 [\alpha_1 \alpha_2 \tau_c^2 + 2\tau_c (\alpha_1 + \alpha_2) + 1] + s [2\tau_c \alpha_1 \alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)] + (\alpha_1 \alpha_2 - \lambda_{12} \lambda_{21}) = 0$$

De la referencia /1/, se obtiene los siguientes casos extremos:

1ro.) REACTOR CRITICO

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 950 \text{ seg}^{-1}$$

$$\alpha_1 \alpha_2 = 24 \cdot 10^4 \text{ seg}^{-2}$$

$$\alpha_1 \alpha_2 - \lambda_{12} \lambda_{21} = 9 \cdot 10^4 \text{ seg}^{-2}$$

Las distintas raíces que se obtienen variando el tiempo de tras-paso τ_c se resume en la siguiente tabla:

	$\tau_c = 0$	$\tau_c = 10^{-6}$	$\tau_c = 5 \cdot 10^{-6}$	$\tau_c = 10^{-5}$	$\tau_c = 5 \cdot 10^{-5}$	$\tau_c = 10^{-4}$	$\tau_c = 5 \cdot 10^{-4}$
γ_2	106.7	106.7	106.6	106.3	104.6	102.5	90.1
γ_3	843.3	843.6	844.3	846.7	861.6	882.5	2343
γ_4		10^8	10^7	99609	19595	9574	
γ_5		10^8	10^7	100388	20389	10391	

2do.) REACTOR 7% SUBCRITICO

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2900 \text{ seg}^{-1}$$

$$\alpha_1 \alpha_2 = 21 \cdot 10^6 \text{ seg}^{-2}$$

$$\alpha_1 \alpha_2 - \lambda_{12} \lambda_{21} = 1.95 \cdot 10^6 \text{ seg}^{-2}$$

las raíces se resumen en la siguiente tabla:

	$\tau_0 = 0$	$\tau_0 = 10^{-6}$	$\tau_0 = 5 \cdot 10^{-5}$	$\tau_0 = 10^{-5}$	$\tau_0 = 5 \cdot 10^{-5}$	$\tau_0 = 10^{-4}$	$\tau_0 = 5 \cdot 10^{-4}$
χ_2	1059.5	1059.2	1058.6	1057.2	1045.4	1001.3	623.4
χ_3	1840.5	1841	1841.9	1842.4	1866.7	2036.6	4204
χ_4		10^8	10^7	98550	19753	8199	
χ_5		10^8	10^7	10^6	20235	11664	

Se observa de estas tablas que para tiempos de retardo de $\approx 10^{-5}$ seg. o menores, el valor de τ_0 puede considerarse como si fuera nulo para estados cercanos al crítico.

Por lo visto previamente en experiencias con moderador de agua liviana, puede considerarse como instantáneo el pasaje de un núcleo a otro y salvo para tiempos muy cortos (≈ 1 useg) la evolución de la población instantánea puede considerarse dada únicamente por dos constantes de decaimiento.

APENDICE 2FUENTES EQUIVALENTES DE RUIDO

Suponiendo que las distintas fuentes de ruido están no correlacionadas /6/:

$$A_j(\vec{r}_j) = \sum_i q_i^2(\vec{r}_j) m_i(\vec{r}_j) \quad (2-1)$$

donde q_i es el número medio de neutrones generados en la reacción i y m_i es el número medio de reacciones del tipo i que ocurren por cm^3 en el núcleo j .

$A_j(r_j)$: fuente equivalente de ruido en el núcleo j .

Las distintas contribuciones están resumidas en la siguiente tabla:

Proceso	m_i	q_i
Fisión	$\frac{N_j}{\ell_j} \sum_i \frac{\sigma_i}{\sigma_j} P(v_p)$	$(\nu_p - 1)$
Decaimiento de Precursores	$\lambda_j C_j$	$+1$
Traspaso al núcleo m	$K_{jm} N_j / \ell_j$	-1
Traspaso del núcleo m al j	$K_{mj} N_m / \ell_m$	$+1$
Absorción Parásita	$N_j \sum_i \sigma_{fi} / \ell_j \sum_j \sigma_j$	-1
Fuente Externa	$S_j(r)$	$+1$

Si $j=1$, $m=2$ y Viceversa

Los valores de m_i se obtienen en un estado estacionario de la siguiente forma:

Las ecuaciones del modelo de núcleos acoplado a un solo grupo retardado son:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{N_1}{\ell_1} + K_1(1-\beta_1) \frac{N_1}{\ell_1} + \lambda_1 C_1 + K_{21} \frac{N_2}{\ell_2} + S_1 \quad (2-2)$$

$$\frac{dC_1}{dt} = -\lambda_1 C_1(t) + \beta_1 R_1 \frac{N_1}{\lambda_1} \quad (2-3)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{N_2}{\lambda_2} + k_2 (1-\beta_2) \frac{N_2}{\lambda_2} + \lambda_2 C_2 + R_{1 \rightarrow 2} \frac{N_1}{\lambda_1} + S_2 \quad (2-4)$$

$$\frac{dC_2}{dt} = -\lambda_2 C_2(t) + \beta_2 R_2 \frac{N_2}{\lambda_2} \quad (2-5)$$

en crítico: $S_1 = S_2 = 0$ (2-6)

si el sistema es estacionario:

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dC_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = \frac{dC_2}{dt} = 0 \quad (2-7)$$

y se obtiene:

$$\lambda_1 C_1 = \beta_1 R_1 \frac{N_1}{\lambda_1} \quad (2-8)$$

$$\lambda_2 C_2 = \beta_2 R_2 \frac{N_2}{\lambda_2} \quad (2-9)$$

reemplazando (2-8) y (2-9) en (2-2) y (2-4):

$$K_{2 \rightarrow 1} \frac{N_2}{\lambda_2} = \frac{N_1}{\lambda_1} [1 - K_1(1-\beta_1) - \beta R_1] = \frac{N_1}{\lambda_1} (1 - R_1) \quad (2-10)$$

$$K_{1 \rightarrow 2} \frac{N_1}{\lambda_1} = \frac{N_2}{\lambda_2} [1 - K_2(1-\beta) - \beta K_2] = \frac{N_2}{\lambda_2} (1 - K_2) \quad (2-11)$$

obteniendose para las fuentes equivalentes de ruido:

$$A_1 = \frac{N_1}{\lambda_1} \left\{ \left[\frac{\sum f_i}{\sum a_i} \sum_{\nu_p} P(\nu_p) (\nu_p - 1)^2 \right] + \beta_1 R_1 + R_{1 \rightarrow 2} + \frac{\sum n_{ef}}{\sum a_i} + (1 - R_2) \right\} \quad (2-12)$$

$$A_2 = \frac{N_2}{\lambda_2} \left\{ \left[\frac{\sum f_i}{\sum a_i} \sum_{\nu_p} P(\nu_p) (\nu_p - 1)^2 \right] + \beta_2 K_2 + R_{2 \rightarrow 1} + \frac{\sum n_{ef}}{\sum a_i} + (1 - R_1) \right\} \quad (2-13)$$

pero:

$$\sum_{\nu_p} (\nu_p - 1)^2 P(\nu_p) = (1-\beta) \bar{\nu}^2 - 2(1-\beta) \bar{\nu} + 1; \quad \frac{\sum n_{ef}}{\sum a_j} = 1 - \frac{R_j}{\nu_j}; \quad \frac{\sum f_j}{\sum a_j} = \frac{R_j}{\nu_j} \quad (2-14)$$

por lo cual:

$$A_1 = \frac{N_1}{\lambda_1} \left\{ \frac{k_1}{V_1} \left[(1-\beta) \bar{V}_1^2 - 2(1-\beta) V_1 \right] + \beta k_1 + k_{1 \rightarrow 2} + 1 + (1-k_2) \right\} \quad (2-13)$$

$$A_2 = \frac{N_2}{\lambda_2} \left\{ \frac{k_2}{V_2} \left[(1-\beta) \bar{V}_2^2 - 2(1-\beta) V_2 \right] + \beta k_2 + k_{2 \rightarrow 1} + 1 + (1-k_1) \right\} \quad (2-14)$$

definiendo como fission rate:

$$F_j = \frac{N_j n_j}{\lambda_j V_j}$$

se obtiene finalmente:

$$A_1 = F_1 \left\{ \left[(1-\beta_1) \bar{V}_1^2 - 2(1-\beta_1) V_1 \right] + \frac{V_1}{k_1} \left[\beta_1 k_1 + k_{1 \rightarrow 2} + 1 + (1-k_2) \right] \right\}$$

$$A_2 = F_2 \left\{ \left[(1-\beta_2) \bar{V}_2^2 - 2(1-\beta_2) V_2 \right] + \frac{V_2}{k_2} \left[\beta_2 k_2 + k_{2 \rightarrow 1} + 1 + (1-k_1) \right] \right\}$$

APENDICE 3CALCULO APROXIMADO DE LOS PUNTOS DE CRUCE EN CERO E INFLUENCIA DE LA FRECUENCIA DEL FILTRO PASAALTOS.

El estudio se realiza sobre el siguiente juego de parámetros típicos:

$$\gamma_2 = 877.2 \text{ } 1/\text{seg.}$$

$$\gamma_3 = 102.6 \text{ } 1/\text{seg.}$$

$$\alpha^2 = 24 \cdot 10^4 \text{ } 1/\text{seg.}^2$$

$$\lambda^2 = 15 \cdot 10^4 \text{ } 1/\text{seg.}^2$$

Utilizando las tres exponenciales se obtuvieron los valores de τ_{12} y τ_{11} para núcleos iguales a través de un programa que obtiene raíces de una ecuación trascendente con una incógnita /10/. Los resultados en función de la frecuencia de filtro pasaaltos se resume en la siguiente tabla:

	$\gamma_4 = 5 (1/\text{seg.})$	$\gamma_4 = 10$	$\gamma_4 = 20$	$\gamma_4 = 50$	$\gamma_4 = 70$
$\tau_{12}(\text{seg.})$	$31.097 \cdot 10^{-3}$	$25,292 \cdot 10^{-3}$	$19.956 \cdot 10^{-3}$	$13.866 \cdot 10^{-3}$	$11,503 \cdot 10^{-3}$
$\tau_{11}(\text{seg.})$	$30.817 \cdot 10^{-3}$	$24,498 \cdot 10^{-3}$	$19.637 \cdot 10^{-3}$	$13.468 \cdot 10^{-3}$	$11,955 \cdot 10^{-3}$

Se observa que es necesario medir en forma muy preceisa la frecuencia de corte .

En la siguiente tabla se realiza el mismo estudio, pero sin considerar el término en $e^{-\gamma_2 \tau}$:

	$\gamma_4 = 5 (1/\text{seg.})$	$\gamma_4 = 10$	$\gamma_4 = 20$	$\gamma_4 = 50$	$\gamma_4 = 70$
$\tau_{12}(\text{seg.})$	$31.097 \cdot 10^{-3}$	$25.294 \cdot 10^{-3}$	$19.962 \cdot 10^{-3}$	$13.892 \cdot 10^{-3}$	$11,598 \cdot 10^{-3}$
$\tau_{11}(\text{seg.})$	$30.817 \cdot 10^{-3}$	$25.000 \cdot 10^{-3}$	$19,643 \cdot 10^{-3}$	$13.494 \cdot 10^{-3}$	$12,041 \cdot 10^{-3}$

Se observa que para $\lambda_4 = 5$ c/seg. no hay diferencias entre ambos casos y que para $\lambda_4 = 70$ c/seg. la diferencia es del orden del 1%. Desde un punto de vista práctico λ_4 sirve para eliminar la componente retardada en la respuesta del reactor acoplado, de allí que se halla elegido el valor de 20 c/seg. para los cálculos.

APENDICE 4DEDUCCION DE LOS PARAMETROS CINETICOS EN FUNCION DE $\gamma_4, (\gamma_2 \gamma_3)_c, \tau_{11}, \tau_{12}$.
PARA NUCLEOS SIMETRICOS.

De las ecuaciones:

$$(54) \quad \tau_{12} = \frac{1}{(\gamma_3 - \gamma_4)} \ln \left[\frac{\gamma_2 (\gamma_2 \gamma_3)_c}{\gamma_4 (\gamma_2^2 - \gamma_3^2)} \right]$$

$$(55) \quad \tau_{11} = \frac{1}{(\gamma_3 - \gamma_4)} \ln \left[\frac{\gamma_2 (\gamma_2 \gamma_3)_c}{\gamma_4 (\gamma_2^2 - \gamma_3^2)} \frac{(\lambda_{21}^2 + \alpha_2^2 - \gamma_3^2)}{(\lambda_{21}^2 + \alpha_2^2 - \gamma_2^2)} \right]$$

$$(56) \quad (\gamma_2 \gamma_3)_c = A \quad (9 \cdot 10^4 \text{ en el caso considerado})$$

$$(57) \quad \gamma_2 + \gamma_3 = 2\alpha_2$$

$$(58) \quad (\gamma_2 \gamma_3)_c = A = \alpha_2^2 - \lambda_{21}^2$$

Reemplazando (56) en (54), y utilizando un programa de raices de funciones trascendentes a una sola variable /11/, se obtienen los valores de γ_2 y γ_3 que cumplen con dichas ecuaciones. Posteriormente de la ec. (57) se obtiene α_2 y de la (58) λ_{21}^2 . La ec. (55) se utiliza para seleccionar el conjunto de parámetros correctos, en el caso que hubiera más de una solución.

Para el caso general de núcleos asimétricos, se utiliza el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\tau_{11} = \frac{1}{(\gamma_3 - \gamma_4)} \ln \left\{ \frac{\gamma_3 (\gamma_2^2 - \gamma_4^2)}{\gamma_4 (\gamma_2^2 - \gamma_3^2)} \frac{[A_1/A_2 (\alpha_2^2 - \gamma_3^2) + \lambda_{21}^2]}{[A_1/A_2 (\alpha_2^2 - \gamma_4^2) + \lambda_{21}^2]} \right\}$$

$$\tau_{22} = \frac{1}{(\gamma_3 - \gamma_4)} \ln \left\{ \frac{\gamma_3(\gamma_2^2 - \gamma_4^2)}{\gamma_4(\gamma_2^2 - \gamma_3^2)} \left[\frac{A_1/A_2 (\alpha_1^2 - \gamma_3^2) + \lambda_{12}^2}{A_1/A_2 (\alpha_1^2 - \gamma_4^2) + \lambda_{12}^2} \right] \right\}$$

$$\tau_{12} = \frac{1}{\gamma_3 - \gamma_4} \ln \left\{ \frac{\gamma_3(\gamma_2^2 - \gamma_4^2)}{\gamma_4(\gamma_2^2 - \gamma_3^2)} \left[\frac{\gamma_3(\lambda_{12} A_1/A_2 - \lambda_{21}) + (\alpha_1 \lambda_{21} + \alpha_2 \lambda_{12} A_1/A_2)}{\gamma_4(\lambda_{12} A_1/A_2 - \lambda_{21}) + (\alpha_1 \lambda_{21} + \alpha_2 \lambda_{12} A_1/A_2)} \right] \right\}$$

$$(\gamma_2 \gamma_3)_c = 9 \cdot 10^4$$

$$(\gamma_2 + \gamma_3) = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$(\gamma_2 \gamma_3)_c = \alpha_1 \alpha_2 - \lambda_{12} \lambda_{21}$$

donde el cociente A_1/A_2 se obtiene a través de las funciones de autocorrelación /5/.

Estas ecuaciones forman un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas de difícil solución. Uno de los métodos que pueden emplearse es el de prueba y error.

APENDICE 5CALCULO DE LA VARIANZA EN LA DETERMINACION DEL PUNTO DE CRUCE DE LAS FUNCIONES DE CORRELACION CRUZADA EN NUCLEOS ACOPLADOS.

De acuerdo a la referencia /6/, la varianza en la función de correlación cruzada proveniente de las señales de dos detectores Z_i, Z_j al tiempo puede calcularse por:

$$Var. \tau_0 = \frac{\Omega}{S^2} \int_0^{\infty} e^{-\Omega \tau'} \sum (\tau_0, \tau') d\tau' \quad (5-1)$$

donde S es el módulo de la pendiente de la función de autocorrelación normalizada en dicho instante de tiempo:

$$S = \left| \frac{\partial \phi_{Z_i Z_j}(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=\tau_0} \quad (5-2)$$

la función de correlación cruzada normalizada $\phi_{Z_i Z_j}(\vec{r}, \tau)$ se escribe:

$$\phi_{Z_i Z_j}(\vec{r}, \tau) = \frac{\phi_{Z_i Z_j}(\vec{r}, \tau)}{\sqrt{\phi_{Z_i Z_i}(\vec{r}, 0) \phi_{Z_j Z_j}(\vec{r}, 0)}} \quad (5-3)$$

donde la $\phi_{Z_k Z_k}(\vec{r}, 0)$, es la función de autocorrelación del detector k para $\tau = 0$.

Además:

$$\sum (\tau_0, \tau') = \phi_{Z_i Z_i}(\vec{r}, \tau') \phi_{Z_j Z_j}(\vec{r}, \tau') + \phi_{Z_i Z_j}(\vec{r}, \tau_0 + \tau') \phi_{Z_j Z_i}(\vec{r}, \tau_0 - \tau') \quad (5-4)$$

siendo $\phi_{Z_i Z_i}(\vec{r}, \tau')$ la función de autocorrelación normalizada:

$$\phi_{Z_i Z_i}(\vec{r}, \tau') = \frac{\phi_{Z_i Z_i}(\vec{r}, \tau')}{\phi_{Z_i Z_i}(\vec{r}, 0)} \quad (5-5)$$

En el modelo de dos núcleos acoplados, los detectores pueden estar en un mismo núcleo, o en dos núcleos distintos, dando lugar como hemos visto previamente a tres funciones de correlación cruzada, que en su forma normalizada, las escribiremos:

$$\varphi_{z_1 z_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau), \varphi_{z_3 z_4}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, \tau), \varphi_{z_1 z_3}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) \quad (5-6)$$

De acuerdo a lo visto en la parte teórica:

$$\varphi_{z_i z_i}(\vec{r}_j, \vec{r}_j, \tau) = C_{2ij} e^{-\gamma_2 \tau} + C_{3ij} e^{-\gamma_3 \tau} + C_{4ij} e^{-\gamma_4 \tau} \quad (5-7)$$

donde:

$$C_{2ij} = \frac{C'_{2ij}}{(C'_{2ij} + C'_{3ij} + C'_{4ij})} ; C_{3ij} = \frac{C'_{3ij}}{(C'_{2ij} + C'_{3ij} + C'_{4ij})} ; C_{4ij} = \frac{C'_{4ij}}{(C'_{2ij} + C'_{3ij} + C'_{4ij})}$$

$$C'_{2ij} = B_{ij} \gamma_2 (\gamma_3 - \gamma_4) \frac{[A_j (\gamma_2^2 - \alpha_2^2) - A_m \lambda_{mj}^2]}{(\gamma_2 + \gamma_3)(\gamma_3 + \gamma_4)}$$

$$C'_{3ij} = B_{ij} \gamma_3 (\gamma_2 - \gamma_4) \frac{[A_m \lambda_{mj}^2 + A_j (\alpha_2^2 - \gamma_3^2)]}{(\gamma_2 + \gamma_3)(\gamma_3 + \gamma_4)}$$

$$C'_{4ij} = -B_{ij} \gamma_4 (\gamma_2 - \gamma_3) \frac{[A_m \lambda_{mj}^2 + A_j (\alpha_2^2 - \gamma_4^2)]}{(\gamma_2 + \gamma_4)(\gamma_3 + \gamma_4)} - \frac{\gamma_4}{2\pi} \bar{q}_{ij}^z F_j \epsilon_{ij}$$

$$B_{ij} = \frac{\bar{q}_{ij}^z k_j^2 \epsilon_{ij}^2}{4\pi \lambda_j^2 \bar{r}_j^2 (\gamma_2 - \gamma_3)(\gamma_2 - \gamma_4)(\gamma_3 - \gamma_4)}$$

$$A_j = F_j \left\{ (1 - \beta_j) V_j (V_j - 2) + \frac{V_j}{R_j} (\beta_j V_j + \beta_{j \rightarrow m} + 2 - K_m) \right\}$$

si $j = 1$; $m = 2$ i viceversa

Además:

$$\varphi_{z_1 z_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = a_{21} e^{-\gamma_2 \tau} + a_{31} e^{-\gamma_3 \tau} + a_{41} e^{-\gamma_4 \tau} \quad (5-8)$$

$$a'_{21} = D_{12} \gamma_2 (\gamma_3 - \gamma_4) \frac{[A_1 (\gamma_2^2 - \alpha_2^2) + A_2 \lambda_{21}^2]}{(\gamma_2 + \gamma_3)(\gamma_2 + \gamma_4)}$$

$$a'_{31} = D_{12} \gamma_3 (\gamma_2 - \gamma_4) \frac{[A_2 \lambda_{21}^2 + A_1 (\alpha_2^2 - \gamma_3^2)]}{(\gamma_2 + \gamma_3)(\gamma_2 + \gamma_4)}$$

$$a'_{41} = \frac{-D_{12} \gamma_4 (\gamma_2 - \gamma_3) [A_2 \lambda_{21}^2 + A_1 (\alpha_2^2 - \gamma_1^2)]}{(\gamma_2 + \gamma_4)(\gamma_3 + \gamma_4)}$$

$$D_{12} = \frac{\epsilon_{11} \epsilon_{21} q_{11} q_{21} R_1^2}{4\pi \lambda_1^2 V_1^2 (\gamma_2 - \gamma_3)(\gamma_2 - \gamma_4)(\gamma_3 - \gamma_4)}$$

$$a_{21} = \frac{a'_{21}}{[(C'_{21} + C'_{31} + C'_{41})(C'_{22} + C'_{32} + C'_{42})]^{1/2}}$$

$$a_{31} = \frac{a'_{31}}{[(C'_{21} + C'_{31} + C'_{41})(C'_{22} + C'_{32} + C'_{42})]^{1/2}}$$

$$a_{41} = \frac{a'_{41}}{[(C'_{21} + C'_{31} + C'_{41})(C'_{22} + C'_{32} + C'_{42})]^{1/2}}$$

y:

$$\varphi_{2324}(\vec{r}_2, \vec{r}_3, \tau) = a_{22} e^{-\gamma_2 \tau} + a_{32} e^{-\gamma_3 \tau} + a_{42} e^{-\gamma_4 \tau} \quad (5-9)$$

donde:

$$a'_{22} = \frac{D_{22} \gamma_2 (\gamma_3 - \gamma_4) [A_2 (\gamma_2^2 - \alpha_1^2) - A_1 \lambda_{12}^2]}{(\gamma_2 + \gamma_3)(\gamma_2 + \gamma_4)}$$

$$a'_{32} = \frac{D_{22} \gamma_3 (\gamma_2 - \gamma_4) [A_1 \lambda_{12}^2 + A_2 (\alpha_1^2 - \gamma_3^2)]}{(\gamma_2 + \gamma_3)(\gamma_3 + \gamma_4)}$$

$$a'_{42} = \frac{-D_{22} \gamma_4 (\gamma_2 - \gamma_3) [A_1 \lambda_{12}^2 + A_2 (\alpha_1^2 - \gamma_4^2)]}{(\gamma_2 + \gamma_4)(\gamma_3 + \gamma_4)}$$

$$D_{22} = \frac{\epsilon_{32} \epsilon_{42} q_{32} q_{42} R_2^2}{4\pi \lambda_2^2 V_2^2 (\gamma_2 - \gamma_3)(\gamma_2 - \gamma_4)(\gamma_3 - \gamma_4)}$$

$$a_{22} = \frac{a'_{22}}{[(C'_{23} + C'_{33} + C'_{43})(C'_{24} + C'_{34} + C'_{44})]^{1/2}}$$

$$a_{32} = \frac{a'_{32}}{[(C'_{23} + C'_{33} + C'_{43})(C'_{24} + C'_{34} + C'_{44})]^{1/2}}$$

$$a_{42} = \frac{a'_{42}}{[(C'_{23} + C'_{33} + C'_{43})(C'_{24} + C'_{34} + C'_{44})]^{1/2}}$$

$$y: \quad \varphi_{2123}(\vec{r}_1, \vec{r}_3, \tau) = b_2 e^{-\gamma_2 \tau} + b_3 e^{-\gamma_3 \tau} + b_4 e^{-\gamma_4 \tau} \quad (5-10)$$

donde:

$$b'_2 = D_{13} \frac{\gamma_2(\gamma_3 - \gamma_4) [\gamma_2(\lambda_{12} A_1 - \lambda_{21} A_2) + (\alpha_1 \lambda_{21} A_2 + \alpha_2 \lambda_{12} A_1)]}{(\gamma_2 + \gamma_3)(\gamma_2 + \gamma_4)}$$

$$b'_3 = D_{13} \frac{\gamma_3(\gamma_2 - \gamma_4) [\gamma_3(\lambda_{12} A_1 - \lambda_{21} A_2) + (\alpha_1 \lambda_{21} A_2 + \alpha_2 \lambda_{12} A_1)]}{(\gamma_2 + \gamma_3)(\gamma_2 + \gamma_4)}$$

$$b'_4 = -D_{13} \frac{\gamma_4(\gamma_2 - \gamma_3) [\gamma_4(\lambda_{12} A_1 - \lambda_{21} A_2) + (\alpha_1 \lambda_{21} A_2 + \alpha_2 \lambda_{12} A_1)]}{(\gamma_2 + \gamma_4)(\gamma_3 + \gamma_4)}$$

$$D_{13} = \frac{\epsilon_{11} \epsilon_{32} g_{11} g_{32} R_1 R_2}{4\pi \lambda_1 \lambda_2 \nu_1 \nu_2 (\gamma_2 - \gamma_3)(\gamma_2 - \gamma_4)(\gamma_3 - \gamma_4)}$$

$$b_2 = \frac{b'_2}{[(c'_{21} + c'_{31} + c'_{41})(c'_{23} + c'_{33} + c'_{43})]^{1/2}}$$

$$b_3 = \frac{b'_3}{[(c'_{21} + c'_{31} + c'_{41})(c'_{23} + c'_{33} + c'_{43})]^{1/2}}$$

$$b_4 = \frac{b'_4}{[(c'_{21} + c'_{31} + c'_{41})(c'_{23} + c'_{33} + c'_{43})]^{1/2}}$$

1ro) CALCULO DE LA VARIANZA EN LA FUNCION DE CORRELACION CRUZADA CON DOS DETECTORES EN EL NUCLEO 1, EN EL PUNTO DE CRUCE CERO.

En este caso:

$$(5-11) \quad S = \left| \frac{\partial \varphi_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=c_{11}} = \gamma_2 a_{21} e^{-\gamma_2 \tau_{11}} + \gamma_3 a_{31} e^{-\gamma_3 \tau_{11}} + \gamma_4 a_{41} e^{-\gamma_4 \tau_{11}}$$

$$(5-12) \quad \sum_{(\tau_1, \tau')} = (c_{211} e^{-\gamma_2 \tau'} + c_{311} e^{-\gamma_3 \tau'} + c_{411} e^{-\gamma_4 \tau'}) / (c_{221} e^{-\gamma_2 \tau'} + c_{321} e^{-\gamma_3 \tau'} + c_{421} e^{-\gamma_4 \tau'}) + \\ + (a_{21} e^{-\gamma_2(\tau' + \tau_{11})} + a_{31} e^{-\gamma_3(\tau' + \tau_{11})} + a_{41} e^{-\gamma_4(\tau' + \tau_{11})}) / (a_{21} e^{-\gamma_2(\tau_{11} - \tau')} + a_{31} e^{-\gamma_3(\tau_{11} - \tau')} + a_{41} e^{-\gamma_4(\tau_{11} - \tau')})$$

$$\begin{aligned}
\text{Var } \tau_{11} = & \frac{\Omega}{S^2} \left[\frac{C_{211} C_{221}}{(\Omega + 2\gamma_2)} + \frac{C_{311} C_{321}}{(\Omega + 2\gamma_3)} + \frac{C_{411} C_{421}}{(\Omega + 2\gamma_4)} + \frac{(C_{211} C_{321} + C_{311} C_{221})}{(\gamma_2 + \gamma_3 + \Omega)} \right. \\
& + \frac{(C_{211} C_{421} + C_{221} C_{411})}{(\gamma_2 + \gamma_4 + \Omega)} + \frac{(C_{311} C_{421} + C_{411} C_{321})}{(\gamma_3 + \gamma_4 + \Omega)} + \frac{Q_{21}^2}{\Omega} e^{-2\gamma_2 \tau_{11}} (1 - e^{-\Omega \tau_{11}}) + \frac{Q_{31}^2}{\Omega} e^{-2\gamma_3 \tau_{11}} (1 - e^{-\Omega \tau_{11}}) + \\
& + \frac{Q_{41}^2}{\Omega} e^{-2\gamma_4 \tau_{11}} (1 - e^{-\Omega \tau_{11}}) + Q_{21} Q_{31} e^{-(\gamma_2 + \gamma_3) \tau_{11}} \left(2 - \frac{e^{-(\gamma_2 - \gamma_3 + \Omega) \tau_{11}}}{(\gamma_2 - \gamma_3 + \Omega)} - \frac{e^{-(\gamma_3 - \gamma_2 + \Omega) \tau_{11}}}{(\gamma_3 - \gamma_2 + \Omega)} \right) + \\
& + Q_{21} Q_{41} e^{-(\gamma_2 + \gamma_4) \tau_{11}} \left(2 - \frac{e^{-(\gamma_2 - \gamma_4 + \Omega) \tau_{11}}}{(\gamma_2 - \gamma_4 + \Omega)} - \frac{e^{-(\gamma_4 - \gamma_2 + \Omega) \tau_{11}}}{(\gamma_4 - \gamma_2 + \Omega)} \right) + Q_{31} Q_{41} e^{-(\gamma_3 + \gamma_4) \tau_{11}} \left(2 - \frac{e^{-(\gamma_3 - \gamma_4 + \Omega) \tau_{11}}}{(\gamma_3 - \gamma_4 + \Omega)} - \frac{e^{-(\gamma_4 - \gamma_3 + \Omega) \tau_{11}}}{(\gamma_4 - \gamma_3 + \Omega)} \right) \Big] \\
& (5-13)
\end{aligned}$$

2do.) CALCULO DE LA VARIANZA EN LA FUNCION DE CORRELACION CRUZADA, CON DOS DETECTORES EN EL NUCLEO 2, EN EL PUNTO DE CRUCE CERO.

En este caso:

$$(5-14) \quad S = \left| \frac{\partial \varphi_{E3Z4}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=\tau_{22}} = \gamma_2 a_{22} e^{-\gamma_2 \tau_{22}} + \gamma_3 a_{32} e^{-\gamma_3 \tau_{22}} + \gamma_4 a_{42} e^{-\gamma_4 \tau_{22}}$$

$$\begin{aligned}
(5-15) \quad \Sigma(\tau_{22}, \tau') = & (C_{322} e^{-\gamma_2 \tau'} + C_{332} e^{-\gamma_3 \tau'} + C_{432} e^{-\gamma_4 \tau'}) (C_{422} e^{-\gamma_2 \tau'} + C_{342} e^{-\gamma_3 \tau'} + C_{442} e^{-\gamma_4 \tau'}) + \\
& + (a_{22} e^{-\gamma_2(\tau' + \tau_{22})} + a_{32} e^{-\gamma_3(\tau' + \tau_{22})} + a_{42} e^{-\gamma_4(\tau' + \tau_{22})}) (a_{22} e^{-\gamma_2(\tau_{22} - \tau')} + a_{32} e^{-\gamma_3(\tau_{22} - \tau')} + a_{42} e^{-\gamma_4(\tau_{22} - \tau')})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var } \tau_{22} = & \frac{\Omega}{S^2} \left[\frac{C_{232} C_{242}}{(\Omega + 2\gamma_2)} + \frac{C_{332} C_{342}}{(\Omega + 2\gamma_3)} + \frac{C_{432} C_{442}}{(\Omega + 2\gamma_4)} + \frac{(C_{232} C_{342} + C_{332} C_{242})}{(\Omega + \gamma_2 + \gamma_3)} + \frac{(C_{232} C_{442} + C_{432} C_{242})}{(\Omega + \gamma_2 + \gamma_4)} \right. \\
& + \frac{(C_{332} C_{442} + C_{432} C_{342})}{(\Omega + \gamma_3 + \gamma_4)} + \frac{Q_{22}^2}{\Omega} e^{-2\gamma_2 \tau_{22}} (1 - e^{-\Omega \tau_{22}}) + \frac{Q_{32}^2}{\Omega} e^{-2\gamma_3 \tau_{22}} (1 - e^{-\Omega \tau_{22}}) + \\
& + \frac{Q_{42}^2}{\Omega} e^{-2\gamma_4 \tau_{22}} (1 - e^{-\Omega \tau_{22}}) + Q_{22} Q_{32} e^{-(\gamma_2 + \gamma_3) \tau_{22}} \left(2 - \frac{e^{-(\gamma_2 - \gamma_3 + \Omega) \tau_{22}}}{(\gamma_2 - \gamma_3 + \Omega)} - \frac{e^{-(\gamma_3 - \gamma_2 + \Omega) \tau_{22}}}{(\gamma_3 - \gamma_2 + \Omega)} \right) + \\
& + Q_{22} Q_{42} e^{-(\gamma_2 + \gamma_4) \tau_{22}} \left(2 - \frac{e^{-(\gamma_2 - \gamma_4 + \Omega) \tau_{22}}}{(\gamma_2 - \gamma_4 + \Omega)} - \frac{e^{-(\gamma_4 - \gamma_2 + \Omega) \tau_{22}}}{(\gamma_4 - \gamma_2 + \Omega)} \right) + \\
& + Q_{32} Q_{42} e^{-(\gamma_3 + \gamma_4) \tau_{22}} \left(2 - \frac{e^{-(\gamma_3 - \gamma_4 + \Omega) \tau_{22}}}{(\gamma_3 - \gamma_4 + \Omega)} - \frac{e^{-(\gamma_4 - \gamma_3 + \Omega) \tau_{22}}}{(\gamma_4 - \gamma_3 + \Omega)} \right) \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_{12}^2}{\Omega} e^{-2\gamma_4 \tau_{22}} (1 - e^{-\lambda \tau_{22}}) + a_{22} a_{32} e^{-(\gamma_2 + \gamma_3) \tau_{22}} \left(2 - \frac{e^{-(\gamma_2 - \gamma_3 + \Omega) \tau_{22}}}{(\gamma_2 - \gamma_3 + \Omega)} - \frac{e^{-(\gamma_3 - \gamma_2 + \Omega) \tau_{22}}}{(\gamma_3 - \gamma_2 + \Omega)} \right) + \\
& + a_{22} a_{42} e^{-(\gamma_2 + \gamma_4) \tau_{22}} \left(2 - \frac{e^{-(\gamma_2 - \gamma_4 + \Omega) \tau_{22}}}{(\gamma_2 - \gamma_4 + \Omega)} - \frac{e^{-(\gamma_4 - \gamma_2 + \Omega) \tau_{22}}}{(\gamma_4 - \gamma_2 + \Omega)} \right) + a_{32} a_{42} e^{-(\gamma_3 + \gamma_4) \tau_{22}} \left(2 - \frac{e^{-(\gamma_3 - \gamma_4 + \Omega) \tau_{22}}}{(\gamma_3 - \gamma_4 + \Omega)} - \frac{e^{-(\gamma_4 - \gamma_3 + \Omega) \tau_{22}}}{(\gamma_4 - \gamma_3 + \Omega)} \right)
\end{aligned}$$

(4-16)

3ro.) CALCULO DE LA VARIANZA EN LA FUNCION DE CORRELACION CRUZADA, CON DOS DETECTORES PUESTO CADA UN EN CADA NUCLEO, EN EL PUNTO DE CRUCE CERO.

En este caso:

$$(5-17) \quad S = \left| \frac{\partial \rho_{12|23}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, c)}{\partial c} \right|_{c=\tau_{12}} = \gamma_2 b_2 e^{-\gamma_2 \tau_{12}} + \gamma_3 b_3 e^{-\gamma_3 \tau_{12}} + \gamma_4 b_4 e^{-\gamma_4 \tau_{12}}$$

$$\begin{aligned}
(5-18) \quad \sum (\tau_{12} \tau') &= (c_{211} e^{-\gamma_2 \tau'} + c_{311} e^{-\gamma_3 \tau'} + c_{411} e^{-\gamma_4 \tau'}) (c_{232} e^{-\gamma_2 \tau'} + c_{332} e^{-\gamma_3 \tau'} + c_{432} e^{-\gamma_4 \tau'}) + \\
&+ (b_2 e^{-\gamma_2 (\tau_{12} + \tau')} + b_3 e^{-\gamma_3 (\tau_{12} + \tau')} + b_4 e^{-\gamma_4 (\tau_{12} + \tau')}) \left(b_2 e^{-\gamma_2 (\tau_{12} - \tau')} + b_3 e^{-\gamma_3 (\tau_{12} - \tau')} + b_4 e^{-\gamma_4 (\tau_{12} - \tau')} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var. \tau_{12} &= \frac{\Omega}{S^2} \left[\frac{c_{211} c_{232}}{\Omega + 2\gamma_2} + \frac{c_{311} c_{332}}{\Omega + 2\gamma_3} + \frac{c_{411} c_{432}}{\Omega + 2\gamma_4} + \frac{(c_{211} c_{332} + c_{311} c_{232})}{\Omega + \gamma_2 + \gamma_3} + \frac{(c_{211} c_{432} + c_{411} c_{232})}{\Omega + \gamma_2 + \gamma_4} \right. \\
&+ \frac{(c_{311} c_{432} + c_{411} c_{332})}{(\Omega + \gamma_3 + \gamma_4)} + \frac{b_2^2}{\Omega} e^{-2\gamma_2 \tau_{12}} (1 - e^{-\Omega \tau_{12}}) + \frac{b_3^2}{\Omega} e^{-2\gamma_3 \tau_{12}} (1 - e^{-\Omega \tau_{12}}) + \frac{b_4^2}{\Omega} e^{-2\gamma_4 \tau_{12}} (1 - e^{-\Omega \tau_{12}}) + \\
&+ b_2 b_3 e^{-(\gamma_2 + \gamma_3) \tau_{12}} \left(2 - \frac{e^{-(\gamma_2 - \gamma_3 + \Omega) \tau_{12}}}{(\gamma_2 - \gamma_3 + \Omega)} - \frac{e^{-(\gamma_3 - \gamma_2 + \Omega) \tau_{12}}}{(\gamma_3 - \gamma_2 + \Omega)} \right) + b_2 b_4 e^{-(\gamma_2 + \gamma_4) \tau_{12}} \left(2 - \frac{e^{-(\gamma_2 - \gamma_4 + \Omega) \tau_{12}}}{(\gamma_2 - \gamma_4 + \Omega)} - \frac{e^{-(\gamma_4 - \gamma_2 + \Omega) \tau_{12}}}{(\gamma_4 - \gamma_2 + \Omega)} \right) + \\
&+ b_3 b_4 e^{-(\gamma_3 + \gamma_4) \tau_{12}} \left(2 - \frac{e^{-(\gamma_3 - \gamma_4 + \Omega) \tau_{12}}}{(\gamma_3 - \gamma_4 + \Omega)} - \frac{e^{-(\gamma_4 - \gamma_3 + \Omega) \tau_{12}}}{(\gamma_4 - \gamma_3 + \Omega)} \right)
\end{aligned}$$

(5-19)

Los resultados obtenidos utilizando las fórmulas deducidas en esta apéndice, se resumen en las siguientes tablas, en las cuales se utilizan los datos de la Tabla I:

TIEMPO DE MEDICION 300 seg.

K	$\tau_{11} (10^{-3} \text{ seg.})$	$\sqrt{\tau_{11}} (10^{-3})$	Error %	$\tau_{12} (10^{-3} \text{ seg.})$	$\sqrt{\tau_{12}} (10^{-3})$	Error %
0.95	23.075	1.388	6.01	23.231	0.500	2.15
0.96	21.563	1.219	5.66	21.775	0.522	2.40
0.97	19.774	1.016	5.14	20.083	0.547	2.72
0.98	17.526	0.816	4.66	18.041	0.574	3.18
0.99	14.321	0.589	4.12	15.458	0.591	3.82
0.995	11.814	0.435	3.68	14.010	0.567	4.05
0.999	8.468	0.206	2.43	14.554	0.436	2.99

TIEMPO DE MEDICION 600 seg.

K	$\tau_{11} (10^{-3} \text{ seg.})$	$\sqrt{\tau_{11}} (10^{-3})$	Error %	$\tau_{12} (10^{-3} \text{ seg.})$	$\sqrt{\tau_{12}} (10^{-3})$	Error %
0.95	23.075	1.388	4.25	23.231	0.354	1.52
0.96	21.563	1.219	4.00	21.775	0.369	1.70
0.97	19.774	0.719	3.63	20.083	0.387	1.93
0.98	17.526	0.577	3.29	18.041	0.406	2.25
0.99	14.321	0.417	2.91	15.458	0.418	2.70
0.995	11.814	0.307	2.60	14.010	0.401	2.86
0.999	8.468	0.146	1.72	14.554	0.308	2.12

PARA $K = 0.999$

Tiempo de Medición	Error τ_{11} %	Error τ_{12} %
5 minutos	2,43	2,49
10 "	1,72	2,12
15 "	1,40	1,73
20 "	1,22	1,50
25 "	1,09	1,34
30 "	0,99	1,22
35 "		

REFERENCIAS

- 1) F. DIFILIPPO AND R. WALDMAN Nu. Sci. Eng., 61, 60 (1976)
- 2) Fundamentals of Space Dependent Perturbation Theory" Lectures given by K.BEHRINGER at CNEA. FEBRUARY MARCH 1977.
- 3) R.W. ALBRECHT AND W. SEIFRITZ, NUKLEONIK, 11, 143 (1968)
- 4) W. SEIFRITZ AND R. W. ALBRECHT, NUKLEONIK, 11, 149 (1968)
- 5) E. VIEHL, Nu. Sci. Eng., 56, 422, (1975)
- 6) A Shutdown Reactivity Meter for Heavy Water Reactor. Lectures given by K. BEHRINGER at CNEA. AUGUST - NOVEMBER 1976.
- 7) J.R. SHEFF AND R.W. ALBRECHT, Nu. Sci. Eng. 24, 246 (1966)
- 8) C.E. COEN, Nu. Sci. Eng. 7, 472 (1960)
- 9) F.N. MC. DONNELL AND M. HARRIS, J. Nucl. Energy, 26, 129 (1972)
- 10) HEWLETT PACKARD CALCULATOR, 9820 Math Pack.