

METODOLOGIAS ANALITICAS RECIENTEMENTE DESARROLLADAS
APLICABLES A PROBLEMAS DE CONDUCCION DEL CALOR EN
COMPONENTES DE REACTORES NUCLEARES

P.A.A.LAURA*, G.SANCHEZ SARMIENTO**, F.G.BASOMBRIO**
y R.H.GUTIERREZ*

- * Instituto de Mecánica Aplicada (SENID-CONICET). Base Naval Puerto Belgrano. Prov. de Buenos Aires.
** Centro Atómico Bariloche, Comisión Nacional de Energía Atómica. San Carlos de Bariloche. Prov. de Río Negro.

A. INTRODUCCION

Dada la importancia que el conocimiento de la distribución espacial y temporal de la temperatura tiene para el diseño de elementos que componen un reactor nuclear, en lo que se refiere a su comportamiento mecánico estructural, es de sumo interés contar con métodos aproximados de rápida y fácil aplicación para resolver tales problemas de transferencia térmica y que no requieran el empleo de grandes computadoras.

En este trabajo se hace una revisión de algunas metodologías analíticas aproximadas recientemente desarrolladas por los autores para la resolución de la ecuación de conducción del calor estacionaria y transitoria, aplicables a geometrías complejas que se presentan comúnmente en algunos dispositivos y componentes de reactores nucleares. Tales metodologías analíticas están basadas en técnicas de transformación conforme complementadas con los métodos de Ritz o Galerkin, según el caso, para la resolución de las ecuaciones resultantes de dichas transformaciones.

Se muestra la aplicación de dichos métodos en una diversidad de situaciones de interés, que pueden originarse por la interpretación simplificada de ciertos componentes de reactores nucleares, en vista al cálculo termomecánico de los mismos. Trataremos seguidamente tales situaciones por separado.

Se han comparado los resultados analíticos con los obtenidos por el método numérico de elementos finitos mediante códigos desarrollados por los autores, obteniéndose en general muy buen acuerdo.

B. DISTRIBUCION ESTACIONARIA DE LA TEMPERATURA EN UN CIERTO TIPO DE BARRAS PRISMATICAS COMPUESTAS

Considérese el sistema de la figura 1 donde la distribución estacionaria de la temperatura $T(x,y)$ está gobernada por el sistema diferencial:

$$\text{Región I: } k_1 \nabla^2 T = -\dot{S} \quad (0 \leq R \leq R_1) \quad (1)$$

$$\text{Región II: } k_2 \nabla^2 T = 0 \quad (R \geq R_1), \quad T|_{\Gamma} = T_0 \quad (2)$$

donde $\dot{S}$ es una generación de calor uniforme por unidad de volumen, y T_0 la temperatura impuesta sobre la frontera exterior Γ .

Este problema presenta interés en tecnología nuclear, en particular para la transferencia térmica en macroceldas constituidas por un elemento combustible nuclear inmerso en un moderador.

Se resume a continuación la obtención de una solución analítica aproximada basada en la técnica de transformación conforme, comparándosela luego con resultados obtenidos por el método de elementos finitos. Detalles del método pueden verse en [1].

Si $R_1 \ll a_p$, una aproximación muy exacta es suponer que la temperatura T_1 es constante en $R = R_1$. En tal caso la ecuación (1) tiene solución exacta:

$$T = T_1 + \frac{\dot{S}}{4k_1} (R_1^2 - R^2); \quad q_1 = \frac{\dot{S} \cdot R_1}{2} \quad (3)$$

donde q_1 es el flujo de calor para $R = R_1$.

En la región II el problema está regido por la ecuación de Laplace (2) y esto facilita el uso del método de transformación conforme. En [2] se ha mostrando que la transformación aproximada de la región II en el plano Z (figura 2) a una corona circular de radio exterior unidad, no ofrece dificultades si $R_1/a_p \ll 1$. Los dominios poligonales regulares se transforman en un círculo de radio unidad según la relación [2]:

$$z = a_p A_s \sum_{j=0}^{\infty} a_{1+j_s} \zeta^{1+j_s}; \quad a_1 = 1; \quad \zeta = re^{i\theta} \quad (4)$$

s: número de lados del polígono; A_s, a_{1+j_s} : tabulados en [2].

Si $R_1/a_p \ll 1$, es lícita la aproximación:

$$z \approx a_p A_s \zeta; \quad R_1 \approx a_p A_s r_1 \quad (5)$$

En el plano ζ la ecuación transformada es:

$$-k_2 \cdot 2\pi \cdot r \cdot \frac{dT}{dr} = q = \dot{S} \cdot \pi \cdot R_1^2 \quad (6)$$

De (3), (5) y (6) se obtiene para la región I:

$$\frac{T - T_o}{\dot{S} R_1^2 / k_1} = \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{R}{R_1} \right)^2 \right] - \frac{1}{2k_2/k_1} \left[\ln \left(\frac{R_1}{a_p} \right) - \ln A_s \right] \quad (7)$$

y finalmente de (6) y (7) resulta, para la región II:

$$\frac{T - T_o}{\dot{S} R_1^2 / k_1} = - \frac{\ln r}{2k_2/k_1} \quad (8)$$

que junto con la (4) permite determinar el campo térmico en esta última región.

Se han obtenido soluciones numéricas de las ecuaciones (1) y (2) usando el código CUARM [3] basado en el método de elementos finitos. El dominio se subdivide en elementos triangulares con interpolación lineal del campo de temperaturas dentro de cada uno de ellos (ver figura 3).

La figura (4) muestra una comparación entre las soluciones (7) y (8) (línea llena), y los resultados por elementos finitos (cruces) para una barra de sección cuadrada tal que $R_1/a_p = 0.20$. El parámetro adimensional de temperatura se ha graficado para $\phi = 0$ y $\phi = \pi/4$. Se observa un excelente acuerdo entre ambas predicciones.

En [1] se muestran también resultados para el caso de barras de sección pentagonal y hexagonal.

C. DISTRIBUCION TRANSITORIA DE LA TEMPERATURA EN PLACAS DE MATERIALES TERMICAMENTE ORTOTROPICOS Y DE GEOMETRIA COMPLEJA

Materiales de conductividad térmica anisotrópica con ejes principales ortogonales, es decir, materiales térmicamente ortotrópicos, son de uso muy generalizado en tecnología nuclear. Problemas de conducción térmica en esos materiales poseen solución analítica exacta solamente en contados casos de geometría muy

simple. Cuando éste no es el caso, es necesario el empleo de métodos aproximados para la determinación espacial y temporal de la temperatura.

En [4-8] se aplica a diversas configuraciones (simples y doblemente conexas) de dichas placas (figuras 5 y 8), una metodología basada en transformación conforme y una aproximación variacional para la resolución de dichos problemas de transferencia térmica. Esbozaremos aquí las generalidades del método:

Suponiendo que los coeficientes de conducción k_x , k_y no varían con la temperatura $T(x,y,t)$ para las situaciones mostradas en dichas figuras, el problema está gobernado por la ecuación

$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = C_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9)$$

donde C_p es el calor específico y ρ la densidad del material de la placa.

Sean las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

$$T(x,y,0) = T_0 \quad (10.a)$$

$$T[\bar{L}(x,y) = 0, t] = 0 \quad (10.b)$$

donde $L(x,y) = 0$ es la relación funcional que define el contorno del dominio. En el caso de placas doblemente conexas la condición (10.b) debe verificarse para ambos contornos interior y exterior.

Haciendo $T(x,y,t) = T_1(x,y) \tau_1(t)$ y sustituyendo en (9), siguiendo el clásico procedimiento de separación de variables se obtiene para τ_1 una variación exponencial con t , en tanto que $T(x,y)$ deberá ser una autofunción de la ecuación

$$k_x \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + \beta^2 T_1 = 0 \quad (11)$$

en la que los autovalores de β^2 son las constantes de dicha separación de variables.

En [4] se da una solución exacta de (11) y por consiguiente de (9), para un dominio rectangular, expresada en serie doble de Fourier. Si el dominio es arbitrario, métodos aproximados deben emplearse para la solución de (11).

Empleando cálculo variacional puede demostrarse que una solución de (11) hace mínimo al funcional [4]:

$$J(T_1) = \iint_D \left[k_x \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial T_1}{\partial y} \right)^2 - \beta^2 T_1^2 \right] dx dy \quad (12)$$

sujeto a la condición (10.b). Sea $z = x+iy = f(\zeta)$ la relación funcional que transforma el dado dominio en el plano z en un círculo unitario (figura 7), si dicho dominio es simplemente conexo, o en un anillo de radio exterior unitario para los doblemente conexas (figura 2). Para contornos poligonales vale la transformación (4).

Sustituyendo $z = f(\zeta)$ en (12), el problema de la minimización del funcional así transformado resulta mucho más sencillo por la expresión simple que toma la condición de contorno transformada. Para placas simplemente conexas, ésta resulta ser:

$$T_1(\zeta, \bar{\zeta}) \Big|_{|\zeta|=1} = 0 \quad (13)$$

La aproximación más simple para T que satisface (13) es probablemente:

$$T_1 \approx T_{1a}(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{n=1}^N A_n \left[1 - (\zeta, \bar{\zeta})^n \right] \quad (14)$$

Sustituyendo (14) en el funcional transformado, de las condiciones de minimización se obtiene [4,5] un sistema lineal de ecuaciones en los coeficientes A_n , y de la condición de compatibilidad del sistema se obtiene un determinante secular cuyas raíces son los autovalores deseados β_n^2 .

De la forma [4] de dicho funcional transformado, resulta claro que la expresión (14) lleva a un procedimiento algorítmico completamente simple desde el punto de vista del cálculo de las constantes de separación. Sin embargo, para expresar el campo térmico en su forma final, es considerablemente más expeditivo [4] usar una serie de Fourier-Bessel:

$$T(\zeta, \bar{\zeta}, t) = \sum_{n=1}^N B_n J_0 \left[\alpha_n (\zeta, \bar{\zeta})^{1/2} \right] e^{-\frac{\beta_n^2 t}{C_p \rho}} \quad (15)$$

donde J_0 es la función de Bessel de primera especie de orden cero; los α_n son las raíces de $J_0(x)$ y los B_n están dados por la expansión de Fourier-Bessel:

$$B_n = \frac{2T_0}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} \quad (16)$$

En [8] se expone una extensión de estos resultados al caso de placas ortotrópicas circulares con condiciones iniciales:

$$T(x, y, 0) = T_0 [1 - (r/a)^2]^p \quad (p > 0) \quad (17)$$

en lugar de la (10.a). La solución obtenida tiene la misma forma que la (15), con la única diferencia de tener la función J_0 como argumentos a $\alpha_n \cdot r$, y que los coeficientes de la serie están dados por:

$$B_n = T_0 \frac{2^{p+1}}{\alpha_n^{p+1}} \frac{\Gamma(p+1)}{J_1^2(\alpha_n)} \frac{J_{p+1}(\alpha_n)}{J_1^2(\alpha_n)} \quad (18)$$

donde $\Gamma(p+1)$ es la función gamma de argumento $p+1$.

En la figura 6 se muestra la solución adimensionalizada obtenida para una placa cuadrada con $k_y/k_x = 3$. Valores de T/T_0 sobre el eje x , dados por la aproximación expuesta, son comparados con la solución exacta [4] y con los resultados obtenidos mediante el código CTR [11-12] en elementos finitos desarrollado por uno de los autores. Aquí también se subdivide el dominio como en la figura 3, y para la variación temporal se emplea un esquema en diferencias finitas del tipo Crank-Nicolson.

En la figura 7 y en referencias [4,5,6,8] se muestran resultados análogos para otras configuraciones. La concordancia entre ambas aproximaciones es satisfactoria en todos los casos, desde un punto de vista práctico.

D. FACTOR DE FORMA DEL FLUJO CALORICO EN CONFIGURACIONES PRISMATICAS ARBITRARIAS COMPUESTAS, CON CONTORNOS POLIGONALES Y CIRCULARES

Componentes cilíndricos o prismáticos de sección compleja doblemente conexa son frecuentemente empleados en tecnología nuclear, desde conductos de fluidos en general, hasta bloques de moderador sólido envolviendo barras combustibles nucleares. Además, dependiendo del tipo de aplicación particular, el uso de dos o más materiales diferentes puede resultar de utilidad.

Consideremos las configuraciones prismáticas compuestas cuyas secciones se muestran en la figura 9. Si estas secciones pudieran ser transformadas en los dominios anulares concéntricos de la derecha (plano ζ), obtendríamos para el flujo total de calor entre las superficies interna y externa, una expresión muy sencilla. En efecto, dado que la ecuación de conducción de calor estacionaria para este caso en que no hay fuentes térmicas (ecuación de Laplace) no altera con la transformación, podemos resolver igualmente dicha ecuación en el plano transformado ζ .

Con la solución de este último problema y el conocimiento de la transformación se obtiene el campo térmico buscado.

Mediante un análisis elemental puede demostrarse [14] que el flujo calórico entre las superficies interna ($r = \lambda_1$) y externa ($r = \lambda_3$) en el plano ζ (y por consiguiente también entre las de la configuración original), está dado por la expresión:

$$q = S k_1 (T_1 - T_3) \quad (14)$$

donde

$$S = \frac{2\pi}{\ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{\lambda_3}{\lambda_2}} \quad (\text{factor de forma}); \quad (15)$$

T_1 es la temperatura mantenida sobre la superficie interna $r = \lambda_1$; y T_3 es la temperatura mantenida sobre la superficie externa $r = \lambda_3$.

Es posiblemente muy difícil encontrar la transformación $z = f(\zeta)$ buscada para relaciones arbitrarias entre a_p , R_1 y R_2 para el caso de la figura 14.a, o entre R_2 , R_3 y a_p para la configuración de la figura 14.b. Sin embargo, una buena aproximación muy simple de aquella puede ser hallada en el caso:

$$R_1, R_2 \ll a_p \quad (\text{figura 14.a}) \quad (16.a)$$

$$\text{y} \quad R_2, R_3 \gg a_p \quad (\text{figura 14.b}) \quad (16.b)$$

(Este hecho es una consecuencia directa de lo tratado en [2] y [13] para un único material.)

Consideremos primero el caso de la figura 14.a. Si en la transformación (4) tomamos para ζ círculos definidos por $r = \lambda_1$ y $r = \lambda_2$ tales que $\lambda_1, \lambda_2 \ll 1$, obviamente sólo el primer término de dicha serie tendrá un valor significativo y las correspondientes imágenes en el plano W se aproximarán bien a círculos de radios:

$$R_1 \approx a_p \cdot A_s \cdot \lambda_1 \quad (17)$$

$$R_2 \approx a_p \cdot A_s \cdot \lambda_2 \quad (18)$$

tales que verifican (16.a). De las (15), (17) y (18) resulta entonces:

$$S = \frac{2\pi}{\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{a_p}{R_2} + \frac{k_1}{k_2} \ln A_s} \quad (19)$$

y conocidos los valores de A_s (tabulados en [2]), queda resuelto el problema.

La aproximación es similar en el caso de la figura 9.b. Interesa en este caso la función que transforma el plano infinito con un agujero de forma poligonal regular (plano W), en el plano infinito con una perforación circular de radio unitario (plano ζ):

$$W = a_p \cdot A'_s \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_{1-sj} \zeta^{1-sj}; \quad a_1 = 1; \quad \zeta = re^{i\theta} \quad (20)$$

s: orden de polígono; A'_s , a_{1-sj} : tabulados en [14] y [2] resp.

Tomando ahora $r = \lambda_2, \lambda_3 \gg 1$, el primer término de (20) predominará absolutamente sobre los demás, y los correspondientes círculos aproximados en el plano W tendrán por radios respectivos:

$$R_2 = a_p \cdot A'_s \cdot \lambda_2 \quad (21.a)$$

$$R_3 = a_p \cdot A'_s \cdot \lambda_3 \quad (21.b)$$

De las (21) y de la (15) resulta entonces, para la segunda configuración:

$$S = \frac{2\pi}{\ln \frac{R}{a_p} - \ln A'_S + \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{R_3}{R_2}} \quad (22)$$

Haciendo $R_1=R_2$, $k=k_2$ en la (19); y $R_2=R_3$, $k=k_1$ en la (22), resultan las correspondientes expresiones de S para los casos homogéneos [13]. Para un conjunto de valores de R_2/R_1 y a_p/R_1 correspondientes a la primera configuración, y de R_3/a_p y R_3/R_2 correspondientes a la segunda, se resolvieron ambos problemas también con el código en elementos finitos CUARM ya citado. En ref. [14] se muestra el excelente acuerdo obtenido por ambas aproximaciones. En la TABLA I, extraída de [14], se exponen algunos resultados para $s = 4$ y $s = 8$ (cuadrado y octógono respectivamente).

E. CONCLUSIONES

Comparando distintas aproximaciones de origen completamente diferente, se ha comprobado la validez de las sencillas metodologías analíticas aproximadas aquí bosquejadas, que no requieren el empleo de grandes computadoras, para la resolución de diversos problemas de transferencia térmica del tipo de los aquí mostrados. En la bibliografía siguiente puede ampliarse esta información.

REFERENCIAS

- [1] P.A.A. LAURA y G. SANCHEZ SARMIENTO. Int. J. Heat Mass Transfer. En impresión. Marzo de 1978.
- [2] P.A.A. LAURA y SUSEMIHL. Nucl. Eng. Des. 25 (1973), 409-412.
- [3] F.G. BASOMBRIIO y B. CRUZ. Informe CAB/1976/2. Octubre de 1976. En impresión como Publicación CNEA-NT.
- [4] P.A.A. LAURA, R.H. GUTIERREZ, G. SANCHEZ SARMIENTO y F.G. BASOMBRIIO. Instituto de Mecánica Aplicada. Publicación N° 78-17, Junio de 1978.
- [5] P.A.A. LAURA, R.H. GUTIERREZ, G. SANCHEZ SARMIENTO. Julio de 1978. Enviado a publicación.
- [6] P.A.A. LAURA, R.H. GUTIERREZ, G. SANCHEZ SARMIENTO y F.G. BASOMBRIIO. A ser presentado en Intern. Conf. of Numer. Methods in Thermal Problems, Swansea, 2-6 Julio de 1979.
- [7] P.A.A. LAURA, R.H. GUTIERREZ, G. SANCHEZ SARMIENTO. Agosto de 1978. Enviado a publicación.
- [8] P.A.A. LAURA, G. SANCHEZ SARMIENTO y R.H. GUTIERREZ. Technical Note. Septiembre de 1978. Enviado a publicación.
- [9] P.A.A. LAURA y R. ERCOLI. Nucl. Eng. Des., 23 (1972), 1-9.
- [10] P.A.A. LAURA, R.H. GUTIERREZ y D.S. STEINBERG. Journal of Sound and Vibration, 55 (1), 49-53 (1977).
- [11] F.G. BASOMBRIIO y B. CRUZ. Informe CAB/1977/2. Abril 1977. En impresión como publicación CNEA-NT.
- [12] F.G. BASOMBRIIO, G. SANCHEZ SARMIENTO y S. PISSANETZKY. Informe CAB/1978/7. Septiembre de 1978. En impresión como Publicación CNEA-NT.
- [13] P.A.A. LAURA y G. SANCHEZ SARMIENTO. Nucl. Eng. Des. 47 (1978) 227-229.
- [14] P.A.A. LAURA y G. SANCHEZ SARMIENTO. Nucl. Eng. Des. En impresión. Agosto de 1977.

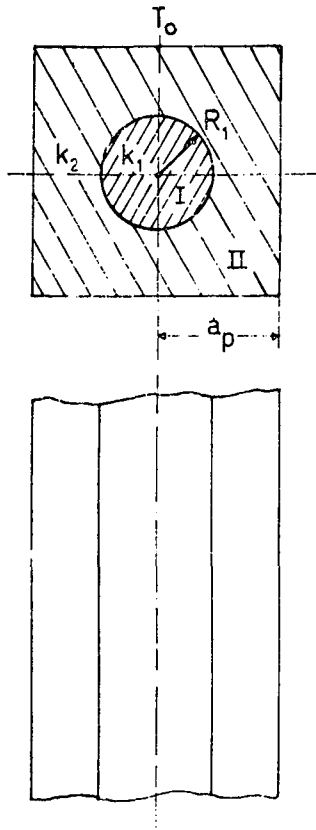


FIGURA 1

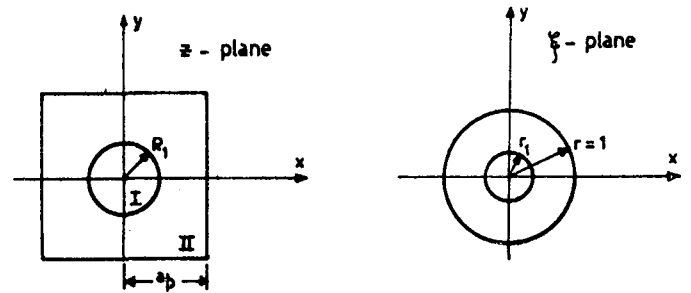


FIGURA 2

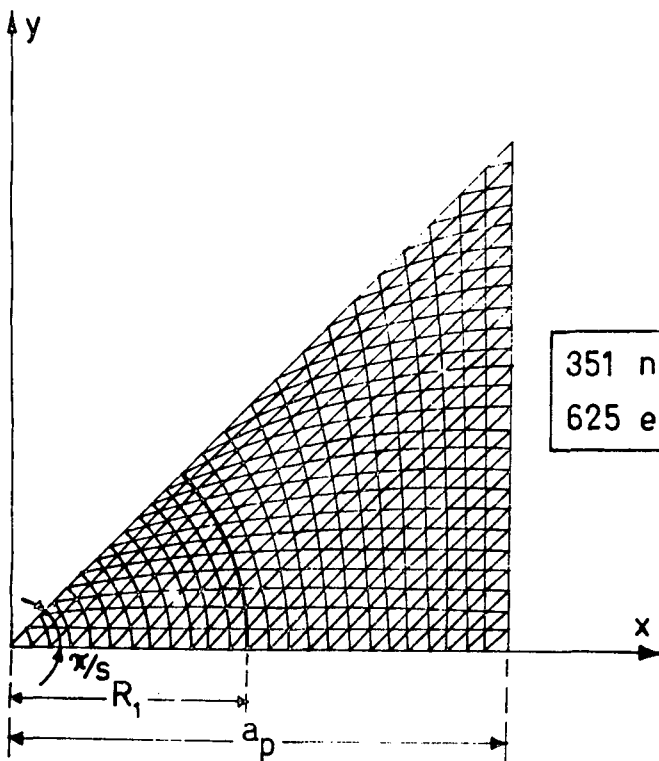


FIGURA 3

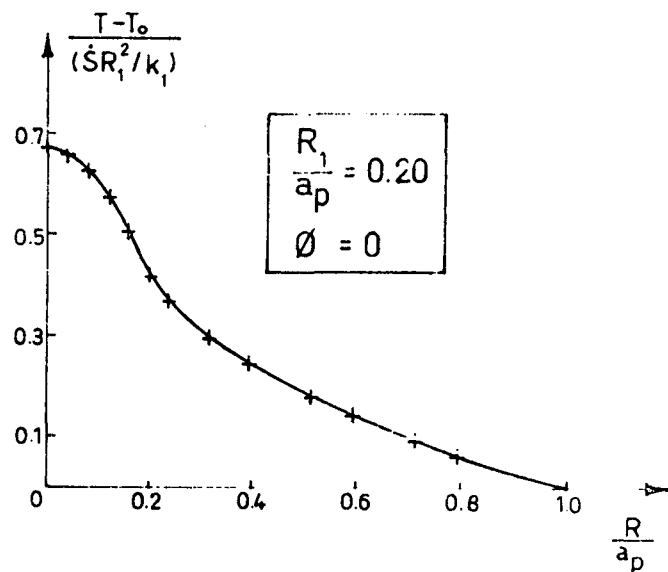


FIGURA 4

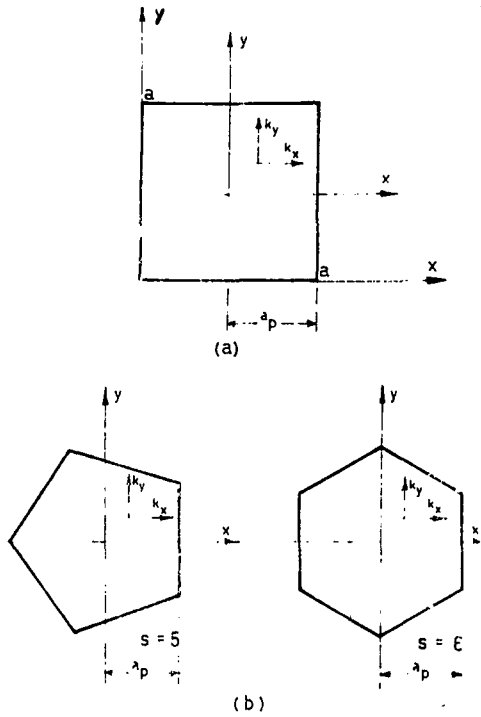


FIGURA 5

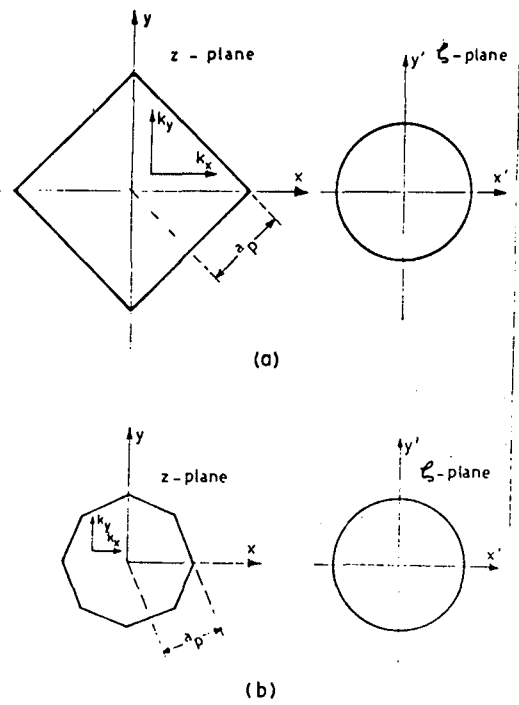


FIGURA 8

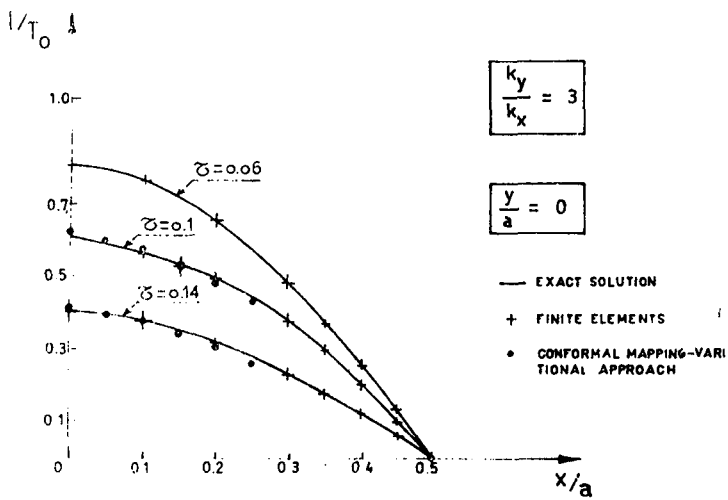


FIGURA 6

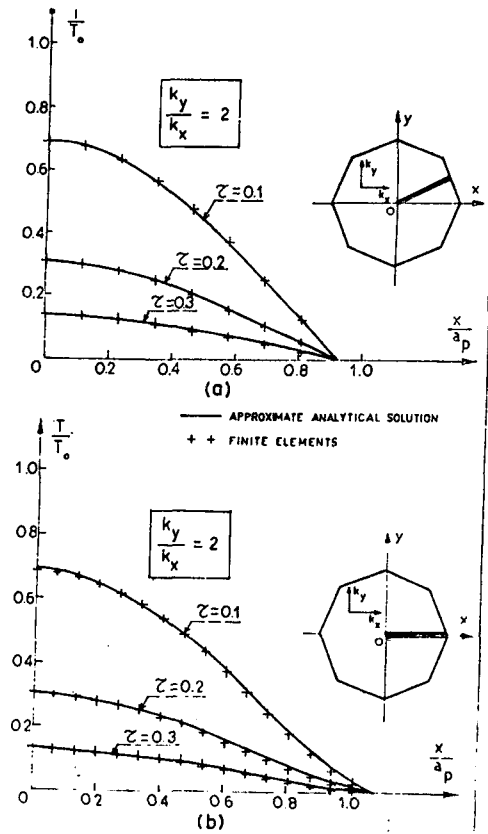


FIGURA 7

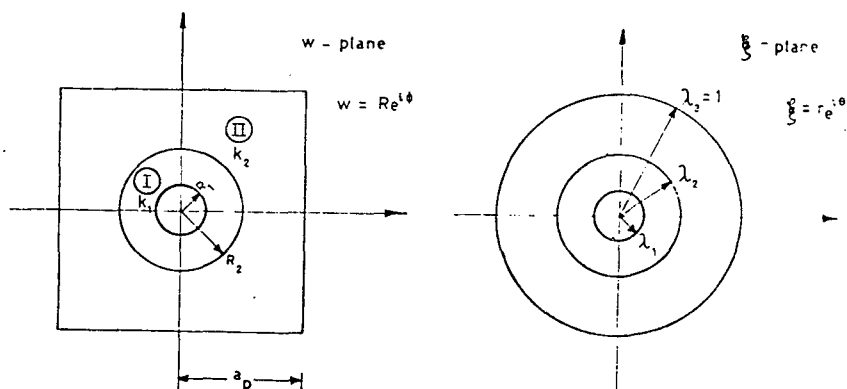


FIGURA 9.a

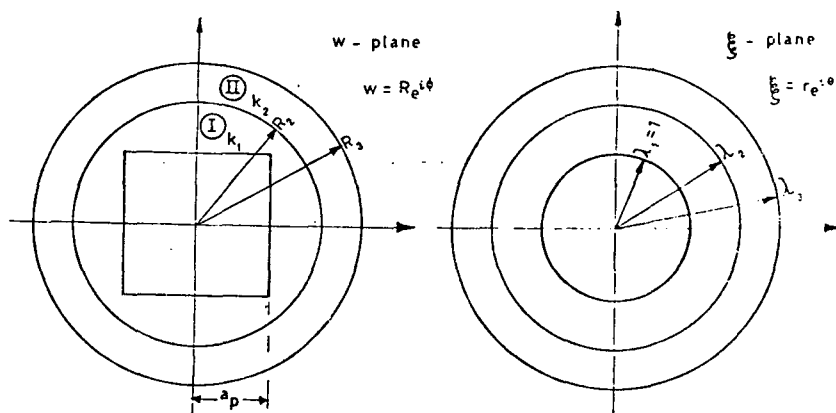


FIGURA 9.b

R_3/a_p	R_3/R_2	s	S	
			Elementos Finitos	Transformación conforme
2.0	1.05	4	10.95	10.92
2.0	1.20	4	8.85	8.86
2.0	1.35	4	7.53	7.60
2.0	1.10	8	8.41	8.30
2.0	1.45	8	6.13	6.08
2.0	1.70	8	5.29	5.27
4.0	1.10	4	4.86	4.78
4.0	1.90	4	3.42	3.37
4.0	2.70	4	2.85	2.84
4.0	1.10	8	4.42	4.33
4.0	2.30	8	2.94	2.87
4.0	3.50	8	2.45	2.41

TABLA 1. Comparación de los resultados obtenidos analíticamente y por elementos finitos del factor de forma S , para la configuración de la figura 9.b.