

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION

CURSO DE REPASO TEORICO PRACTICO

DE

M A T E M Á T I C A S

por Licenciada Elba Rosa PEZZONI

Buenos Aires

1976

Argentina

CURSO DE REPASO TEORICO PRACTICO

DE

M A T E M A T I C A S

INDICE

1-.Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.	pag. 1
2-.Series de Potencias - Serie de TAYLOR.	pag. 13
3-.Ecuación de BESSEL-Funciones de BESSEL Ecuación de LEGENDRE-Polinomios de LEGENDRE.	pag. 17
4-.Ecuaciones Diferenciales Parciales.	pag. 32
5-.Series y transformadas de FOURIER.	pag. 40
6-.Transformada de LAPLACE.	pag. 49

El objeto de este curso es repasar algunos conceptos de Matemáticas. No es un curso académico, formal sino una simple revisión práctica con el objeto de refrescar algunas nociones en particular aquellas que son instrumento en la "teoría de reactores".

Sabemos ya que las Matemáticas son de imprescindible utilidad en las otras ciencias para formular las leyes que rigen los fenómenos que estudia esa ciencia en particular.

En nuestro caso, los problemas que se describen en la teoría de reactores exigen del preciso lenguaje matemático que ofrecen las ecuaciones diferenciales.

Ordinarias: con una variable independiente y derivadas con respecto a ellas.

Parciales: con más de una variable independiente y por lo tanto con derivadas parciales.

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^3 + 4 \frac{dy}{dx} + xy = 0 \quad \text{ordinaria de 2º orden y 3er. grado}$$

$$\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)^2 + 3 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + yxt = 0 \quad \text{parcial de 3er. orden y 2º grado}$$

Orden: el de la derivada de mayor orden

Grado: el exponente de la derivada de mayor orden

1.- Ecuaciones diferenciales ordinarias

La solución de una ecuación de orden n (expresión final para la variable dependiente) contendrá n constantes arbitrarias que se evalúan con las condiciones de contorno para el problema físico particular que se estudia.

La solución completa o general es la que contiene las n constantes arbitrarias independientes. Si $ax + \frac{c_1 + c_2}{c}$ es una solución, c_1 y c_2 no son independientes. La solución se puede escribir $c \cdot e^x$.

Una solución particular se obtiene fijando las constantes.

Si una ecuación diferencial es de primer grado en la variable dependiente y en todas sus derivadas es lineal

1.1 Ecuaciones de primer orden lineales

a) A variables separables

Ejm: $\frac{dy}{dx} + y \cos x = 0$
 $\frac{dy}{y} = -\cos x \, dx$

cuya solución $\ln y + \sin x = 0$ (ecuación que define y como función implícita de x) ó $y = e^{-\sin x}$ (una función explícita de x).

La sustitución en el primer miembro de la ecuación de y e y' , a partir de cualquiera de ellas, la convierten en una expresión idénticamente nula)

$$y' = e^{-\sin x} (-\cos x)$$

$$\therefore -e^{-\sin x} \cos x + e^{-\sin x} \cos x = 0$$

$$0 = 0$$

Una sustancia o isótopo radiactivo en el que sufre cambio espontáneos por desintegración radioactiva (decaimiento radioactivo).

Si N es el n° de átomo radiactivo presentes en un cierto instante t , la velocidad de decaimiento está dada por

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

λ es la constante de decaimiento o desintegración de la sustancia radioactiva y es característica de cada sustancia radioactiva. Mide la velocidad de decaimiento por cada átomo.

Esta ecuación describe pues el decaimiento radioactivo.

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

$$\ln N = -\lambda t + C$$

$$N = C e^{-\lambda t}$$

para $t=0$ es $N_0 = C$ (nº de átomos al t cero)

$$\therefore \underline{\underline{N = N_0 e^{-\lambda t}}}$$

b) Ecuación diferencial exacta

La ecuación diferencial $A dx + B dy = 0$ donde A y B son funciones de x e y es exacta si $A dx + B dy$ es una diferencial exacta. La condición necesaria y suficiente es que cumpla la relación de Cauchy:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

(Si $A=f(x)$ y $B=g(y)$) $\therefore \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} = 0$ que es el caso de variables separables)

Ejm: $(2x-y) dx + (3y^2-x) dy = 0$

es exacta.

Solución: $x^2 xy + y^3 = C$

Si una ecuación no es exacta, puede hacerse para lo cual se multiplica por un factor, conocido como el factor integrante.

Ejm: $\frac{dy}{y} + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y}\right) dx = 0$

no es exacta

Se hace exacta multiplicando por $x \cdot y$

$$\therefore d\left(xy - \frac{x^3}{3}\right) = 0$$

cuya solución

es $xy - \frac{x^3}{3}$

c) Para la ecuación lineal de la forma

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$$

el factor integrante es: $e^{\int f(x) dx} = e^F$

$$\frac{d(y \cdot e^F)}{dx} = g(x) \cdot e^F$$

$$y = e^{-F} \left[\int e^F g(x) dx + C \right] \quad (1)$$

Como aplicación tenemos el decaimiento radioactivo de sustancias madre e hija.

Sea A el n° de átomos de la sustancia madre y B el n° de átomos de la sustancia hija en el tiempo t , A_0 es el valor original de A al $t = 0$

λ_A y λ_B constantes de decaimiento

Las sustancias satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda_A A$$

$$\frac{dB}{dt} = -\lambda_B B + \lambda_A A$$

La solución de la primera es $A = A_0 e^{-\lambda_A t}$ y sustituyendo en la segunda

$$\frac{dB}{dt} + \underbrace{\lambda_B B}_f = \underbrace{\lambda_A A_0}_g e^{-\lambda_A t}$$

Ecuación que puede resolverse por la fórmula (1)

$$B = e^{-\int \lambda_B dt} \left[\int e^{\int \lambda_B dt} \lambda_A A_0 e^{-\lambda_A t} dt + C \right]$$

$$\therefore B = e^{-\lambda_B t} \left[\lambda_A A_0 \int e^{(\lambda_B - \lambda_A)t} dt + C \right]$$

$$B = e^{-\lambda_B t} \left[\lambda_A A_0 \frac{e^{(\lambda_B - \lambda_A)t}}{\lambda_B - \lambda_A} + C \right]$$

Si $t=0$ es $B=0$

$$\text{y } C = - \frac{\lambda_A A_0}{\lambda_B - \lambda_A}$$

$$\therefore B = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} A_0 \left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t} \right)$$

- d) Ecuación de Bernoulli como ejemplo de ecuación no lineal que se puede reducir a lineal

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^m$$

si

$$u = y^{1-m}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = (1-m)y^{-m} \frac{dy}{dx}$$

reemplazando: $\frac{1}{1-m} \cdot \frac{1}{y^{-m}} \frac{du}{dx} + P(x)y = Q(x)y^m$

$$\therefore \frac{du}{dx} + (1-m)P(x)\underbrace{y^{1-m}}_u = Q(x) \cdot (1-m)$$

que es lineal

Ejm:

$$\frac{dy}{dx} + xy = y^4 \cdot e^{-x^2}$$

$$u = y^{-3}$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{3xu}{x} = -\frac{3e^{-x^2}}{y}$$

$$u = e^{\frac{3x^2}{2}} \left(C - 3 \int e^{-5\frac{x^2}{2}} dx \right)$$

si puede sustituir por el desarrollo en serie

de $e^{-\frac{5x^2}{2}} = 1 - \frac{5x^2}{2} + \frac{(\frac{5x^2}{2})^2}{2!} - \frac{(\frac{5x^2}{2})^3}{3!} + \dots$ e integrar cada término

$$\therefore y^{-3} = 3e^{\frac{3x^2}{2}} \left(\frac{C}{3} - x + \frac{5x^3}{3 \cdot 2} - \dots \right)$$

1.2 Ecuaciones diferenciales de orden n

Una ecuación diferencial lineal es aquella en la cual la variable dependiente y su derivada aparecen sólo a 1er. grado y no hay término que contienen productos de la variable dependiente y sus derivadas.

$$\frac{d^m y}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + a_{m-1} \frac{dy}{dx} + a_m y = f(x)$$

Las a pueden ser constantes o funciones de x pero no de y

Una ecuación lineal es homogénea cuando el miembro derecho es 0

Si $y_1, y_2, \dots, y_m$ con n soluciones linealmente independientes de

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = 0 \quad (1)$$

cada una con una constante arbitraria, la solución general es la suma

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_m$$

La condición necesaria y suficiente para que un conjunto dado de soluciones $y_1, y_2, \dots, y_m$ de una ecuación diferencial de orden n sea linealmente independiente es que el determinante: (Wronskiano)

$$W \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ y_1' & y_2' & \dots & y_m' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_m^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Ejm: La ecuación

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y = 0$$

tiene como soluciones:

$$\begin{aligned} y_1 &= \text{sen } x \\ y_2 &= \text{cos } x \\ y_3 &= e^{ix} \end{aligned}$$

$$W \equiv \begin{vmatrix} \text{sen } x & \text{cos } x & e^{ix} \\ \text{cos } x & -\text{sen } x & ie^{ix} \\ -\text{sen } x & -\text{cos } x & -e^{ix} \end{vmatrix} = 0$$

no son linealmente independientes. Una de las soluciones por

lo menos, podrá expresarse como combinación lineal de las otras dos.

En efecto, es sabido que: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Se verifica fácilmente que un conjunto de soluciones linealmente independiente es

$$y_1 = \sin x$$

$$y_2 = \cos x$$

$$y_3 = e^x$$

Y la solución completa o general :

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 e^x$$

Consideramos las soluciones de la ecuación lineal homogénea cuando los coeficientes son constantes. La solución puede expresarse en la forma $y = \lambda^x$ y sustituyendo en (1) y dividiendo por λ^x de la ecuación auxiliar:

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

Esta ecuación algebraica tiene n raíces ($r_1, r_2, \dots, r_n$)

$$\therefore y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$$

la solución general de la ecuación diferencial homogénea (1) (Habría que analizar los casos en que la ecuación auxiliar tiene raíces múltiples o complejas).

EJ: Ecuación del movimiento armónico simple

$$1) \quad \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k^2 X(x) = 0$$

La ecuación auxiliar característica

$$m^2 + k^2 = 0$$

$$m^2 = -k^2$$

$$m = \pm \sqrt{-1} \cdot k$$

$$X(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} \quad \text{Como } \begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{cases}$$

$$X(x) = A \cos kx + B \sin kx \quad / \quad A = c_1 + c_2 \quad y \quad B = (c_1 - c_2) i$$

$$2) \quad \frac{d^2 X}{dx^2} - k^2 X = 0$$

$$m^2 - k^2 = 0$$

$$m^2 = k^2$$

$$m = \pm k$$

$$X = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

$$\text{ó } X = A \cosh kx + B \sinh kx$$

$$\text{como } \begin{cases} \cosh x + \sinh x = e^x \\ \cosh x - \sinh x = e^{-x} \end{cases}$$

Problema

Sea una fuente plana infinita que emite neutrones en un medio homogéneo infinito. Emite uniformemente a la velocidad de un neutrón por cada cm^2 y por segundo.

El sistema de coordenadas se elige de modo que la fuente coincida con el plano para el cual $x=0$ en todos los puntos. O sea todos los puntos de la fuente tienen $x=0$.

Como la fuente es infinita, el flujo de neutrones en cualquier punto del medio será independiente de las coordenadas $\underline{y}$ y $\underline{z}$.

Entonces la ecuación de difusión que se debe resolver para hallar el flujo de neutrones es:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - k^2 \phi = 0$$

cuya solución es:

$$\phi = A e^{-kx} + C e^{kx}$$

Condiciones de contorno :

- 1) El flujo debe ser finito.
- 2) En la fuente plana la densidad de corriente es 0,5 neutrones por cm^2 y por segundo.

Como $J = -D \frac{d\phi}{dx}$ por definición

D es la constante propia del medio donde se difunden los neutrones (constante de difusión del medio)

$$\lim_{x \rightarrow 0} J = \lim_{x \rightarrow 0} -D \frac{d\phi}{dx} = 0.5$$

Aplicando la condición (1) debe ser $C=0$ y con la (2) como

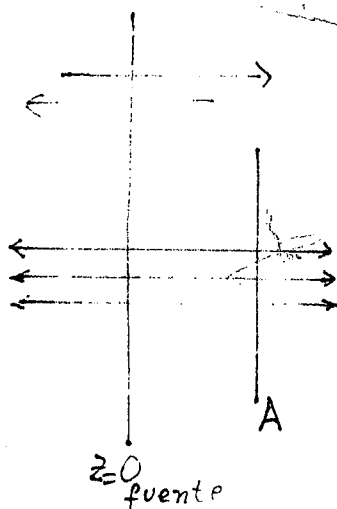
$$\lim_{x \rightarrow 0} J = \lim_{x \rightarrow 0} k D A e^{-kx} = k D A \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{es } A = \frac{1}{2kD}$$

resulta:

$$\phi = \frac{e^{-kx}}{2kD}$$

x es el valor absoluto de la coordenada x porque hay simetría del flujo con respecto al plano $x=0$



La difusión es aproximadamente la misma en ambas direcciones no hay contribución a la corriente.

neutrones que vienen de la fuente en dirección positiva de x

plano próximo a la fuente.

Existen ecuaciones con coeficientes no constantes pero que es posible transformarlas con el cambio de variable $x = e^z$

Lo veremos en un caso particular:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - w^2 y = 0 \quad (1)$$

La transformamos en una ecuación de coeficientes constantes aplicando el cambio de variable $x = e^z$

$$\text{Es } z = \ln x \quad \vee \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-z}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot e^{-z}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dz^2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{dz} \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dz^2} e^{-2z} + \frac{dy}{dz} (-e^{-2z})$$

Reemplazamos en (1)

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} - w^2 y = 0$$

que es a coeficientes constantes, cuya ecuación característica es:

$$r^2 + r - w^2 = 0$$

$$\text{como } r = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$\therefore r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + w^2}$$

Si r_1 y r_2 son las dos soluciones, se verifica

$$r_1 + r_2 = -b = -1$$

Por lo tanto si una vale k , la otra vale $-(k+1)$ y la solución general de (1) es

$$y = c_1 e^{kz} + c_2 e^{-(k+1)z}$$

y de acuerdo al cambio de variable

$$y = c_1 x^k + c_2 x^{-(k+1)}$$

La solución general de una ecuación diferencial lineal inhomogénea es la suma de una función complementaria y de una integral particular. La función complementaria es la solución general de la homogénea (obtenida reemplazando el miembro derecho por 0) y que se expresa como suma de las n soluciones linealmente independientes, cada una con constante arbitraria.

La solución general de la inhomogénea es pues:

$$y = \underbrace{y_c}_{\text{no contiene constantes arbitrarias}} + \underbrace{y_p}_{\text{con sus constantes arbitrarias}}$$

Antes de obtener la integral particular definimos el operador diferencial

$$D = \frac{d}{dx}$$

que aplicando u operando sobre y :

$$Dy = \frac{dy}{dx}$$

Puede ser tratado como una cantidad algebraica y las potencias de D como derivadas sucesivas.

$$D(y+z) = Dy + Dz \quad \text{o sea distributivo}$$

$$D^n cy = c D^n y \quad \text{donde } c \text{ es una constante}$$

$$(D^2 + 3D - 4)y = (D+4)(D-1)y \quad \text{o sea se factoriza}$$

Haciendo uso del operador diferencial expresamos la ecuación homogénea.

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n)y = 0$$

Si los coeficientes son constantes puede factorizarse

$$(D - r_1)(D - r_2) \dots (D - r_m)y = 0 \quad (2)$$

y la solución general de (2) es entonces:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$$

que concuerda con lo anterior (función complementaria).

Para definir la integral particular consideramos:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$Dy = f(x)$$

$$y = \frac{1}{D} f(x) = \int f(x) dx$$

De modo que el símbolo $\frac{1}{D}$ puede interpretarse como integración respecto de x . El significado de un símbolo mas complicado puede ser obtenido considerando

$$\frac{dy}{dx} + ay = f(x) \quad (3) \text{ ecuación inhomogénea lineal de } 1^\circ \text{ orden}$$

$$(D+a)y = f(x)$$

$$\therefore y = \frac{1}{D+a} f(x)$$

solución simbólica

Pero sabemos que la solución general de (3) (pag 3(1) es:

$$y = C \cdot e^{-ax} + e^{-ax} \int e^{ax} f(x) dx$$

Como $C \cdot e^{-ax}$ por si sola no satisface a (3) (es la función complementaria solución de la homogénea)

$$\text{Y si } C=0, \quad e^{-ax} \int e^{ax} f(x) dx \quad \text{si satisface a (3)}$$

Es conveniente dar a la solución simbólica una interpretación compatible con la solución efectiva, entonces conviene asociar:

$$\underbrace{\frac{1}{D+a} \cdot f(x)}_{\text{solución simbólica de (3)}} \equiv \underbrace{e^{-ax} \int e^{ax} f(x) dx}_{\text{solución particular (cuando } c=0) \text{ que satisface a (3)}}$$

La integral particular no lleva constante pues esta puede considerarse nula o involucrarse en la complementaria.

$$\text{Ej: } \frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = e^{4x}$$

$$(D^2 - 5D + 6)y = e^{4x}$$

$$(D-3)(D-2)y = e^{4x}$$

La integral simbólica que conduce a la integral particular es:

$$y = \frac{1}{(D-3)(D-2)} e^{4x}$$

∴

$$v = \frac{1}{1-3} \left[e^{2x} \int \frac{e^{-2x} e^{4x}}{e^{2x}} dx \right]$$

$$y = e^{2x} \int \left[e^{2x} \int \underbrace{e^{2x}}_{\frac{1}{2} e^{2x}} dx \right] e^{-3x} dx$$

$$v = e^{3x} \cdot \frac{e^x}{2} = \frac{e^{4x}}{2} \quad \text{integral particular}$$

La función complementaria : $c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$

Solución General $Y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \frac{e^{4x}}{2}$

2-. Resolución aproximada de ecuaciones diferenciales. Método de desarrollo en serie .

2.1-. Sea una serie infinita de funciones

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x) = u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_m(x) + \dots$$

La primera cuestión que surge, cada vez que se utiliza una serie de funciones, es la relativa a la determinación de los valores de la variable para los cuales converge la serie, con este objeto se aplica el criterio del cociente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$$

En particular uno de los tipos más importantes por su utilidad, como veremos es la serie de potencias

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m + \dots$$

Para analizar para que valores de X converge

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{a_m}{a_{m-1}} \right| \cdot |x| < 1 \quad \text{si es convergente}$$

Por consiguiente la serie será convergente para aquellos valores de X tales que

$$|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|$$

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = r$$

la serie es convergente cuando X pertenece al intervalo $(-r, r)$ llamado intervalo de convergencia r es el radio de convergencia.

El.: La serie $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^m}{m} + \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n-1} \right| = 1$$

La serie converge para $-1 < x < 1$ y diverge para $|x| > 1$

En el extremo $X = -1$ la serie se convierte en $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ que es convergente (las series alternadas convergen si cada término es menor que el anterior).

En el extremo $X = 1$ se obtiene la serie armónica que es divergente $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

(es $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) > \frac{1}{2}$; $(\frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{8}) > \frac{1}{2}$; $(\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{16}) > \frac{1}{2}$ etc.)

Por consiguiente la serie de potencias dada es convergente para $-1 \leq x \leq 1$

Veremos la serie de potencias TAYLOR.

TEOREMA DE TAYLOR: Toda función $f(x)$ que posea hasta la n -ésima derivada continua en el intervalo (a,b) puede desarrollarse para todo valor de x del intervalo (a,b) en la forma

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \underbrace{R_n}_{\text{resto de orden } n}$$

que es la fórmula de TAYLOR

R_n representa la diferencia entre la función $f(x)$ y el polinomio de grado $n-1$ en $x-a$.

La forma especial que asume la fórmula de TAYLOR cuando se pone $a=0$ se conoce con el nombre de fórmula de MAC LAURIN.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + R_n$$

Puede ocurrir que $f(x)$ admita derivadas continuas de todos los órdenes y el resto $R_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ independientemente de la elección de x . En tal caso la serie es infinita.

$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$
es convergente y tiene por valor a $f(x)$ (tiende a $f(x)$)

La serie se llama el desarrollo de la función o la representación por serie de TAYLOR de la función $f(x)$ alrededor del punto $x=a$. Cuando $a=0$ se tiene la serie de MAC LAURIN

EJ.:

Desarrollar $\cos x$ por serie de TAYLOR según las potencias de $x - \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \cos x$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x$$

$$f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos x = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{5!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5 + \dots$$

Si desarrollamos por MAC LAURIN

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Análogamente, obtener las series de potencias que representan a $\sin x$ y e^x :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Se puede efectuar el cálculo de funciones por ej.:
Calcular el sen de 10°

$$\sin \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{18} - \left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{18}\right)^5 \cdot \frac{1}{5!} - \left(\frac{\pi}{18}\right)^7 \cdot \frac{1}{7!} \text{ con error menor que } \left(\frac{\pi}{18}\right)^9 \cdot \frac{1}{9!}$$

En efecto, la fórmula de LAGRANGE para el resto R_n es:

$$R_m(x) = \frac{x^m}{m!} f^{(m)}(\theta x) \quad 0 < \theta < 1$$

En nuestro caso

$$R_m(x) = \frac{x^m}{m!} \sin\left(\theta x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$R_9\left(\frac{\pi}{18}\right) = \left(\frac{\pi}{18}\right)^9 \cdot \frac{1}{9!} \sin\left(\theta \frac{\pi}{18} + 9 \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{18}\right)^9 \cdot \frac{1}{9!} \cos \theta \frac{\pi}{18} < \left(\frac{\pi}{18}\right)^9 \cdot \frac{1}{9!}$$

2.2.-Resolución aproximada de ecuaciones diferenciales.

Existen métodos de resolución aproximada que expresan la solución en forma de serie y dan, en ocasiones la solución exacta si la serie se corta, o se ve que es la de una función conocida.

El desarrollo en serie resulta útil si es rápidamente convergente.

Se escribe la solución en forma de serie de TAYLOR y se calculan los coeficientes (derivadas) a partir de la ecuación diferencial en x_0 .

$$f(x) \longrightarrow y$$

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

Ejm. : Resolver $\frac{dy}{dx} = x - y$ con la condición $y=1$ cuando $x=0$

$$y' = x - y$$

$$y' = 1$$

$$y'' = 1 - y'$$

$$y'' = 2$$

$$y''' = -y''$$

$$y''' = -2$$

$$y^{IV} = -y''' = 1 - y' = 1 - x + y \quad y^{IV} = 2$$

$$\therefore y = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \dots$$

$$\text{Como } e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$2e^{-x} + x - 1 = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \dots$$

$$\therefore y = 2e^{-x} + x - 1$$

que es la solución exacta que se obtiene resolviendo directamente por las fórmulas (1) depag.3

$$y = e^{-\int dx} \left[\int e^{\int dx} \cdot x \, dx + C \right]$$

$$y = e^{-x} \left[e^x \cdot x - \int e^x \, dx + C \right]$$

$$y = x - 1 + \frac{C}{2} e^{-x}$$

por las condiciones dadas

Resolver $\frac{dy}{dx} = y^2 + x$ con la condición $y=0$ cuando

$$x_0 = 0$$

$$y' = y^2 + x$$

$$y'' = 2yy' + 1$$

$$y''' = 2yy'' + 2y'^2$$

$$y^{iv} = 2yy''' + 6y'y''$$

$$y^v = 2yy^{iv} + 8y'y''' + 6y''^2$$

$$y'(x_0) = 0$$

$$y''(x_0) = 1$$

$$y''' = 0$$

$$y^{iv} = 0$$

$$y^v = 6$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{20} x^5 + \dots$$

Si se consideran valores en un intervalo de 0.1 el error cometido al adoptar como solución aproximada el arco de parábola $\frac{1}{2} x^2$ es $< 10^{-6}$

$$\frac{0,1^5}{20} = \frac{1}{20} \cdot 10^{-6} < 10^{-6}$$

3-. Ecuaciones de BESSEL

3.1-. La función GAMMA

Que será necesaria para expresar las funciones de BESSEL.

Se define

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx$$

n entero positivo o nulo

Aplicando la fórmula de integración por partes

$$- \int_0^{\infty} x^m d(e^{-x}) = -x^n e^{-x} \Big|_0^{\infty} + m \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx \quad \therefore \Gamma_{(m+1)} = m \cdot \Gamma_{(m)}$$

$\Gamma_{(m)}$ por definición

$x^n \cdot e^{-x} \rightarrow 0$
 $x \rightarrow \infty$

Reiterando el procedimiento

$$\Gamma_{(m+1)} = m \Gamma_{(m)} = m(m-1) \Gamma_{(m-1)} = \dots =$$

$$\Gamma_{(m+1)} = m(m-1)(m-2) \dots 1 \cdot \Gamma_{(1)}$$

Como

$$\Gamma_{(1)} = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

$$\therefore \Gamma_{(m+1)} = m(m-1)(m-2) \dots 1 = m!$$

$$\therefore \underline{\Gamma_{(m+1)} = m!}$$

Si en lugar de n entero, positivo o nulo, consideramos n como valor real, se generaliza la definición $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ dando valores a la función para cualquier α

Así $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$ integral que se resuelve por la

sustitución $x = z^2 \quad \therefore dx = 2z dz$ y es

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Integral de Poisson

Se verifica

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

pues $\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})$

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$$

pues $\Gamma(-\frac{1}{2} + 1) = \Gamma(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \Gamma(-\frac{1}{2})$

Como $\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

y $\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right) = -\frac{1}{2!} = -\sqrt{\pi}$

En particular si $\alpha = 0$ resulta

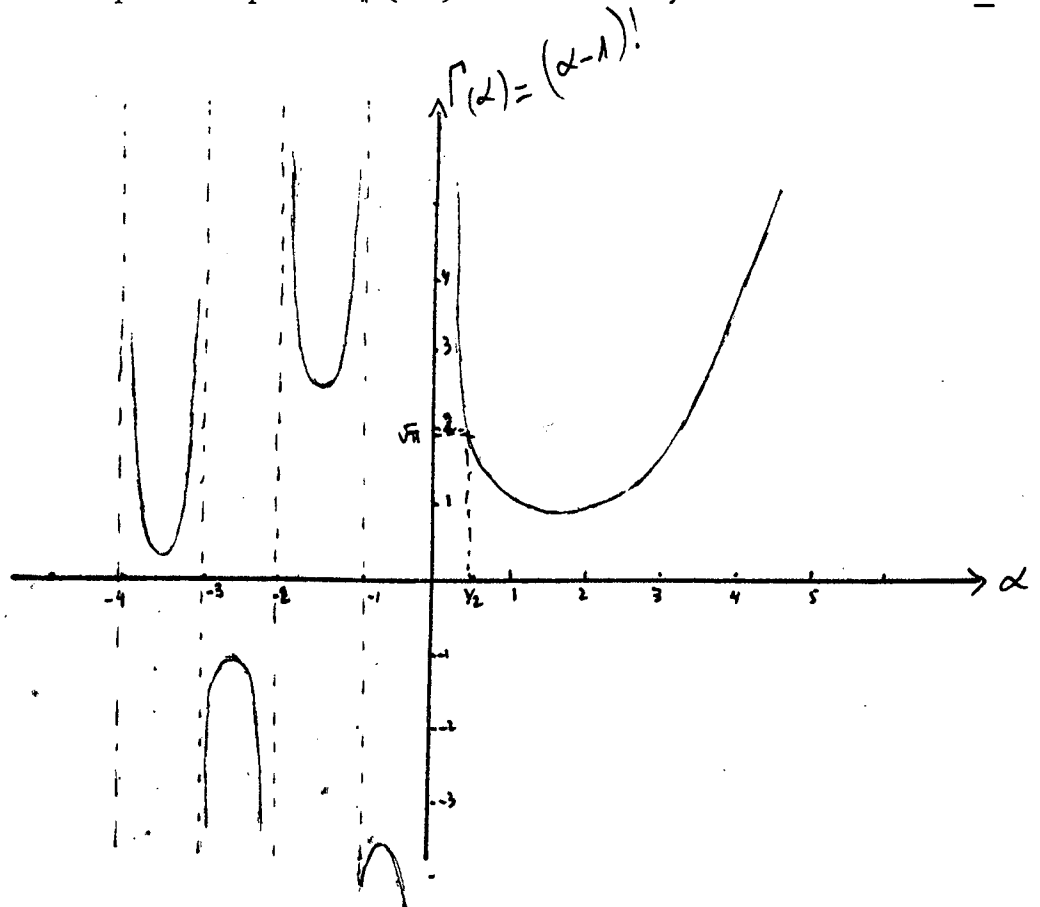
$$\underbrace{0!}_1 = \Gamma(1) = 0, \Gamma(0)$$

debe adoptarse como valor de $\Gamma(0)$ el valor ∞

Lo mismo sucede con los valores enteros y negativos de α
Así si $\alpha = -1$

$$(-1)! = \underbrace{\Gamma(0)}_{\infty} = (-1)\Gamma(-1)$$

$\therefore$ debe adoptarse para $\Gamma(-1)$ el valor ∞ y así sucesivamente.



3.2-.Ecuaciones de BESSEL.

El astrónomo y matemático BESSEL (1784-1846) al considerar el estudio del movimiento planetario, en el estudio de las órbitas de los planetas y sus perturbaciones por el movimiento del sol, planteó una importante ecuación diferencial.

La enorme trascendencia de las funciones que aparecen al resolver esta ecuación se pone en evidencia por el hecho que esas funciones son indispensables en el estudio de la propagación de la corriente eléctrica en conductores cilíndricos, en los problemas vinculados con el flujo de calor a través de un cilindro y en el estudio de la difusión de neutrones y criticidad de reactores nucleares.

La ecuación diferencial de BESSEL es de la forma

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0 \quad (1)$$

donde n es una constante. No puede resolverse por ninguna combinación de funciones elementales: polinomios, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas etc..

Busquemos la solución expresando la función y como un desarrollo en serie de potencias

$$y = x^m \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \quad (2)$$

donde m es una constante que habrá que determinar y a_0 puede considerarse distinto de cero.

Reemplazamos en la ecuación (1), calculando las derivadas 1° y 2° y formando los términos

$$-m^2 y = -m^2 a_0 x^m - m^2 a_1 x^{m+1} - \dots - m^2 a_k x^{m+k} - \dots$$

$$x^2 y = a_0 x^{m+2} + a_1 x^{m+3} + \dots + a_{k-2} x^{m+k} + \dots$$

$$x \frac{dy}{dx} = m a_0 x^m + (m+1) a_1 x^{m+1} + \dots + a_k (m+k) x^{m+k} + \dots$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1) a_0 x^m + m(m+1) a_1 x^{m+1} + (m+1)(m+2) a_2 x^{m+2} + \dots + (m+k)(m+k-1) a_k x^{m+k} + \dots$$

$$0 = [m(m-1) + m - m^2] a_0 x^m + [(m+1)m + m+1 - m^2] a_1 x^{m+1} + \dots \\ \dots + [(m+k)(m+k-1) + m+k - m^2] a_k + a_{k-1} x^{m+k} + \dots$$

La suma de los primeros miembros es cero por (1) como por hipótesis, (2) es una solución, la suma de los segundos miembros también debe anularse para lo cual deben anularse los coeficientes de cada una de las potencias de X .

Dicho de otra forma : Para que la igualdad a cero sea satisfecha para todo X , deben anularse los coeficientes de las sucesivas potencias de X .

$$(m^2 - m^2) a_0 = 0 \quad (\text{coeficiente de } x^m) \\ [(m+1)^2 - m^2] a_1 = 0 \quad (\quad " \quad " \quad x^{m+1})$$

$$\dots \dots \dots \\ [(m+k)^2 - m^2] a_k + a_{k-1} = 0 \quad (\quad " \quad " \quad x^{m+k})$$

El coeficiente del término general da la fórmula de recurrencia para los coeficientes

$$a_k = - \frac{a_{k-1}}{(m+k)^2 - m^2}$$

La ecuación que resulta de igualar a cero el coeficiente de menor grado en X (en este caso X^m) se conoce como ecuación indicial.

Como hemos considerado $a_0 \neq 0$ para satisfacer la ecuación indicial elijamos $m = n$ y entonces la segunda condición requiere $a_1 = 0$

Poniendo $m = n$ la fórmula de recurrencia se transforma

$$a_k = - \frac{a_{k-1}}{k(2m+k)}$$

Entonces

$$a_2 = - \frac{a_0}{2(2m+2)}$$

$$a_3 = 0 \quad (\text{aparece } a_1 = 0)$$

$$a_4 = - \frac{a_2}{4(2m+4)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4(2m+2)(2m+4)}$$

$$a_5 = 0$$

Si se reemplazan los coeficientes calculados en (2) se obtiene la serie

$$y_1 = a_0 x^m \left[1 - \frac{x^2}{2(2m+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2m+2)(2m+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2m+2)(2m+4)(2m+6)} + \dots \right]$$

Para $m = n$

$$a_k = \frac{a_{k-2}}{k(2n-k)}$$

$$a_2 = \frac{a_0}{2(2n-2)}$$

$$a_4 = \frac{a_2}{4(2n-4)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot (2n-2)(2n-4)}$$

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$$

$$y_2 = a_0 x^{-n} \left[1 + \frac{x^2}{2(2n-2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n-2)(2n-4)} + \dots \right]$$

$$+ \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n-2)(2n-4)(2n-6)} + \dots$$

para $n \neq$ de un entero positivo

Ambas series resultan idénticas para $n=0$, para $n \geq 0$ y entero resulta sin sentido o una o la otra puesto que algunos de los denominadores se anulan y entonces hay una única solución mediante series de potencias.

Para $n \neq 0$ y distinto de un número entero las dos series representan dos soluciones distintas y una combinación lineal de ambas series, da la solución de la ecuación de BESSEL.

$$A y_1(x) + B y_2(x) = 0 \quad (3)$$

CUANDO $n \neq 0$ y no entero

La determinación de la 2ª solución particular de (1) cuando n es entero no la consideraremos en el curso. Basta con mencionar que es de la forma.:

Cte. $y_1(x) \ln x$ + serie de potencias de X

Función con un infinito logarítmico cuando $X \rightarrow 0$

3.3-.Funciones de BESSEL

Consideramos la solución particular cuando

$$a_0 = \frac{1}{2^n \cdot n!}$$

En este caso la serie se convierte en :

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} - \frac{x^{n+2}}{2^{n+2} (n+1)!} + \dots (-1)^k \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k} k! (n+k)!} + \dots$$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k} k! (n+k)!} \quad n \text{ positivo}$$

Con la función Γ se generaliza la fórmula para el caso que n tenga valores cualesquiera (no sólo entero).

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

Función de BESSEL de 1ª especie y orden n

Para la otra raíz individual $-n$ se obtiene

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{k! \Gamma(-n+k+1)} \quad (4)$$

Cuando n no es entero la solución completa de acuerdo con (3) es

$$y = A J_n(x) + B J_{-n}(x)$$

Veremos que cuando n es entero estas soluciones no son linealmente independientes.

Para n entero (4) tiene sentido desde $k = n$ siendo nulos los términos correspondientes a $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ porque en ellos se hace infinita

$$\therefore J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}$$

o bien pongo $k = 0$ pero corro los índices pasando de k a $k+n$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)! \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k+2n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1) k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \\ &= (-1)^n J_n(x) \end{aligned}$$

lo cual prueba que son linealmente independientes cuando n es entero.

Esta función es solución de la ecuación de BESSEL pero esencialmente la misma $I_n(X)$.

Esta relación (5) permite definir la función de BESSEL de 1ª especie de orden entero negativo.

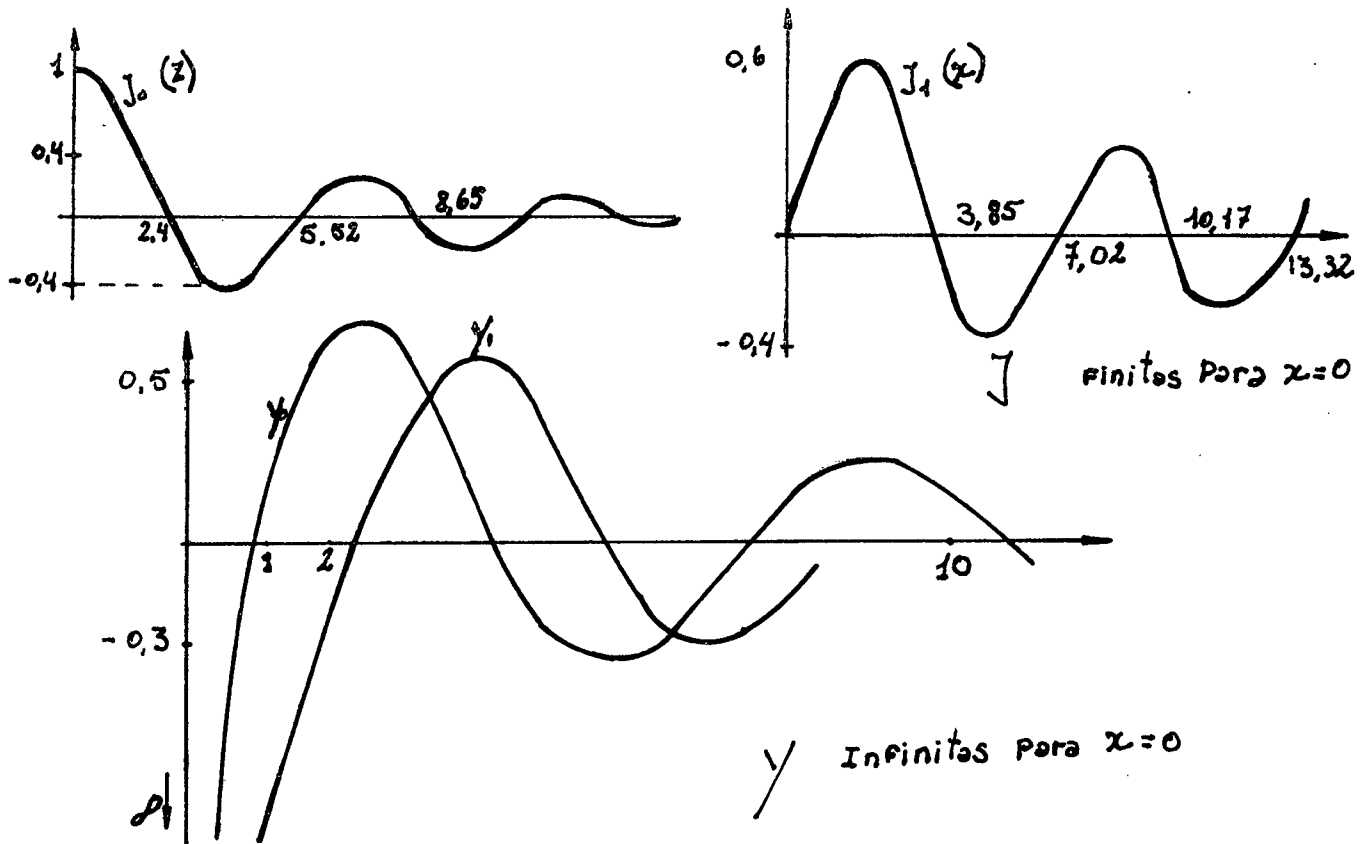
La solución completa cuando n es entero es:

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 \bar{J}_n(x)$$

$Y_n(X)$ función de BESSEL de 2ª especie orden n

(Y_n tiene la forma que se indicó con un infinito logarítmico y para n entero se dejan mediante una expresión que es combinación lineal de I_n y I_{-n})

El comportamiento de las funciones de BESSEL resulta análogo al de las funciones trigonométricas



Todas tienen aspecto de senoide amortiguada o sea los máximos y mínimos $\rightarrow 0$ cuando $X \rightarrow \infty$

Para valores grandes de X se verifica que

$$a) J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - n\frac{\pi}{2}\right)$$

b) las raíces de $J_0(x) = 0$ y $J_1(x) = 0$ (o sea los ceros de estas funciones) están separados en aproximadamente $\frac{\pi}{2}$. Así el 6° cero 18.071 de J_0 difiere del 7° cero 21.212 en 3.141.

$$\text{para } n=0 \quad J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4 (2!)^2} - \dots - (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} + \dots$$

$$\text{para } n=1 \quad J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 2!} + \frac{x^5}{2^5 2! 3!} - \dots - (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1} k! (k+1)!} + \dots$$

para $n = \frac{1}{2}$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}$$

Con esta fórmula y sabiendo que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ y que la serie es aproximadamente la de MAC LAURIN para $\sin x$, luego de transformaciones

se demuestra: $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$

Análogamente

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right)$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\frac{\sin x}{x} - \cos x \right)$$

Relaciones de recurrencia

E1

$$\frac{d}{dx} [x^m J_m(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(m+k)} x^{2m+2k-1}$$

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} [x^m J_m(x)] = x^m J_{m-1}(x) \\ \frac{d}{dx} [x^{-m} J_m(x)] = -x^{-m} J_{m+1}(x) \end{array} \right. \quad (1)$$

para $n=0$ $J_0' = -J_1$

Como $\frac{d}{dx} [x^m J_m(x)] = x^m J_m'(x) + m x^{m-1} J_m(x) = x^m J_{m-1}(x)$

$$\therefore J_m' = J_{m-1} - \frac{m}{x} J_m$$

$$J_m' = \frac{m}{x} J_m - J_{m+1}$$

Si restamos $J_{m-1} + J_{m+1} = \frac{2m}{x} J_m$

Si sumamos $J_{m-1} - J_{m+1} = 2 J_m'$

Las Integrales correspondientes a (1)

$$\int x^m J_{m-1}(x) dx = x^m J_m(x)$$

$$-\int x^{-m} J_{m+1}(x) dx = x^{-m} J_m(x)$$

así $\int J_1 dx = -J_0$

3.3-.Ecuación de BESSEL modificada

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + m^2) y = 0 \quad (1)$$

Verificaremos que si y (1) es solución de la ecuación de BESSEL

$$s^2 y'' + s y' + (s^2 - m^2) y = 0 \quad (2)$$

entonces Y (i x) es solución de la modificada pues haciendo $s=ix$ se tiene

$$\frac{dy(s)}{ds} = -i \frac{dy(ix)}{dx}$$

$$\frac{d^2 y(s)}{ds^2} = - \frac{d^2 y(ix)}{dx^2}$$

y sustituyendo en (2)

$$x^2 \frac{d^2 y(ix)}{dx^2} + x \frac{dy(ix)}{dx} - (x^2 + m^2) y = 0$$

luego Y (ix) es solución de la (1).

En consecuencia, se conocen dos soluciones independientes de la ecuación (1)

$$\begin{aligned} & J_m(ix) \quad \text{y} \quad J_{-m}(ix) \quad \text{si } m \text{ no es entero} \\ & \text{y} \quad J_m(ix) \quad \text{y} \quad Y_m(ix) \quad \text{si } m \text{ es entero} \end{aligned}$$

Pero estas funciones no son reales para X real por lo cual es mas conveniente utilizar la función $I_m(x) = i^{-m} J_m(ix)$

que es la función de BESSEL modificada de 1ª especie y orden n es real para X real

$$I_m(x) = i^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{ix}{2}\right)^{2k+m}}{k! \Gamma(m+k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}}{k! \Gamma(m+k+1)}$$

La función $I_{-n}(X) = i^n J_{-n}(ix)$ es también solución siendo su desarrollo

$$I_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}}{k! \Gamma(k-n+1)}$$

La solución general de la ecuación de BESSEL modificada $y = a I_n(X) + b I_{-n}(X)$ cuando n no es entero puesto que cuando n es entero (como vimos para I_n) es $I_{-n} = I_n$ pues

$$I_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{k! \Gamma(k-m+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k! (k+1)!} = I_n(x)$$

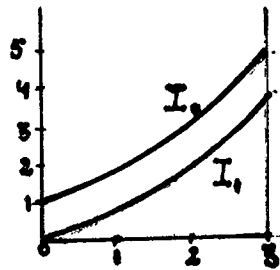
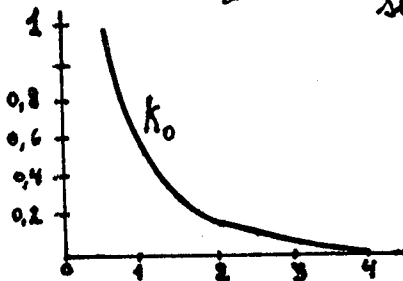
La segunda solución, cuando n es entero, es la función de BESSEL modificada de 2ª especie y orden n

$$K_n(x) = (-1)^{m+1} \left(\log \frac{x}{2} + 0.5772 \dots \right) I_n(x) + \text{serie de potencias de } x$$

cte de Euler

(cuando n no es entero se define $K_n(X)$ mediante la expresión

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi}$$



Las I_n son positivas para $X > 0$ y crecientes, tienden a infinito para $X \rightarrow \infty$.

Las K_n tienen el mismo comportamiento que las Y_n en el origen se hacen infinitas pero al tender $X \rightarrow \infty$ tienden a 0.

3.4.-.Ecuaciones de LEGENDRE.

la ecuación $(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + m(m+1)y = 0$

n es constante

Aparece cuando se resuelven problemas físicos utilizando coordenadas esféricas. Considérese que $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n}$ es solución

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= m(m-1)a_0 x^{m-2} + (m+1)m a_1 x^{m-1} + \dots + (m+k)(m+k-1)a_k x^{m+k-2} + \dots \\ -x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} &= -m(m-1)a_0 x^m - \dots - (m+k-2)(m+k-3)a_{k-2} x^{m+k-2} - \dots \\ -2x \frac{dy}{dx} &= -2m a_0 x^m - \dots - 2(m+k-2)a_{k-2} x^{m+k-2} - \dots \\ m(m+1)y &= m(m+1)a_0 x^m + \dots + m(m+1)a_{k-2} x^{m+k-2} + \dots \end{aligned}$$

$$0 = m(m-1)a_0 x^{m-2} + (m+1)m a_1 x^{m-1} + \dots + x^{m+k-2} \cdot [(m+k)(m+k-1)a_k - (m+k-2)(m+k-3)a_{k-2} - 2(m+k-2)a_{k-2} + m(m+1)a_{k-2}]$$

Cada coeficiente debe anularse

$$m(m-1)a_0 = 0$$

$$m(m+1)a_1 = 0$$

$$(m+k)(m+k-1)a_k + [(m+k-1)(-m-k+2) + m(m+1)] a_{k-2} = 0$$

Para satisfacer la 1ª ecuación, indicial, puede elegirse $m = 0$ ó 1 , si a_0 es arbitrario.

Si $m = 0$ por la 2ª ecuación a_1 puede ser arbitrario

$$\therefore a_k = - \frac{(m-k+2)(m+k-1)}{k(k-1)} \cdot a_{k-2}$$

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{n(n+1)}{2!} a_0 x^2 - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} a_1 x^3 + \frac{n(n+2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4$$

$$\text{pues } - \frac{(n-2)(n+3)}{3 \cdot 4} a_2 x^4$$

$$y = a_0 \left[1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \dots \right] + a_1 \left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \dots \right]$$

Como a_0 y a_1 son arbitrarios esta es la solución general. Con $m=1$ debe ser $a_1 = 0$ entonces la solución es la 1ª serie y no nos conduce a una nueva solución.

3.5-. Polinomios de LEGENDRE.

Cuando n es un entero positivo o negativo, una de las dos series termina convirtiéndose en un polinomio.

Si n es un entero positivo par, los coeficientes de todos los términos de la primera, desde X^n son cero y se convierte en un polinomio de grado n y la otra permanece una serie infinita y a la inversa para un entero positivo impar.

Estos polinomios con coeficientes ajustados para tener un valor unitario para $X=1$ son los polinomios de LEGENDRE

$$P_0(x) = 1$$

$$m=0$$

$$a_0 = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$m=1$$

$$a_1 x = a_1 \cdot (1) = 1 \quad \therefore a_1 = 1$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

$$m=2$$

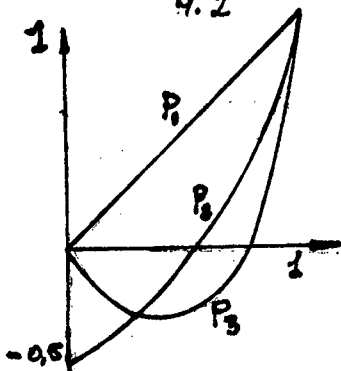
$$a_0 \left[1 - \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 1 \right] = 1 \quad \therefore a_0 = -\frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x$$

$$m=3$$

$$a_1 \left[1 - \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 3} \cdot 1 \right] = 1 \quad \therefore a_1 = -\frac{3}{2}$$

$$P_4(x) = \frac{7 \cdot 5}{4 \cdot 2} x^4 - 2 \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2} x^2 + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}$$



NOTA: si n es par, anulamos la segunda serie con $a_1 = 0$, si n es impar, elegimos $a_0 = 0$ para anular la 1ª serie, puesto que a_1 y a_0 son arbitrarios.

Naturalmente, cada uno de esos polinomios es una solución particular de la ecuación de LEGENDRE con el respectivo n .

A los polinomios de LEGENDRE, que están tabulados para diversos valores de X , a menudo se los representan por

$$P_n(\cos \theta) \text{ donde } \cos \theta = x. \text{ Así: } P_3(\cos \theta) = \frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta$$

$$\text{Relaciones de recurrencia: } \begin{aligned} (2m+1) P_m &= P'_{m+1} - P'_{m-1} \\ (2m+1) x P_m &= (m+1) P_{m+1} + m P_{m-1} \end{aligned}$$

Funciones de LEGENDRE de segunda especie

Si n es un entero, entonces una de las dos soluciones es un polinomio, mientras que la otra es una serie infinita. La serie infinita con coeficientes ajustados es la función de LEGENDRE de 2ª especie $Q_n(X)$.

3.6-. Ecuación de LEGENDRE asociada.

$$(1-x^2) \frac{d^2 w}{dx^2} - 2x \frac{dw}{dx} + \left[m(m+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] w = 0$$

tiene por solución

$$w = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_m(x)}{dx^m} = P_m^m(x)$$

que es el polinomio de LEGENDRE asociado.

3.7-.Funciones ortogonales y normalizadas (ortonormales).

Consideramos dos conjuntos de funciones $\phi_m(x)$ y $\phi_n(x)$, donde m y n son enteros. Se dice que son ortogonales en el intervalo $a < x < b$ si

$$\int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0 \quad \text{si } m \neq n$$

$$\neq 0 \quad \text{si } m = n$$

$$\text{Si } \int_a^b [\phi_m(x)]^2 dx = 1$$

se dice que las funciones están normalizadas.

Las funciones trigonométricas mantienen relaciones de ortogonalidad.

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \quad \text{si } m \neq n$$

$$= \pi \quad \text{si } m = n, \text{ ídem para el coseno}$$

Las funciones $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx$ y $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx$ forman un conjunto normalizado de funciones con respecto a cualquier intervalo de ancho 2π .

Las funciones de BESSEL y los Polinomios de LEGENDRE forman también un sistema ortogonal.

Si una función puede desarrollarse en serie de funciones ortogonales

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$

los coeficientes se obtienen multiplicando ambos miembros por ϕ_n , e integrando término a término. Al aplicar las condiciones de ortogonalidad se anulan todos los términos menos uno.

$$\int_a^b \phi_m f(x) dx = a_m \int_a^b [\phi_m(x)]^2 dx$$

Suponiendo que puede representarse por serie de polinomios de LEGENDRE.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

$$\int_{-1}^1 f(x) P_n dx = a_n \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = a_n \frac{2}{2n+1}$$

$$\text{pues } \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

$$\text{es } a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \quad n=0, 1, 2, \dots$$

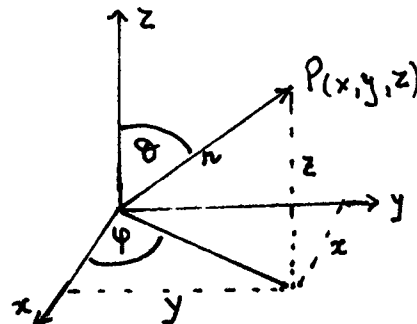
4.1-.El operador LAPLACIANO

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Puede expresarse en coordenadas esféricas y cilíndricas depende de la elección que se haga en el problema físico a resolver de acuerdo a las condiciones de simetría.

En esféricas

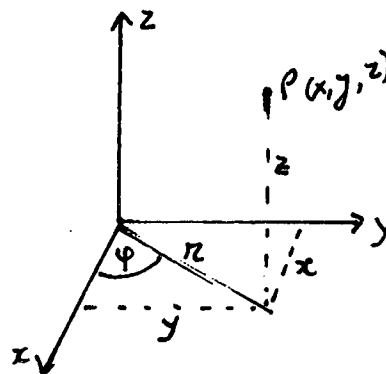
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$



$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

En cilíndricas

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$



$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

4.2-.Ecuaciones diferenciales parciales

La teoría de las ecuaciones en derivadas parciales escapa al fin de este curso y no se hará un desarrollo sistemático.

Nos limitaremos a la ecuación de ondas y que puede ser resuelta por el poderoso método de separación de variables.

Con este método, una ecuación diferencial parcial en n variables independientes se reduce a n ecuaciones diferenciales ordinarias. El producto de las n funciones, soluciones de las ordinarias es la solución de la parcial.

La solución de una ecuación diferencial parcial involucra funciones arbitrarias; en la aplicación de la teoría a los problemas concretos ellas se eliminan determinando una solución particular la cual satisface a la ecuación diferencial y cumple con las condiciones de contorno del problema.

La ecuación diferencial no posee una representación completa de una situación física ya que la solución general incluye constantes arbitrarias de integración.

Para determinar los valores adecuados de estas constantes se imponen a la solución restricciones con las condiciones de contorno obtenida de la naturaleza física del problema.

El n° de esas condiciones de contorno debe ser suficiente para proveer una solución única con constantes no arbitrarias.

4.3-. La forma general de la ecuación de ondas es:

$$\nabla^2 \phi = k_1^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + k_2 \frac{\partial \phi}{\partial t} + g(x, y, z, t)$$

que es demasiado general para hallar la solución matemática; es necesario considerar casos especiales

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{ecuación de Laplace}$$

$$\nabla^2 \phi = k_2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{ecuación de la transmisión del calor}$$

Estas ecuaciones se aplican a sistemas pasivos, aquellos que no contienen fuentes de perturbación en la región considerada o las fuentes serían externas a la región, o podrían haber existido en un tiempo precedente a aquél para el cual la solución de la ecuación se aplica.

Las soluciones se obtendrían en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas aplicables a problemas de 1, 2 ó 3 dimensiones.

4.4-. La ecuación de ondas contiene derivadas parciales con respecto a las coordenadas de espacio y tiempo. Aplicando el método de separación de variables representamos ϕ como producto de 2 funciones

$$\phi(x, y, z, t) = E(x, y, z) \cdot T(t) \quad (1)$$

donde E es una función del espacio solamente y T es función del tiempo solamente. (las inducidas son las coordenadas rectangulares, pero el método puede aplicarse a cualquier sistema ortogonal)

La sustitución de (1) en cualquiera de las formas de la ecuación de ondas nos lleva a la separación de 2 ecuaciones diferenciales. Una que contiene T(t) y la otra parcial con E como variable dependiente. Esta, a su vez, puede reducirse a tres ecuaciones diferenciales ordinarias, haciendo $E = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$ producto de funciones, cada una de ellas función de única coordenada espacial. Es decir la ecuación diferencial parcial en E puede resolverse con 3 ecuación diferenciales ordinarias conteniendo cada una de las funciones X(x), Y(y) y Z(z).

Estas soluciones X, Y, Z y T son llamadas funciones características.

Cada función característica contiene constantes, las cuales quedarán determinadas por las condiciones de contorno del problema particular. Sucede que una constante, en una función característica, puede tomar más de un valor y por ello cada función característica es una suma donde cada término contiene un valor diferente de la constante.

La solución de la ecuación de LAPLACE puede ser obtenida de la misma forma pero como no aparece la variable t será:

$$\phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$$

La ecuación de ondas

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

Para resolverla aplicamos separación de variables

$$\phi = E \cdot T \quad \frac{\nabla^2 E}{E} = \frac{dT}{dt} \cdot \frac{1}{T} = \gamma^2$$

cada término puede igualarse a una constante ya que las variables espaciales y el t son independientemente variables

$$\frac{dT}{dt} = \gamma^2 T \quad \therefore T = A \cdot e^{\gamma^2 t}$$

$$\nabla^2 E = \gamma^2 E$$

forma espacial de la ecuación de ondas cuya solución de la función espacial y conduce a la solución de la ecuación de LAPLACE, caso especial $\gamma^2 = 0$

4.5-. Forma espacial de la ecuación de ondas, en coordenadas rectangulares y tres dimensiones

$$\nabla^2 E = \gamma^2 E \quad \text{Sea } E(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

Sustituyendo y dividiendo por $X \cdot Y \cdot Z$.

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2$$

X, Y, Z varían independientemente una de la otra, cada término debe ser igual a una constante y se obtienen tres ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo: $k^2 \frac{d^2 X}{dx^2} \pm k^2 X = 0$ cuya solución depende del signo k^2

$$\therefore X = A \cos kx + B \sin kx \quad \text{o bien para } -k^2 \text{ es}$$

$$X = A \cosh kx + B \sinh kx$$

La elección del signo depende de las condiciones de contorno que caracterizan al problema físico que se trate.

Las posibilidades de solución serían demasiado amplias, por eso elegiremos un problema con sus condiciones de contorno para poder limitar esas posibilidades.

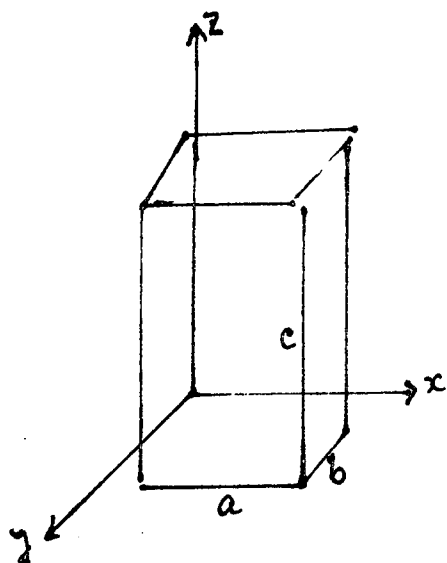
La ecuación que describe la distribución de neutrones en un reactor crítico es: $\nabla^2 \phi + \beta^2 \phi = 0$

$$\phi = E \text{ (flujo)}, \beta^2 = -\gamma^2$$

$$\text{Sea } \phi = X \cdot Y \cdot Z$$

que depende de la geometría y dimensiones del reactor

Las condiciones de contorno son, que, si a, b y c son las dimensiones el flujo de neutrones será cero en $\frac{a}{2}, \frac{b}{2},$ y $\frac{c}{2}$.



// 35

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2$$

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\gamma^2$$

Como veremos, en este problema los signos de las constantes están elegidos para obtener las soluciones apropiadas (y eliminar así las otras posibilidades que no se adecúan al problema).

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = B^2$ ecuación que relaciona las constantes que aparecen en las funciones características (o autofunciones)

La solución $X = A \cos \alpha x + C \sin \alpha x$ la única que satisface es el cos, pues es simétrica y anula en los bordes (con esto queda claro que α^2 debe ser real y positiva).

Por la condición de contorno es $\alpha = \frac{\pi}{a}$ que es el mas bajo autovalor

$$\alpha^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

pues cuando $x = \frac{a}{2}$ es $X = A \cos \frac{\pi}{2} = 0$

la autofunción o función característica es

$$X = A \cos \frac{\pi}{a} x$$

y la solución completa

$$X = \sum_{m_1=1}^{\infty} A_{m_1} \cos \frac{m_1 \pi}{a} x$$

Análogamente para las otras dimensiones β^2 y γ^2 deberán ser reales y positivas con $\beta^2 = \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$; $\gamma^2 = \left(\frac{\pi}{c}\right)^2$ y $\therefore$ el más bajo autovalor

de B^2 es $B^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2$

La distribución neutrónica $\phi(X, Y, Z)$ en el reactor crítico es

$$\phi(x, y, z) = C \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi z}{c}$$

y la solución completa de la ecuación de ondas espacial

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_3=1}^{\infty} C_{m_1 m_2 m_3} \cos \frac{m_1 \pi x}{a} \cos \frac{m_2 \pi y}{b} \cos \frac{m_3 \pi z}{c}$$

(La determinación de la constante C depende de la potencia del reactor).

Si por las condiciones físicas y de contorno del problema debiera ampliarse, por ejemplo, que $\alpha^2 + \beta^2 > \gamma^2$ entonces sería necesario $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0$ en cuyo caso la ecuación en z tendría por soluciones $\sinh$ y $\cosh$ ($-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 = -B^2$)

4.6-. Ecuación de ondas en coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial^2 E}{\partial n^2} + \frac{1}{n} \frac{\partial E}{\partial n} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \gamma^2 E \quad \text{con } E(n, \varphi, z)$$

se intenta la solución

$$E = R(n) \cdot \Phi(\varphi) \cdot Z(z)$$

Sustituyendo y dividiendo por $R \cdot \Phi \cdot Z$

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial n^2} + \frac{1}{Rn} \cdot \frac{\partial R}{\partial n} + \frac{1}{\Phi n^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \gamma^2 \quad (1)$$

Hacemos $\frac{d^2 Z}{dz^2} = -\beta^2 Z$

y sus funciones características $Z(z) = C'_z \cos \beta z + C''_z \sin \beta z$

La ecuación (1) en tal caso

$$\frac{n^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial n^2} + \frac{n}{R} \frac{\partial R}{\partial n} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + (-\beta^2 - \gamma^2) n^2 = 0 \quad (2)$$

Hacemos

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -\nu^2 \Phi \quad \therefore \quad \Phi = C'_\varphi \cos \nu \varphi + C''_\varphi \sin \nu \varphi$$

Entonces la ecuación (2)

$$n^2 \frac{d^2 R}{dn^2} + n \frac{dR}{dn} + [(-\beta^2 - \gamma^2) n^2 - \nu^2] R = 0 \quad (3)$$

(3) es la ecuación de BESSEL que pondremos en su forma común.

$$n^2 \frac{d^2 R}{dn^2} + n \frac{dR}{dn} + [\alpha_n^2 n^2 - \nu^2] R = 0 \quad \text{con } \alpha_n^2 = -\beta^2 - \gamma^2; \mu = \alpha_n \cdot n$$

$$\text{como } \frac{dR}{dn} = \frac{dR}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{dn} = \frac{dR}{d\mu} \cdot \alpha_n$$

$$\therefore \quad \mu^2 \frac{d^2 R}{d\mu^2} + \mu \frac{dR}{d\mu} + [\mu^2 - \nu^2] R = 0$$

cuyas funciones características son:

$$R(n) = C'_n J_\nu(\alpha_n \cdot n) + C''_n Y_\nu(\alpha_n \cdot n)$$

La función de BESSEL de 2° especie Y_ν tiene una singularidad en el eje $r=0$ por lo tanto debe descartarse en los problemas donde $R(r)$ debe permanecer finita.

Cuando ν es constante $\nu=0$ y $R(r)$ se hace la función de BESSEL de orden cero.

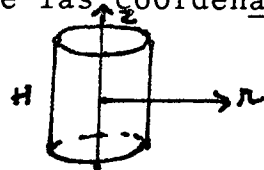
Debemos conocer las condiciones de contorno del problema particular para saber cuáles funciones características elegir y evaluar las constantes en estas funciones.

Obtenidas las funciones características apropiadas para R , ϕ y Z entonces

$$E(n, \phi, z) = R(n) \cdot \phi(\phi) \cdot Z(z)$$

En el tratamiento de un reactor cilíndrico, el LAPLACIANO aparece en coordenadas cilíndricas. Si al eje Z se lo hace coincidir con el eje vertical del cilindro, solamente las coordenadas Z y r necesitan ser consideradas.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + B^2 \phi = 0$$



ϕ es el flujo neutrónico en cada punto $\dots \phi$ es la función especial $\phi(X, Y, Z)$ y B^2 es una constante relacionada a las dimensiones y geometría del reactor. Respecto a la ecuación que acabamos de estudiar B^2 es $-\lambda^2$ y como no aparece la dependencia de ϕ la ecuación (3) es, en este caso, con $U^2=0$

$$n^2 \frac{d^2 R}{dn^2} + n \frac{dR}{dn} + \underbrace{(-\beta^2 + B^2)}_{\alpha_n^2} n^2 R = 0$$

Es: $\alpha_n^2 = -\beta^2 + B^2 \quad (4)$

y la ecuación de BESSEL de orden cero, con $u = \alpha_n \cdot r$

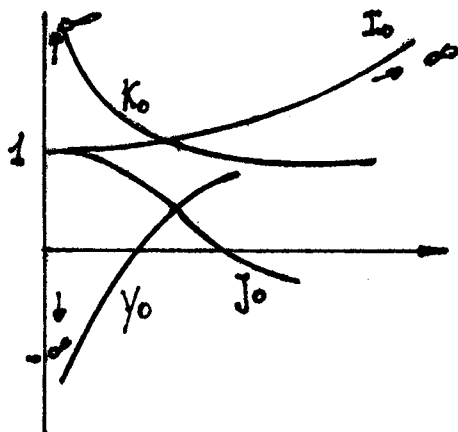
$$u^2 \frac{d^2 R}{du^2} + u \cdot \frac{dR}{du} + u^2 R = 0$$

cuya solución general es $R = A_1 J_0(\alpha_n r) + A_2 Y_0(\alpha_n r)$

Si el signo de α_n^2 se elige negativo se obtendría la ecuación de BESSEL modificada y

$$R = A'_1 I_0 + A'_2 K_0$$

La única solución permitida de acuerdo a las condiciones de contorno es J_0 . QUE NO SE HACE INFINITA EN NINGUN PUNTO.



$R(r) = A_1 J_0(\alpha \cdot r)$ (y entonces α^2 es positivo)

Para determinar α tenemos en cuenta que cuando $r = R_a$ (radio del reactor) la función debe anularse.

$$R(r) = A_1 J_0(\alpha \cdot R_a) = 0$$

$\dots J_0(\alpha \cdot R_a) = 0$ son los ceros de

las funciones BESSEL. El mas bajo autovvalor de α^2 corresponde al 1° cero de la función de BESSEL J_0 que es 2405.

$$\therefore \alpha R_a = 2405$$

$$\alpha^2 = \left(\frac{2405}{R_a} \right)^2$$

$$y \quad R(r) = A_1 J_0 \left(\frac{2405}{R_a} \cdot r \right)$$

Para determinar la solución respecto a z , que sea la adecuada a las condiciones del problema tenemos en cuenta la distribución simétrica del flujo alrededor del origen en la dirección z entonces se elimina el $\sin \beta z$ haciendo la constante correspondiente igual a cero

$$\therefore Z = C_1 \cos \beta z$$

Determinamos β pues Z es igual a $C_1 \cos \beta z = 0$ cuando $z = \frac{H}{2}$

$$\therefore \beta \cdot \frac{H}{2} = m \frac{\pi}{2}$$

y el mas bajo autovalor

o valor propio es $\beta^2 = \left(\frac{\pi}{H} \right)^2$ con $m=1$ y $Z(z) = C_1 \cos \frac{\pi}{H} z$

$$\phi(r, z) = A J_0 \left(\frac{2405}{R_a} \cdot r \right) \cdot \cos \frac{\pi}{H} z$$

$$\text{por (4)} \quad \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad \therefore \beta^2 = \left(\frac{2405}{R_a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{H} \right)^2$$

La constante A depende del nivel de potencia del reactor.

4.7-. Ecuación de ondas en coordenadas esféricas.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial E}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} = \gamma^2 E$$

Considerando la solución de la forma

$$E(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\varphi)$$

reemplazando y dividiendo por $R \cdot \Theta \cdot \Phi$

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{\Theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \gamma^2 r^2$$

Si $\frac{1}{R} \cdot r^2 \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{R} \cdot 2r \frac{dR}{dr} - \gamma^2 r^2 = \alpha^2 \quad (1)$

y $\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \sin \theta \frac{1}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \alpha^2 \sin^2 \theta = 0$

Si $\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \quad (2)$

$\dots \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \left(\alpha^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0$

hacemos $u = \cos \theta$ como

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{du} \cdot (-\sin \theta) \\ \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = \frac{d^2 \Theta}{du^2} \sin^2 \theta + \frac{d\Theta}{du} (-\cos \theta) \\ 1 - u^2 = \sin^2 \theta \end{cases}$$

$\therefore (1-u^2) \frac{d^2 \Theta}{du^2} - 2u \frac{d\Theta}{du} + \left(\alpha^2 - \frac{m^2}{1-u^2} \right) \Theta = 0 \quad (3)$

Esta ecuación que es la asociada de LEGENDRE, la (1) que es una forma de la ecuación de BESSEL :

$n^2 \frac{d^2 R}{dn^2} + 2n \frac{dR}{dn} - (\gamma^2 n^2 + \alpha^2) R = 0$ y la (2) $\frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} = -m^2 \phi$

forman el conjunto de las ecuaciones diferenciales que posean las funciones características para R, Θ , y ϕ (que son las funciones de BESSEL, los polinomios de LEGENDRE asociados y sen y cos para ϕ)

En la mayoría de los problemas no hay dependencia del ángulo φ y si se trata de la ecuación de LAPLACE $\gamma^2 = 0$

$\therefore n^2 \frac{d^2 R}{dn^2} + 2n \frac{dR}{dn} - \alpha^2 R = 0$

cuya solución se vió que es $R = c_1 n^k + \frac{c_2}{n^{k+1}}$ (página 9)
donde $k = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha^2}$

Como no hay dependencia de φ es $m = 0$ luego

$(1-u^2) \frac{d^2 \Theta}{du^2} - 2u \frac{d\Theta}{du} + k(k+1) \Theta = 0$

ecuación de LEGENDRE cuya solución particular es el polinomio de LEGENDRE $P_k (\cos \theta)$

En este caso la combinación de soluciones

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k n^k + \frac{B_k}{n^{k+1}} \right) P_k$$

En el tratamiento de un reactor esférico se utilizan coordenadas esféricas. El origen se elige en el centro de la esfera consideraciones de simetría eliminan la dependencia de los ángulos φ y θ .

(Como no hay entonces dependencia de φ y θ en el ∇^2 correspondiente se multiplica por r^2)

$\frac{d^2 \phi}{dn^2} + \frac{2}{n} \frac{d\phi}{dn} + \beta^2 \phi = 0$ ϕ es la función espacial $\phi(n)$

$\phi = u \cdot n^{-1}$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{du}{dr} \cdot r^{-1} - u r^{-2} \quad y \quad \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = 2 \frac{du}{dr} r^{-2} - 2 u r^{-3}$$

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = \frac{d^2u}{dr^2} \cdot r^{-1} - \frac{du}{dr} r^{-2} - \frac{du}{dr} r^{-2} + 2 u r^{-3}$$

reemplazando y dividiendo por r^{-1}

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \beta^2 u = 0$$

$$\therefore u(r) = A \cos \beta r + C \sin \beta r$$

$$\phi(r) = A \frac{\cos \beta r}{r} + \frac{C \sin \beta r}{r}$$

Como $\frac{\cos \beta r}{r} = \infty$ cuando $r = 0$, $A = 0$, pues ϕ debe ser finito

en el origen

$$\therefore \phi(r) = C \frac{\sin \beta r}{r}$$

Si R_a es el radio del reactor $\phi = \frac{C \sin \beta R_a}{R_a} = 0$

$$\sin \beta R_a = 0$$

$$\beta R_a = n\pi$$

el autovalor mas bajo es $\beta^2 = \left(\frac{\pi}{R_a}\right)^2$

La autofunción correspondiente

$$\phi(r) = \frac{C}{r} \sin \frac{\pi}{R_a} r$$

5-. Series de FOURIER.

La teoría de las series de FOURIER constituye uno de los mas hermosos desarrollos del análisis y resulta un instrumento indispensable para el estudio de importantes problemas físicos y mecánicos, tales como, las vibraciones sonoras y mecánicas, la conducción del calor y en particular, para nosotros, en problemas de la teoría de reactores.

5.1-. Condiciones de DIRICHLET.

Dan una condición suficiente para la representación de $f(\theta)$ en serie de F.

Sea $f(\theta)$ una función definida arbitrariamente en el intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$ y que, fuera de ese intervalo cumple la condición $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$. Si $f(\theta)$ tiene un número infinito de puntos de discontinuidades ordinarias y un número infinito de puntos de máximo o mínimo en el intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$, entonces puede ser representada por la serie trigonométrica:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \dots + b_1 \sin \theta + b_2 \sin 2\theta + \dots$$

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta) \quad : m \text{ es entero}$$

Donde

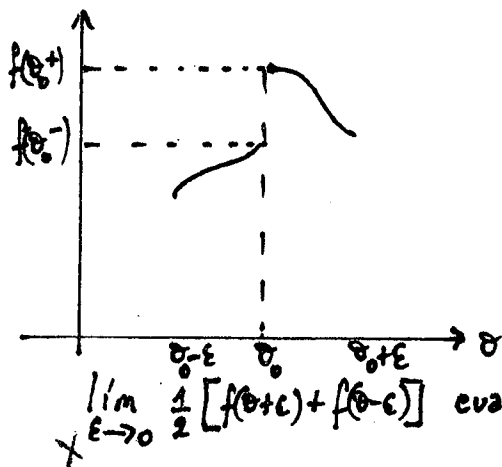
$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos m\theta \, d\theta \quad : m=0, 1, 2, \dots$$

y

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin m\theta \, d\theta \quad : m=1, 2, 3, \dots$$

Esta serie, en cada punto del intervalo dado, $\theta = \theta_0$, converge hacia el valor $\frac{1}{2} [f(\theta_0^+) + f(\theta_0^-)]$

(uno de los puntos donde hay continuidad es la misma $f(\theta_0)$).



Si $f(\theta)$ es continua en el intervalo $-\pi < \theta < \pi$ las series de F convergen absolutamente y uniformemente a $f(\theta)$ dentro del intervalo.

Si $f(\theta)$ tiene discontinuidades, la serie converge absolutamente y uniformemente a $f(\theta)$ en regiones donde la función es continua y en un punto de discontinuidad a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} [f(\theta_0 + \epsilon) + f(\theta_0 - \epsilon)] \quad \text{cuando:} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\theta_0 + \epsilon) \neq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\theta_0 - \epsilon)$$

$$f(\theta_0^+) \neq f(\theta_0^-)$$

Las integrales pueden expresarse como suma de integrales componentes para cada porción continua.

Por ejemplo, si $f(\theta)$ que cumple las condiciones de DIRICHLET en un intervalo $c < \theta < d$ pero no está definida fuera del intervalo, puede desarrollarse en una serie de F en el intervalo.

Fuera del intervalo, la serie F es periódica aunque no hay relación entre la serie y $f(\theta)$ pues $f(\theta)$ no está definida fuera del intervalo.

5.2-. Las relaciones que siguen valen para cualquier intervalo de ancho 2π , los límites de integración pueden cambiarse a d y $d+2\pi$ donde d es un ángulo cualquiera.

$$a) \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \, d\theta = 0 \quad m=0, 1, 2$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \, d\theta = 0 \quad m=1, 2, 3 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \, d\theta = 2\pi \quad m=0 \end{array} \right.$$

$$c) \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \sin n\theta d\theta = 0 \quad \begin{cases} m=0, 1, 2, \dots \\ n=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$d) \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0 \quad m \neq n \quad e) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 m\theta d\theta = \pi \quad m=n \neq 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 m\theta d\theta = \pi \quad m=n \neq 0$$

En base a estas últimas relaciones de ortogonalidad se calculan los coeficientes de la serie. Supongamos que $f(\theta)$ es una función continua periódica, teniendo un período fundamental $-\pi < \theta < \pi$.

Se multiplica (1) por $\cos m\theta$ cada término y se integra:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos m\theta d\theta = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 m\theta d\theta = \pi a_m$$

$$\therefore a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos m\theta d\theta \quad m=0, 1, 2, \dots$$

Análogamente

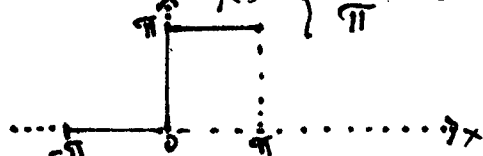
$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin m\theta d\theta \quad m=1, 2, 3, \dots$$

En la serie de F el término que contiene $n=1$ es el fundamental y los que contienen $n>1$ son los de orden mas alto.

Todos los términos de la serie son periódicos, excepto el 1° que es el valor promedio $\frac{a_0}{2}$.

a) Desarrollar $f(x)$ en serie de F en el intervalo $(-\pi, \pi)$

siendo $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \pi & 0 < x < \pi \end{cases}$ para



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} \pi dx \right] = \pi$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \cos mx dx = 0$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \sin mx dx = \frac{1}{m} (1 - \cos m\pi)$$

Si n es par el paréntesis se anula, si es impar vale 2.

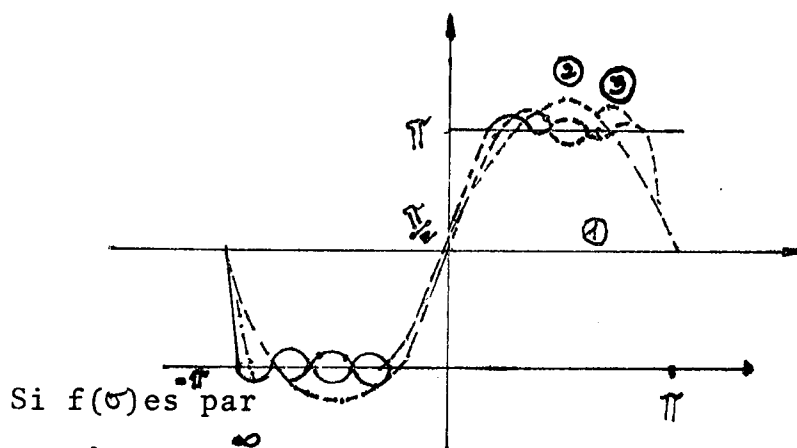
$$f(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

Para $x=0$ la serie se reduce a $\frac{\pi}{2}$ y todas las curvas aproximadas pasan por allí.

ecuaciones de las curvas de aproximación

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\pi}{2} \\ f(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \sin x \\ f(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} \right) \end{cases}$$

Cuando $x = \pm\pi$ la serie se reduce a $\frac{\pi}{2}$ y todas las curvas aproximadas también pasan por allí.



Si $f(\theta)$ es par

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\theta$$

(pues sen es impar y la integral $\int_{-\pi}^{\pi}$ de una función impar es nula)

Si $f(\theta)$ es impar :

$$f(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\theta$$

(pues cos es par y la integral $\int_{-\pi}^{\pi}$ de una función impar es cero).

La serie de los cosenos puede ser usada para representar una función par y la serie del seno para la impar.

Si una función $f(\theta)$ está por ejemplo, solo definida en $0 < \theta < \pi$ entonces, o bien la serie del sen o la del cos puede ser usada para representar la función en el intervalo.

Dentro del intervalo ambas series convergerán a $f(\theta)$, fuera de este intervalo, las series representarán funciones periódicas de fuentes. Nos interesan solo los valores de la serie dentro del intervalo en el cual la función está definida (pag.29.30)

b) Desarrollo de $f(x) = x$
que es una función impar :

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx$$

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin mx \, dx$$

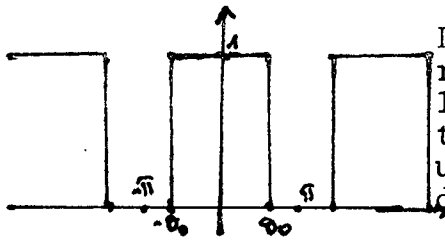
$$= \frac{2}{\pi m} \int_0^{\pi} x (-m \sin mx) \, dx = \frac{-2}{\pi m} \left[x \cos mx - \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos mx \, dx \right] =$$

$$= \frac{-2}{\pi m} \left[x \cos mx + \frac{\sin mx}{m} \right]_0^{\pi} = \frac{-2}{\pi m} \pi (-1)^m$$

Reemplazando $\therefore b_m = \frac{-2}{m} (-1)^m$

$$x = 2 \left(\frac{\sin x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{2} - \dots \right)$$

c) Obtener la serie de F para el pulso de altura A y ancho angular $2\theta_0$. Puede consistir de un único pulso definido en el intervalo $-\pi < \theta < \pi$ o puede ser un pulso periódico de período 2π .



La serie de F será la misma para cualquier de los dos casos. Si a este pulso se lo convierte a serie del t puede representar una fuerza de impulso actuando sobre un sistema vibrante mecánico a un impulso de voltaje aplicado a un circuito eléctrico.

Como es una función par puede representarse por una serie de cos.

$$f(\theta) = \begin{cases} 1 & -\theta_0 < \theta < \theta_0 \\ 0 & -\pi < \theta < -\theta_0 \\ & \theta_0 < \theta < \pi \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_0} \cos n\theta \, d\theta = \frac{2}{\pi n} \sin n\theta_0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_0} d\theta = \frac{2\theta_0}{\pi}$$

La serie del coseno.

$$f(\theta) = \frac{\theta_0}{\pi} + \frac{2}{\pi} \left(\sin \theta_0 \cos \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \cos 2\theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta_0 \cos 3\theta + \dots \right)$$

$$f(\theta) = \frac{\theta_0}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \theta_0}{n} \right) \cos n\theta$$

Un caso particular es el de la onda cuadrada. $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

$$f(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \theta - \frac{1}{3} \cos 3\theta + \frac{1}{5} \cos 5\theta - \dots \right)$$

solo términos armónicos impares, y en los puntos de discontinuidad $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, la función $f(\theta) = \frac{1}{2}$

Cuando el pulso reduce el ancho $2\theta_0$ el n° de términos significativos crece rapidamente y a causa de la convergencia lenta de la serie se requieren muchos términos para aproximarse a la forma del pulso.

5.2-.Observaciones sobre la serie de FOURIER.

Es sabido que por medio de la serie de TAYLOR es posible, bajo ciertas restricciones, representar la función $f(x)$ por medio de una serie de potencias de x , análogamente por una serie trigonométrica. El desarrollo en serie de TAYLOR exige que ella sea indefinidamente derivable, y esta es una condición restrictiva mientras que la expresión por medio de una serie trigonométrica es posible para un grupo de funciones mucho mas amplio.

En efecto, puede aplicarse a muchas funciones periódicas que, en el intervalo de un período, tengan un número finito de discontinuidades finitas. Discontinuidad finita en un punto x_0 significa que existen dos límites finitos distintos de la función según que x tienda a x_0 por la derecha o por la izquierda.

Debido a que cada término de la serie es de período 2π será necesario limitar la discusión de la representación de funciones

mediante esas series, a funciones de período 2π . Se considera $f(x)$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y fuera de él la función quedará definida por $f(x+2\pi) = f(x)$. Naturalmente será válido cualquier otro intervalo $(a, a+2\pi)$. Tratándose de representar funciones no periódicas podrá hacerse estudiándolas en un intervalo de amplitud 2π . Lo importante es que puede ser utilizada para cualquier función arbitraria que satisfaga las condiciones de DIRICHLET.

Las series de F, dobles o triples, son necesarias, a veces, para representar funciones en 2 y 3 dimensiones espaciales.

Pueden ser escritas en forma exponencial con coeficientes complejos pues $\cos n \omega t = \frac{1}{2} (e^{in\omega t} + e^{-in\omega t})$

$$\text{y } \sin n \omega t = \frac{1}{2i} (e^{in\omega t} - e^{-in\omega t})$$

Las series de F se usan para representar ya sea funciones del t o funciones de coordenadas espaciales.

Si la variable es el t , es $\theta = \frac{2\pi t}{T}$ donde T es el período de una función periódica o la duración de una función no periódica. En el intervalo $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$, los coeficientes a_n , por ej.:

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2\pi m t}{T} dt$$

Si la serie de F es para representar una función de la distancia x en el intervalo $-l < x < l$ es $\theta = \frac{\pi x}{l}$ y los

coeficientes p.ej. $a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx$

5.3-. Aplicación en la resolución de ecuaciones diferenciales.

Para hallar el flujo de calor en una placa sólida limitada por dos superficies planas paralelas con temperatura cero

$$\begin{array}{ccc} \mu(0,t)=0 & \mu(l,t)=0 & \text{para } t=0 \quad \mu(x,0) \text{ es la} \\ & & \text{distribución inicial} \\ x=0 & x=l & \end{array}$$

hay que resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Por separación de variables se encuentra:

$$u(x,t) = \sum_a e^{-\alpha a^2 t} (C' \cos ax + C'' \sin ax) \quad (1)$$

por las condiciones de contorno $C' = 0$ y $a = \frac{n\pi}{l}$ $n = 1, 2, \dots$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha n^2 \frac{\pi^2 t}{l^2}} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{l}$$

Como $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\sin \frac{n\pi}{l} x}$ que es una serie de Fourier

cuyos coeficientes $C_n = \frac{2}{l} \int_0^l u(x,0) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$

queda determinada la constante.

5.4-. INTEGRAL de FOURIER

Aunque una función arbitraria que satisface las condiciones de DIRICHLET puede ser desarrollada en serie de F, la utilidad práctica de las series depende, a veces, de cuán rápido converge.

Los cálculos de los términos significativos de una serie convergente hasta pueden ser laboriosos.

La integral de F es una extensión de las series de F en la cual el intervalo fundamental se extiende a infinito, lo cual es beneficioso en problemas donde la serie de F converge lentamente.

Si $f(x)$ es absolutamente integrable en $(-\infty, +\infty)$ y satisface en este intervalo las condiciones de DIRICHLET se verifica

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \cos k(x-x') dx' dk \quad (1) \quad -\infty < x < \infty$$

La sumatoria de los términos discretos armónicos en la serie se reemplazó por la integración sobre un espectro continuo k en la integral de FOURIER. Representa la función en $(-\infty, +\infty)$ así como la serie representa una función sobre un período finito.

La derivación de la integral de FOURIER puede hacerse a partir de la serie $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l})$

En esta serie se sustituyen los coeficientes de FOURIER previo reemplazo de x por x' para distinguir entre la variable x' en la expresión para los coeficientes y la variable x en la serie.

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x'}{l} dx' \quad y \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x'}{l} dx'$$

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x') dx' + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x') \left(\cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x'}{l} + \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x'}{l} \right) dx'$$

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x') dx' + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x') \cos \frac{n\pi}{l} (x-x') dx'$$

Se hace tender $l \rightarrow \infty$ y $\Delta h = \frac{\pi}{n}$ el 1º término se anula formalmente poniendo la sumatoria como integral en

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \Delta h \int_{-l}^l f(x') \cos m \Delta h (x-x') dx'$$

Como es $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \cos \lambda (x-x') dx'$

$$\cos \lambda (x-x') = \cos \lambda x \cos \lambda x' + \sin \lambda x \sin \lambda x' \text{ en (1)}$$

donde

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda$$

$$a(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \cos \lambda x' dx' \quad (2) \quad \text{y} \quad b(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \sin \lambda x' dx' \quad (3)$$

Si $f(x)$ es una función par, la (3) es nula.

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda x \int_0^{\infty} f(x') \cos \lambda x' dx' d\lambda$$

integral del coseno de F

Si $f(x)$ es una función impar, la (2) es nula

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \lambda x \int_0^{\infty} f(x') \sin \lambda x' dx' d\lambda$$

integral seno de F

La integral de F puede expresarse en forma exponencial sustituyendo en (1)

$$\cos \lambda (x-x') = \frac{e^{i\lambda(x-x')} + e^{-i\lambda(x-x')}}{2}$$

$$\therefore \boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-i\lambda x'} dx' d\lambda} \quad (4)$$

y recordando que

$$\int_0^{\infty} e^{-i\lambda x} d\lambda = \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda x} d\lambda$$

5.5-. A partir de (4) se definen las transformadas de FOURIER.

$$g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \quad \text{transformada de FOURIER}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \quad \text{fórmula de inversión}$$

5.6-. La solución de la ecuación unidimensional del flujo de calor para un sólido infinito, es decir $-\infty < x < \infty$, puede expresarse por la integral de FOURIER. En la página 34 vimos la solución de la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t}$ para la placa de espesor l

y en ese caso $a = n\pi$. Si $l \rightarrow \infty$, a será una función continua tomando valores $\frac{a}{l}$ $0 < a < \infty$ (cuando l crece, los valores discretos de a se aproximan entre si.). Por lo tanto para construir la solución integral de F reemplazamos a por la variable k y reemplazamos la sumatoria por la integral en (1), pag. 34.

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha k^2 t} (C' \cos kx + C'' \sin kx) dk$$

$$y \quad u(x, 0) = \int_0^{\infty} (C' \cos kx + C'' \sin kx) dk \quad (1)$$

La integral de FOURIER para el $(x, 0)$ es

$$u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x', 0) \cos k(x-x') dx' dk$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u(x', 0)}_{C'} \underbrace{(\cos kx' \cos kx + \sin kx' \sin kx)}_{C''} dx' dk$$

Comparando (1) y (2)

$$C'' = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x', 0) \sin kx' dx' ; \quad C' = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x', 0) \cos kx' dx'$$

$$\therefore u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha k^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x', 0) \cos k(x-x') dx' dk$$

Coincide la distribución inicial, intercambiando el orden de integración, con el uso de tablas de integración es posible la resolución.

No se han considerado ejemplos de aplicación relacionados con la teoría de Reactores, pues los conceptos fundamentales de la física y teoría de Reactores no se han adquirido aún, pero se tienen todas las herramientas necesarias desde el punto de vista matemático. Así se podrá resolver la ecuación de la Edad de FERMI que se puede ver en la pag. 177 del libro de GLASSTONE EDLUND, " NUCLEAR REACTOR THEORY ", así como la medición de la longitud de difusión de los neutrones , en la pag. 177 del mismo libro, etc..

Será necesario recordar, también, la "función impropia" delta

$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad \text{y} \quad \delta(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \neq 0, \quad \text{con la propiedad:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(x) dx = \varphi(0)$$

6-. Transformada de LAPLACE

6.1-. La transformada de LAPLACE ofrece un método directo para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Esta transformación es una operación integral que transforma la ecuación diferencial en una algebraica. La transformación inversa de esta ecuación conduce a la solución de la ecuación diferencial. La transformación de LAPLACE sirve para transformar una ecuación diferencial de un dominio funcional , digamos un dominio de tiempo, en otro dominio funcional representado por la ecuación transformada. La transformación inversa vuelve la función al dominio t.

La transformada de LAPLACE es uno de los posibles métodos operacionales para resolver ecuaciones diferenciales lineales. La integral de FOURIER es otra, aunque con la misma operación en condiciones especiales.

Extensas tablas de transformadas de LAPLACE se han construido y así la solución de problemas por este método es expeditiva.

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

transformada de f(t) donde $t \geq 0$, s en general es complejo (puede ser real)

Así, las siguientes funciones tienen sus transformadas

a) Función salto unidad U (t): $u(t) = 0 \quad (t < 0) \quad \text{y} \quad u(t) = 1 \quad (t > 0)$

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty}$$

La integral emerge para valores reales de s cuando;

$$s > 0 \quad \bar{f}(s) = \frac{1}{s}$$

b) e^{at} $f(t) = e^{at} \quad (t > 0)$

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt$$

$$\bar{f}(s) = \frac{e^{-(s-a)t}}{a-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

$$\therefore \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad (1)$$

Si s y a son ambos reales, converge cuando $s > a$

c) $f(t) = \cos at \quad (t > 0)$

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos at dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} (e^{iat} + e^{-iat}) dt$$

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{(-s+ia)t}}{-s+ia} + \frac{e^{(-s-ia)t}}{-s-ia} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia} \right) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\therefore \mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Convergencia: Si s y a , en (1) por ejemplo, son reales esta integral converge para todo $s > a$ pero diverge para $s \leq a$.

Esto provee un test de comparación útil para determinar la convergencia de la integral de LAPLACE. Entonces una condición suficiente para la convergencia de la integral de LAPLACE es que

$$|f(t) e^{-st}| < M e^{-(s-a)t} \quad (s > a)$$

donde M es una constante arbitraria. Si $f(t)$ satisface esta condición, o sea no crece mas rápido que $M e^{at}$ cuando $t \rightarrow \infty$ es de orden exponencial. La transformada de LAPLACE existe para cualquier función $f(t)$, continua a trozos, y de orden exponencial para todo $t \geq 0$.

a) Linealidad de las transformadas

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$$

b) Transformadas de la derivadas de una función

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt$$

Si se entrega por partes poniendo $u = e^{-st}$, $dv = f'(t) dt$

$$= e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$= -f(0) + s \bar{f}(s)$$

Análogamente: $\mathcal{L}[f''(t)] = \int_0^{\infty} f''(t) e^{-st} dt$

$$= e^{-st} f'(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt$$

$$= -f'(0) - s f(0) + s^2 \bar{f}(s)$$

En general: $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \bar{f}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

Si $f(t)$ y todas sus derivadas hasta la $(n-1)$ son continuas y de orden exponencial cuando $t \rightarrow \infty$ y $f^{(n)}(t)$ es continua en trozos.

6.2-. Resolución de ecuaciones diferenciales.

a) $y''(t) + k^2 y(t) = 0$

con condiciones iniciales: $y(0) = a$; $y'(0) = b$

$$\mathcal{L}[y''(t)] + k^2 \mathcal{L}[y(t)] = 0$$

$$s^2 \bar{y}(s) - s y(0) - y'(0) + k^2 \bar{y}(s) = 0$$

$$s^2 \bar{y}(s) - s a - b + k^2 \bar{y}(s) = 0$$

$$\bar{y}(s) = \frac{as + b}{s^2 + k^2} = \frac{as}{s^2 + k^2} + \frac{b}{s^2 + k^2}$$

Consultando una tabla, la transformada inversa

$$y(t) = a \cos kt + \frac{b}{k} \sin kt$$

Aclaración sobre la transformación inversa sobre la cual nos detenemos luego.

Si $\mathcal{L}[f(t)] = \bar{f}(s)$, entonces la transformación inversa de $\bar{f}(s)$ es $f(t)$ que se escribe

$$\mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(s)] = f(t)$$

Ejemplos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at} ; \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos at$$

b) Resolver:

$$y''(t) + k y'(t) = e^{-at}$$

para las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}[y''] + k \mathcal{L}[y'] = \mathcal{L}[e^{-at}] \therefore$$

$$s^2 \bar{y}(s) - s y(0) - y'(0) + k s \bar{y}(s) - k y(0) = \frac{1}{s+a}$$

con las condiciones iniciales

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{s(s+k)(s+a)}$$

Para buscar en tablas es necesario reorganizar separando en fracciones parciales. Si las raíces del denominador son distintas

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(s+k)(s+a)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+k} + \frac{C}{s+a} \\ &= \frac{A(s+k)(s+a) + Bs(s+a) + Cs(s+k)}{s(s+k)(s+a)} \\ &= \frac{s^2(A+B+C) + s(Aa + Ak + Ba + Ck) + Aka}{s(s+k)(s+a)}\end{aligned}$$

$$A+B+C=0 \quad ; \quad Aa + Ak + Ba + Ck = 0 \quad ; \quad Aka = 1$$

Resolvemos el sistema es $A = \frac{1}{ka}$ sustituyendo en la 2ª

$$\text{es: } \frac{1}{k} + \frac{1}{a} + Ba + (-A-B)k = 0$$

$$\therefore B = \left[-\frac{1}{k} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \right] \frac{1}{a-k}$$

en consecuencia $B = \frac{1}{(k-a)k}$ y $C = \frac{-(k^2 - ak + ak)}{k^2(k-a)} = -\frac{1}{a(k-a)}$

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{ka} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{(k-a)k} \cdot \frac{1}{s+k} - \frac{1}{a(k-a)} \cdot \frac{1}{s+a}$$

De la tabla:

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{ka} + \frac{1}{k(k-a)} e^{-kt} - \frac{1}{a(k-a)} e^{-at}$$

El procedimiento general para resolver ecuaciones diferenciales por el método de LAPLACE es obtener la transformada de ambos lados de la ecuación.

Esto conduce a una ecuación algebraica que es una función de $y(s)$. Las condiciones iniciales $y(0)$, $y'(0)$ etc. son entonces sustraídas y se resuelve para $y(s)$. A veces $y(s)$ está en una forma no identificada en la tabla de transformadas. Entonces $y(s)$ se separa en fracciones parciales para obtener términos para las cuales las transformadas inversas han sido tabuladas.

En el cap. 6, pag. 160 del libro "NUCLEAR REACTOR PHYSICS" de R.L. MURRAY se resuelve un sistema de ecuaciones diferenciales relacionadas al comportamiento con el tiempo del reactor utilizando la transformada de LAPLACE.

6.3-.Transformada inversa

El par de transformadas de FOURIER

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' \quad (2)$$

Una función del t puede ser transformada al dominio frecuencia usando (2) y la función frecuencia puede transformarse al dominio t usando (1) (Voltaje impuesto a un sistema eléctrico o una fuerza aplicada a un sistema mecánico).

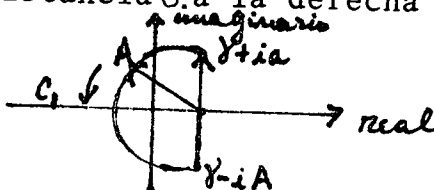
Por comparación con el par de FOURIER podemos anticipar una expresión integral inversa de la transformada de LAPLACE $\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$ (3) con lo cual sería posible evaluar $f(t)$ si $\bar{f}(s)$ es conocida. La integral que cumple esto es la integral de inversión de FOURIER-MELLIN.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}(s) e^{st} ds \quad (4)$$

En ciertas condiciones, si se puede elegir $\gamma=0$, con la sustitución $s=i\omega$ en la (4) se hace similar a la (1). La transformada de $F(2)$ se hace similar a la transformada de LAPLACE (3) $f(t)=0$ para $t < 0$.

Luego para condiciones especiales son esencialmente la misma operación.

La integración de (4) se realiza a lo largo de la paralela al eje imaginario a distancia γ a la derecha del eje.



El 2º teorema de la integral de CAUCHY o teorema de los residuos da el método para calcular integrales sobre caminos cerrados que encierran polos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)} dz = \sum R_k \text{ siendo } R_k$$

residuos para los polos encerrados por C

Residuo para un polo de orden m

$$\frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m \phi(z) \right]_{z=z_0}$$

Residuo para un polo simple

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \phi(z)$$

$\phi(z)$ es la función integrando

El método mas simple para evaluar la (4) es a lo largo del contorno de integración formado por el semicírculo de radio A cuando $A \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \bar{f}(s) e^{st} ds = \sum \text{residuos}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iA}^{\gamma+iA} \bar{f}(s) e^{st} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_A} \bar{f}(s) e^{st} ds = \sum \text{residuos}$$

La 2ª integral en los problemas físicos satisface las condiciones para que sea nula cuando $A \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}(s) e^{st} ds = \sum \text{residuos}$$

Determinar la transformada inversa de:

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{(s-2)(s^2+1)} \quad \therefore \bar{f}(s) e^{st} = \frac{e^{st}}{(s-2)(s+i)(s-i)}$$

Por el método de los residuos
los polos en $s=2, i, -i$

$$\text{Res}_1 = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{e^{st}}{(s+i)(s-i)} = \frac{1}{5} e^{2t} \quad \text{Res}_2 = \lim_{s \rightarrow -i} \frac{e^{st}}{(s-2)(s-i)} = \frac{1+2i}{10} e^{-it}$$

$$\text{Res}_3 = \lim_{s \rightarrow i} \frac{e^{st}}{(s-2)(s+i)} = -\frac{1-2i}{10} e^{it}$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{5} e^{2t} - \frac{1}{5} \cos t - \frac{2}{5} \sin t$$

Por este método de los residuos es muy simple tomar la tabla e ir comprobando:

Por ej:

a) $\frac{1}{s^n}$; con polo de orden n : $\frac{1}{(n-1)!} \left. \frac{d^{(n-1)} e^{st}}{ds^{n-1}} \right|_{s=0} = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$

b) $\frac{1}{(s-a)^2}$, con polo de orden 2: $\frac{1}{(2-1)!} \left. \frac{d e^{st}}{ds} \right|_{s=a} = t e^{at}$

Ampliación sobre los residuos

Una función $f(z)$ de una variable compleja Z es analítica en una región R si la derivada de $f(z)$ existe en cada punto de R .

Si una función $f(z)$ es analítica en una región R excepto en un punto Z_0 es un punto singular.

Sea
$$\phi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$$

$f(z)$ representará una función analítica y $\phi(z)$ una función con polos.

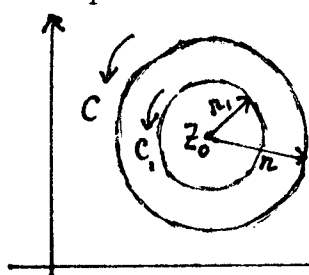
Cuando $z \rightarrow z_0$ la función $\phi(z) \rightarrow \infty$ y la singularidad en Z_0 es un polo simple.

Una función $f(z)$ la cual es analítica en un círculo C de radio a con centro en Z_0 .

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m$$

serie de TAYLOR

Si $\phi(z)$ es analítica en cada punto de una región entre dos círculos c y c_1 , con centro en Z_0 y radios r y r_1 , donde $r_1 < r$; entonces en cada punto entre estos círculos, $\phi(z)$ puede representarse por la serie de LAURENT.



$$\phi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m + \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z - z_0)^m}}_{\text{parte principal}}$$

($r_1 < |z - z_0| < r$)

; parte principal (que contiene las singularidades)

Si no hay singularidad dentro de c se demuestra que los coeficientes b se anulan y se convierte en la serie de TAYLOR.

Si la parte principal contiene el término $\frac{b_1}{z - z_0}$

LA SINGULARIDAD EN Z_0 es un polo simple, si contiene un término $\frac{b_m}{(z - z_0)^m}$, donde $m \geq 1$ es el exponente mas alto, entonces Z_0 es

un polo de orden m . Si m es infinitamente grande $m \rightarrow \infty$ entonces el punto Z_0 es una singularidad esencial

$$\frac{e^z}{z^4} = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!} + \frac{z}{5!} + \dots \quad \text{Polo de orden 4}$$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots + \frac{1}{m!z^m} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!z^m}$$

$$e^{\frac{1}{z}}$$

tiene una singularidad esencial en el origen

El coeficiente b_1 de $\frac{1}{(z-z_0)}$ en la serie de LAURENT se designa como residuo de $\phi(z)$ en el punto singular z_0

Evaluación de residuos

Sea $\phi(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}$ y su desarrollo de LAURENT

$$(z-z_0)^m \cdot \phi(z) = b_m + b_{m-1}(z-z_0) + \dots + b_1(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{m+n}$$

pero éste es el desarrollo de TAYLOR de $f(z)$

$$\therefore b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1} (z-z_0)^m \phi(z)}{d z^{m-1}} \right]_{z=z_0}$$

Que nos da el residuo en un polo de orden m

$$\text{Si } m=1 \quad b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \cdot \phi(z) = f(z_0)$$

$$\text{Se demuestra que } \frac{1}{2\pi i} \oint_C \phi(z) dz = f(z_0) = b_1$$

Si C es un contorno cerrado que encierra al Polo z_0 .

Así

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z^4} dz = \frac{1}{3!}$$

$$\text{y } \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^2 + 2z - 2}{z - 4} dz = 22$$

B I B L I O G R A F I A

IAHNKE and EMDE - TABLES OF FUNCTIONS.

WATSON, A Treatise on the Theory of BESSEL Functions.

GLASSTONE and EDLUND, THE ELEMENTS OF NUCLEAR REACTOR THEORY.

REY PASTOR , ANALISIS MATEMATICO- Volumen 3.

MARGENEAU AND MURPHY , THE MATHEMATICS OF PHYSICS AND CHEMISTRY.

BURINGTON AND TERRANCE, HIGHER MATHEMATICS.

SOKOLMIKOFF, MATEMATICA SUPERIOR PARA INGENIEROS Y FISICOS.

BRONWELL, ADVANCED MATHEMATICS IN PHYSICS AND ENGINEERING.

HILDEBRAND, ADVANCED CALCULUS FOR ENGINEERS.

SNEDDON, FOURIER TRANSFORMS.

JUAN KERNOR, APLICACIONES TECNICAS DE LAS FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA.