

C.N.E.A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº 1	AÑO 1979

09.79.03

ASOCIACION ARGENTINA DE ENERGIA SOLAR

4^{ta} REUNIÓN DE TRABAJO

La Plata Julio 31- Agosto 3 de 1978

ORGANIZADA POR:

IAS/FABA Instituto de Arquitectura Solar
de la ciudad de La Plata.

AUSPICIADA POR:

Ministerio de Obras Públicas
de la Provincia de Buenos Aires.

Comisión de Investigaciones Científicas
de la Provincia de Buenos Aires.

Municipalidad de la ciudad de La Plata.

Secretaría de Desarrollo Urbano y
Vivienda de la Nación.

ACTAS:

Editadas por la Subcomisión de Publicaciones y
Difusión de la ASADES.

Impresas en el Centro Espacial San Miguel de la
Comisión Nacional de Investigaciones Espaciales.

Comisión Nacional de Energía Atómica BIBLIOTECA
--

UTILIZACION DE ELEMENTOS CILINDRICOS EN CONCENTRADORES

FIJOS A ESPEJO FACETADO

R.P. Platzeck
Comisión Nacional de Energía Atómica
Avda. del Libertador 8250 - (1429) Buenos Aires

Resumen

Se analiza teóricamente un concentrador fijo a espejo facetado ¹⁾, modificado mediante el reemplazo de los elementos reflectores planos por elementos cilíndricos cóncavos. Se deducen las fórmulas exactas que dan la intersección de un rayo reflejado cualquiera con el plano receptor. A partir de estas expresiones se obtiene la distribución del flujo de energía en dicho plano, con lo que se calcula el factor de concentración medio para un ancho dado de receptor. Con el objeto de realizar un análisis comparativo se calculan estas cantidades también para el caso de tiras planas. El reemplazar los elementos planos por cilíndricos permite incrementar el factor de concentración aun utilizando elementos más anchos, con lo cual disminuye el número de éstos. Por ejemplo, para una abertura de 90° y ángulos de incidencia entre 0° y 45° , se puede obtener, con similares pérdidas geométricas, un factor de concentración 1,5 veces mayor con menos de la cuarta parte de elementos.

Abstract

A fixed mirror solar concentrator ¹⁾, in which the flat reflecting slats are replaced by concave cylindrical elements, is theoretically analysed. Exact expressions for the intersection of a given reflected ray with the receptor plane are deduced. From these expressions the energy flux distribution on that plane is obtained and the mean concentration factor for a given receiver width is calculated. The use of cylindrical elements, instead of flat ones, makes it possible to obtain a higher concentration factor even using wider elements, thus reducing their number. For example, for an angular aperture of 90° and incidence angles between 0° and 45° , it is possible to obtain a 50 % higher concentration factor with less than a quarter of the elements, without increasing the geometrical losses.

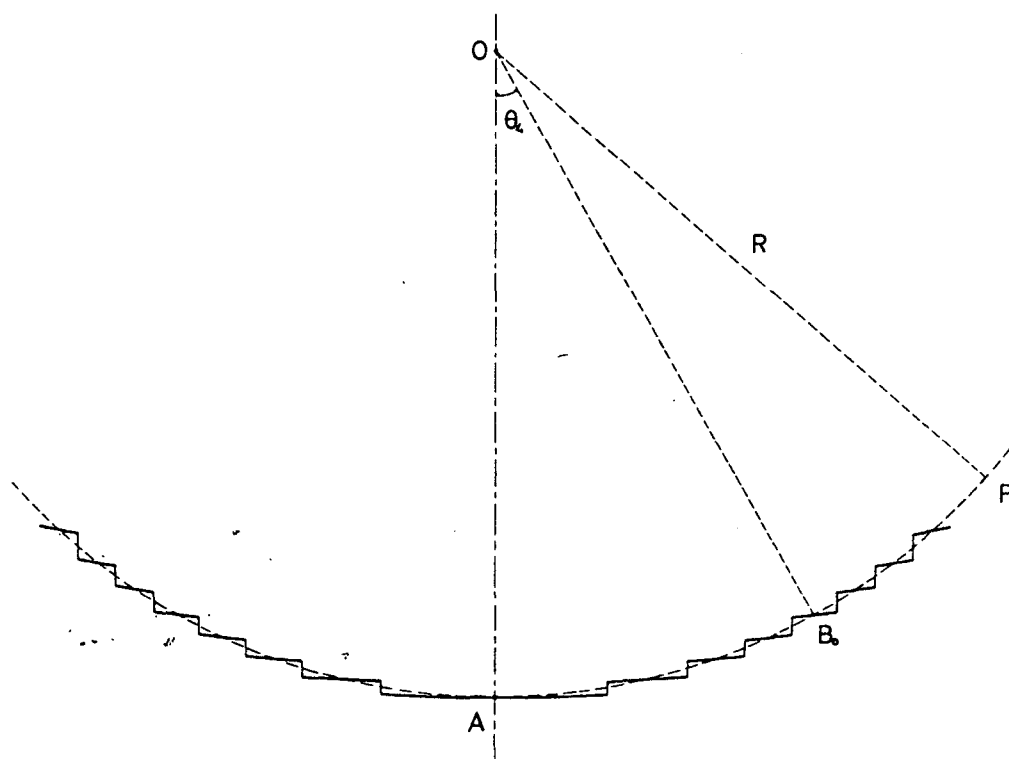


Figura 1

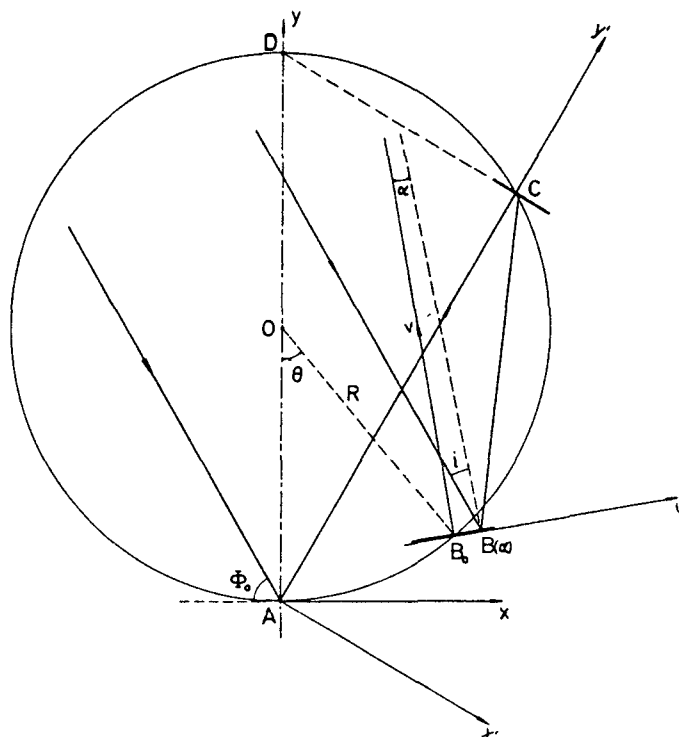


Figura 2

1. Introducción

El concentrador fijo a espejo facetado tipo Russell ¹⁾ puede definirse desde el punto de vista óptico como un sistema de $(2n+1)$ espejos planos, angostos y fijos, dispuestos de manera que sus ejes longitudinales de simetría estén sobre un cilindro directriz o de referencia imaginario, de radio R . El plano de uno de los elementos especulares es tangente a dicho cilindro; los de cada uno de los demás, forman ángulos prefijados respecto del espejo tangente (por ej. Ref. 2, Fig. 1). Es posible demostrar que, cualquiera sea la dirección de incidencia de un haz de rayos paralelos, las proyecciones de los rayos reflejados en los mencionados ejes de simetría sobre un plano perpendicular a ellos, se cruzan en un punto de la circunferencia definida por la intersección de dicho plano con el cilindro de referencia; el punto de cruce se desplaza a medida que el Sol cambia su posición. Por otra parte, el ancho de cada uno de los haces reflejados es igual a la proyección del ancho útil del correspondiente espejo plano en la dirección reflejada. El ancho útil de los espejos se define restando al ancho de los mismos la parte perdida por sombras e interceptación por espejos vecinos.

Si en lugar de considerar rayos paralelos consideramos la luz proveniente del Sol, que tiene una abertura $2\beta_0 = 32'$, hay que sumar al mencionado ancho de los haces un ancho que es proporcional a β_0 y a la distancia entre el espejo considerado y el plano sobre el cual se determina el ancho del haz. Por ejemplo, para un haz que incide normalmente al espejo tangente y para espejos de $0,02 R$ de ancho, ambas contribuciones son del mismo orden de magnitud en la zona de cruce de haces.

Se puede disminuir el ancho del haz en la zona de cruce mencionada haciendo que cada haz reflejado sea convergente, lo que se logra utilizando espejos cilíndricos cóncavos. Con un radio de curvatura igual a $4R$, se logra que el haz reflejado en el espejo central esté enfocado sobre el plano receptor, mientras que los haces reflejados en los otros espejos resultan sólo parcialmente desenfocados; esto vale cualquiera sea el ángulo de incidencia. El uso de espejos cóncavos permite reducir el ancho del receptor y al mismo tiempo aumentar considerablemente el ancho de las tiras.

2. Descripción del sistema óptico y sistemas de referencia

El sistema óptico está constituido por $(2n+1)$ espejos cilíndricos cóncavos de radios de curvatura $\sigma_i R$ y anchos $W_i R$ ($-n \leq i \leq n$). Consideraremos solamente estructuras simétricas. Las líneas medias de los espejos son generatrices del cilindro soporte de radio R . Su posición está determinada por el ángulo θ (ver Figs. 1 y 2). El espejo central ($\theta=0$) es tangente al círculo directriz en su punto medio.

De aquí en adelante, por simplicidad y sin que ello implique pérdida de generalidad, nos limitamos a considerar las proyecciones de los rayos incidentes y reflejados sobre una sección normal del sistema. Definamos un sistema de coordenadas x - y con origen en el punto medio del espejo central y cuyo eje x es tangente al círculo en dicho punto. Las coordenadas del centro de una tira cualquiera están dadas por

$$\begin{aligned}x(\theta, 0) &= \text{sen } \theta \\y(\theta, 0) &= 1 - \cos \theta\end{aligned}\quad (1)$$

donde se ha tomado R como unidad de medida. La tangente en el centro de esa tira forma un ángulo $\theta/4$ con el eje x. Los extremos de dos espejos sucesivos están sobre una línea paralela al eje y. Para caracterizar los distintos puntos de un espejo dado definimos un sistema de coordenadas u-v con centro en el punto medio del mismo; el eje u es tangente al espejo en dicho punto. Las coordenadas de un punto B(α) están dadas por

$$\begin{aligned}u(\alpha) &= \sigma \text{sen } \alpha \\v(\alpha) &= \sigma(1 - \cos \alpha)\end{aligned}\quad (2)$$

siendo α el ángulo medido desde el centro de curvatura; $-\alpha^\circ \leq \alpha \leq \alpha^\circ$, con $\alpha^\circ = W/2\sigma$. Las coordenadas x-y del punto B(α) son:

$$\begin{aligned}x(\theta, \alpha) &= x(\theta, 0) + u(\alpha) \cos \theta/4 - v(\alpha) \text{sen } \theta/4 \\y(\theta, \alpha) &= y(\theta, 0) + u(\alpha) \text{sen } \theta/4 + v(\alpha) \cos \theta/4.\end{aligned}\quad (3)$$

Consideremos un plano receptor DC (ver Fig. 2), normal al plano que contiene a la línea media del espejo central y al rayo proveniente del centro del Sol reflejado en dicha línea.

Definamos en la sección normal del sistema óptico un nuevo sistema de coordenadas x'-y', con centro en el punto medio del espejo central, y cuyo eje y' es normal al plano receptor. Se pasa del sistema x-y al x'-y' por medio de la relación

$$\begin{aligned}x' &= x \text{sen } \phi_0 - y \cos \phi_0 \\y' &= x \cos \phi_0 + y \text{sen } \phi_0\end{aligned}\quad (4)$$

donde ϕ_0 es el ángulo que forma la proyección del rayo proveniente del centro del Sol sobre la sección normal, con la dirección (-x).

3. Intersección de los rayos reflejados con el plano receptor

Obtendremos la expresión analítica de la intersección de un rayo reflejado cualquiera con el plano receptor. Sin pérdida de generalidad podemos considerar rayos incidentes contenidos en la sección normal del sistema óptico.

Si el rayo proveniente del centro del Sol forma un ángulo ϕ_0 con la dirección (-x), un rayo proveniente de otro punto forma un ángulo $\phi = \phi_0 + \beta$, donde $-\beta_0 \leq \beta \leq \beta_0$.

Consideremos un rayo que incide en el punto B(α) de una tira dada. El ángulo de incidencia i en ese punto es

$$i = 90^\circ - (\phi + \theta/4 + \alpha)$$

y por lo tanto el ángulo que forma el rayo reflejado con la dirección x es $(\Phi + \theta/2 + 2\alpha)$. La ecuación del rayo reflejado está dada entonces por

$$y = y(\theta, \alpha) + [x - x(\theta, \alpha)] \operatorname{tg}(\Phi + \theta/2 + 2\alpha). \quad (5)$$

La ecuación del plano receptor es

$$y = z + \operatorname{tg}(90^\circ + \Phi_0) \quad (6)$$

La intersección del rayo reflejado con el plano receptor se obtiene igualando (5) con (6). Las coordenadas de la intersección x_r , y_r resultan:

$$x_r = \frac{z - y(\theta, \alpha) + x(\theta, \alpha) \operatorname{tg}(\Phi + \theta/2 + 2\alpha)}{\operatorname{tg}(\Phi + \theta/2 + 2\alpha) + \operatorname{cotg} \Phi_0} \quad (7)$$

$$y_r = z - x_r \operatorname{cotg} \Phi_0.$$

Es conveniente expresar estos valores en el sistema $x'-y'$. Utilizando la relación (4) se obtiene

$$x'_r = \frac{z - y(\theta, \alpha) + x(\theta, \alpha) \operatorname{tg}(\Phi + \theta/2 + 2\alpha)}{[\operatorname{tg}(\Phi + \theta/2 + 2\alpha) + \operatorname{cotg} \Phi_0] \operatorname{sen} \Phi_0} - z \cos \Phi_0 \quad (8)$$

$$y'_r = z \operatorname{sen} \Phi_0.$$

Como puede observarse, y'_r depende sólo de Φ_0 y representa la distancia del plano receptor al punto medio del espejo central ($|\overline{AC}|$ en la Fig. 2).

4. Análisis e interpretación

Si bien las fórmulas exactas (8) permiten calcular numéricamente la distribución de energía en el receptor, es conveniente desarrollarlas en serie de potencias de α y β , para un mejor análisis.

Reemplazando en (8) las coordenadas $x(\theta, \alpha)$ e $y(\theta, \alpha)$ por sus expresiones dadas por (2) y (3), teniendo en cuenta que $\Phi = \Phi_0 + \beta$, y efectuando algunas transformaciones se obtiene

$$x'_r = \left[\sigma \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\Phi_0 + \theta/4 + 2\alpha + \beta) - \sigma(1 - \cos \alpha) \cos(\Phi_0 + \theta/4 + 2\alpha + \beta) - 2 \operatorname{sen}(\Phi_0 - \theta/2) \operatorname{sen}(2\alpha + \beta) \right] / \cos(\theta/2 + 2\alpha + \beta), \quad (9)$$

que es la expresión exacta de x'_r en función de Φ_0 , θ , σ , α y β .

Es conveniente hacer notar que para el rayo proveniente del centro del Sol ($\beta = 0$), reflejado en el centro de la tira ($\alpha = 0$), resulta $x'_r = 0$.

Desarrollando en serie los senos y cosenos contenidos en (9) hasta términos de segundo orden en α y β resulta una expresión de la forma

$$x'_r = A_1 \alpha + A_2 \beta + A_3 \alpha^2 + A_4 \alpha \beta + A_5 \beta^2 \quad (10)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\sigma \operatorname{sen}(\Phi_0 + \theta/4) - 4 \operatorname{sen}(\Phi_0 - \theta/2)}{\cos \theta/2} \\ A_2 &= -\frac{2 \operatorname{sen}(\Phi_0 - \theta/2)}{\cos \theta/2} \\ A_3 &= \frac{(3/2)\sigma^2 \cos(\Phi_0 + \theta/4) + 2\sigma \operatorname{sen}(\Phi_0 + \theta/4) \operatorname{tg} \theta/2 - 8 \operatorname{sen}(\Phi_0 - \theta/2) \operatorname{tg} \theta/2}{\cos \theta/2} \\ A_4 &= \frac{\sigma \cos(\Phi_0 + \theta/4) + [\sigma \operatorname{sen}(\Phi_0 + \theta/4) - 8 \operatorname{sen}(\Phi_0 - \theta/2)] \operatorname{tg} \theta/2}{\cos \theta/2} \\ A_5 &= \frac{2 \operatorname{sen}(\Phi_0 - \theta/2) \operatorname{tg} \theta/2}{\cos \theta/2} \end{aligned} \quad (11)$$

Para poder interpretar mejor estos resultados es conveniente dar una adecuada definición analítica de foco de un espejo dado. Si en un sistema arbitrario de coordenadas X-Y se tiene la ecuación de los rayos reflejados, es decir $X = X(Y, \Phi_0, \theta, \alpha, \beta, \sigma)$ con Φ_0 constante y σ y θ correspondientes al espejo considerado, definimos como foco al punto para el cual

$$\left. \frac{\partial X}{\partial \alpha} \right|_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}} = 0. \quad (12)$$

De esta ecuación se pueden obtener las coordenadas del foco X_f, Y_f .

Aplicando esta definición a la intersección de los rayos reflejados con el plano receptor (ver ecuación (10)), se ve que sólo si

$$A_1 = \left. \frac{\partial x'_r}{\partial \alpha} \right|_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}} = 0$$

el plano receptor está en el foco. Si $A_1 \neq 0$ hay desenfoque.

Ahora podemos discutir los distintos términos en el desarrollo de

x_r' . El término $A_1\alpha$ corresponde al desenfoque. El término $A_2\beta$ se debe al tamaño angular del Sol; como se ve de (11) no depende de σ . Los otros términos son correcciones de orden superior.

Discutiremos por separado el caso del espejo central. Para $\theta=0$ la expresión de los coeficientes del desarrollo de x_r' se reducen a:

$$\begin{aligned} A_1 &= (\sigma-4) \operatorname{sen} \Phi_0 \\ A_2 &= -2 \operatorname{sen} \Phi_0 \\ A_3 &= (3/2) \sigma \cos \Phi_0 \\ A_4 &= \sigma \cos \Phi_0 \\ A_5 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Observemos que si $\sigma=4$ es $A_1=0$, y por lo tanto el espejo central está enfocado para cualquier ángulo de incidencia Φ_0 .

Debido a esto el espejo central puede ser considerablemente mayor que los demás, estando el tamaño limitado solamente por los términos cuadráticos. El análisis numérico muestra que se puede tomar $W \sim 0,35$ lo que da $\alpha^\circ \sim 0,05$. Para incidencia normal ($\Phi_0 = 90^\circ$) queda sólo el término lineal en β ; para $\Phi_0 \sim 45^\circ$ los términos $A_2\beta$ y $A_3\alpha^2$ pueden ser del mismo orden para el borde del espejo mientras que $A_4\alpha\beta$ es mucho menor.

Para los otros espejos, salvo para un solo valor de Φ_0 , es $A_1 \neq 0$, y por lo tanto hay desenfoque. Esto obliga a reducir el tamaño de los espejos; el análisis numérico muestra que se puede tomar $W \sim 0,1$ ($\alpha^\circ \sim 0,01$); en este caso los términos en α^2 , $\alpha\beta$ y β^2 pierden importancia.

Por razones de comparación es conveniente analizar el caso de espejos planos. En este caso un punto del espejo se identifica directamente por la coordenada u ; el desarrollo en serie de potencias de u y β , de la intersección de un rayo reflejado con el plano receptor es

$$x_r' = A_1 u + A_2 \beta \quad (14)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\operatorname{sen}(\Phi_0 + \theta/4)}{\cos \theta/2} \\ A_2 &= -\frac{2 \operatorname{sen}(\Phi_0 - \theta/2)}{\cos \theta/2} \end{aligned} \quad (15)$$

Para cualquier θ , es $A_1 \neq 0$ cualquiera sea ϕ_0 , o sea en ningún caso hay focalización. Debido a que además A_1 es del orden de 1, el término $A_1 u$ es de mucho peso, lo que limita fuertemente el ancho de las tiras. El término en u^2 es nulo; los otros términos cuadráticos son despreciables.

5. Distribución del flujo de energía

Conociendo la intersección de los rayos con el plano receptor es posible calcular la distribución del flujo de energía en el mismo. Para ello es conveniente tener en cuenta que en cada punto del espejo inciden rayos provenientes de todos los puntos del Sol, que forman un cono con vértice en dicho punto y semiapertura angular β_0 . Estos rayos, al reflejarse, forman nuevamente un cono de igual apertura que es interceptado por el plano receptor; la intersección del cono con dicho plano es una elipse de semiejes a y b ; a en la dirección x' , b en la dirección normal longitudinal z .

Supondremos en el cálculo que sigue que los espejos son perfectos.

El flujo incidente en un elemento de superficie $\sigma d\alpha dz$ del espejo es

$$I_0 \sin(\phi_0 + \theta/4 + \alpha) \sigma d\alpha dz$$

donde I_0 es la intensidad de la radiación solar; al reflejarse se distribuye sobre el plano receptor en una superficie elíptica de área $S = \pi \cdot a \cdot b$, dando una contribución a la densidad de flujo

$$\frac{1}{\pi \cdot a \cdot b} I_0 \sin(\phi_0 + \theta/4 + \alpha) \sigma d\alpha dz. \quad (16)$$

Desplazando el elemento de espejo en la dirección z , se desplaza la elipse en la misma dirección. Habrá contribución a la densidad de flujo en un punto dado del receptor, mientras dicho punto se mantenga dentro de la elipse; o sea para elipses desplazadas en la dirección z en una distancia igual a la cuerda correspondiente, l_c . La contribución a la densidad de flujo en un punto dado x' del receptor, correspondiente a una franja de ancho $\sigma d\alpha$ del espejo, es entonces

$$dI(\phi_0, \theta, \sigma, \alpha, x') = \frac{I_0}{\pi \frac{a}{b}} \sin(\phi_0 + \theta/4 + \alpha) \sigma l_c d\alpha \quad (17)$$

con

$$l_c = \frac{2b}{a} \sqrt{a^2 - [x' - x'_r(\alpha, 0)]^2} \quad (18)$$

donde $x'_r(\alpha, \theta)$ es la coordenada del centro de la elipse, que con suficiente aproximación es la coordenada x'_r de la intersección del rayo proveniente del centro del Sol ($\beta = 0$).

Para hallar la densidad de flujo total en un punto, debida a un espejo, hay que integrar sobre α , entre un $\alpha_{\min.}$ y un $\alpha_{\max.}$. 0 sea

$$I(\phi_0, \theta, \sigma, x') = \frac{2\sigma}{\pi} I_0 \int_{\alpha_{\min.}}^{\alpha_{\max.}} \sin(\phi_0 + \theta/4 + \alpha) \frac{\sqrt{a^2 - [x' - x'_r(\alpha, 0)]^2}}{a^2} d\alpha. \quad (19)$$

El semieje mayor de la elipse, a , se puede calcular como:

$$a = (1/2) [x'_r(\alpha, \beta_0) - x'_r(\alpha, -\beta_0)] \quad (20)$$

Los límites de la integral, $\alpha_{\min}$ y $\alpha_{\max}$, se obtienen teniendo en cuenta las sombras, la interceptación de los espejos vecinos, y el valor del radiando que debe ser positivo (si es negativo o nulo la elipse correspondiente no contribuye; ver Apéndice).

La expresión (19) da la contribución de un espejo a la densidad de flujo de energía en un punto x' del plano receptor. Para obtener la contribución de todos los espejos hay que sumar sobre los mismos:

$$I(\Phi_0, x') = \sum_{i=-n}^n I(\Phi_0, \theta_i, \sigma_i, x') \quad (21)$$

La ecuación (21) da la densidad de flujo de energía en un punto x' del plano receptor cuando el rayo proveniente del centro del Sol está en la sección normal del sistema. En el caso general hay que multiplicar $I(\Phi_0, x')$ por $\cos \psi$, donde ψ es el ángulo que forma el rayo mencionado con su proyección sobre la sección normal.

Si se divide $I(\Phi_0, x')$ por la intensidad incidente se obtiene lo que definimos como factor de concentración geométrico correspondiente al punto x' ,

$$f_c(\Phi_0, x') = \frac{I(\Phi_0, x')}{I_0} \quad (22)$$

Lo llamamos geométrico porque se han considerado espejos libres de defectos y de reflectividad igual a 1; $f_c(\Phi_0, x')$ es una propiedad intrínseca del sistema óptico, independiente del material con el que se lo construya; la influencia de las características del material se debe tener en cuenta separadamente.

Suponiendo un receptor plano de un ancho dado Δ , ubicado entre x'_1 y x'_2 , el factor de concentración geométrico medio es

$$\bar{f}_c(\Phi) = \frac{1}{\Delta} \int_{x'_1}^{x'_2} f_c(\Phi_0, x') dx' \quad (23)$$

El flujo de energía que cae fuera del receptor de ancho Δ se define como pérdidas geométricas en el receptor. Las pérdidas geométricas en los espejos son las debidas a la radiación que incide en los espacios comprendidos entre espejos, y a la luz reflejada que es interceptada y no llega al plano receptor.

La eficiencia del concentrador será tanto mayor cuanto mayor sea $\bar{f}_c$ y cuanto menores sean las pérdidas geométricas.

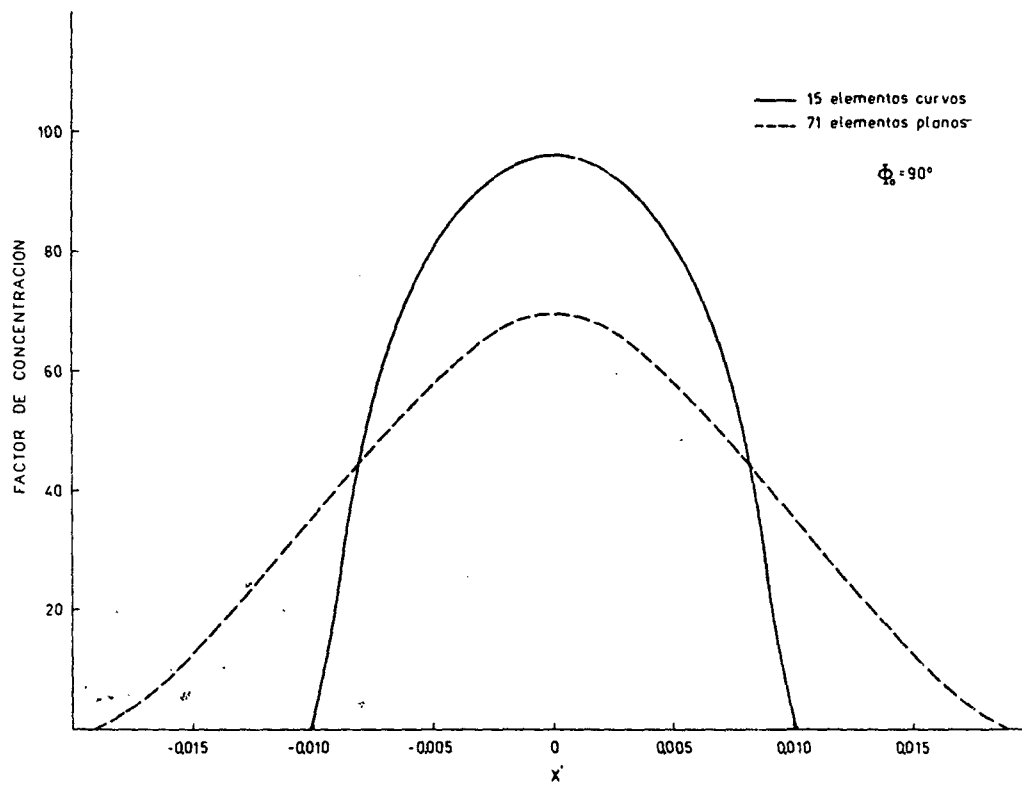


Figura 3

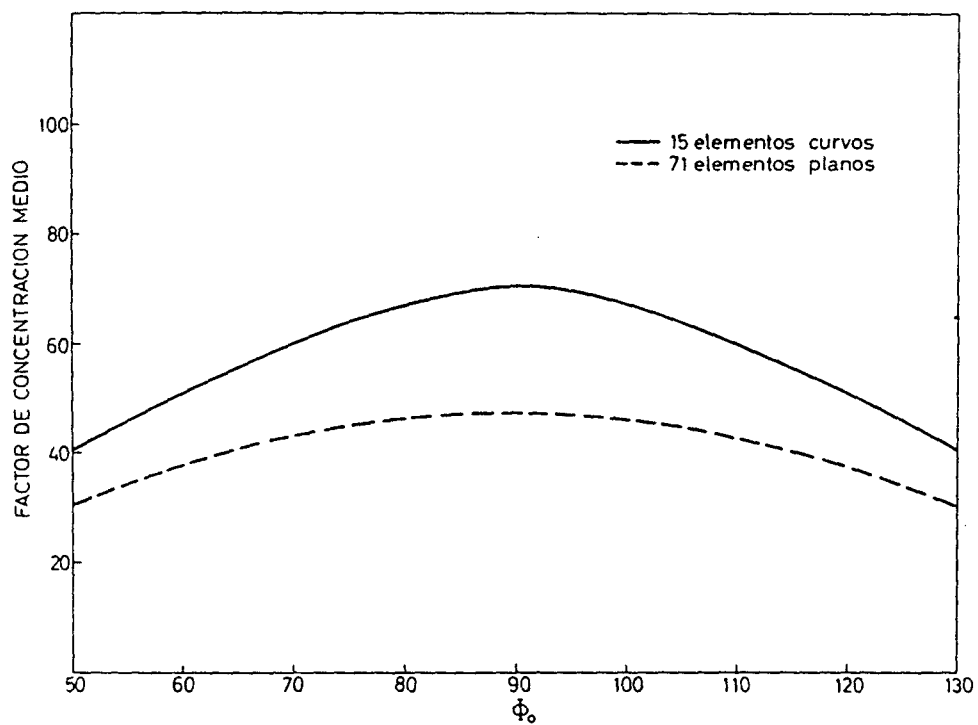


Figura 4

6. Resultados

Se han analizado diferentes estructuras con aberturas del orden de 90°

La de menor número de espejos está constituida por 15 espejos ($n = 7$) con $\sigma = 4$; el central de ancho $W_0 = 0,35$, y los demás de ancho decreciente; el factor de concentración geométrico está representado en la Fig. 3 para $\phi = 90^\circ$; en la Fig. 4 se da el factor de concentración geométrico medio para un receptor de ancho $\Delta = 0,02$, entre $\phi_0 = 50^\circ$ y $\phi_0 = 130^\circ$. En las mismas figuras se representan los resultados obtenidos para un concentrador con 71 tiras planas ($n = 35$), de $W = 0,02$; el ancho del receptor es en este caso $\Delta = 0,028$. Las pérdidas geométricas son similares en ambos casos.

También se han analizado estructuras con espejos curvos iguales; los anchos utilizados fueron $W = 0,06$ y $W = 0,07$ con $n = 12$ y $n = 10$ respectivamente. Si bien el factor de concentración es algo mayor que en el caso anterior, eso se logra a expensas de un número mayor de espejos.

Referencias

- 1) J.L. Russell, Jr., E.P. DePlomb y R.K. Bansal, "Principles of the Fixed Mirror Solar Concentrator", Informe GA-A12902 de la General Atomic Company, California, EE.UU. de N.A. (1974).
- 2) R. Nicolás, J.A. Moragues, R. Platzeck y W. Scheuer, "Simulación del comportamiento y etapa inicial de la construcción de un concentrador fijo a espejo facetado". Actas de la 3^{ra} Reunión de Trabajo de la ASADES, pág. 191, Mendoza (1977).

APENDICE

Cálculo de los θ_i

Consideraremos espejos cuya posición relativa es la descripta en la Sección 2. Las ubicaciones de sus centros están dadas por los ángulos θ_i . Teniendo en cuenta que consideramos estructuras simétricas resulta $\theta_{-i} = -\theta_i$; como además $\theta_0 = 0$, sólo es necesario calcular θ_i para $i = 1, \dots, n$.

En la Fig. 5 se han dibujado las cuerdas desde el centro a los extremos de dos espejos sucesivos. De la misma se obtiene

$$|\overline{LD}| = |\overline{HA}| + |\overline{AI}| + |\overline{IG}|$$

o sea

$$\text{sen } \theta_i = \text{sen } \theta_{i-1} - |\overline{AB}| \cos \hat{2} - |\overline{CD}| \cos \hat{1}.$$

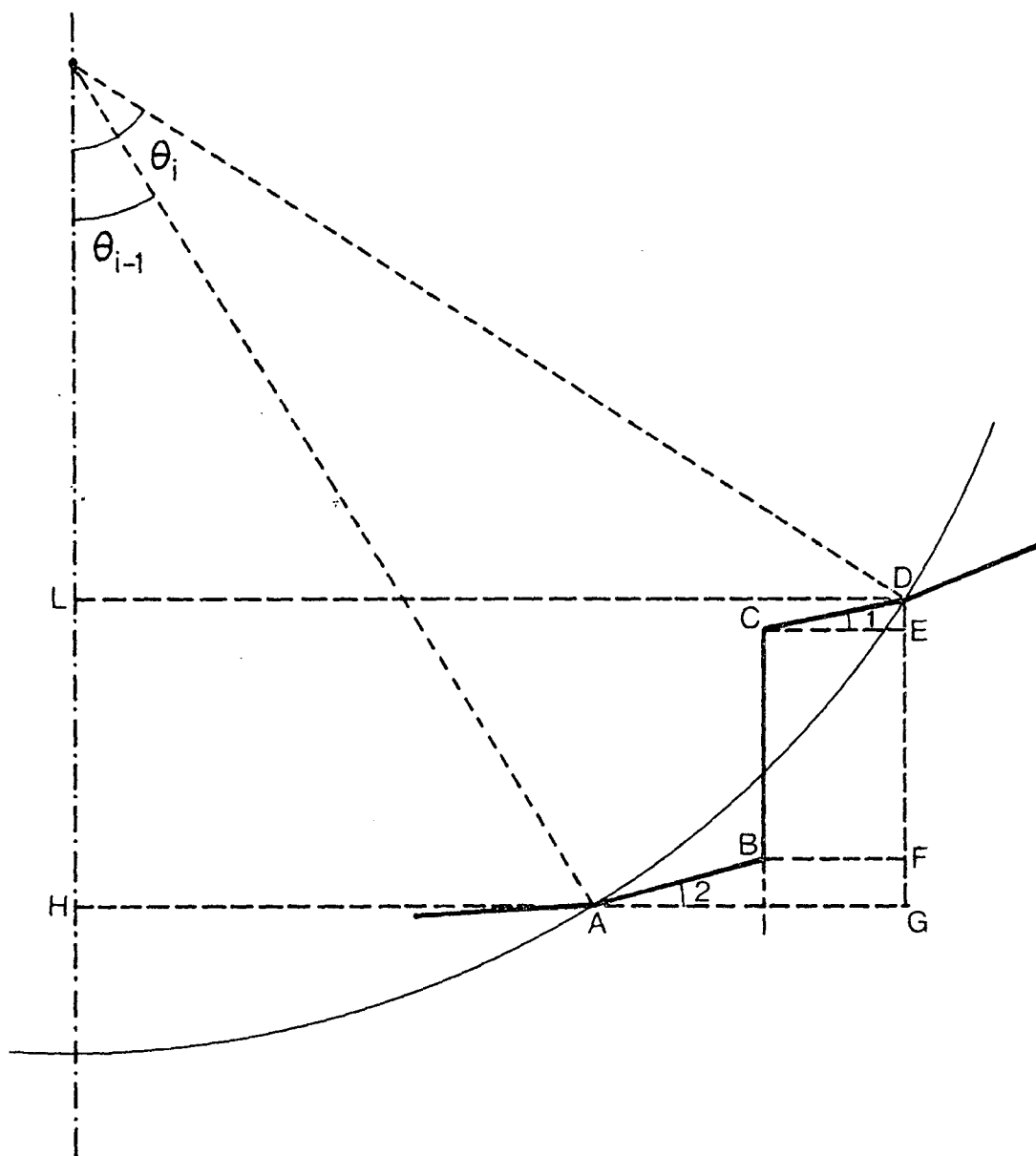


Figura 5

Teniendo en cuenta que

$$\hat{1} = \frac{\theta_i}{4} - \frac{\alpha_i^o}{2}$$

$$\hat{2} = \frac{\theta_{i-1}}{4} + \frac{\alpha_{i-1}^o}{2}$$

$$|\overline{AB}| = \frac{W_{i-1}}{2} \frac{1}{\cos(\alpha_{i-1}^o/2)} \approx \frac{W_{i-1}}{2}$$

(24)

$$|\overline{CD}| = \frac{W_i}{2} \frac{1}{\cos(\alpha_i/2)} \approx \frac{W_i}{2}$$

se tiene, con suficiente aproximación, para $i = 1, \dots, n$:

$$\text{sen } \theta_i = \text{sen } \theta_{i-1} + \frac{W_{i-1}}{2} \cos\left(\frac{\theta_{i-1}}{4} + \frac{\alpha_{i-1}^o}{2}\right) + \frac{W_i}{2} \cos\left(\frac{\theta_i}{4} - \frac{\alpha_i^o}{2}\right). \quad (25)$$

Esta fórmula permite calcular por recurrencia los valores de θ_i .

Cálculo de los límites de integración

Para el cálculo de los límites de integración, $\alpha_{\text{mín}}$ y $\alpha_{\text{máx}}$. (ver ecuación 19)), se necesita conocer la parte de espejo no iluminada, que llamaremos e, y la parte de espejo cuya luz reflejada es interceptada, que llamaremos d.

Ambas cantidades son función de la separación en la dirección y de dos espejos sucesivos; h_{i-1} es la separación entre los espejos correspondientes a θ_{i-1} y a θ_i ; en la Fig. 5, h_{i-1} es la distancia $|\overline{BC}|$. Siendo

$$|\overline{BC}| = |\overline{DG}| - |\overline{DE}| - |\overline{FG}|$$

resulta

$$h_{i-1} = \cos \theta_{i-1} - \cos \theta_i - |\overline{AB}| \text{sen } \hat{2} - |\overline{CD}| \text{sen } \hat{1}.$$

Reemplazando los valores de $\hat{1}$, $\hat{2}$, $|\overline{AB}|$ y $|\overline{CD}|$ dados por (24) se obtiene:

$$h_{i-1} = \cos \theta_{i-1} - \cos \theta_i - \frac{W_{i-1}}{2} \text{sen}\left(\frac{\theta_{i-1}}{4} + \frac{\alpha_{i-1}^o}{2}\right) - \frac{W_i}{2} \text{sen}\left(\frac{\theta_i}{4} - \frac{\alpha_i^o}{2}\right). \quad (26)$$

Para valores de θ negativos hay que usar la relación $h_{-i} = h_i$.

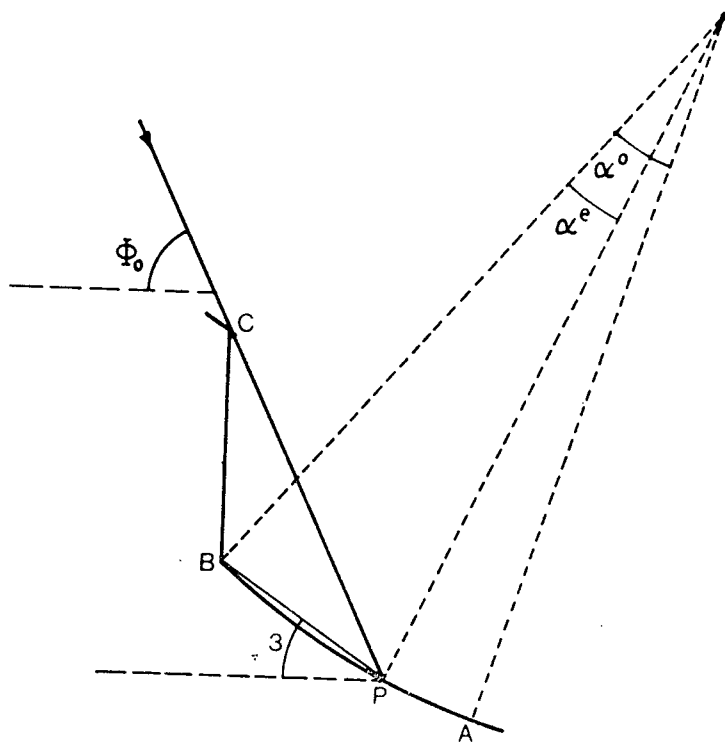


Figura 6

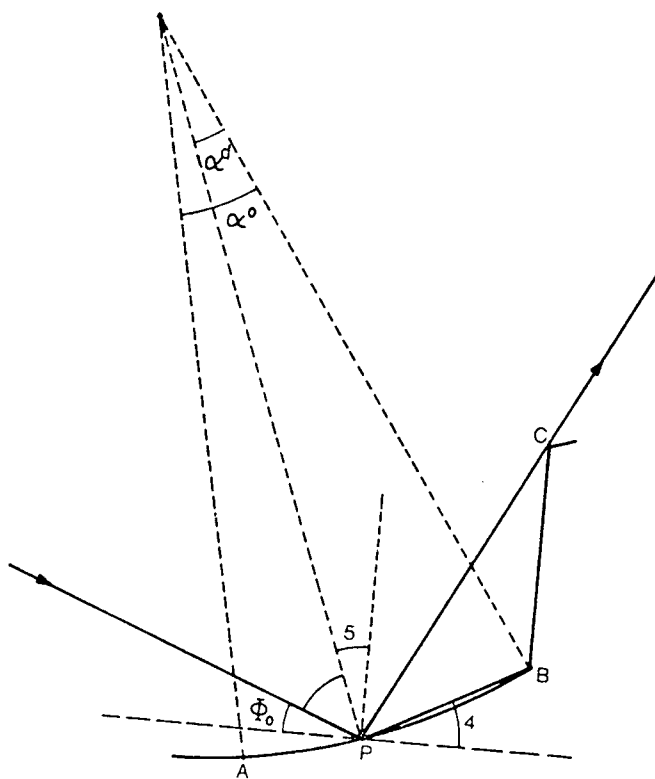


Figura 7

Las cantidades e y d se calculan para la luz proveniente del centro del Sol, y para ángulos ϕ_0 menores que 90° . En este caso los espejos que tienen $e \neq 0$ son los que corresponden a $\theta \leq 0$ y los que tienen $d \neq 0$ los que corresponden a $\theta \geq 0$.

En la Fig. 6, e es la distancia $|\overline{BP}|$; siendo $|\overline{BC}| = h$ se tiene

$$\frac{e}{\text{sen } \tilde{C}} = \frac{h}{\text{sen } \tilde{P}} . \quad (27)$$

Teniendo en cuenta que

$$\tilde{J} = \frac{|\theta|}{4} + \alpha^e - \frac{\alpha^e}{2}$$

donde $\alpha^e = \frac{e}{\sigma}$, resultan los siguientes valores para los ángulos del triángulo

$$\tilde{P} = \phi_0 - \tilde{J} = \phi_0 + \frac{\theta}{4} - \alpha^e + \frac{\alpha^e}{2}$$

$$\tilde{C} = 90^\circ - \phi_0 .$$

Reemplazando estas expresiones en (27) se obtiene

$$e = h \frac{\cos \phi_0}{\text{sen} \left(\phi_0 + \frac{\theta}{4} - \alpha^e + \frac{\alpha^e}{2} \right)} , \quad \theta \leq 0$$

$$e = 0 \quad \theta > 0 . \quad (28)$$

En la Fig. 7, d es la distancia $|\overline{PB}|$; siendo $|\overline{BC}| = h$ se tiene

$$\frac{d}{\text{sen } \tilde{C}} = \frac{h}{\text{sen } \tilde{P}} . \quad (29)$$

Teniendo en cuenta que

$$\tilde{i} = 90^\circ - \left(\phi_0 + \frac{\theta}{4} + \alpha^e - \alpha^d \right)$$

$$\tilde{4} = \frac{\theta}{4} + \alpha^e - \frac{\alpha^d}{2}$$

$$\tilde{5} = \frac{\theta}{4} + \alpha^e - \alpha^d$$

donde $\alpha^d = \frac{d}{\sigma}$, resulta

$$\tilde{B} = 90^\circ + \tilde{\zeta} = 90^\circ + \frac{\theta}{4} + \alpha^\circ - \frac{\alpha^d}{2}$$

$$\tilde{C} = i - \tilde{\xi} = 90^\circ - \tilde{\Phi}_0 - \frac{\theta}{2} - 2\alpha^\circ + 2\alpha^d$$

$$\tilde{P} = 180^\circ - \tilde{B} - \tilde{C} = \tilde{\Phi}_0 + \frac{\theta}{4} + \alpha^\circ - \frac{3}{2}\alpha^d.$$

Reemplazando las expresiones para $\tilde{C}$ y $\tilde{P}$ en (29) se obtiene

$$d = h \frac{\cos\left(\tilde{\Phi}_0 + \frac{\theta}{2} + 2\alpha^\circ - 2\alpha^d\right)}{\sin\left(\tilde{\Phi}_0 + \frac{\theta}{4} + \alpha^\circ - \frac{3}{2}\alpha^d\right)}, \quad \theta \geq 0$$

(30)

$$d = 0, \quad \theta < 0.$$

Las expresiones para e y d dadas por (28) y (30) respectivamente, son válidas para $\theta_a/2 \leq \Phi_0 \leq 90^\circ$, donde θ_a es la abertura angular del sistema. Para $\Phi_0 < \theta_a/2$ es necesario calcular las sombras producidas por espejos no consecutivos.

En función de e y d se pueden expresar los límites de integración $\alpha_{\min.}$ y $\alpha_{\max.}$ para la ecuación (19):

$$\alpha_{\min.} = -\frac{1}{\sigma} \left(\frac{W}{2} - e \right)$$

(31)

$$\alpha_{\max.} = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{W}{2} - d \right)$$

con la condición adicional que los valores de α , entre $\alpha_{\min.}$ y $\alpha_{\max.}$, para los cuales el radicando en (19) sea negativo o nulo, no contribuyen a la integral.

Agradecimientos

Los cálculos numéricos fueron realizados con la valiosa colaboración de Julio Durán y Rubén Nicolás del Grupo de Energía Solar de la C.N.E.A.