

01.57.01

C.N.E.A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº 1	AÑO 1957

REPUBLICA ARGENTINA

PUBLICACIONES

DE LA

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA

SERIE FISICA

VOL. I — Nº 15

CUANTIFICACION DE CAMPOS DE MASA NULA

PARTE I

CAMPOS TENSORIALES

POR

C. G. BOLLINI



BUENOS AIRES

1957

REPUBLICA ARGENTINA

PUBLICACIONES

DE LA

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA

SERIE FISICA

VOL. I — N° 15

CUANTIFICACION DE CAMPOS DE MASA NULA

PARTE I

CAMPOS TENSORIALES

POR

C. G. BOLLINI



BUENOS AIRES

1957

CUANTIFICACION DE CAMPOS DE MASA NULA

PARTE I

CAMPOS TENSORIALES *

POR C. G. BOLLINI

1. Introducción

El campo de una partícula elemental de masa nula y spin entero, satisface las ecuaciones ¹:

$$\partial_\mu \partial_\mu A_{\nu_1 \dots \nu_s} = 0 \quad (1.1)$$

$$\partial_{\nu_1} A_{\nu_1 \dots \nu_s} = 0 \quad (1.2)$$

$$\delta_{\nu_1 \nu_2} A_{\nu_1 \dots \nu_s} = 0 \quad (1.3)$$

Las cantidades $A_{\nu_1 \dots \nu_s}$ constituyen las componentes de un tensor simétrico de rango s . (1.1) es la ecuación de campo propiamente dicha, (1.2) y (1.3) son las condiciones suplementarias que aseguran una teoría basada en una representación irreducible de partículas de spin único s .

En el método usual de cuantificación, las componentes $A_{\nu_1 \dots \nu_s}$ del campo, son tomadas como variables canónicas y se imponen sobre ellas las relaciones de conmutación canónicas. Sin embargo, esas relaciones no son compatibles con las condiciones suplementarias (1.2) y (1.3). Se recurre entonces a adoptar una condición suplementaria sobre el vector de estado, restringiendo los estados posibles a aquellos en los que (1.2) y (1.3) son satisfechas (en valor medio). No obstante, este procedimiento no es universalmente aceptado ².

Nosotros vamos a considerar el problema desde otro punto de vista.

Tomaremos a (1.2) y (1.3) como vínculos entre las $A_{\nu_1 \dots \nu_s}$ y por lo tanto, antes de cuantificar, extraeremos las componentes indepen-

* Trabajo presentado para su publicación el 20-8-57.

¹ H. UMEZAWA: « Quantum Field Theory » (1956).

² Por ejemplo: T. KIMURA, Prog. Theor. Phys. 16 (1956) 555; S. OZAKI, Prog. Theor. Phys. 14 (1955) 511.

dientes del tensor de campo. Como consecuencia, resultará una generalización de un método debido a J. G. Valatín ³ para el campo vectorial. Por supuesto, las relaciones de conmutación que resultarán, serán compatibles con las condiciones suplementarias.

2. Descomposición del tensor de campo.

Partiendo del tensor simétrico de rango s , $A_{\nu_1 \dots \nu_s}$, que satisface las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3), vamos a definir por recurrencia los siguientes tensores:

$$A^{(0)} = n_{\nu_1} \dots n_{\nu_s} A_{\nu_1 \dots \nu_s} \quad (2.4)$$

$$A^{(0)}_{\nu_1 \dots \nu_s} = \partial^{-s} \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_s} A^{(0)} \quad (2.5)$$

$$A^{(r)}_{\nu_1 \dots \nu_r} = n_{\nu_{r+1}} \dots n_{\nu_s} (A_{\nu_1 \dots \nu_s} - \sum_{t=0}^{r-1} A^{(t)}_{\nu_1 \dots \nu_s}) \quad (2.6)$$

$$A^{(r)}_{\nu_1 \dots \nu_s} = \partial^{-(s-r)} \partial_{\nu_{r+1}} \dots \partial_{\nu_s} A^{(r)}_{\nu_1 \dots \nu_r} + (\text{sim}) \quad (2.7)$$

En estas fórmulas, n_ν es cualquier vector unitario de tiempo $n_\nu n_\nu = -1$. «(sim)» significa todos los términos necesarios para que el tensor del miembro izquierdo resulte simétrico. ∂ es $n_\nu \partial_\nu$ y ∂^{-1} es el operador inverso ⁴.

Obsérvese que (2.6) define un tensor de rango r , mientras que de (2.7) se obtiene un tensor del mismo rango (s) que el tensor original $A_{\nu_1 \dots \nu_s}$. Además (2.6) y (2.7) incluyen respectivamente a (2.4) y (2.5) si se acepta que para $r=0$ la sumatoria debe ser suprimida.

Los tensores que hemos definido satisfacen las ecuaciones (1.1) (1.2) y (1.3) porque el tensor A las satisface. Por otra parte cumplen también con

$$n_{\nu_1} A^{(r)}_{\nu_1 \dots \nu_r} = 0 \quad r \neq 0 \quad (2.8)$$

$$n_{\nu_{r+1}} \dots n_{\nu_s} A^{(r)}_{\nu_1 \dots \nu_s} = A^{(r)}_{\nu_1 \dots \nu_r} \quad (2.9)$$

$$n_{\nu_r} \dots n_{\nu_s} A^{(r)}_{\nu_1 \dots \nu_s} = 0 \quad r \neq 0 \quad (2.10)$$

Vamos a demostrar que estas ecuaciones son válidas para r , si (2.9) se cumple para $r-1$. En efecto, multiplicando (2.6) por n_{ν_r} tenemos

³ J. G. VALATIN : Danske Vid. Selsk. Mat. Fy Med. **26** (1951) n° 13.

⁴ F. COESTER y J. JAUCH : Phys. Rev. **78** (1950) 149.

$$\begin{aligned} n_{\nu_r} A_{\nu_1 \dots \nu_r}^{(r)} &= n_{\nu_s} \dots n_{\nu_r} (A_{\nu_1 \dots \nu_s} - \sum_{t=0}^{r-1} A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(t)}) \\ &= n_{\nu_r} \dots n_{\nu_s} (A_{\nu_1 \dots \nu_s} - \sum_{t=0}^{r-2} A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(t)}) - n_{\nu_r} \dots n_{\nu_s} A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(r-1)} \end{aligned}$$

Por la (2.6), el primer término del segundo miembro es $A_{\nu_1 \dots \nu_{r-1}}^{(r-1)}$ y por la (2.9), supuesta válida para $r-1$, el segundo término es también $A_{\nu_1 \dots \nu_{r-1}}^{(r-1)}$. De aquí se sigue la nulidad del primer miembro.

Multiplicando ahora la (2.7) por $n_{\nu_{r+1}} \dots n_{\nu_s}$ deducimos

$$n_{\nu_{r+1}} \dots n_{\nu_s} A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(r)} = A_{\nu_1 \dots \nu_r}^{(r)} + n_{\nu_{r+1}} \dots n_{\nu_s} (\text{sim})$$

Pero los términos que simetrizan al tensor son tales que sólo difieren del primer término del segundo miembro de (2.7) por el intercambio de algún subíndice. Ello significa que en $n_{\nu_{r+1}} \dots n_{\nu_s} \cdot (\text{sim})$ aparecerán términos de la forma

$$n \dots \partial^{-(s-r)} \cdot \partial \dots n_{\nu_t} A_{\nu_1 \dots \nu_t \dots \nu_r}^{(r)}$$

que son nulos por la (2.8). Esto demuestra la validez de (2.8) y (2.9) para r cualquiera.

La (2.10) se demuestra fácilmente de la (2.8) y de la (2.9).

Si en (2.6) hacemos $r=s$, obtenemos

$$A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(s)} = A_{\nu_1 \dots \nu_s} - \sum_{t=1}^{s-1} A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(t)}$$

es decir

$$A_{\nu_1 \dots \nu_s} = \sum_{t=0}^s A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(t)} \quad (2.11)$$

Por tener nula la divergencia y por la fórmula (2.8), los tensores $A_{\nu_1 \dots \nu_r}^{(r)}$ ($r \neq 0$) son completamente ortogonales a ∂_ν y a n_ν . Por lo tanto tienen el mismo número de componentes independientes que un tensor simétrico y de traza nula en un espacio de dos dimensiones. Este número es dos. Por supuesto, siendo $A^{(0)}$ un escalar, posee una sola componente independiente. De la (2.7) deducimos que $A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(r)}$ tiene el mismo número de componentes independientes que $A_{\nu_1 \dots \nu_r}^{(r)}$ (r cualquiera).

La ecuación (2.11) brinda entonces una descomposición del tensor de campo primitivo en $s+1$ tensores con un total de $2s+1$ componentes independientes. De esos $s+1$ tensores componentes, el $A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(0)}$ es puramente longitudinal, mientras que el $A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(s)}$ es totalmente transversal. En general el tensor $A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(r)}$ es r veces transversal o $s-r$ veces longitudinal, queriendo con ello significar que solamente la « $(s-r+1)$ -uple» divergencia transversal de $A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(r)}$ es nula. La divergencia transversal mencionada se halla mediante el operador

$$D_{\nu} = n_{\nu} \partial + \partial_{\nu} \quad (2.12)$$

siendo $n_{\nu} D_{\nu} = n_{\nu} n_{\nu} \partial + n_{\nu} \partial_{\nu} = 0$

De la (2.9) se deduce que la divergencia « $s-r$ »-uple de $A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(r)}$ da

$$D_{\nu_{r+1}} \dots D_{\nu_s} A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(r)} = \partial^{(s-r)} n_{\nu_{r+1}} \dots n_{\nu_s} A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(r)} = \partial^{(s-r)} \cdot A_{\nu_1 \dots \nu_r}^{(r)} \quad (2.13)$$

Mientras que al tomar la divergencia transversal « $(s-r+1)$ -uple» obtenemos, por la (2.8) y la (2.13),

$$D_{\nu_r} \dots D_{\nu_s} A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(r)} = \partial^{(s-r)} D_{\nu_r} A_{\nu_1 \dots \nu_r}^{(r)} = 0 \quad (2.14)$$

La última fórmula dice también que todos los tensores $A_{\nu_1 \dots \nu_r}^{(r)}$ ($r \neq 0$) son completamente transversales.

3. Tensores de polarización.

Tomemos ahora dos operadores de derivación α y β que cumplan con las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} n_{\nu} \alpha_{\nu} &= 0 & n_{\nu} \beta_{\nu} &= 0 \\ \alpha_{\nu} \partial_{\nu} &= 0 & \beta_{\nu} \partial_{\nu} &= 0 \\ \alpha_{\nu} \alpha_{\nu} &= 1 & \beta_{\nu} \beta_{\nu} &= 1 \\ \alpha_{\nu} \beta_{\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Estos operadores pueden ser contruídos fácilmente mediante una transformación de Fourier y no son únicos pues las condiciones (3.1) las cumplen todo par de vectores ortogonales que pertenezcan a un plano perpendicular a n_{ν} y a ∂_{ν} .

Vamos ahora a definir por recurrencia los siguientes operadores tensoriales

$$\alpha_{\nu_1 \dots \nu_{r+1}} = \alpha_{\nu_1 \dots \nu_r} \alpha_{\nu_{r+1}} - \beta_{\nu_1 \dots \nu_r} \beta_{\nu_{r+1}} \quad (3.2)$$

$$\beta_{\nu_1 \dots \nu_{r+1}} = \alpha_{\nu_1 \dots \nu_r} \beta_{\nu_{r+1}} + \beta_{\nu_1 \dots \nu_r} \alpha_{\nu_{r+1}} \quad (3.3)$$

Para $r = 2$ tenemos

$$\alpha_{\nu_1 \nu_2} = \alpha_{\nu_1} \alpha_{\nu_2} - \beta_{\nu_1} \beta_{\nu_2}$$

$$\beta_{\nu_1 \nu_2} = \alpha_{\nu_1} \beta_{\nu_2} + \beta_{\nu_1} \alpha_{\nu_2}$$

Es evidente que estos dos tensores son simétricos y de traza nula, vamos ahora a demostrar que todos los tensores dados por (3.2) y (3.3) tienen la misma propiedad.

Efectuemos la demostración por recurrencia. Supongamos entonces que los tensores α y β de rango r son simétricos y de traza nula. La (3.2) y la (3.3) nos dicen entonces $\alpha_{\nu_1 \dots \nu_{r+1}}$ y $\beta_{\nu_1 \dots \nu_{r+1}}$ poseen esa misma propiedad al menos en los r primeros índices. Es suficiente, por lo tanto, ver si esas propiedades se cumplen cuando se toman uno cualquiera de los r primeros índices y el subíndice de orden $r + 1$. Efectuaremos la demostración para los dos últimos subíndices.

Por doble aplicación de la (3.2) se sigue que

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu_1 \dots \nu_{r+1}} &= (\alpha_{\nu_1 \dots \nu_{r-1}} \alpha_{\nu_r} - \beta_{\nu_1 \dots \nu_{r-1}} \beta_{\nu_r}) \alpha_{\nu_{r+1}} - (\alpha_{\nu_1 \dots \nu_{r-1}} \beta_{\nu_r} + \\ &\quad + \beta_{\nu_1 \dots \nu_{r-1}} \alpha_{\nu_r}) \beta_{\nu_{r+1}} \\ &= \alpha_{\nu_1 \dots \nu_{r-1}} (\alpha_{\nu_r} \alpha_{\nu_{r+1}} - \beta_{\nu_r} \beta_{\nu_{r+1}}) - \beta_{\nu_1 \dots \nu_{r-1}} (\alpha_{\nu_r} \beta_{\nu_{r+1}} + \beta_{\nu_r} \alpha_{\nu_{r+1}}) \\ &= \alpha_{\nu_1 \dots \nu_{r-1}} \alpha_{\nu_r \nu_{r+1}} - \beta_{\nu_1 \dots \nu_{r-1}} \beta_{\nu_r \nu_{r+1}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Análogamente

$$\beta_{\nu_1 \dots \nu_{r+1}} = \alpha_{\nu_1 \dots \nu_{r-1}} \beta_{\nu_r \nu_{r+1}} + \beta_{\nu_1 \dots \nu_{r-1}} \alpha_{\nu_r \nu_{r+1}} \quad (3.5)$$

La (3.4) y la (3.5), al par que brindan una nueva forma de escribir la (3.2) y la (3.3), demuestran que también en los dos últimos subíndices se cumplen las propiedades de anulaci6n de la traza y de simetría.

Es fácil ver también (por recurrencia) que

$$\alpha_{\nu_1 \dots \nu_r} \beta_{\nu_1 \dots \nu_r} = 0 \quad (3.6)$$

y que

$$\alpha_{\nu_1 \dots \nu_r} \alpha_{\nu_1 \dots \nu_r} = \beta_{\nu_1 \dots \nu_r} \beta_{\nu_1 \dots \nu_r} = 2^{r-1} \quad (3.7)$$

Por último, todos estos tensores son completamente ortogonales a n_i y ∂_i . A $\alpha_{\nu_1 \dots \nu_r}$ y $\beta_{\nu_1 \dots \nu_r}$ les daremos el nombre de *tensores de polarización transversal* de rango r .

4. Coordenadas canónicas del campo.

Los tensores de polarización transversal de rango r , sirven como tensores de base para expresar cualquier tensor del mismo rango que sea también simétrico y de traza nula. Tal es el caso de los tensores $A_{\nu_1 \dots \nu_r}^{(r)}$ dados por la (2.6). Las componentes de $A_{\nu_1 \dots \nu_r}^{(r)}$ según α y β son

$$Q^{(2r)} = 2^{1-r} \cdot \alpha_{\nu_1 \dots \nu_r} A_{\nu_1 \dots \nu_r}^{(r)} \quad (4.1)$$

$$Q^{(2r+1)} = 2^{1-r} \cdot \beta_{\nu_1 \dots \nu_r} A_{\nu_1 \dots \nu_r}^{(r)} \quad (4.2)$$

De manera que $A_{\nu_1 \dots \nu_r}^{(r)}$ puede ser escrito como

$$A_{\nu_1 \dots \nu_r}^{(r)} = \alpha_{\nu_1 \dots \nu_r} Q^{(2r)} + \beta_{\nu_1 \dots \nu_r} Q^{(2r+1)} \quad (4.3)$$

Para $r = 0$, definimos simplemente :

$$A^0 = Q^{(1)} \quad (4.4)$$

Las $2s+1$ cantidades escalares $Q^{(\rho)}$ ($\rho = 1, \dots, 2s+1$) son variables libres que nosotros tomaremos como coordenadas canónicas del campo. Ellas satisfacen solamente las ecuaciones

$$\partial_i \partial_i Q^{(\rho)} = 0 \quad (4.5)$$

sin ninguna clase de condición suplementaria.

Mediante la (2.7) y la (4.3) podemos poner los tensores $A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(r)}$ en función de las $Q^{(\rho)}$. Finalmente, haciendo uso de la (2.11) se logra expresar el tensor de campo en función de las coordenadas canónicas elegidas.

5. Transformaciones de « Gauge ».

Si un tensor $A_{\nu_1 \dots \nu_{s-1}}$ satisface las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3), entonces de la ecuación.

$$G_{\nu_1 \dots \nu_s} = \partial_{\nu_s} \wedge_{\nu_1 \dots \nu_{s-1}} + (\text{sim}) \quad (5.1)$$

se sigue que también

$$B_{\nu_1 \dots \nu_s} = A_{\nu_1 \dots \nu_s} + G_{\nu_1 \dots \nu_s} \quad (5.2)$$

satisface las mismas ecuaciones.

La transformación $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ dada por la (5.2) se denomina transformación de « gauge ».

Utilizando los mismos procedimientos expuestos en el número 2, el tensor $A_{\nu_1 \dots \nu_{s-1}}$ puede ser descompuesto en $2s-1$ tensores

$$A_{\nu_1 \dots \nu_{s-1}} = \sum_{t=0}^{s-1} A_{\nu_1 \dots \nu_{s-1}}^{(t)} \quad (5.3)$$

La descomposición análoga del tensor $G_{\nu_1 \dots \nu_s}$ se encuentra teniendo presente la (5.1)

$$G_{\nu_1 \dots \nu_s} = \sum_{t=0}^{s-1} G_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(t)} \quad (5.4)$$

El tensor $\mathbf{G}$ carece de componente totalmente transversal

$$G_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(s)} = 0 \quad (5.5)$$

La (5.5) implica que toda transformación de gauge modifica toda las componentes tensoriales del tensor de campo salvo una. La parte no afectada es $A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(s)}$, es decir el tensor completamente transversal. El mismo hecho puede ser expresado diciendo que las transformaciones de gauge modifican todas las coordenadas conónicas excepto $Q^{(2s)}$ y $Q^{(2s+1)}$.

Si se exige que la teoría sea invariante ante las transformaciones de gauge, las únicas componentes realmente libres del campo son las del tensor completamente transversal $A_{\nu_1 \dots \nu_s}^{(s)}$, es decir $Q^{(2s)}$ y $Q^{(2s+1)}$. Las demás componentes son necesarias para describir la interacción « directa » o « longitudinal » entre las partículas que son fuentes del campo considerado.

6. Tensores de derivación para los conmutadores.

Por ser de utilidad para la cuantificación, introduciremos ahora los siguientes operadores tensoriales de rango $2r$.

$$\bar{d}_{\mu_1 \dots \mu_r; \nu_1 \dots \nu_r} = \alpha_{\mu_1 \dots \mu_r} \alpha_{\nu_1 \dots \nu_r} + \beta_{\mu_1 \dots \mu_r} \beta_{\nu_1 \dots \nu_r} \quad (6.1)$$

$$e_{\mu_1 \dots \mu_r; \nu_1 \dots \nu_r} = \alpha_{\mu_1 \dots \mu_r} \beta_{\nu_1 \dots \nu_r} - \beta_{\mu_1 \dots \mu_r} \alpha_{\nu_1 \dots \nu_r} \quad (6.2)$$

Extenderemos la definición de los mismos incluyendo el rango cero mediante los escalares:

$$\bar{d} = 1 \quad (6.1')$$

$$e = 0 \quad (6.2')$$

Los tensores d y e son completamente simétricos y de traza nula en los índices μ y en los índices ν , por separado. Pero además, los tensores d son simétricos y los e antisimétricos ante el intercambio simultáneo de todos los índices μ con los ν .

$$\bar{d}_{\mu_1 \dots \mu_r; \nu_1 \dots \nu_r} = \bar{d}_{\nu_1 \dots \nu_r; \mu_1 \dots \mu_r} \quad (6.2)$$

$$e_{\mu_1 \dots \mu_r; \nu_1 \dots \nu_r} = -e_{\nu_1 \dots \nu_r; \mu_1 \dots \mu_r} \quad (6.4)$$

Basándonos en las ecuaciones (3.2) y (3.3) podemos encontrar relaciones de recurrencia para los tensores d y e .

$$\begin{aligned} d_{\mu_1 \dots \mu_{r+1}; \nu_1 \dots \nu_{r+1}} &= \alpha_{\mu_1 \dots \mu_{r+1}} \alpha_{\nu_1 \dots \nu_{r+1}} + \beta_{\mu_1 \dots \mu_{r+1}} \beta_{\nu_1 \dots \nu_{r+1}} = \\ &= (\alpha_{\mu_1 \dots \mu_r} \alpha_{\mu_{r+1}} - \beta_{\mu_1 \dots \mu_r} \beta_{\mu_{r+1}}) (\alpha_{\nu_1 \dots \nu_r} \alpha_{\nu_{r+1}} - \beta_{\nu_1 \dots \nu_r} \beta_{\nu_{r+1}}) + \\ &+ (\alpha_{\mu_1 \dots \mu_r} \beta_{\mu_{r+1}} + \beta_{\mu_1 \dots \mu_r} \alpha_{\mu_{r+1}}) (\alpha_{\nu_1 \dots \nu_r} \beta_{\nu_{r+1}} + \beta_{\nu_1 \dots \nu_r} \alpha_{\nu_{r+1}}) \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned} d_{\mu_1 \dots \mu_{r+1}; \nu_1 \dots \nu_{r+1}} &= d_{\mu_1 \dots \mu_r; \nu_1 \dots \nu_r} d_{\mu_{r+1}; \nu_{r+1}} - \\ &- e_{\mu_1 \dots \mu_r; \nu_1 \dots \nu_r} e_{\mu_{r+1}; \nu_{r+1}} \end{aligned} \quad (6.5)$$

y análogamente

$$\begin{aligned} e_{\mu_1 \dots \mu_{r+1}; \nu_1 \dots \nu_{r+1}} &= d_{\mu_1 \dots \mu_r; \nu_1 \dots \nu_r} e_{\mu_{r+1}; \nu_{r+1}} + \\ &+ e_{\mu_1 \dots \mu_r; \nu_1 \dots \nu_r} d_{\mu_{r+1}; \nu_{r+1}} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Vamos a demostrar a continuación que el tensor dado por la (6.1) es realmente independiente de la elección de los vectores de polarización α_μ y β_μ . Ellos son operadores de derivación que sólo dependen de n_μ y λ_μ . Para el rango cero lo afirmado es evidente. Para el segundo rango tenemos:

$$d_{\mu; \nu} = \alpha_\mu \alpha_\nu + \beta_\mu \beta_\nu$$

Es fácil ver que éste es el tensor fundamental simétrico en los planos perpendiculares a n_μ y ∂_μ . En efecto, si efectuamos una transformación ortogonal

$$\begin{aligned}\alpha'_{\mu} &= a\alpha_{\mu} + b\beta_{\mu} \\ \beta'_{\mu} &= -b\alpha_{\mu} + a\beta_{\mu} \\ a^2 + b^2 &= 1\end{aligned}$$

encontraremos que

$$\begin{aligned}\alpha'_{\mu}\alpha'_{\nu} + \beta'_{\mu}\beta'_{\nu} &= (a\alpha_{\mu} + b\beta_{\mu})(a\alpha_{\nu} + b\beta_{\nu}) + (-b\alpha_{\mu} + a\beta_{\mu})(-b\alpha_{\nu} + a\beta_{\nu}) \\ &= \alpha_{\mu}\alpha_{\nu} + \beta_{\mu}\beta_{\nu}\end{aligned}$$

La propiedad más arriba expresada, permite dar el tensor $d_{\mu;\nu}$ explícitamente en función de n_μ y ∂_μ . Teniendo presente que este tensor opera siempre sobre funciones que satisfacen la ecuación de onda puede ponerse:

$$d_{\mu;\nu} = \partial_{\mu\nu} - \partial^{-2}\partial_\mu\partial_\nu - \gamma_{\mu\nu}\partial_\nu\partial^{-1} - \gamma_{\nu\mu}\partial_\mu\partial^{-1} \quad (6.7)$$

Por su parte, el tensor $e_{\mu;\nu}$ es el tensor fundamental antisimétrico en los planos perpendiculares a n_μ y ∂_μ . El producto de dos de esos tensores puede ser expresado en función de los tensores d .

$$\begin{aligned}e_{\mu_1;\nu_1}e_{\mu_2;\nu_2} &= (\alpha_{\mu_1}\beta_{\nu_1} - \beta_{\mu_1}\alpha_{\nu_1})(\alpha_{\mu_2}\beta_{\nu_2} - \beta_{\mu_2}\alpha_{\nu_2}) \\ &= (\alpha_{\mu_1}\alpha_{\mu_2} + \beta_{\mu_1}\beta_{\mu_2})(\alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}) - (\alpha_{\mu_1}\alpha_{\nu_2} + \beta_{\mu_1}\beta_{\nu_2})(\alpha_{\mu_2}\alpha_{\nu_1} + \beta_{\mu_2}\beta_{\nu_1}) \\ &= d_{\mu_1;\mu_2}d_{\nu_1;\nu_2} - d_{\mu_1;\nu_2}d_{\mu_2;\nu_1}\end{aligned} \quad (6.8)$$

Y ello implica, por recurrencia, que el producto de $e_{\mu;\nu}$ por cualquiera de los tensores e de rango superior es expresable también en función de los tensores d . Ello se sigue de la fórmula (6.6) y de la (6.8).

Hemos demostrado por lo tanto, que todos los tensores d son expresables en función de tensores d de rango inferior y por consiguiente que son independientes de la elección de los vectores de polarización α_μ y β_μ . Mediante la (6.5), la (6.6) y la (6.8) encontramos explícitamente.

$$\begin{aligned}d_{\mu_1 \dots \mu_{r+1}; \nu_1 \dots \nu_{r+1}} &= d_{\mu_1 \dots \mu_r; \nu_1 \dots \nu_r} + d_{\mu_1 \dots \mu_{r-1} \mu_{r+1}; \nu_1 \dots \nu_{r-1} \nu_{r+1}} \\ &\quad d_{\mu_1 \nu_r} - d_{\mu_1 \dots \mu_{r-1}; \nu_1 \dots \nu_{r-1}} \cdot (d_{\mu_r; \mu_{r+1}} d_{\nu_r; \nu_{r-1}} + \\ &\quad + d_{\mu_r; \nu_r} d_{\mu_{r+1}; \nu_{r+1}} - d_{\mu_r; \nu_{r+1}} d_{\mu_{r+1}; \nu_r})\end{aligned} \quad (6.9)$$

En particular, el tensor de cuarto rango resulta ser

$$d_{\mu_1 \mu_2 ; \nu_1 \nu_2} = d_{\mu_1 ; \nu_1} d_{\mu_2 ; \nu_2} + d_{\mu_1 ; \nu_2} d_{\mu_2 ; \nu_1} - d_{\mu_1 ; \mu_2} g_{\nu_1 ; \nu_2} \quad (6.10)$$

A partir de un tensor de rango $2r$, definiremos ahora un tensor de rango $2s$ ($s > r$) por intermedio de

$$d_{\mu_1 \dots \mu_s ; \nu_1 \dots \nu_s} = \partial^{-2(s-r)} \partial_{\mu_{r+1}} \dots \partial_{\mu_r} \partial_{\nu_{r+1}} \dots \partial_{\nu_s} \cdot d_{\mu_1 \dots \mu_r ; \nu_1 \dots \nu_r} + \\ + (\text{sim. } \mu) + (\text{sim. } \nu) \quad (6.11)$$

Estos nuevos tensores son también simétricos en los índices μ y en los índices ν separadamente. Son además simétricos ante el intercambio simultáneo de todos los índices μ con los ν .

7. Cuantificación.

Las $2s+1$ cantidades escalares $Q^{(\varepsilon)}$, definidas en el número 4, son coordenadas libres del campo que satisfacen las ecuaciones (4.5). Impondremos entonces sobre ellas las reglas canónicas de conmutación

$$[Q^{(\varepsilon)}(x), Q^{(\varepsilon')}(x)] = i \cdot \hat{\varepsilon}^{\varepsilon\varepsilon'} \cdot D(x - x') \quad (7.1)$$

$D(x - x')$ es la función relativísticamente invariante de Jordan. Los símbolos $\hat{\varepsilon}^{\varepsilon\varepsilon'}$ son:

$$\hat{\varepsilon}^{\varepsilon\varepsilon'} = 0 \quad \text{para } \varepsilon \neq \varepsilon' \text{ y } \hat{\varepsilon}^{\varepsilon\varepsilon} = \varepsilon^{\varepsilon}$$

Las relaciones de conmutación son las usuales para las coordenadas de la parte completamente transversal del campo. En cambio, para las coordenadas de las partes longitudinales dejamos abierta la asignación del signo de las correspondientes relaciones de conmutación. (Véase J. G. Valatin³ para el campo electromagnético). Sin embargo, tomaremos en todos los casos el mismo $\varepsilon^{\varepsilon}$ para $\varepsilon = 2r$ y para $\varepsilon = 2r + 1$. Todo esto está relacionado con el hecho de que cuando se admite la invariancia de gauge, la parte completamente transversal del campo es la única realmente libre y sus relaciones de conmutación deben ser las canónicas.

Las relaciones de conmutación para los tensores $A_{\nu_1 \dots \nu_r}^{(\varepsilon)}$ puede ser deducido de la fórmula (4.3) y de la (7.1)

$$\begin{aligned}
 [A_{\mu_1 \dots \mu_r}^{(r)}(x), A_{\nu_1 \dots \nu_{r'}}^{(r')}(x')] &= \alpha_{\mu_1 \dots \mu_r} \cdot \alpha'_{\nu_1 \dots \nu_{r'}} [Q^{(2r)}(x), Q^{(2r')}(x')] + \\
 &+ \beta_{\mu_1 \dots \mu_r} \cdot \beta'_{\nu_1 \dots \nu_{r'}} [Q^{(2r+1)}(x), Q^{(2r'+1)}(x')] \\
 &= i \cdot \partial^{rr'} (\alpha_{\mu_1 \dots \mu_r} \alpha'_{\nu_1 \dots \nu_{r'}} + \beta_{\mu_1 \dots \mu_r} \beta'_{\nu_1 \dots \nu_{r'}}) D(x-x')
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

En la (7.2). α' y β' operan sobre la variable x' de $D(x-x')$. Naturalmente, podemos hacer que operen sobre la variable x , aún sin cambio de signo, puesto que por las condiciones (3.1), los vectores de polarización sólo dependen de la dirección del vector de derivación. Esto último implica que α_μ y β_μ , y con ellos todos los tensores de polarización transversal, contienen por cada operador de derivación el operador inverso ∂^{-1} . Por ese motivo podemos hacer en la (7.2)

$$[A_{\mu_1 \dots \mu_r}^{(r)}(x), A_{\nu_1 \dots \nu_{r'}}^{(r')}(x')] = i \cdot \partial^{rr'} (\alpha_{\mu_1 \dots \mu_r} \alpha_{\nu_1 \dots \nu_{r'}} + \beta_{\mu_1 \dots \mu_r} \beta_{\nu_1 \dots \nu_{r'}}) D(x-x') \tag{7.3}$$

y por la definición (6.1)

$$[A_{\mu_1 \dots \mu_r}^{(r)}(x), A_{\nu_1 \dots \nu_{r'}}^{(r')}(x')] = i \cdot \partial^{rr'} \cdot d_{\mu_1 \dots \mu_r; \nu_1 \dots \nu_{r'}} \cdot D(x-x') \tag{7.4}$$

Es ahora fácil obtener las relaciones de conmutación para los tensores $A_{\mu_1 \dots \mu_g}^{(r)}$ dados por la (2.7). Teniendo presente que $A_{\mu_1 \dots \mu_g}^{(r)}$ se construye a partir de $A_{\mu_1 \dots \mu_r}^{(r)}$ mediante un número par de operadores de derivación (Cf. (2.7)), podemos partir de la (7.4) y llegar a

$$[A_{\mu_1 \dots \mu_g}^{(r)}(x), A_{\nu_1 \dots \nu_g}^{(r')}(x')] = i \cdot \partial^{rr'} \cdot d_{\mu_1 \dots \mu_g; \nu_1 \dots \nu_g}^{(r')} \cdot D(x-x') \tag{7.5}$$

donde se ha utilizado la definición (6.11).

Las relaciones de conmutación entre las componentes del tensor de campo se obtienen por la (2.11), es decir sumando sobre r y r' en la fórmula (7.5).

$$[A_{\mu_1 \dots \mu_g}^{(r)}(x), A_{\nu_1 \dots \nu_g}^{(r')}(x')] = i \cdot \bar{d}_{\mu_1 \dots \mu_g; \nu_1 \dots \nu_g} D(x-x') \tag{7.6}$$

Siendo

$$\bar{d}_{\mu_1 \dots \mu_g; \nu_1 \dots \nu_g} = \sum_r \varepsilon^r d_{\mu_1 \dots \mu_g; \nu_1 \dots \nu_g}^{(r)}; \varepsilon^r = \partial^{rr} \tag{7.7}$$

Las relaciones (7.6) son compatibles con las condiciones suplementarias (1.2) y (1.3). Ello es así porque todos los tensores $d_{\mu_1 \dots \mu_r; \nu_1 \dots \nu_r}$ dados por la (6.1) son de traza nula y perpendiculares a

∂_μ . Por lo tanto los tensores $d_{\mu_1 \dots \mu_g; \nu_1 \dots \nu_g}^{(r)}$ que se construyen mediante la (6.11) son también de traza nula pero aunque ellos no son perpendiculares a ∂_μ son tales que al tomar la cuatridivergencia resulta un término proporcional al dalembertiano $\partial_\mu \partial_\mu$ y como la función $D(x-x')$ satisface la ecuación de onda, tenemos que la cuatridivergencia de $d_{\mu_1 \dots \mu_g; \nu_1 \dots \nu_g}^{(r)}$ operando sobre $D(x-x')$ da cero. Esto trae como consecuencia, a través de (7.7), la veracidad de lo afirmado.

8. Aplicación al campo vectorial.

Este caso corresponde al campo electromagnético y veremos que nuestro formalismo concuerda con el de J. G. Valatin (3).

El vector de campo es A_μ y la descomposición (2.11) da

$$A_\mu = A_\mu^{(0)} + A_\mu^{(1)} \quad (\text{Comparar v. 14})$$

Con V.14 hemos simbolizado la fórmula 14 de la referencia (3).

Por la (2.8), $A_\mu^{(1)}$ es normal a n_μ

$$n_\mu A_\mu^{(1)} = 0 \quad (\text{V. 6a})$$

Por la (2.9), y la (4.4)

$$n_\mu A_\mu^{(0)} = A^{(0)} = Q^{(1)} \quad (\text{V. 12b})$$

Tomando $\varepsilon^0 = \mathcal{E}^{00} = -1$ la relación (7.1) coincide con V. 10.

La (6.11) da

$$\bar{d}_{\mu, \nu}^{(0)} = \partial^{-2} \partial_\mu \partial_\nu \quad (\text{V. 13a; el signo está en } \varepsilon^0)$$

$$\bar{d}_{\mu, \nu}^{(1)} = d_{\mu, \nu}$$

y por la (6.7)

$$\bar{d}_{\mu, \nu}^{(1)} = \mathcal{E}_{\mu, \nu} - \partial^{-2} \partial_\mu \partial_\nu - n_\mu \partial_\nu \partial^{-1} - n_\nu \partial_\mu \partial^{-1} \quad (\text{V. 7a})$$

Por consiguiente la (7.7) da

$$\bar{d}_{\mu, \nu} = \mathcal{E}_{\mu, \nu} - 2 \partial^{-2} \partial_\mu \partial_\nu - n_\mu \partial_\nu \partial^{-1} - n_\nu \partial_\mu \partial^{-1} \quad (\text{V. 15a})$$

De manera que las relaciones de conmutación (7.6) coinciden, para el campo vectorial, con las relaciones (V. 15) tomadas por G. Valatin.

9. Aplicación al campo tensorial de segundo rango.

El miembro de la derecha de la descomposición (2.11) contiene ahora tres tensores de segundo rango, que por la (2.7) se expresan en la forma

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu}^{(0)} &= \partial^{-2} \partial_\mu \partial_\nu A^{(0)}; & A_{\mu\nu}^{(1)} &= \partial^{-1} \partial_\mu A_{\nu}^{(1)} + \partial^{-1} \partial_\nu A_{\mu}^{(1)}; \\ A_{\mu\nu}^{(2)} &= A_{\mu\nu} - A_{\mu\nu}^{(1)} - A_{\mu\nu}^{(2)} \end{aligned}$$

Expresando los tensores de campo en función de las coordenadas canónicas mediante la (4.3), es:

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu}^{(0)} &= \partial^{-2} \partial_\mu \partial_\nu Q^{(1)} \\ A_{\mu\nu}^{(1)} &= \partial^{-1} \partial_\mu \alpha_\nu Q^{(2)} + \partial^{-1} \partial_\mu \beta_\nu Q^{(3)} + \partial^{-1} \partial_\nu \alpha_\mu Q^{(2)} + \partial^{-1} \partial_\nu \beta_\mu Q^{(3)} \\ A_{\mu\nu}^{(2)} &= \alpha_\mu Q^{(4)} + \beta_\mu Q^{(5)} \end{aligned}$$

y por lo tanto el tensor de campo total se expresa en función de las coordenadas canónicas mediante:

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu} &= A_{\mu\nu}^{(0)} + A_{\mu\nu}^{(1)} + A_{\mu\nu}^{(2)} = \partial^{-2} \partial_\mu \partial_\nu Q^{(1)} + \partial^{-1} (\partial_\mu \alpha_\nu + \partial_\nu \alpha_\mu) Q^{(2)} \\ &+ \partial^{-1} (\partial_\mu \beta_\nu + \partial_\nu \beta_\mu) Q^{(3)} + \alpha_\mu Q^{(4)} + \beta_\mu Q^{(5)} \end{aligned}$$

Las relaciones de conmutación se encuentran ahora fácilmente:

$$\begin{aligned} [A_{\mu\nu}^{(0)}(x), A_{\rho\sigma}^{(0)}(x')] &= i \cdot \varepsilon^0 \cdot \partial^{-4} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \partial_\sigma D(x-x') \\ [A_{\mu\nu}^{(1)}(x), A_{\rho\sigma}^{(1)}(x')] &= i \cdot \varepsilon^1 \cdot \partial^{-2} (\partial_\mu \partial_\nu d_{\rho\sigma}^{(1)} + \partial_\mu \partial_\rho d_{\nu\sigma}^{(1)} + \partial_\nu \partial_\sigma d_{\mu\rho}^{(1)} + \\ &\quad \partial_\mu \partial_\sigma d_{\nu\rho}^{(1)}) D(x-x') \\ [A_{\mu\nu}^{(2)}(x), A_{\rho\sigma}^{(2)}(x')] &= i \cdot (d_{\mu\rho}^{(1)} d_{\nu\sigma}^{(1)} + d_{\mu\sigma}^{(1)} d_{\nu\rho}^{(1)} - d_{\mu\nu}^{(1)} d_{\rho\sigma}^{(1)}) \\ &\quad D(x-x') \end{aligned}$$

Las relaciones de conmutación entre las componentes del tensor de campo se obtienen sumando.

Es de hacer notar que la última relación de conmutación escrita coincide con aquella tomada por T. Kimura (2) para el campo gravitatorio transversal «entrante», si se substraen la parte de traza de ese campo en sus resultados, en efecto, dicha parte de traza está tomada en cuenta en las relaciones de conmutación escritas, siendo

$$i \cdot d_{\mu\nu}^{(1)} d_{\rho\sigma}^{(1)} D(x-x')$$

Por lo tanto, agregando este término tendríamos las relaciones de conmutación de un campo transversal con traza

$$[B_{\mu,\nu}(x), B_{\lambda\sigma}(x')] = i \cdot (\bar{a}_{\mu,\nu}^{(1)} \bar{a}_{\lambda,\sigma}^{(1)} + \bar{a}_{\mu,\sigma}^{(1)} \bar{a}_{\nu,\lambda}^{(1)}) D(x-x')$$

que concuerda por completo con las relaciones tomadas por T. Kimura.