

METODO PARA LA RESOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR TRANSFORMACION EN SUBSISTEMAS.

Ing. José Raúl Lorenzetti - Lic. Enrique Eugenio Marzullo

I. INTRODUCCION

El análisis del comportamiento dinámico de una central nuclear implica resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales que tienen en cuenta tanto la evolución cinética del reactor, como los procesos termohidráulicos de los sistemas vinculados con aquel.

Cabe señalar que estos últimos sistemas presentan la particularidad de poseer una evolución temporal sensiblemente más lenta.

Por lo tanto, al utilizar cualquiera de los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales, se observaría que la solución de un sistema, con constantes de tiempo muy diferentes, resultaría correcta si se usa, únicamente, un paso de integración suficientemente pequeño.

Pese a que el tamaño de dicho paso es realmente aceptable para las ecuaciones cinéticas, este es exageradamente chico para la parte térmica del modelo; con lo cual, el insumo de tiempo de cómputo se eleva notablemente.

Lo que aquí se presenta es un nuevo algoritmo basado en el método de RUNG-KUTTA de 4º orden [2.], pero con un doble paso de integración.

II. PLANTEO MATEMATICO DEL PROCESO:

El método que aquí se describe parte, entonces, de la suposición del conocimiento físico del problema a analizar, de tal manera que, teniendo en cuenta las constantes de tiempo inherentes al proceso es posible, a través de una separación conveniente, transformarlo en [1.] :

$$Y' = F(t, Y, Z) \quad (1,1)$$

$$Z' = G(t, Y, Z) \quad (1,2)$$

donde las ecuaciones (1,1) corresponden a la parte lenta del proceso y las ecuaciones (1,2) constituyen la parte rápida del mismo. Digamos además, que t es la variable independiente y que F, G, Y y Z representan vectores columna. Sean $Y_s(t)$ y $Z_s(t)$ las soluciones de (1) y

$$Y_0 = Y_s(t_0)$$

$$Z_0 = Z_s(t_0)$$

, las condiciones iniciales.-

Una vez efectuada la separación ya descripta, se integrarán (1,1) y (1,2) en forma simultánea; con un paso H para el primer subsistema y otro h para el segundo, de tal manera que el cociente H/h sea un número par. Uno de los primeros ejemplos que se propusieron, fué el de considerar un sistema de dos ecuaciones diferenciales, parcialmente ligado, de la forma:

$$\begin{aligned} Y' &= 0.5 (U - Y) \\ Z' &= 10. (Y - Z) \end{aligned} \quad (2)$$

con las condiciones iniciales $Y(t) = Z(t) = 0$ para $t=0$, y en donde U representa la excitación del sistema que, en este caso, está dada por una función escalón de amplitud igual a 1. En la FIGURA 1 observamos la propagación del error global e_n para $Z_s(t)$, con un paso $h=0.01$, $\frac{H}{h} = 10$ y, además, se supuso que (1,1) permanece constante mientras se integraba (1,2).

Es importante aclarar que, si bien e_n involucra tanto los errores por redondeo como por truncamiento, los primeros no pasan sobre e_n porque todos los ensayos se efectuaron en doble precisión.

Dada la magnitud del error que se cometía, se estudian las causas y se encontró que el error provenía de la falta de información del proceso lento cuando se integraba el proceso rápido. De aquí en más, toda la atención se concretó en buscar una forma de aproximación para (1,1) distinta a la descripta. Finalmente se concluyó que (1,1) se podía integrar por medio del método de RUNGE-KUTTA de 4° orden en cada intervalo (t_0, t_0+H) ; mientras que (1,2) se integraría usando el mismo método numérico, pero en (t_0, t_0+h) , y utilizando una aproximación de primer orden de $Y_s(t)$. [3]

Más precisamente, dados t_0 , Y_0 y Z_0 , integramos

$$Y' = F(t, Y, Z^+) \quad (3.1)$$

$$(Z^+)' = G(t, Y_0^{(i)} + Y_0^{(i)} \cdot \tau_0^{(i)}, Z^+) \quad (3.2)$$

con $Z^+(t_0) = Z_0$, y donde i representa al i -ésimo $\frac{H}{2}$, con lo cual:

$$Z^{(i)} = t - (i-1) \cdot \frac{H}{2}, \text{ para } (i-1) \cdot \frac{H}{2} \leq t \leq i \cdot \frac{H}{2}.$$

Por lo tanto $Z^+(t)$ será la nueva solución de (3.2). De esta manera, en cada intervalo H la función $Y_s(t)$ es aproximada linealmente por su desarrollo en serie de TAYLOR, en el comienzo de dicho intervalo y en $\frac{H}{2}$. Ver FIGURA 2.

Para evitar que el apartamiento, entre la evolución de $Y_s(t)$ y su derivada, sea muy grande, será preciso seleccionar con cuidado tanto a H y h como a la relación H/h .

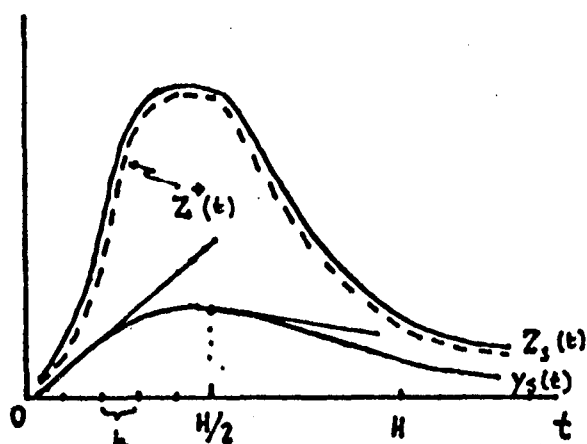


FIGURA 2

El resultado de esta aproximación, utilizando (3.2), se puede observar en la FIGURA 3. Si se comparan los errores que aquí se cometen respecto de los obtenidos en la FIGURA 1, se observaría una disminución en los mismos, del orden de dos magnitudes; alcanzándose con esto la precisión requerida [4].

Con este programa se consideró, además, un modelo para el análisis de transitorios del sistema de control de presión para el generador de vapor de la Central Nuclear en Embalse, mediante sus válvulas asociadas ASDV y CSDV. Sobre un total de 30 ecuaciones diferenciales, el sistema se separó en 13 integrales rápidas y 17 lentas, con:

$h = 2^{-6}$ y $\frac{H}{h} = 8$. Los tiempos requeridos para simular 400 seg., fueron los siguientes:

- con un solo paso h , 298.43 seg.
- con doble paso , 148.52 seg.

En la FIGURA 4. se observa la evolución de una de las variables lentas: presión en el generador de vapor. En la FIGURA 5 se aprecia el error que se comete con el doble paso: el máximo es 0.05 at. De la misma manera, en la FIGURA 6 se representa la variable rápida: flujo neutrónico.

En la FIGURA 7, también para el flujo neutrónico, se graficó la propagación del error; el máximo apartamiento es del orden de 6×10^{-4} , teniéndose en cuenta que el flujo se midió por unidad.

Por último, es interesante mencionar que el método fué verificado con el modelo para el análisis dinámico de transitorios de operación de la Central Nuclear en Atucha. Las 63 ecuaciones diferenciales que conforman el proceso, se separaron así: 9 ecuaciones para la parte rápida y las restantes para la lenta. Los tiempos obtenidos por los dos métodos, con $h = .01$, $H/h = 10$ y un tiempo real de 100 seg., fueron:

- con un solo paso h , 100 min.
- con doble paso 10 min.

Además, como los resultados obtenidos fueron satisfactorios, hoy este algoritmo forma parte del modelo anteriormente indicado.

III. REFERENCIAS:

- [1.] CODDINGTON, E.A. y LEVINSON, N.: Theory of Ordinary Differential Equations, New York, Mc.Graw-Hill, 1955.
- [2.] HENRICI, P.: Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations, New York, John Wiley & Sons, 1962.
- [3.] ANDRUS, J.F.: Equivalence of Solutions of Separated Systems of Ordinary Differential Equations, Tech. Report N°66, Math. Dept., University of New Orleans, 1978.
- [4.] ZADUNAISKY, P: Sobre la Estimación de Errores Propagados en la Integración Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Acta Científica N°38, Observatorio Nacional de Física Cósmica, San Miguel, Buenos Aires.-

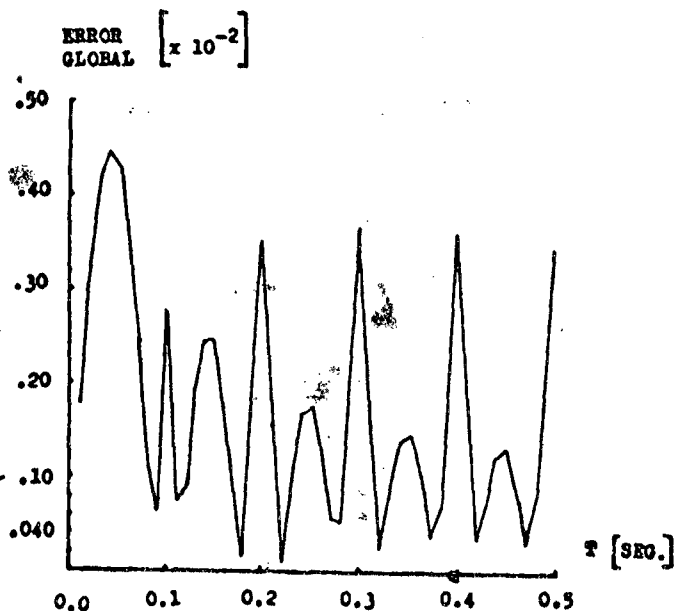
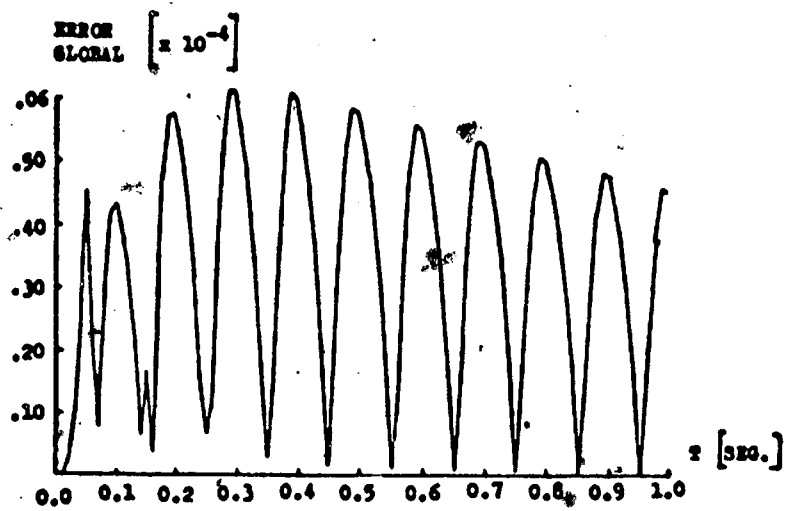
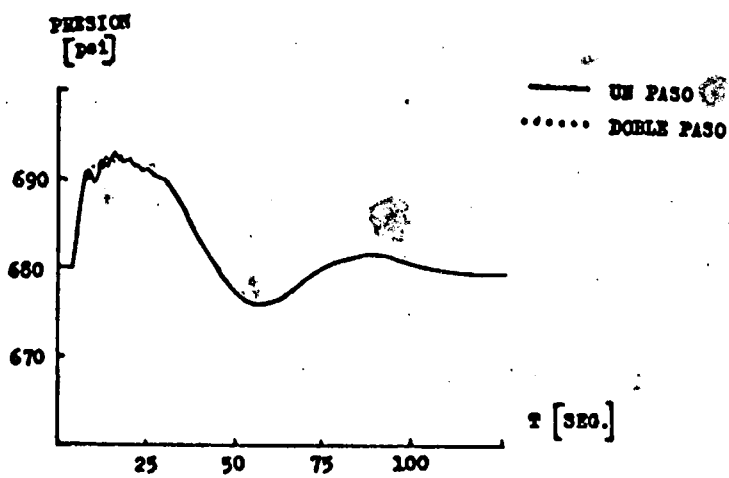
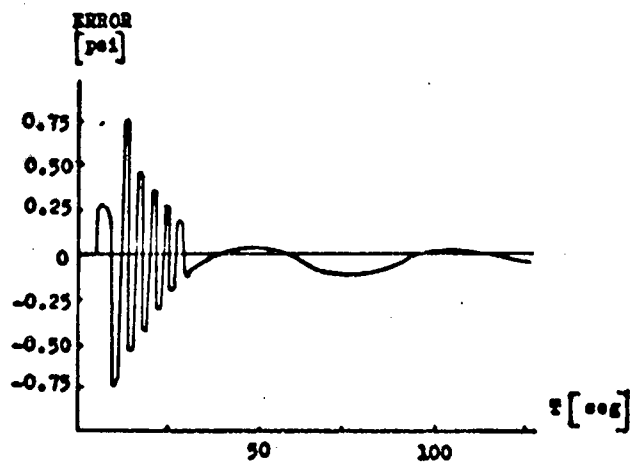


FIGURA 1

FIGURA 3FIGURA 4FIGURA 5

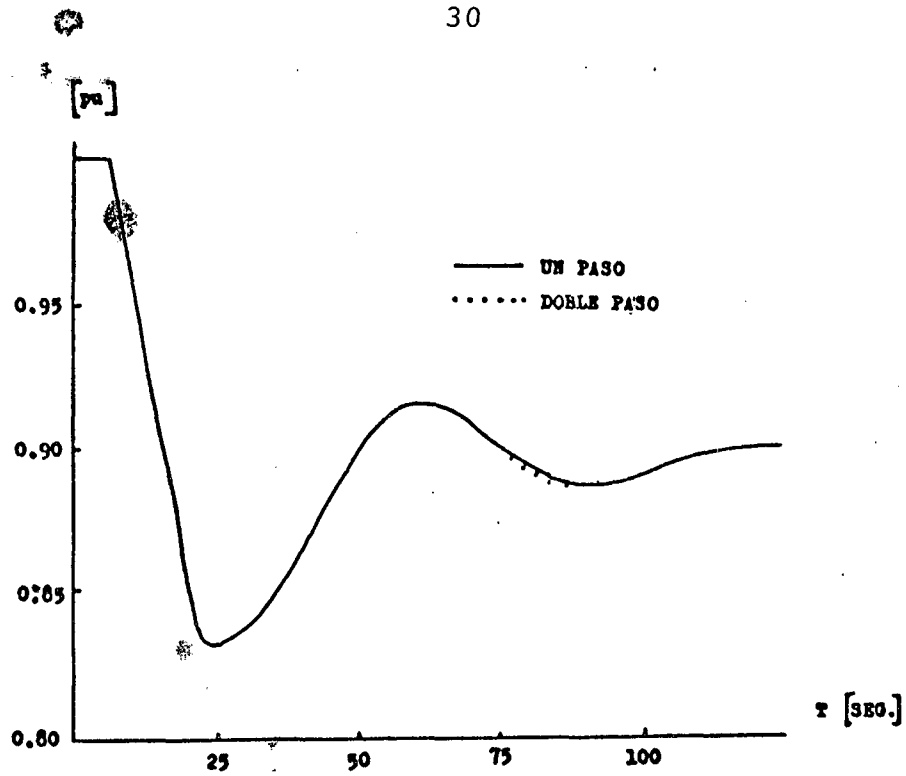


FIGURA 6

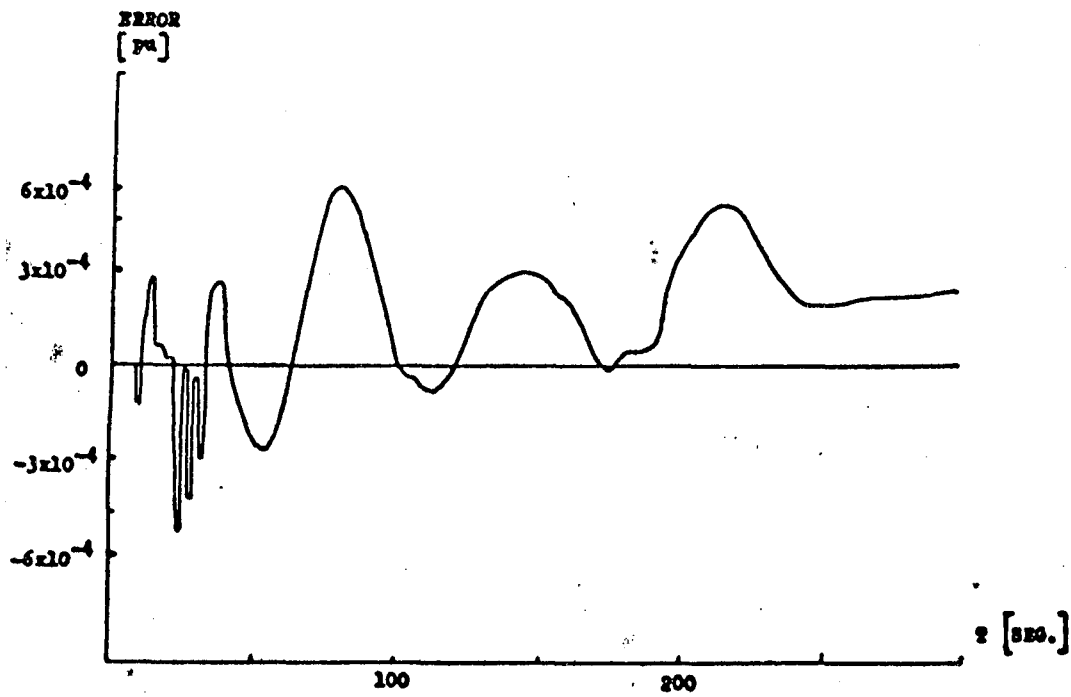


FIGURA 7