

C. N. E. A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº 1	AÑO 1985

SPCONVEC: PROGRAMA PARA PROBLEMAS DE CONVECCION NATURAL Y FORZADA POR
ELEMENTOS FINITOS

Sergio Pissanetzky Ruben Carcagno^{*}
Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro
Comisión Nacional de Energía Atómica y
Universidad Nacional de Cuyo

RESUMEN. SPCONVEC es un programa general de computación que hemos desarrollado para resolver problemas de flujo bidimensional dependiente del tiempo, viscoso e incompresible en régimen laminar, con transferencia de calor convectiva-conductiva, y conducción de calor en cuerpo sólido. El programa puede resolver entonces problemas de convección transitoria, natural, forzada y mixta.

Las ecuaciones gobernantes en la región de fluido son las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles y la ecuación de energía térmica, expresadas en términos de las variables primitivas velocidad, presión y temperatura. El flujo se supone laminar, y el fluido Newtoniano e incompresible dentro de la aproximación de Boussinesq.

Las condiciones de contorno para las ecuaciones de Navier-Stokes son las componentes de la velocidad ó los esfuerzos superficiales, y para la ecuación de energía térmica son de temperatura impuesta o de flujo térmico normal.

La ecuación gobernante en la región sólida es la ecuación transitoria de conducción de calor, y las condiciones de contorno son de temperatura impuesta o de flujo térmico normal.

SPCONVEC utiliza el método de elementos finitos como técnica de discretización espacial, con aproximación cuadrática para la velocidad y temperatura y lineal para la presión dentro de cada elemento. Para la integración temporal numérica utiliza un esquema explícito en diferencias finitas.

Verificamos el programa con problemas de prueba obtenidos de la literatura, y hasta el momento lo aplicamos a un problema específico del área nuclear: el accidente de pérdida de caudal de refrigeración del reactor RA-6, donde obtuvimos muy buenos resultados.

FORMULACION DEL PROBLEMA CONTINUO.

En prácticamente todas las disciplinas que incluyen generación ó intercambio de energía es necesario comprender, predecir y optimizar estos procesos, para lo cual hay que estudiar los modos de transferencia térmica. Hay básicamente tres modos de transferencia térmica: conducción, radiación y convección.

Los dos primeros resultan de mecanismos microscópicos de transporte de energía en presencia de diferencias ó gradientes de temperatura. Si además hay movimientos macroscópicos relativos dentro del material, estos movimientos afectan el ritmo de transferencia térmica, dando lugar a un tercer modo: la convección.

La convección se clasifica a su vez de acuerdo al mecanismo que origina el movimiento. Si el movimiento resulta de una condición forzante, tal como una bomba o ventilador, la convección se llama forzada. Si el movimiento resulta de las diferencias de densidad del fluido ocasionadas por diferencias de temperatura, tal como una placa caliente en aire, la convección se denomina natural. Entre ambas clasificaciones se encuentra la convección mixta.

* Actualmente en TECHINT S. A.
Maipú 1300
1006 - Buenos Aires

La convección es el modo de transferencia térmica mas difícil de estudiar, porque involucra no sólo los mecanismos de transporte de calor, sino también a los mecanismos que originan el movimiento. Es necesario entonces hallar para la región de interés Ω de contorno Γ la distribución espacial y temporal de la velocidad y temperatura. Para ello, sabemos que los fluidos fluyen de tal manera que la masa, el impulso y la energía se conservan en todas partes. Efectuando un balance de estas cantidades, es posible llegar a las siguientes ecuaciones diferenciales gobernantes:

$\nabla \cdot \underline{u} = 0$	Masa	(1)
$\rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) = \rho \underline{g} / \beta (T - T_r) + \nabla \cdot \underline{\sigma}$	Impulso	(2)
$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla T \right) = - \nabla \cdot \underline{q} + Q$	Energía	(3)
Con : $\underline{\sigma} = - p \underline{I} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$	Tensor de esfuerzos	(4)
$\underline{q} = - k \nabla T$	Flujo térmico	(5)

Condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x, y, t=0) &= u_0 \\ T(x, y, t=0) &= T_0 \end{aligned} \quad (6)$$

Condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma_1} &= u^b & T|_{\Gamma_1} &= T^b & \text{(Esenciales)} \\ \nabla \cdot \underline{\sigma}|_{\Gamma_2} &= \underline{\sigma}_n^b & \underline{q} \cdot \underline{D}|_{\Gamma_2} &= q_n^b & \text{(Naturales)} \end{aligned} \quad (7)$$

Se han efectuado las siguientes hipótesis para definir el problema:

- a) Geometría bidimensional.
- b) Fluido Newtoniano e incompresible dentro de la aproximación de Boussinesq.
- c) Flujo laminar.
- d) Efectos despreciables de la disipación viscosa y trabajo reversible.
- e) No se consideran flujos con contornos superficiales libres.

La aproximación de Boussinesq consiste en suponer a la densidad constante en la ecuación de masa (con lo cual podemos hablar de fluido "incompresible"), y en la ecuación de impulso aproximar sus diferencias con:

$$\rho_r - \rho(T) = \rho(T) / \beta (T - T_r) \quad (8)$$

Las principales dificultades para resolver las ecuaciones diferenciales son el acoplamiento entre la ecuación de impulso y energía, las no linealidades y el carácter implícito de la presión en un fluido incompresible (instantáneamente se "ajusta a sí misma" de tal manera que el vínculo de incompresibilidad, ecuación (1) se satisfaga).

EL MODELO DISCRETO.

Para resolver las ecuaciones diferenciales en problemas reales, es necesario considerar métodos aproximados de solución numérica, cuyo objetivo es reducir el problema continuo (número infinito de grados de libertad) descrito por ecuaciones diferenciales parciales a un problema discreto (número finito de grados de libertad) descrito por un sistema de ecuaciones algebraicas.

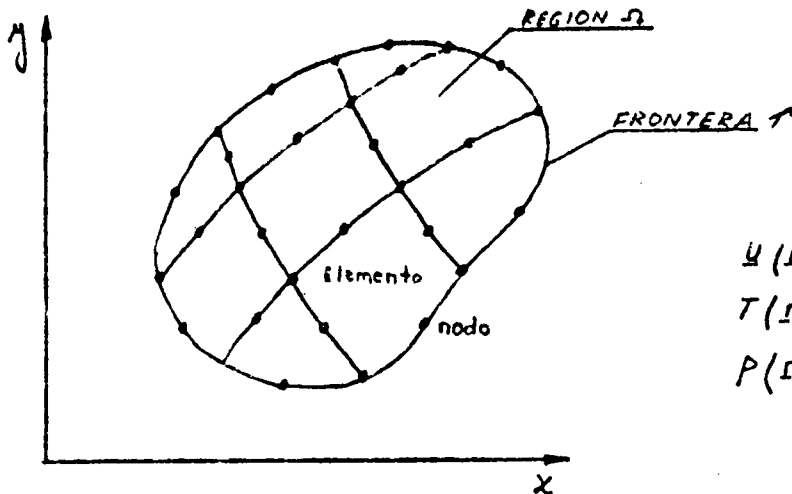
Siguiendo las ideas de /1/, utilizamos el método de elementos finitos como técnica de discretización espacial, y un esquema explícito en diferencias finitas para la integración temporal, con un método de paso intermedio y proyección llamado método de pasos fraccionales /2/ para tratar el carácter necesariamente implícito de la presión.

La discretización espacial se lleva a cabo de la siguiente manera (Fig. 1):

- La región de interés se aproxima por medio de una red de elementos finitos (cuadriláteros en nuestro caso)
- Se asigna un conjunto de nodos, y los valores de la o las magnitudes continuas en cada punto nodal son las incógnitas a determinar.
- A cada nodo i se le asigna una función interpolante ó función de forma N_i conocida, que vale 1 en el nodo i y es no nula solamente en el o los elementos a los cuales pertenece el nodo i .

El tipo de elemento que utilizamos es el cuadrilátero Lagrangiano subparamétrico de 9 nodos por elemento, con hasta 9 puntos de integración.

Dentro de cada elemento, aproximamos los campos de velocidad y temperatura mediante funciones de forma cuadráticas, y el campo de presiones mediante funciones de forma lineales (9) (Utilizamos el convenio de sumatoria de Einstein):



$$\begin{aligned}
 u(\xi, t) &= N_i(\xi) u_i(t) \\
 T(\xi, t) &= N_i(\xi) T_i(t) \\
 P(\xi, t) &= M_i(\xi) P_i(t)
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Fig. 1: Discretización espacial

Para determinar los valores nodales, utilizamos el método de Galerkin /3/, que es un criterio de minimización del error de la solución haciendo ortogonal el residuo de la ecuación diferencial aproximada a las funciones de forma. El problema se reduce a la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden acopladas y no lineales, luego de la cual se obtienen los valores nodales de las incógnitas.

Aplicando las técnicas mencionadas, obtuvimos los siguientes resultados:

$$[C]^T \{y\} = 0 \quad (10)$$

$$[M] \{\dot{u}\} + [A] \{u\} + [K] \{u\} - [C] \{p\} + [G] \{T - T_r\} = \{F\} \quad (11)$$

$$[M] \{\dot{T}\} + [A] \{T\} + [K] \{T\} = \{F\} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \{u\}_{t=0} &= \{u_0\} & \{u\}_{t_1} &= \{u^b\} \\ \{T\}_{t=0} &= \{T_0\} & \{T\}_{t_1} &= \{T^b\} \end{aligned} \quad (13)$$

Estas matrices están definidas por productos escalares, con lo cual son determinadas por medio de integrales sobre cada elemento.

DISCRETIZACION TEMPORAL.

La resolución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias hasta aquí obtenido es llevado a cabo mediante un método de integración temporal por diferencias finitas.

Para la ecuación de energía utilizamos el esquema explícito de Euler:

$$[M] \frac{\{T\}^{n+1} - \{T\}^n}{\Delta t^{n+1}} + [A] \{T\}^n + [K] \{T\}^n = \{F\}^n \quad (14)$$

$$\{T\}_{t_1}^{n+1} = \{T^b\}^{n+1} \quad (15)$$

$$\{T\}_{t=0} = \{T_0\} \quad (16)$$

Para la ecuación de impulso, utilizamos el método de pasos fraccionales. Debido a l carácter implícito de la presión ya mencionado, no es posible utilizar algoritmos puramente explícitos para la integración temporal. Sin embargo, es posible aprovechar las ventajas computacionales de los métodos explícitos utilizando el método de pasos fraccionales. La idea de este método es que puede tratarse a la contribución de la presión independientemente de los otros términos de fuerza de la ecuación de impulso, resolviendo en un primer semipaso esta ecuación sin el término de presión con un esquema explícito, y en un segundo semipaso se proyecta al campo de velocidades intermedio sobre el espacio vectorial de divergencia nula mediante un operador de proyección ortogonal, satisfaciéndose de esta manera el vínculo de incompresibilidad (1). Esta método fué propuesto originalmente por Chorin /5/, y se basa en un teorema de descomposición ortogonal atribuido a Ladyzhenskaya.

Los resultados obtenidos luego de aplicar este método son los siguientes:

- Primer semipaso:

$$[\underline{M}] \frac{\{u\}^{n+1} - \{u\}^n}{\Delta t^{n+1}}, [\underline{A}] \{u\}^n + [\underline{K}] \{u\}^n + [\underline{G}] \{T-T_r\}^{n+1} = \{E\} \quad (17)$$

$$\{u\}_{t_1}^{n+1/2} = \{u^k\} \quad (18)$$

$$\{u\}_{t=0} = \{u_0\} \quad (19)$$

- Segundo Semipaso:

Es posible obtener una representación explícita del operador de proyección, lográndose la eliminación formal de la presión. Por razones de eficiencia computacional, se retiene a la presión en el esquema numérico y se simula la proyección resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales para la presión:

$$([\underline{C}]^T [\underline{M}]^{-1} [\underline{C}]) \{P\}^{n+1} = - [\underline{C}]^T \{u\}^{n+1/2} / \Delta t^{n+1} \quad (20)$$

$$\{u\}^{n+1} = \{u\}^{n+1/2} + \Delta t^{n+1} [\underline{M}]^{-1} [\underline{C}] \{P\}^{n+1} \quad (21)$$

Representación condensada de la masa

Para utilizar un algoritmo explícito simple y eficiente, reemplazamos las matrices consistentes de masa $[\underline{M}]$ y capacidad calorífica $[M]$ por matrices aproximadas diagonales (condensadas), obtenidas sumando todos los términos de cada fila de la matriz consistente, y colocando el resultado sobre la diagonal $/1/$.

EL PROGRAMA SPCONVEC.

En base a los métodos mencionados, desarrollamos el programa SPCONVEC /4/, aplicable a problemas de convección transitoria forzada, mixta y natural, y con conducción transitoria en sólidos, con condiciones de contorno variables en el espacio y en el tiempo.

Como resultado, da las distribuciones temporales y espaciales de los campos de velocidad, temperatura y presión.

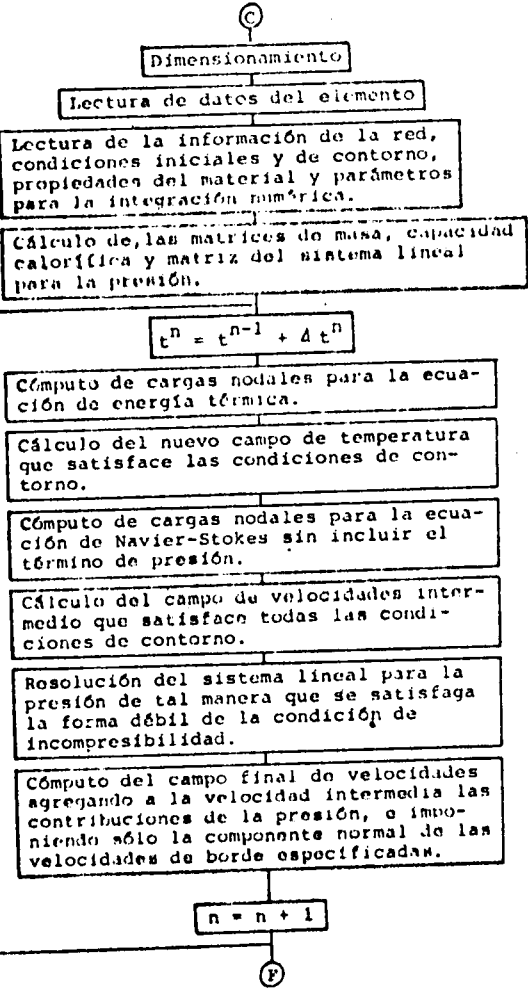
SPCONVEC fue desarrollado e implementado en una computadora IBM 360/44, y debido a la limitada capacidad de memoria de la máquina (128 Kby), tuvimos que efectuar una estructura de multifase, con 4 fases subordinadas de primer nivel y 4 de segundo nivel.

En la Fig. 2 mostramos la secuencia básica del programa.

SPCONVEC fue verificado con problemas de solución analítica conocida y resultados de problemas de prueba para convección transitoria /6/. Ver, por ej., Fig. 3. También utilizamos el programa para resolver un problema específico del área nuclear, el accidente de pérdida de caudal de refrigeración del reactor RA-6, donde obtuvimos muy buenos resultados /7/.

REFERENCIAS.

- /1/ H. Laval. "CONVEC, a Computer Program for Transient Incompressible Fluid Flow Based on Quadratic Finite Elements, Part 1: Theoretical Aspects". Nuclear Science and Technology, Report EUR 7427/1 EN, 1981.
- /2/ J. Donea, S. Giuliani, H. Laval and L. Quartepelle. "Finite Element Solution of the Unsteady Navier-Stokes Equations by a Fractional Step Method". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 30, N°1, April 1982.
- /3/ J.C. Zienkiewicz. "The Finite Element Method in Engineering Science". Mc. Graw - Hill, London, 1971.
- /4/ R. Carcagno, "SPCONVEC: Programa para flujo transitorio Incompresible en Régimen Laminar. Su Aplicación al Análisis del Accidente de Pérdida de Caudal de Refrigeración del Reactor RA-6". Trabajo Especial para la carrera de Ingeniería Nuclear (Director del Trabajo: Sergio Pissanetzky), Instituto Balseiró, 1983.
- /5/ A. J. Chorin. "On the Convergence of Discrete Approximations of the Navier-Stokes Equations". Math. Comp, Vol. 23, pp. 341 - 353, 1969.
- /6/ H. Laval. "A Computer Program for Transient Incompressible Fluid Flow Based on Quadratic Finite Elements, Part 2: User's Manual". Nuclear Science and Technology, Report EUR 7427/II EN, 1981.
- /7/ R. Carcagno y S. Pissanetzky. "Análisis del Accidente de Pérdida de Caudal de Refrigeración sin Scram del Reactor RA-6 Mediante El Programa SPCONVEC". Trabajo presentado en la XI Reunión Científica de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear (AATN), 14 al 18 de Nov. de 1983.



2: Secuencia básica del programa SPCONVEC

SINBOLOGIA

- t : tiempo.
- v : campo de velocidades.
- p : sobrepresión, $p = p - p_h$; p_h : presión hidrostática.
- T : temperatura.
- T₀ : temperatura de referencia a la cual las fuerzas de flotación son nulas.
- ρ : densidad.
- σ : tensor de esfuerzos.
- ε : tensor de deformaciones.
- q : flujo térmico.
- Q : fuente volumétrica de calor.
- μ : viscosidad dinámica ($\nu = \mu/\rho$ viscosidad cinemática).
- C_p : capacidad térmica.
- κ : conductividad térmica ($\chi = \kappa/\rho c_p$ difusividad térmica).
- β : coeficiente de expansión volumétrica.
- I : tensor identidad.
- g : vector de aceleración de la gravedad (supuesto en el sentido negativo de y).

- M : Matriz de masa.
- M_c : Matriz de capacidad calorífica.
- A : {A(i,j)} : Matriz de convección de momento.
- A_e : {A(i,j)} : Matriz de convección de energía.
- K : Matriz de difusión de momento.
- K_e : Matriz de difusión de energía.
- G : Matriz de gradiente.
- F : Matriz de flotación.
- F_s : {F} : Dan las funciones forzantes y fuerzas superficiales.

NODO	SPCONVEC	CONVEC	NODO	SPCONVEC	CONVEC
30	0.0366	0.0343	27	0.1612	0.1609
36	0.2560	0.2614	32	0.2942	0.2963
42	0.2919	0.2870	40	0.2000	0.2011
53	0.0649	0.0637	28	0.1242	0.1215
3	0.4192	0.4186	31	0.6593	0.6516
6	0.7591	0.7568	41	0.7052	0.6997
10	0.5111	0.4933	52	0.1744	0.1710
38	0.2115	0.2129	35	0.6293	0.6287
49	0.9533	0.9488	43	1.0920	1.0923
54	0.9863	0.9805	54	0.6798	0.6834
66	0.2424	0.2463	36	0.2575	0.2507
7	0.7240	0.7316	44	1.0920	1.0850
11	1.2090	1.2170	55	1.0890	1.0830
16	0.7239	0.7316	65	0.2539	0.2507
49	0.2497	0.2463	46	0.6892	0.6834
59	0.9915	0.9805	57	1.1010	1.0920
69	0.9481	0.9488	67	0.6382	0.6297
75	0.2042	0.2129	47	0.1744	0.1710
12	0.5110	0.4933	58	0.7083	0.6977
17	0.7591	0.7568	68	0.6550	0.6536
21	0.4192	0.4188	74	0.1206	0.1215
63	0.0742	0.0637	60	0.2091	0.2031
72	0.2871	0.2870	70	0.3033	0.2963
78	0.2508	0.2614	76	0.1703	0.1608
81	0.0294	0.0365			

Fig. 3: Tabla comparativa de valores nodales de la función corriente para el problema de la cavidad térmica entre el programa SPCONVEC y CONVEC /6/.