

UNIVERSIDAD NACIONAL DE GENERAL SAN MARTIN
COMISIÓN NACIONAL DE ENERGÍA ATÓMICA
INSTITUTO DE TECNOLOGÍA
“Prof. Jorge A. Sabato”

**Estudio de propiedades hadrónicas y de materia de quarks en
modelos efectivos de quarks con interacciones no locales ^(*)**

por Lic. Gustavo Aníbal G. Contrera

Director

Dr. Norberto N. Scoccola

^(*) Tesis para optar al título de *Doctor en Ciencia y Tecnología, mención Física*

República Argentina

2011

Resumen

En el presente trabajo se estudian las propiedades hadrónicas y de materia de quarks, en el marco de cierto tipo de modelos de quarks relativistas con interacciones no locales covariantes y que preservan la simetría quiral. Dichas interacciones se basan en una aproximación separable al intercambio efectivo gluónico. Primero se investigarán modelos de dos sabores de quarks livianos (*up* y *down*) que incluyen interacciones que dan lugar a la renormalización de la función de onda en el propagador del quark. Luego se consideran modelos de tres sabores para estudiar el efecto del quark *strange*. En ambos casos, al estudiar los efectos de temperatura finita, se incluye el Loop de Polyakov (PL).

En el capítulo 1 se presenta una breve introducción al tema, describiendo tanto la motivación como los primeros modelos en los cuales se basa el tipo de modelo utilizado. Asimismo, se exponen los objetivos a ser alcanzados durante el desarrollo de la presente Tesis. En el capítulo 2 se enumeran las características principales de la Cromodinámica Cuántica (QCD), incluyendo en especial su diagrama de fases, y posteriormente se describe el modelo de Nambu-Jona Lasinio (NJL) de dos sabores en su versión más simple, para luego poder desarrollar las extensiones del mismo a tres sabores de quarks.

En el capítulo 3 se explican las extensiones no locales del modelo NJL que, para el caso de dos sabores, incluyen una interacción que da lugar a la renormalización de la función de onda (WFR) en el propagador del quark. Luego se continúa con la extensión del modelo no local para incluir el quark *strange*. En ambos casos, una vez fijada la acción efectiva correspondiente, se obtienen y resuelven las ecuaciones que determinan los campos medios y, a partir de ellos, otras propiedades tales como las masas dinámicas y los condensados quirales. Se determinan también las masas y constantes de decaimiento de los mesones pseudoescalares livianos, concluyendo finalmente con la exposición de los resultados numéricos asociados.

En el capítulo 4 se extiende el modelo no local de dos sabores a la región de temperaturas y densidades finitas, con el objetivo de estudiar el diagrama de fases

correspondiente. Asimismo, se describe aquí la incorporación al modelo de un campo que sirve de parámetro de orden del confinamiento de color, conocido como ‘loop de Polyakov’(PL). Se observa que la presencia del PL provee un aumento sustancial en el valor de la temperatura de transición a la fase quiral T_c predicha, llevando a resultados más cercanos a los obtenidos mediante desarrollos recientes en QCD en la red. Se comparan tres parametrizaciones diferentes, dos de ellas con factores de forma exponenciales (una con y otra sin WFR) y la tercera con factores de forma lorentzianos, cuyos parámetros se ajustan de manera tal que el modelo sea capaz de reproducir ciertos resultados de QCD en la red. En la elaboración de los diagramas de fase correspondientes, se presta especial atención a la determinación de los puntos críticos, desarrollándose un sistema de ecuaciones que permite calcular numéricamente tanto los valores de los campos medios correspondientes como la ubicación de los puntos críticos en forma precisa. Con el fin de verificar esto último se determinan además los exponentes críticos respectivos, observándose una muy buena concordancia con los valores esperados por la teoría de campo medio.

En el capítulo 5 se estudia el comportamiento con la temperatura, tanto de las propiedades de quarks a nivel de campo medio, como de las propiedades mesónicas en el contexto del modelo no local de tres sabores. Se observa también un incremento sustancial en la temperatura de transición de fase con la incorporación del PL y, una vez reestablecida la fase quiral, diferentes comportamientos asintóticos dependiendo de qué propiedad hadrónica se trate y del mesón a que ésta corresponda.

Finalmente, en el capítulo 6 se exponen las conclusiones obtenidas a partir de los resultados mostrados en los capítulos previos.

Study of hadronic and quark matter properties in quark effective models with non-local interactions

Abstract

In the present work it is studied hadronic and quark matter properties, within a framework of some kinds of relativistic quark models with covariant non-local interactions, which preserve the quiral symmetry. Such interactions are based in a separable approximation to the one gluon effective exchange. First, it is investigated two quark flavor models with the (*up* y *down*) light quarks. These models include interactions which produce the wave function renormalization (WFR) in the quark propagator. Then, in order to study the effect of the *strange* quark, it is considered a three quark flavor model. In both cases, when the effects of finite temperature are studied, it is include the Polyakov loop (PL).

In the chapter 1 it is presented a brief introduction to the topic, describing both the motivation and the first models in which the kind of models to be used here are based. The objectives to be achieved along this Thesis are also exposed in the first chapter. Meanwhile, in the chapter 2 it is enumerated the main characteristics of the Quantum-Chromo-Dynamics (QCD), including particularly its phase diagram. And after that, the simplest two quark flavor Nambu-Jona Lasinio (NJL) model is described, developing later its extension into the three quark flavor sector.

In the chapter 3 the non-local extensions of the NJL model are briefly explained. In the case of two quark flavor, such extensions also include an interaction that allows the wave function renormalization (WFR) in the quark propagator. Then the non-local model extension is continued to include the *strange* quark. In both cases, once the corresponding effective actions are obtained, it is proceed to the determination of the mean field values by solving the corresponding coupled equations. From this values, it can be calculated other properties such as meson masses and

decay constants, ending the chapter with the exposition of the associated numerical results.

In the chapter 4, with the objective of studying the corresponding phase diagram, the two flavor non-local model is extended to finite values of temperature and density. In addition, here it is described the incorporation of a field called Polyakov Loop (PL), which serves as order parameter of color confinement. It is observed that its presence provides a substantial increase in the value of the predicted quiral phase transition temperature T_c , taking it to values closer to that obtained in recent developments in lattice QCD. Three different parameterizations are compared, two of them with exponential form factors (one with and one without WFR) and the third one with lorentzian form factors, whose parameters are adjusted so that the model is capable of reproduce certain results of lattice QCD. In the elaboration of the corresponding phase diagrams, special attention is paid to the determination of the critical points, by developing an equation system that allows calculate numerically the corresponding mean field values together with the precise location of the critical points. In order to verify this, the respective critical exponents are also determined, obtaining a very good agreement with the mean field theory expected values.

In the chapter 5 it is studied the behavior with the temperature of quark properties in the mean field level and meson properties, both of them in the context of the non-local three quark flavor model. With the inclusion of the PL it is observed again a substantial increase in the phase transition temperature and, once the quiral phase is restored, different asymptotic behaviors are observed, depending on the hadronic property and the meson studied.

Finally, in the chapter 6 it is exposed the conclusions obtained from the results showed in the previous chapters.

Agradecimientos

A mi director, el Dr. Norberto N. Scoccola, por su paciencia, esfuerzo y dedicación.

A Milva, Daniel y Gabriela, quienes hicieron las veces de consejeros en más de una ocasión.

A mis padres, Aníbal y Lolita, mis hermanos, Sonia, Evangelina y Darío, y a toda mi familia, por ayudarme y acompañarme siempre, sin importar las distancias.

A mi novia y futura esposa Evelina, por su amor y compañía, en especial en los momentos más difíciles.

A mis compañeros y amigos, porque sin ellos éste habría sido un camino muy solitario y difícil de recorrer.

Y a todos aquellos que, directa o indirectamente, aportaron su granito de arena, para que este sueño sea realidad.

A todos ellos, mis más sinceros agradecimientos.

Índice general

Índice general	V
Índice de figuras	X
Índice de tablas	XI
1. Introducción	1
2. Modelo Nambu-Jona-Lasinio y su relación con la Cromodinámica Cuántica (QCD)	7
2.1. Generalidades de QCD	7
2.1.1. Simetrías de QCD	10
2.1.2. Diagrama de fases de QCD	13
2.2. Modelo Nambu-Jona-Lasinio (NJL)	16
2.2.1. Generación dinámica de masa fermiónica	17
2.2.2. Bosón de Goldstone pseudoescalar	20
2.3. Extensión del modelo NJL a tres sabores de quarks	23
2.3.1. Simetrías de QCD para tres sabores	24
2.3.2. Anomalía axial	25
2.3.3. Interacción efectiva en el modelo NJL	26
3. Modelo de quarks quirales con interacciones no locales y separables	31
3.1. Modelo de quarks quirales no local	32
3.2. Modelo no local con Renormalización de la Función de Onda (WFR) en el propagador de quarks	36

3.2.1.	Aproximación de Campo Medio	38
3.2.2.	Cálculo de propiedades hadrónicas y de quarks	40
3.2.2.1.	Valores de los campos medios y condensados quirales	40
3.2.2.2.	Masas de mesones y constantes de acoplamiento	41
3.2.2.3.	Constante de decaimiento del pión	41
3.2.3.	Diferentes parametrizaciones utilizadas	43
3.2.4.	Resultados numéricos	45
3.3.	Extensión del modelo no local a tres sabores	47
3.4.	Propiedades hadrónicas	52
3.4.1.	Masas y constantes de acoplamiento quark-mesón	52
3.4.2.	Constantes de decaimiento débil	54
3.4.3.	Decaimiento anómalo a dos fotones	57
3.4.4.	Resultados numéricos	58
3.A.	Apéndice: Bosonización	62
3.A.1.	Bosonización del modelo a dos sabores	62
3.A.2.	Bosonización del modelo a tres sabores	63
4.	Modelo no local a dos sabores con renormalización de la función de onda a temperatura y potencial químico finitos	65
4.1.	Formalismo de Matsubara o de tiempo imaginario	66
4.2.	El Loop de Polyakov	69
4.2.1.	Simetría global $Z(N)$ en $SU(N)$	69
4.2.2.	$Z(N)$ a temperatura finita	70
4.2.3.	Introducción al modelo Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL)	73
4.3.	Modelo no local de quarks quirales a temperatura y potencial químico finitos	75
4.4.	Transiciones de fase en el límite quiral	78
4.4.1.	Expansión de Landau y determinación del punto tricrítico (TCP)	79
4.4.2.	Diagramas de fase en el límite quiral	82

ÍNDICE GENERAL

4.4.3. Exponentes críticos	84
4.5. Transición de fase quiral en el régimen de masa finita	88
4.5.1. Exponentes críticos en el punto crítico final (CEP)	95
4.5.2. Líneas espinodales	97
4.A. Apéndice: Determinación precisa del punto crítico final (CEP)	100
5. Modelo no local de tres sabores a temperatura finita	103
5.1. Modelo no local con extrañeza a temperatura finita	103
5.1.1. Condensado de quarks	105
5.1.2. Análisis de las transiciones de fase	106
5.2. Propiedades de mesones a T finita	110
5.2.1. Masas de mesones escalares y pseudoescalares	110
5.2.2. Ángulos de mezcla, constantes de acoplamiento y de decaimiento, y susceptibilidad topológica	116
5.A. Apéndice: Tratamiento de los polos en los integrandos de las integrales con dos propagadores a $T \neq 0$	122
6. Conclusiones	127
Bibliografía	133
Lista de publicaciones	141

Índice de Figuras

2.1. Primer esquema del diagrama de fases de QCD	14
2.2. Diagrama de fases de QCD con superconductividad de color	15
2.3. Forma diagramática de las ecuaciones del “gap”	18
2.4. Masas dinámicas en función de las constantes de acoplamiento	20
2.5. Forma diagramática de la ecuación de Bethe-Salpeter	21
2.6. Interacción de seis fermiones	26
2.7. Forma diagramática de las ecuaciones del “gap” para 3 sabores	28
2.8. Vértice efectivo de cuatro puntos	28
3.1. Interacción separable	34
3.2. Solución para masa dinámica a $p = 0$	35
3.3. Ajuste de la función de renormalización de la función de onda	44
4.1. Camino de integración en el formalismo de tiempo imaginario	68
4.2. Transición de fase del condensado de quarks en el límite quiral	79
4.3. Diagramas de fase en el límite quiral	83
4.4. Susceptibilidad quiral en función de T	86
4.5. Distintos tipos de transiciones de fase en $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ y Φ	89
4.6. Transiciones de fase en C_V , χ_{ch} y χ_q	91
4.7. Diagramas de fase para el límite de masa finita	92
4.8. Posición del CEP en función de la masa corriente de quarks	93

ÍNDICE DE FIGURAS

4.9. Posición del CEP en función de la masa corriente de quarks cerca del límite quiral	94
4.10. C_V en función de T para μ constante	96
4.11. Diagramas de fase con líneas espinodales (Set C)	99
5.1. Valores de campos medios en función de la temperatura para el modelo de tres sabores	108
5.2. Masas mesones escalares y pseudoescalares en función de la temperatura para el modelo de tres sabores	114
5.3. Constantes de decaimiento en función de la temperatura para el modelo de tres sabores	118
5.4. Ángulos de mezcla y susceptibilidad topológica en función de la temperatura para el modelo de tres sabores	119
5.5. Constantes de acoplamiento en función de la temperatura para el modelo de tres sabores	121
5.6. Ubicación de los polos de las integrales mesónicas	124
5.7. Áreas de integración en integral con divergencias	125

Índice de Tablas

3.1. Set de parámetros para el modelo no local a dos sabores con WFR . .	45
3.2. Resultados a $T = \mu = 0$ en el modelo no local a dos sabores con WFR	46
3.3. Set de parámetros para el modelo no local de tres sabores	59
3.4. Resultados para el modelo de tres sabores con $T = \mu = 0$	61
3.5. Valores obtenidos para $\theta_{0,8}$ y $f_{0,8}$	62
4.1. Puntos característicos de los diagramas de fases en el límite quiral . .	84
4.2. Exponentes críticos en el límite quiral	87
4.3. Puntos característicos de los diagramas de fases en el régimen de masa finita	90
4.4. Exponentes críticos para el régimen de masa finita	97

Capítulo 1

Introducción

“Si no conozco una cosa, la investigaré.”

Louis Pasteur (1822-1895).

De acuerdo con el Modelo Estándar de partículas elementales^[1], los hadrones (mesones y bariones) están formados por fermiones (quarks) que interactúan entre sí a través de bosones mediadores de las interacciones fuertes (gluones). La teoría que describe dichas interacciones es una teoría de gauge no abeliana llamada Cromodinámica Cuántica (QCD, por sus siglas en inglés)^[2]. El hecho de que el grupo de simetría interna ($SU(3)$ de color) sea no abeliano, hace que la QCD tenga características muy diferentes a las de la Electrodinámica Cuántica (QED). En particular QCD tiene dos propiedades sumamente importantes: libertad asintótica y confinamiento. La libertad asintótica implica que en el rango de alto momento transferido los quarks se comportan como casi libres, es decir, la interacción entre dos quarks debido al intercambio de gluones resulta ser muy pequeña. Por lo tanto, dicha interacción puede tratarse utilizando teoría de perturbaciones, en función de la constante de acoplamiento quark-gluon. En este rango de momentos, los procesos de dispersión son calculados con una gran precisión. Por el contrario, para bajos momentos transferidos ($\lesssim 1\text{GeV}$) QCD es altamente no lineal y da lugar al confi-

namiento: los quarks no pueden ser separados indefinidamente, ya que la intensidad de interacción entre ellos aumenta con la distancia.

En el estudio de muchas propiedades hadrónicas, tales como sus masas, constantes de acoplamiento, constantes de decaimiento, etc., el rango de interés es justamente el de bajos momentos. Por lo tanto, si bien se conoce la teoría fundamental que describe toda la dinámica del sistema, para procesos físicos de bajas energías resulta muy difícil obtener información relevante partiendo en forma directa de ella. Por esta razón, se han desarrollado diversos métodos aproximados para estudiar dichos procesos. Entre ellos está la “QCD en la red”¹, que intenta resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento en un espacio-tiempo discreto^[2]. Pero incluso aquí se presentan serios problemas, entre ellos la inclusión de un potencial químico finito^[3]. Por ello, aún en este método es necesario hacer aproximaciones. Otra opción es la de los modelos efectivos: se busca un lagrangiano simplificado que contenga las características principales de QCD a bajas energías, como por ejemplo sus simetrías.

Una ventaja de los modelos efectivos frente a la QCD en la red es, precisamente, que pueden ser extendidos a potencial químico finito sin mayor dificultad. El hecho de poder lidiar con potenciales químicos no nulos nos permite estudiar el diagrama de fases de QCD, lo cual constituye hoy en día, uno de los temas de mayor interés en el campo de las interacciones fuertes. Las características básicas del diagrama de fases de QCD serán discutidas en el siguiente capítulo y la modelización del mismo junto con la obtención de sus puntos críticos será uno de los objetivos del presente trabajo.

Otra característica importante de QCD es que, en el límite en que se consideran quarks de masa nula, posee una simetría llamada simetría quiral. Esta simetría implica que los quarks sin masa poseen una helicidad bien definida, es decir, son dextrógiros o levógiros. El considerar despreciable la masa de los quarks es una aproximación razonablemente válida para los quarks *up* y *down*, ya que $m_u \sim m_d \ll \Lambda_{QCD}$, donde $\Lambda_{QCD} \sim 200$ MeV, escala característica de QCD. Según veremos más

¹Comúnmente conocido por su nombre en inglés: *Lattice QCD*

adelante, en la naturaleza esta simetría está espontáneamente rota, al menos para bajas temperaturas y densidades. O sea que, si bien es una simetría aproximada del lagrangiano de QCD, no lo es de su estado fundamental. Esto se debe a la estructura compleja del vacío físico, que está lejos de poder ser considerado como carente de estructura.

Uno de los modelos efectivos que ha recibido gran atención en las últimas dos décadas es el de Nambu y Jona-Lasinio (NJL). Su historia se remonta al año 1961, en el que Y. Nambu y G. Jona-Lasinio publicaron dos trabajos titulados “Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity”^[4]. Poco antes, Nambu y Chou habían sugerido la existencia de un límite en el cual el pión es un bosón de Goldstone (no masivo) asociado con la ruptura espontánea de simetría quiral. Lo que ellos pretendían era explicar la masa pequeña que distingue al pión de los demás hadrones. En los trabajos de 1961, Nambu y Jona-Lasinio partieron de un lagrangiano con una interacción de dos cuerpos entre nucleones (los bloques básicos de materia conocidos hasta ese momento) no masivos que respeta la simetría quiral. La ruptura espontánea hace que la masa de los nucleones resulte finita, dando lugar a bosones de Goldstone que fueron identificados con el pión.

Por esa época QCD aún no había sido formulada. Hacia mediados de los años 70, cuando esta teoría fue finalmente concebida, el modelo de NJL empezó a ser abandonado, debido a su naturaleza no fundamental y a su no renormalizabilidad. Sin embargo, como consecuencia de las dificultades antes mencionadas para tratar QCD a bajas energías, en la segunda parte de la década del 80 surgió la idea de reinterpretar el modelo NJL como un modelo para un sistema de quarks interactuantes. Se supone así que los grados de libertad de los gluones se pueden congelar dando lugar a interacciones efectivas entre los quarks.

En su versión más sencilla este modelo solamente utiliza una interacción local del tipo escalar-isoescalar y pseudoescalar-isovectorial entre fermiones y permite entender el mecanismo de ruptura espontánea de simetría quiral y la consiguiente aparición de los piones como bosones de Goldstone. Este modelo, así como sus

extensiones que incluyen interacciones locales en otros canales, ha sido utilizado en numerosos estudios de las propiedades hadrónicas tanto en $SU(2)$ como en $SU(3)$ de sabor, al considerar además el quark *strange*^[5,6].

Un problema del modelo NJL, relacionado con el uso de interacciones locales, es que se debe introducir algún tipo de regularización para evitar que los diagramas involucrados en la determinación de la autoenergía de los quarks, las masas de los mesones, las constantes de acoplamiento, etc., resulten divergentes. Esto introduce ciertas ambigüedades en el cálculo de dichas propiedades, así como de las correcciones debidas a los lazos de mesones. A partir de los 90's, han aparecido trabajos que proponen el uso de interacciones no locales para solucionar este tipo de inconvenientes, a cambio de algunas complicaciones en el cálculo^[7]. Una de las propuestas de mayor interés surge de la relación entre el modelo NJL y el modelo de intercambio de un gluón, según el cual, se utiliza el propagador de un gluón modificado fenomenológicamente, para generar las interacciones efectivas entre quarks. El propagador gluónico efectivo provee una forma natural de introducir una no localidad dentro de la interacción quark-quark^[8]. Dicha no localidad se puede caracterizar mediante un factor de forma $g(p)$, que depende del modelo utilizado. Por simplicidad, se suele utilizar una función gaussiana aunque, como veremos, también pueden emplearse otras formas funcionales como por ejemplo la lorentziana. El uso de interacciones no locales tiene diversas ventajas ya que, por ejemplo, las anomalías son automáticamente preservadas^[9], la acción efectiva es finita a todo orden en el desarrollo en lazos^[10] (es decir que tanto los lazos fermiónicos como los de los mesones son finitos), etcétera. Por otro lado, mediante una adecuada elección del factor de forma es posible lograr que el propagador fermiónico no tenga polos reales y que por lo tanto los quarks no puedan aparecer como estados asintóticos. Esto ha sido propuesto^[11] como una forma de implementar la propiedad de confinamiento que posee QCD, lo que en el modelo NJL local no es posible hacer.

En el capítulo 3 de este trabajo se muestra como es posible realizar una extensión del modelo no local, de dos sabores de quarks, de manera de dar cuenta de la

renormalización de la función de onda (WFR, por sus siglas en inglés). Según veremos, esto permite obtener una descripción del propagador de quarks más similar a la que resulta de los cálculos de QCD en la red a bajos valores de momentos. El siguiente punto consiste en extender el estudio de modelos efectivos no locales de manera de incorporar el quark *strange*. Debido a las dificultades que esto involucra, no se tomará en cuenta en este punto los efectos de la renormalización de la función de onda. Así, se estudiarán algunas propiedades (tales como las masas, constantes de acoplamiento, constantes de decaimiento, etcétera) de los nueve mesones pseudoescalares más livianos a temperatura y potencial químico nulos, comparando los resultados obtenidos con los valores experimentales o los provenientes de otros modelos fenomenológicos.

Una vez presentados los modelos, se procede al desarrollo de la parte central de esta tesis, que consiste en la aplicación de los mismos al estudio de las transiciones de fase de la materia fuertemente interactuante. Para ello se aplica el formalismo de tiempo imaginario para extender los modelos al rango de temperatura T finita. En esta extensión también se tiene en cuenta el acoplamiento al Loop de Polyakov (PL), el cual es un campo de gauge que sirve de parámetro de orden del confinamiento de color. Según veremos, esto provee un incremento sustancial en los valores obtenidos para la temperatura crítica T_c , de la transición de fase quiral, con lo cual se obtienen valores comparables con lo obtenido en trabajos recientes de QCD en la red^[12]. Estas dos extensiones, si bien se aplican tanto al modelo de dos sabores como al de tres, se explicarán en más detalle en el capítulo 4, donde se estudia principalmente el modelo no local de dos sabores con WFR a temperatura T y potencial químico μ finitos. Esto permitirá analizar las transiciones de fase quirales y con ello poder elaborar los diagramas de fases correspondientes, de cuyo estudio surgirá además, la posibilidad de testear los valores obtenidos para la ubicación de los puntos críticos (donde las transiciones pasan de ser de tipo *crossover* a ser de primer orden), mediante el cálculo de los exponentes críticos correspondientes, y la comparación con los que predice la teoría de campo medio.

En el capítulo 5 se estudian las propiedades de la materia de quarks con tres sabores a temperatura finita, para luego poder extender el análisis al comportamiento de algunas propiedades de mesones, tales como las masas de mesones pseudoescalares y escalares, los ángulos de mezcla, y las constantes de acoplamiento y de decaimiento.

Finalmente, en el capítulo 6 se exponen las conclusiones obtenidas a partir de los resultados expuestos en los capítulos previos.

Capítulo 2

Modelo Nambu-Jona-Lasinio y su relación con la Cromodinámica Cuántica (QCD)

“La mayoría de las ideas fundamentales de la ciencia son esencialmente sencillas y, por regla general pueden ser expresadas en un lenguaje comprensible para todos.”

Albert Einstein (1879-1955).

Comenzaremos este capítulo exponiendo las características generales de QCD, sus simetrías y diagramas de fase. Posteriormente se presenta el modelo de Nambu y Jona-Lasinio (NJL) para el caso de dos sabores, y luego se estudia el caso más general de tres sabores de quarks.

2.1. Generalidades de QCD

La cromodinámica cuántica o QCD por sus siglas en inglés, es una teoría de gauge no abeliana que se aplica a la descripción de las interacciones fuertes^[2]. Sus grados

2.1. Generalidades de QCD

de libertad consisten en campos fermiónicos, que representan a los quarks y campos de gauge vectoriales, que representan a los gluones.

El lagrangiano de QCD con simetría de color $SU(3)_c$ viene dado por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu D^\mu - \hat{m})\psi(x) - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

representa el campo de quarks con tres colores y N_f sabores, las masas desnudas de los quarks están agrupadas en la matriz de masas $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, \dots)$,

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\lambda^a A_\mu^a \quad (2.3)$$

es la derivada covariante que incluye a los campos gluónicos A_μ^a (con $a=1,\dots,8$), g es la constante de acoplamiento fuerte y las λ^a son las matrices de Gell-Mann, representación matricial de los generadores del grupo de color $SU(3)_c$, cuyo álgebra (no abeliana) es

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c \quad (2.4)$$

con f^{abc} las constantes de estructura correspondientes. Las λ^a además verifican que

$$\text{tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}.$$

El tensor de campo gluónico $G_{\mu\nu}^a$ se define a partir de

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.5)$$

Tal como está constituido, el lagrangiano de QCD es invariante ante transformaciones de gauge $SU(3)$ en el espacio de color. Por el carácter no abeliano del grupo de gauge, QCD tiene ciertas características que la diferencian de las teorías de gauge abelianas como la Electrodinámica Cuántica (QED). Algunas de estas particularidades son:

2.1. Generalidades de QCD

- Universalidad: Existe solo una constante de acoplamiento g para todas las interacciones entre quarks y gluones. Esta es una consecuencia directa de la invariancia de gauge local sobre el grupo $SU(N_c)$, con $N_c =$ número de colores. Además, el lagrangiano de QCD contiene autoacoplamientos gluónicos (vértices de tres y cuatro gluones), por lo que los gluones transportan carga de color.
- Libertad asintótica: A muy altas energías los quarks se comportan como partículas libres. Esto es, el acoplamiento se vuelve débil a cortas distancias o, equivalentemente, grandes valores del momento euclídeo Q . A orden de un lazo, dicho acoplamiento resulta

$$\alpha_s(Q^2) \equiv \frac{g^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{4\pi}{(11 - \frac{2}{3}N_f) \ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)}, \quad (2.6)$$

donde N_f es el número de sabores relevantes y Λ_{QCD} es el parámetro de escala de QCD, el cual puede determinarse, por ejemplo, ajustando la última ecuación a datos experimentales para grandes valores de Q^2 . De esta forma, se encuentra que $\Lambda_{QCD} \simeq 200$ MeV. La ecuación (2.6) es la base fundamental para el tratamiento perturbativo de QCD en el régimen de momentos grandes.

- Confinamiento: Inversamente, la ecuación (2.6) muestra que el acoplamiento se vuelve intenso a bajas energías. Por tal motivo, no es posible aplicar teoría de perturbaciones en QCD para describir ningún proceso con energías menores que ~ 2 GeV. Esto hace que resulte difícil comprender en detalle el fenómeno de confinamiento, es decir, el hecho de que objetos de color, como quarks y gluones, no existan como grados de libertad físicos en el vacío. Es esta característica la que nos obliga a proponer modelos efectivos que puedan reproducir las propiedades y simetrías de QCD, pero que ofrezcan un mecanismo auto-consistente, para poder estudiar ciertas propiedades mesónicas (como masas, constantes de acoplamiento, constantes de decaimiento débil, etcétera) y de materia de quarks (condensados, campos efectivos, etcétera), que se observan dentro de este rango de energías.
- Simetría quiral: En el límite de masas de quarks nulas, el lagrangiano de QCD es invariante ante el grupo quiral $SU(N_f)_R \otimes SU(N_f)_L$ de transformaciones

2.1. Generalidades de QCD

globales. Esta propiedad se explica con más detalle en la próxima sección, para el caso de dos sabores de quarks.

- Invariancia de escala: Dentro del límite quiral, el lagrangiano de QCD no contiene parámetros dimensionales, por lo que resulta invariante ante la transformación de escala $\psi(x) \rightarrow \lambda^{-3/2}\psi(\lambda x)$. La corriente dilatacional correspondiente no es una corriente conservada debido a correcciones cuánticas que llevan a la anomalía de traza.

2.1.1. Simetrías de QCD

Consideremos, en principio, el caso de dos sabores (u y d) y supongamos que los quarks correspondientes tienen masa nula (límite quiral). El lagrangiano (2.1) está dado por

$$\mathcal{L}_{QCD}^{m=0} = \bar{\psi}(x)i\gamma_\mu D^\mu\psi(x) - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Los fermiones sin masa tienen helicidad (o quiralidad) bien definida, lo cual significa que sus espines están alineados (dextrógiros) o anti-alineados (levógiros) con sus impulsos. Si introducimos los campos dextrógiro, ψ_R , y levógiro, ψ_L , dados por

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2}\psi, \quad \psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi, \quad (2.8)$$

$$\bar{\psi}_R = \psi_R^\dagger \gamma_0 = \bar{\psi} \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad \bar{\psi}_L = \psi_L^\dagger \gamma_0 = \bar{\psi} \frac{1 + \gamma_5}{2}. \quad (2.9)$$

el término fermiónico del lagrangiano (2.7), $\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}i\gamma_\mu D^\mu\psi$, se separa en dos partes

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}_R i\gamma_\mu D^\mu \psi_R + \bar{\psi}_L i\gamma_\mu D^\mu \psi_L, \quad (2.10)$$

y es invariante ante transformaciones globales $U(2)_R \otimes U(2)_L$ que actúan sobre los campos dextrógiro y levógiro correspondientemente, dadas por

$$\begin{aligned} U(2)_R : \quad \psi_R &\rightarrow \exp(i\tau_s \alpha_R^s) \psi_R, \quad (s = 0, 1, 2, 3) \\ U(2)_L : \quad \psi_L &\rightarrow \exp(i\tau_s \alpha_L^s) \psi_L. \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.1. Generalidades de QCD

donde $\alpha_{R,L}^s$ son parámetros, mientras que τ_s son las matrices de Pauli para $s = 1, 2, 3$, y $\tau_0 = \mathbb{1}_{2 \times 2}$ para $s = 0$ ¹. Las correspondientes corrientes de Noether son

$$J_{sR}^\mu = \bar{\psi}_R \gamma_\mu \tau_s \psi_R, \quad J_{sL}^\mu = \bar{\psi}_L \gamma_\mu \tau_s \psi_L \quad (2.12)$$

con $\partial_\mu J_{sR}^\mu = \partial_\mu J_{sL}^\mu = 0$. Alternativamente, podemos escribir

$$J_{sR,L}^\mu(x) = \frac{1}{2}[V_s^\mu \pm A_s^\mu(x)] \quad (2.13)$$

en términos de las corrientes conservadas vector y vector axial

$$V_s^\mu = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \tau_s \psi(x), \quad A_s^\mu = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \tau_s \psi(x), \quad (2.14)$$

con $\partial_\mu V_s^\mu = \partial_\mu A_s^\mu = 0$. Entonces, la simetría quiral $U(2)_R \otimes U(2)_L$ es equivalente a la invariancia frente al grupo $U(2)_V \otimes U(2)_A$ con transformaciones en el espacio de sabor dadas por

$$U(2)_V : \psi \rightarrow \exp(i\tau_s \alpha_V^s) \psi, \quad (2.15)$$

$$U(2)_A : \psi \rightarrow \exp(i\gamma_5 \tau_s \alpha_A^s) \psi. \quad (2.16)$$

De esta manera, $\mathcal{L}_\psi$ es invariante bajo el grupo de transformaciones

$$U(2)_R \otimes U(2)_L = SU(2)_V \otimes SU(2)_A \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A. \quad (2.17)$$

Dado que en el término $G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$ del $\mathcal{L}_{QCD}$ no aparecen los campos fermiónicos, lo anterior también es válido para el Lagrangiano completo de QCD en el límite de quarks sin masa, $\mathcal{L}_{QCD}^{m=0}$.

Sin embargo, el análisis anterior de las simetrías deja de ser válido cuando consideramos el término de masa en el $\mathcal{L}_{QCD}$:

$$\delta\mathcal{L} = -\bar{\psi}(x) \hat{m} \psi(x), \quad (2.18)$$

¹Recordemos que $U(2) = SU(2) \otimes U(1)$, donde las transformaciones del grupo $SU(2)$ son las que corresponden a $s = 1, 2, 3$, mientras que la respectiva a $s = 0$ pertenece al grupo $U(1)$.

pues ahora las cuatridivergencias de las corrientes, en general, no son nulas. En efecto

$$\partial_\mu V_s^\mu(x) = 2i\bar{\psi}(x)[\hat{m}, \tau_s]\psi(x), \quad (2.19)$$

$$\partial_\mu A_s^\mu(x) = 2i\bar{\psi}(x)\{\hat{m}, \tau_s\}\gamma_5\psi(x). \quad (2.20)$$

Las transformaciones $SU(2)_V$ y $U(1)_V$ son las transformaciones unitarias correspondientes a la conservación del isospín y del número bariónico, respectivamente. Las transformaciones quirales $SU(2)_A$ y axiales $U(1)_A$ alteran la paridad de un estado dado. Por ello, la realización de dichas simetrías en la naturaleza, debería implicar para cada multiplete la existencia de otro multiplete de paridad opuesta. Esto no es lo que se observa experimentalmente, de ahí se induce que tanto $SU(2)_A$ como $U(1)_A$ son simetrías que, de alguna manera, están rotas.

Se sabe que $SU(2)_A$ es una simetría espontáneamente rota. Al ocurrir esto, en el caso de quarks de masa nula, aparecen tres modos de excitación de los campos de quarks y gluones, de masa nula, llamados bosones de Goldstone^[13]. Estos tres bosones se asocian con los piones, ya que se observa experimentalmente que la masa de los piones, si bien es no nula, es mucho menor que la de los nucleones. La expresión matemática de una simetría es la conmutación del hamiltoniano del sistema con el operador U correspondiente a la cantidad conservada, esto es, $[H, U] = 0$. Cuando una simetría está espontáneamente rota, lo que ocurre no es que el conmutador deja de ser nulo, sino que el vacío deja de ser invariante frente a las transformaciones del grupo de simetría del operador U . Como consecuencia de esto, el estado fundamental deja de ser único y pasa a estar degenerado. Esto se puede expresar como $[H, U] = 0$, pero con $U | 0 \rangle \neq | 0 \rangle$, lo que implica que los generadores A del álgebra del grupo al que pertenece el operador U , no aniquilan el vacío, esto es $A | 0 \rangle \neq 0$.

Por otro lado, según veremos más adelante, la simetría $U(1)_A$, está rota a nivel cuántico por la llamada anomalía axial. Esto significa que, si bien la teoría clásica posee una simetría dada, en el proceso de cuantificación esta se pierde porque la corriente de Noether recibe una contribución extra que hace que su cuatridivergencia deje de ser nula.

2.1.2. Diagrama de fases de QCD

Al poco tiempo de haberse aceptado la idea de que los hadrones están formados por quarks y gluones confinados, se sugirió que a altas temperaturas o densidades tal confinamiento podría desaparecer^[14]. En este marco existen entonces dos fases claramente diferentes: la fase hadrónica de quarks y gluones confinados y el llamado plasma de quarks y gluones (QGP, por sus siglas en inglés). En la naturaleza, este QGP seguramente existió en el Universo temprano, precisamente antes del llamado proceso de hadronización, cuando la temperatura era tan elevada que permitía la existencia de materia de quarks en estado deconfinado. Por otro lado, no está del todo claro si hoy en día existe materia de quarks en tal estado, pero una posibilidad que ha merecido cierta atención es que se produzca en el interior de objetos compactos, como estrellas de neutrones y estrellas de quarks^[15,16]. Es tal el interés de estudiar la materia en este estado y las transiciones de fase de QCD, que durante las últimas décadas se han invertido muchos recursos y esfuerzos en la construcción de grandes facilidades experimentales para este fin, como el colisionador de iones pesados RHIC (*Relativistic Heavy Ion Collider*) en Brookhaven, USA o el detector ALICE en el gran colisionador de hadrones LHC (*Large Hadron Collider*), en el CERN, cerca de Ginebra en la frontera franco-suiza.

En su versión más rudimentaria, el diagrama de fases de QCD, se puede representar esquemáticamente como se observa en figura 2.1. Dicho esquema comenzó a verse en publicaciones de mediados de los '80 (ver ref.^[17] por ejemplo), y constituyó el primer intento de representar el diagrama de fases de QCD, subsistiendo por casi dos décadas.

Dado que QCD es asintóticamente libre, es decir, la interacción se debilita a pequeñas distancias, a densidades suficientemente elevadas y bajas temperaturas es posible que exista una superficie de Fermi de quarks casi libres. Las interacciones entre quarks cerca de la superficie de Fermi son ciertamente atractivas en algunos canales (ya que la fuerza fuerte enlaza quarks para formar bariones) y, tal como demostraron Bardeen, Cooper y Schrieffer^[18], si existe algún canal en el cual la in-

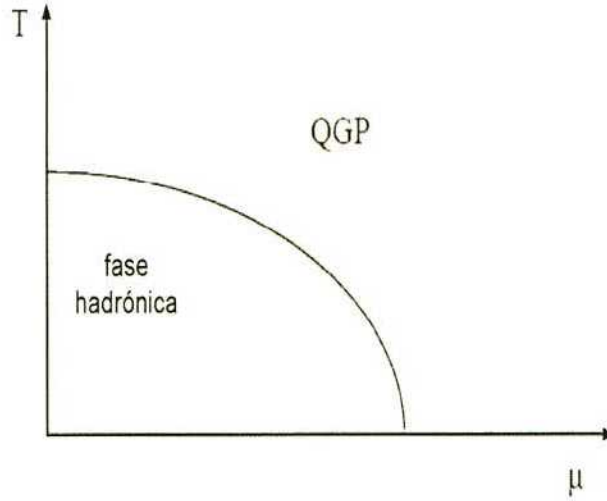


Figura 2.1: Primer esquema del diagrama de fases de QCD.

teracción sea atractiva, también debe haber un estado de menor energía libre que el dado por la superficie de Fermi. Puesto que un par de quarks no puede ser singlete de color, el correspondiente estado condensado rompe la simetría local de color, propia de la QCD ($SU(3)_c$). Por tal motivo a este fenómeno se lo llamó “superconductividad de color”. En 1975 se publicó el primer trabajo sugiriendo la posibilidad de que se produzcan pares de Cooper en materia de quarks densa y fría^[14], pero la relevancia de esta idea para el diagrama de fases de QCD fue largamente ignorada hasta fines de la década de los 1990s. Una vez que la superconductividad de color fue tomada en cuenta, surgieron muchas otras posibilidades, como por ejemplo aquella que consiste en dos fases superconductoras^[19]. En la primera de estas fases, para potenciales suficientemente grandes, la materia se halla distribuida de manera tal que los quarks *up*, *down* y *strange* estén apareados en un condensado conocido como *Color-Flavor Locked* (CFL). Pero dado que la masa del quark *strange* es un orden de magnitud superior a las de los quarks *up* y *down*, deberían aparecer antes condensados que contengan sólo estos últimos, dando lugar a la fase conocida como *Two Color-Flavor Superconductivity* (2SC). La aparición de estas fases superconductoras dio lugar al

diagrama de fases representado en la figura 2.2, el cual no es la última versión del mismo, ya que se han hecho, y se continúan haciendo, muchas modificaciones y propuestas en torno a las diferentes fases, transiciones y puntos críticos correspondientes. En el presente trabajo no se estudian estas fases superconductoras sino que nos centraremos en analizar la transición de fase quiral, que es la más representativa y es la que se pretende estudiar con los grandes aceleradores construidos hasta la fecha (como los ya mencionados RHIC y LHC) y otros que se planean construir próximamente (FAIR y NICA, en Alemania y Rusia respectivamente).

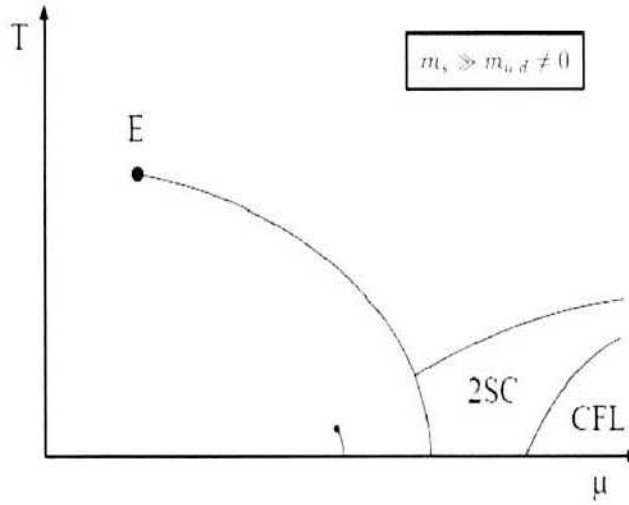


Figura 2.2: Esquema del diagrama de fases de QCD que tiene en cuenta la superconductividad de color, propuesto a fines de la década del 90.

Una particularidad que resulta importante destacar es que la transición de fase quiral puede no siempre producirse de la misma manera. Se cree que hay un sector (altas densidades y bajas temperaturas) donde dicha transición es una transición de primer orden, mientras que cuando la transición es a bajas densidades y temperaturas mayores, la transición resulta de tipo *crossover*. Entre medio, siguiendo la curva de transición de fase, debería existir un punto (conocido como punto crítico final o *Critical End Point*) en el cual la transición es de segundo orden y es el límite entre las transiciones tipo *crossover* y de primer orden. La determinación de dicho

punto crítico en particular ha sido objeto de diversas discusiones y controversias. En el capítulo 4 de esta tesis se expondrá un método para poder determinarlo con muy buena precisión, dentro de la clase de modelos utilizados.

2.2. Modelo Nambu-Jona-Lasinio (NJL)

Si queremos partir de un lagrangiano efectivo, más simple que el de QCD pero con características y simetrías similares, nos vemos naturalmente inducidos a considerar el lagrangiano utilizado por Y.Nambú y G.Jona-Lasinio en sus trabajos de 1961^[4]. Como ya fue mencionado, este modelo fue originalmente concebido para describir nucleones interactuantes, por lo que, es necesario reinterpretar los grados de libertad fermiónicos en términos de quarks, suponiendo que las interacciones locales de dos cuerpos se corresponden con una interacción efectiva, resultante de complicados procesos gluónicos.

La principal utilidad de este tipo de modelo radica en que puede ser diseñado para incorporar todas las simetrías globales de QCD y permite estudiar en detalle el mecanismo de ruptura espontánea de simetría quiral y sus manifestaciones en la física de hadrones, como la generación dinámica de masa de los quarks, la aparición de un condensado de quarks y el papel de los piones como bosones de Goldstone. Tal vez el punto débil más importante del modelo es que no posee la propiedad de confinamiento de color de QCD. Su aplicabilidad está entonces limitada a aquellos fenómenos hadrónicos y nucleares que no dependen sensiblemente de los detalles del mecanismo de confinamiento. No obstante, cabe esperar que para muchos aspectos importantes de la física hadrónica de bajas energías, las simetrías de QCD sean tan o más importantes que el confinamiento.

El modelo NJL más simple parte de las siguientes hipótesis:

- Considera a los quarks livianos u y d como los grados de libertad del sistema.
- Supone que en el límite de bajas energías los grados de libertad gluónicos están absorbidos dentro de una interacción efectiva y local entre quarks.

- Construye esta interacción en acuerdo con las simetrías de QCD.

El lagrangiano del modelo NJL de dos sabores se puede escribir como

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - \hat{m})\psi + \mathcal{L}_{int}, \quad (2.21)$$

con la matriz de masas desnudas dada por $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d)$. El lagrangiano de interacción es del tipo local y de cuatro fermiones. Esta interacción debe satisfacer la simetría quiral $SU(2)_R \otimes SU(2)_L$ junto con la simetría de color $SU(3)_{color}$ y CPT. El $\mathcal{L}_{int}$ propuesto originalmente por Nambu y Jona-Lasinio es

$$\mathcal{L}_{int} = G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2]. \quad (2.22)$$

2.2.1. Generación dinámica de masa fermiónica

Consideremos el lagrangiano de interacción $\mathcal{L}_{int}$, de $N_f = 2$ fermiones de igual masa m . Si la constante de acoplamiento G es pequeña se puede utilizar teoría de perturbaciones, pero si el acoplamiento es fuerte es preciso realizar resumaciones. En este último caso comúnmente se utiliza la aproximación de Hartree (campo medio), en la que se toman en cuenta sólo los términos directos. Esto equivale a linealizar la interacción en la ecuación (2.22) reemplazando los términos $(\bar{\psi}\Gamma\psi)^2$ por $2\bar{\psi}\Gamma\psi\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle$, siendo $\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle$ el valor de expectación del vacío y Γ cualquiera de los operadores que aparecen en $\mathcal{L}_{int}$. Como el vacío debe ser invariante de Lorentz y debe conservar paridad, el único valor de expectación no nulo posible es $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$, el condensado quark-antiquark relacionado con la densidad escalar $\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma_0\psi$. Entonces, la ecuación de Dirac en la aproximación de campo medio resulta

$$[i\cancel{D} - \hat{m} + 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle]\psi(x) = 0. \quad (2.23)$$

Es posible definir entonces una masa fermiónica dinámica

$$M = m - 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle \quad (2.24)$$

generada por una interacción escalar suficientemente fuerte entre fermiones. A la ecuación (2.24), que no es otra cosa más que la ecuación de Dyson para el propagador de quarks en la aproximación de Hartree, se la denomina ecuación del “gap”

del modelo NJL, en analogía con la correspondiente ecuación que determina el gap de energía en un superconductor. Dicha ecuación se puede representar diagramáticamente mediante la figura 2.3.

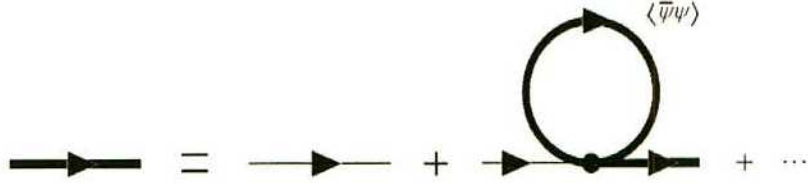


Figura 2.3: Representación diagramática de la ecuación (2.24), conocida como la ecuación del “gap”. La línea fina (gruesa) denota el propagador del quark desnudo (vestido). El lazo fermiónico representa al condensado de quarks en la ecuación.

En la aproximación de campo medio, el condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ está dado por

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -i \text{Tr}[S_F(0)] \quad (2.25)$$

donde S_F es el propagador de Dirac, definido por

$$S_F(x-y) = -i \langle T[\psi(x)\bar{\psi}(y)] \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{\not{p} - M + i\epsilon}. \quad (2.26)$$

La aparición de $S_F(0)$ en (2.25) refleja el lazo cerrado de la figura 2.3, con la línea fermiónica comenzando y terminando en el mismo punto del espacio-tiempo. Como la masa dinámica M está en la expresión de $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, la ecuación del gap es una ecuación autoconsistente.

La integral S_F es cuadráticamente divergente y requiere, por lo tanto, de un procedimiento de regularización apropiado. El método más sencillo consiste en introducir un *cut-off* para las componentes espaciales de momento Λ_3 e integrar sobre la componente temporal p_0 en la ecuación (2.25). Se obtiene

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^{\Lambda_3} \vec{p}^2 dp \frac{M}{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}, \quad (2.27)$$

2.2. Modelo Nambu-Jona-Lasinio (NJL)

donde N_c y N_f son el número de colores y el número de sabores respectivamente. Por lo tanto, el condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ representa la densidad escalar de la energía negativa de Dirac, integrada hasta el momento $|\vec{p}| \leq \Lambda_3$. La ecuación del gap describe la interacción de un fermión con la parte “activa” del mar de Dirac. De la ecuación (2.27) se obtiene la ecuación del gap

$$M = m + \frac{2GN_cN_f}{\pi^2} \int_0^{\Lambda_3} \vec{p}^2 dp \frac{M}{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}. \quad (2.28)$$

Considerando el caso $m = 0$ (límite quiral), es fácil ver que esta ecuación tiene una solución no trivial con $M \neq 0$ cuando la constante de acoplamiento G excede un valor crítico $G_{crit} = \pi^2/\Lambda_3^2$. Los quarks adquieren entonces una masa dinámica.

La generación dinámica de masa va en paralelo con la reestructuración del vacío: para $G > G_{crit}$ el vacío contiene un condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ no nulo. Como la densidad escalar $\bar{\psi}\psi$ rompe la simetría quiral, el estado fundamental no tiene la simetría $SU(2)_R \otimes SU(2)_L$ del lagrangiano. La simetría quiral es espontáneamente rota, y el condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ es el parámetro de orden correspondiente.

Por lo tanto, se distinguen dos casos de realización de la simetría quiral (ver Fig.2.4):

1. La fase Wigner-Weyl, en la cual $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$ y los fermiones no tienen masa. Equivalentemente, la carga axial $Q_5 = \int d^3x A_0(x)$ aniquila el vacío: $Q_5 | 0 \rangle = 0$. En el modelo NJL este es el caso para $G < G_{crit}$.
2. La fase Nambu-Goldstone en la cual $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$ y los fermiones tienen masa. En esta fase existe un bosón de Nambu-Goldstone no masivo. La carga axial no aniquila el vacío: $Q_5 | 0 \rangle \neq 0$. En el modelo NJL esto sucede cuando $G > G_{crit}$.

Por otro lado, para el caso de $m \neq 0$, si bien la masa dinámica nunca llega a ser cero, tiene un comportamiento similar al descrito para $m = 0$, mostrando una curva asintótica (representado por la curva de trazos de la Fig.2.4) a la respectiva al límite quiral, tanto para el rango de G pequeños como también para $G \gg 1$.

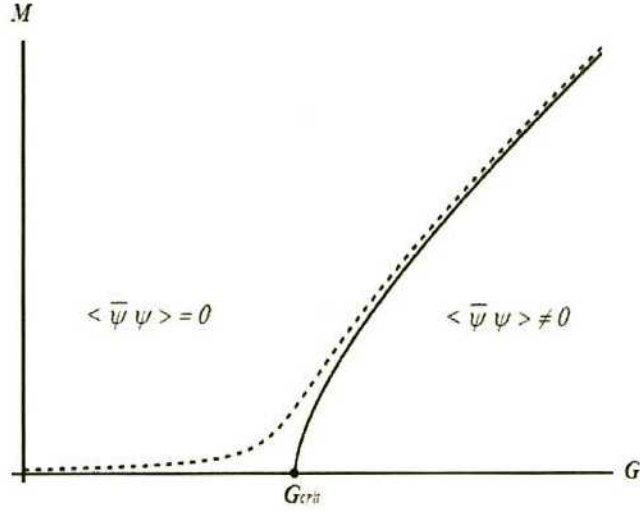


Figura 2.4: Representación de las masas dinámicas en función de la constante de acoplamiento. Se observan claramente las dos realizaciones de la simetría quiral, a la Wigner-Weyl para $G < G_{crit}$ y a la Nambu-Goldstone para $G > G_{crit}$. La línea de trazos representa el caso físico, mientras que la línea sólida corresponde al límite quiral ($m = 0$).

2.2.2. Bosón de Goldstone pseudoescalar

Como ya se ha mencionado, la ruptura espontánea de simetría global implica la existencia de un modo de frecuencia cero, llamado bosón de Nambu-Goldstone. En este caso se trata de un modo fermión-antifermión pseudoescalar neutro ($J^\pi = 0^-$), identificado con el “pión”. Su espín y paridad reflejan la simetría axial $U(1)_A$ rota.

Para ver cómo emerge del modelo el pión de Goldstone sin masa, construimos la matriz T que surge de resolver la ecuación de Bethe-Salpeter (ecuación de dos cuerpos) en el canal fermión-antifermión pseudoescalar para un dado cuadrimomento cuadrático q^2 del mesón:

$$T_\pi(q^2) = K_\pi + K_\pi J_\pi(q^2) K_\pi + \dots = \frac{K_\pi}{1 - K_\pi J_\pi(q^2)}. \quad (2.29)$$

En la figura 2.5 se ilustra esta ecuación autoconsistente.

La interacción en este canal está dada por el término $G(\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2$ del lagrangiano



Figura 2.5: Esquemmatización de la ecuación de Bethe-Salpeter para la matriz quark-antiquark T (los propagadores de mesones aparecen como bandas sombreadas). Las líneas sólidas corresponden a los propagadores de quarks vestidos en la aproximación de Hartree (ver figura 2.3).

de la ecuación (2.22). Entonces, $K_\pi = 2G$ es el núcleo de la interacción, y J_π es la integral del lazo de interacción y está dada por

$$J_\pi(q^2) = i \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[i\gamma_5 \frac{1}{\not{p} + \frac{\not{q}}{2} - M + i\epsilon} i\gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \frac{\not{q}}{2} - M + i\epsilon} \right] \quad (2.30)$$

El proceso de regularización de esta integral es idéntico al usado en la ecuación del gap (2.24).

La masa m_π del pión queda determinada por los polos de la matriz T , es decir, por la condición

$$1 - 2G J_\pi(q^2 = m_\pi^2) = 0 \quad (2.31)$$

Utilizando la ecuación del gap (2.28) para $m = 0$ es posible ver que una solución de esta ecuación es $m_\pi = 0$ (en el límite quiral), lo que significa que el pión es un pseudo-bosón de Goldstone, un modo de masa nula como consecuencia de una ruptura espontánea de simetría. Para ver esto partimos de

$$J_\pi(q^2 = 0) = -i \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_5 \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \gamma_5 \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2 + i\epsilon}, \quad (2.32)$$

y utilizando que $\text{Tr}_D[\gamma_5(\not{p} + M)\gamma_5(\not{p} + M)] = \text{Tr}(M^2 - \not{p}\not{p}) = -4(p^2 - M^2)$, se puede obtener que

$$J_\pi(q^2 = 0) = 4N_f N_c i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i}{M} \text{Tr} S_F(0). \quad (2.33)$$

Comparando con las ecuaciones (2.24) y (2.25) se observa que

$$K_\pi J_\pi(q^2 = 0) = -\frac{2G}{m} \langle \bar{\psi}\psi \rangle = 1, \quad (2.34)$$

por lo que se verifica la validez del teorema de Nambu-Goldstone.

El próximo paso es examinar la influencia de la ruptura explícita de la simetría quiral, que se produce al considerar el término $\delta\mathcal{L} = -m\bar{\psi}\psi$, con una masa fermiónica desnuda m no nula. Ante una rotación quiral $\psi \rightarrow \exp(i\gamma_5\theta/2)$, y para ángulo θ pequeño, este término se transforma en

$$\delta\mathcal{L}_\theta = -m\bar{\psi}(1 + i\gamma_5\theta - \frac{1}{2}\theta^2 + \dots)\psi. \quad (2.35)$$

La densidad pseudoescalar $\bar{\psi}i\gamma_5\psi$ es la fuente del campo de piones ϕ , por lo que podemos identificar $\theta = \phi/f_\pi$, donde f_π es una constante de normalización, la cual tiene dimensión de energía. Esta f_π es en realidad la constante de decaimiento del pión, definida por el elemento de matriz

$$\langle 0 | A_\mu(0) | \pi(q) \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi(0) | \pi(q) \rangle = 2if_\pi q_\mu \quad (2.36)$$

el cual describe el decaimiento del pión via la corriente axial A_μ .

Consideremos ahora el término de orden $\theta^2 = \phi^2/f_\pi^2$ en la ecuación (2.35). Este término tiene la forma $(m/2f_\pi^2)\bar{\psi}\psi\phi^2$. Esto corresponde exactamente al término de masa $\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2}m_\pi^2\phi^2$ para el pión. Usando nuevamente la aproximación de campo medio con el reemplazo $\bar{\psi}\psi \rightarrow \langle \bar{\psi}\psi \rangle$, podemos hallar la relación de Gell-Mann-Oakes-Renner:

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -m \langle \bar{\psi}\psi \rangle. \quad (2.37)$$

Esta importante ecuación conecta los parámetros de la ruptura explícita y espontánea de la simetría quiral con las constantes de estructura correspondientes del pión: el condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ en términos de la constante de decaimiento del pión f_π . La masa fermiónica desnuda finita m eleva la masa del pión m_π desde el valor nulo que tenía en el límite quiral, de tal manera que m_π es proporcional a $\sqrt{m}$. Notar que el teorema de Goldstone se verifica nuevamente a medida que $m \rightarrow 0$.

El escenario de ruptura espontánea de simetría recién descrito es de naturaleza muy general y es casi independiente de la forma detallada de la interacción subyacente. Existen análogos de esto en diversas áreas de la física. Uno de los ejemplos

más conocidos es el de un ferromagneto: su fase de baja temperatura se caracteriza por una magnetización no nula, lo cual es el análogo del condensado quiral $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$. El Hamiltoniano del sistema de espín que describe el ferromagneto es simétrico ante rotaciones espaciales. Sin embargo, en el estado fundamental la magnetización apunta en una dirección definida en el espacio: muchos espines cooperan para formar el material magnetizado macroscópicamente. Lentas variaciones en la dirección de magnetización produce un movimiento de onda larga de los espines. Esta onda de espines es el bosón de Nambu-Goldstone de simetría rotacional espontáneamente rota.

Hasta aquí, hemos señalado estas importantes relaciones para el modelo $SU(2)$, con solamente un singlete de pión. En las próximas secciones veremos su extensión para el modelo NJL basado en el grupo $SU(3)$ de sabor.

2.3. Extensión del modelo NJL a tres sabores de quarks

En la sección anterior hemos desarrollado las características principales del modelo NJL para dos sabores (quarks u y d casi sin masa), el cual como hemos visto ha sido extensamente estudiado^[20,21] y ha sido de gran utilidad para explorar la ruptura espontánea de la simetría quiral y la consecuente aparición del condensados de quarks, generación dinámica de masa y el pión como bosón de Goldstone.

En esta sección estudiaremos desarrollos donde se generaliza el modelo NJL a $SU(3)$ de sabor, es decir, con la incorporación del quark *strange* dentro de este esquema^[22-26]. Como la masa desnuda del quark *strange* es $m_s \simeq 150\text{MeV}$, nos encontramos con un caso donde el quark en cuestión no es liviano ni pesado. Además, al introducir la extrañeza en el modelo, tendremos que prestar atención al problema de la anomalía axial $U(1)$, tal como se explica en la subsección 2.3.2. Pero primero repasaremos las simetrías que QCD presenta al considerar tres sabores de quarks.

2.3.1. Simetrías de QCD para tres sabores

Nuestro punto de partida es QCD con $N_f = 3$ sabores de quarks. Los campos fermiónicos (2.2) están formados por los tres quarks u , d y s , y cada uno de ellos existe en $N_c = 3$ colores. Consideremos

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{QCD}^{(0)} + \delta\mathcal{L} \quad (2.38)$$

donde $\mathcal{L}_{QCD}^{(0)}$ es el límite $m \rightarrow 0$ y $\delta\mathcal{L} = -\bar{\psi}\hat{m}\psi$, con ψ dada ahora por $\psi = (u, d, s)^T$. Dado que $N_f = 3$ sabores, $\mathcal{L}_{QCD}^{(0)}$ es ahora invariante ante el grupo

$$U(3)_R \otimes U(3)_L = SU(3)_V \otimes SU(3)_A \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A. \quad (2.39)$$

Según veremos en detalle en la próxima subsección, la simetría axial $U(1)_A$, es decir, la invariancia ante transformaciones $\psi \rightarrow \exp(i\gamma_5\alpha_A)\psi$, está rota en la naturaleza. Por lo tanto, en el límite quiral con $m \rightarrow 0$, nos queda la simetría global $SU(3)_V \otimes SU(3)_A \otimes U(1)_V$. Tenemos entonces, nueve corrientes vectoriales y ocho axiales conservadas:

$$V_\mu^a = \bar{\psi}\gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi, \quad a = 0, \dots, 8, \quad (2.40)$$

$$A_\mu^a = \bar{\psi}\gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} \psi, \quad a = 1, \dots, 8. \quad (2.41)$$

con $\lambda^0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\mathbb{1}_{3 \times 3}$, donde $\mathbb{1}_{3 \times 3}$ es la matriz unitaria de 3×3 , y las λ^a están dadas por las matrices de Gell-Mann. Las correspondientes cargas vector y axial son

$$Q^a = \int d^3x V_0^a(x) \quad ; \quad Q_5^a = \int d^3x A_0^a(x), \quad (2.42)$$

con $\frac{dQ^a}{dt} = \frac{dQ_5^a}{dt} = 0$. Las masas de los quarks rompen esta simetría explícitamente, teniendo que

$$\partial^\mu V_\mu^a(x) = i\bar{\psi}(x)\left[\hat{m}, \frac{\lambda^a}{2}\right]\psi(x), \quad (2.43)$$

$$\partial^\mu A_\mu^a(x) = i\bar{\psi}(x)\left\{\hat{m}, \frac{\lambda^a}{2}\right\}\gamma_5\psi(x). \quad (2.44)$$

Como las masas de u y d son muy pequeñas ($m_{u,d} \leq 10$ MeV) comparadas con las masas típicas de los hadrones (~ 1 GeV), esto sugiere que los términos $m_u\bar{u}u +$

$m_d \bar{d}d$ que rompen la simetría quiral, pueden ser tratados como perturbaciones. Sin embargo, para el término $m_s \bar{s}s$ con una masa del quark s bastante mayor ($m_s \sim 150$ MeV) esto no es tan claro. Hay evidencias provenientes de fenómenos hadrónicos de bajas energías^[27,28] y de QCD en la red^[29,30], que indican que la simetría quiral $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$ se rompe espontáneamente. Esto se pone de manifiesto en los condensados quark-antiquark $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ no nulos.

2.3.2. Anomalía axial

Mencionamos que la simetría $U(1)_A$ del lagrangiano $\mathcal{L}_{QCD}^{(0)}$ con quarks sin masa está rota en la naturaleza. Si hubiese una buena simetría quiral $U(3)_R \otimes U(3)_L$, habrían nueve corrientes axiales conservadas en lugar de ocho. En ese caso, todo el nonete pseudoescalar, incluyendo los piones, kaones, mesones η y η' , deberían aparecer como bosones de Goldstone sin masa. En cambio se observa que el mesón η' , cuya masa $m_{\eta'} = 958$ MeV es comparable a la masa del nucleón, cae fuera de este esquema. Dicho valor para la masa $m_{\eta'}$ no puede ser explicado, aún teniendo en cuenta la existencia de masa no nulas para los quarks. Este es el llamado “problema η' ”, el cual se piensa que está relacionado con la anomalía axial de QCD. Las anomalías son simetrías de lagrangianos clásicos que se rompen al incluir efectos cuánticos^[41].

Consideremos la corriente axial del singlete de $SU(3)$

$$J_{\mu 5}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \gamma_5 \psi(x), \quad (2.45)$$

relacionada con la simetría $U(1)_A$. En principio, cabría esperar que la divergencia de la corriente se anule en el límite quiral $m \rightarrow 0$. Este es el caso a nivel clásico de $\mathcal{L}_{QCD}^{(0)}$. Sin embargo, cuando se tienen en cuenta correcciones cuánticas resulta que

$$\partial_{\mu} J_{\mu 5}^a(x) = \frac{g^2 N_f}{8\pi^2} E^a B^a, \quad a = 1, \dots, 8 \quad (2.46)$$

donde E^a y B^a son respectivamente los campos eléctricos y magnéticos de color. Cabe señalar que la ruptura explícita de la simetría quiral introduce un término adicional $2i\bar{\psi}m\gamma_5\psi$ en el lado derecho de la ecuación (2.46).

2.3. Extensión del modelo NJL a tres sabores de quarks

Esto se debe a que las ecuaciones no abelianas de Yang-Mills admiten soluciones para las cuales la acción clásica euclídea $\int d^4x E^a B^a$ es finita, llamadas soluciones de instantones^[32]. A través de la ecuación (2.46), estos instantones se acoplan a los quarks. G. t'Hooft demostró en 1976^[33] que esta interacción efectiva entre quarks inducida por los instantones se puede representar en términos de un determinante de sabor

$$\det[\bar{\psi}_i(1 + \gamma_5)\psi_i] + \det[\bar{\psi}_j(1 - \gamma_5)\psi_j], \quad (2.47)$$

donde los índices de sabor i y j van a través de los quarks u , d y s . Esta interacción comprende los tres sabores simultáneamente, como ilustra la figura 2.6.

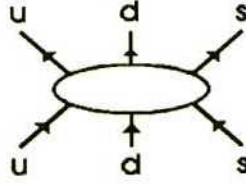


Figura 2.6: Estructura de sabor de la interacción efectiva de ruptura de $U(1)_A$, en este caso consideramos una interacción (que resulta ser la mínima) de seis fermiones

2.3.3. Interacción efectiva en el modelo NJL

Utilizando lo señalado en las subsecciones anteriores, la extensión del lagrangiano NJL a tres sabores resulta

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - \hat{m})\psi + \mathcal{L}_{int}^{(4)} + \mathcal{L}_{int}^{(6)}, \quad (2.48)$$

donde la matriz de masas desnudas dada en este caso por $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ y el lagrangiano de interacción tiene una componente de interacción local de cuatro fermiones $\mathcal{L}_{int}^{(4)}$ y un término de ruptura de la simetría $U(1)_A$, dado por $\mathcal{L}_{int}^{(6)}$.

La interacción de cuatro fermiones debe satisfacer la simetría quirral $U(3)_R \otimes U(3)_L$ junto con la simetría $SU(3)_{color}$ y CPT. La forma más sencilla de esta interacción

es²

$$\mathcal{L}_{int}^{(4)} = \frac{G}{2} \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^a\psi)^2]. \quad (2.50)$$

También han sido estudiadas formas más generales que incluyen interacciones vectoriales y axiales, dando lugar a resultados cualitativamente equivalentes.

La interacción $\mathcal{L}_{int}^{(4)}$ tiene aún una simetría axial $U(1)_A$ no deseada. Como mencionamos antes, una manera de romper esta simetría es introduciendo el término de t'Hooft

$$\mathcal{L}_{int}^{(6)} = H \{ \det[\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi] + \det[\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi] \}, \quad (2.51)$$

que puede reescribirse en la forma

$$\mathcal{L}_{int}^{(6)} = \frac{H}{4} A_{abc} (\bar{\psi}\lambda^a\psi) [(\bar{\psi}\lambda^b\psi)(\bar{\psi}\lambda^c\psi) - 3(\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^b\psi)(\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^c\psi)], \quad (2.52)$$

donde la suma es sobre los índices de sabor $a, b, c \in \{0, 1, \dots, 8\}$. La constante de acoplamiento H tiene dimensiones de (longitud)⁵ y las A_{abc} están dadas por

$$A_{abc} = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnl} (\lambda_a)_{im} (\lambda_b)_{jn} (\lambda_c)_{kl}. \quad (2.53)$$

Este vértice de interacción de seis fermiones que surge a partir de la interacción de t'Hooft produce modificaciones, tanto en las ecuaciones del gap, como en la interacción efectiva de cuatro puntos. En el primer caso esto se traduce en la presencia de un término adicional con dos lazos de quarks, tal como se muestra diagramáticamente en la figura 2.7. La ecuación correspondiente resulta

$$M_i = m_i + G \langle \bar{\psi}\psi \rangle_i + \frac{H}{2} \epsilon_{ijk} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_j \langle \bar{\psi}\psi \rangle_k, \quad (2.54)$$

²Dado que las corrientes fundamentales de quarks en QCD son las corrientes de color $j_\mu^a = \bar{\psi}\gamma^\mu\lambda^a\psi$, es natural analizar la interacción local más simple que es posible construir a través del acoplamiento de dos de tales corrientes:

$$\mathcal{L}_{int}^{(4)} = -G \sum_{a=0}^8 (\bar{\psi}\gamma_\mu\lambda^a\psi)^2, \quad (2.49)$$

Donde G es la constante de acoplamiento efectiva. Es fácil ver que esta interacción es invariante ante las transformaciones de sabor $U(3)_R \otimes U(3)_L$. Aplicando a la ecuación (2.49) las transformaciones de Fierz (ver^[7,34]), es posible reescribir dicha interacción, de manera de obtener las interacciones en los canales escalar y pseudoescalar (2.50).

2.3. Extensión del modelo NJL a tres sabores de quarks

con $(i, j, k) =$ cualquier permutación de (u, d, s) . Vemos que estas ecuaciones contienen un término sin mezcla de sabores, proporcional a la constante de acoplamiento G , tal como en el caso de dos sabores. Pero además hay un término que posee mezcla de sabores y es proporcional a la constante H .

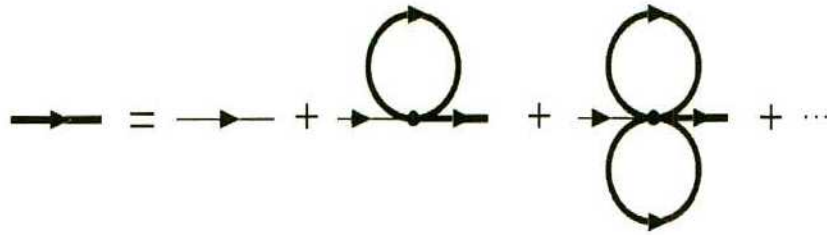


Figura 2.7: Diagrama de las ecuaciones del “gap” (ecuaciones de Dyson en la aproximación de Hartree) para tres sabores de quarks.

Por otro lado, para describir los mesones deberemos primero construir vértices efectivos de cuatro puntos, dados por la suma del vértice de cuatro puntos propiamente dicho y los vértices de seis puntos con un lazo, como muestra la figura 2.8. Estos vértices efectivos de cuatro puntos son luego usados como núcleos de



Figura 2.8: Vértice efectivo para la interacción de cuatro puntos.

interacción en la ecuación de Bethe-Salpeter (ver fig.2.5). Si bien en este caso se presentan nuevas complicaciones debido a la diferencia de masas de los quarks, el mecanismo resulta básicamente similar a la versión de dos sabores, por lo que no lo desarrollaremos aquí. Sin embargo pueden encontrarse en detalle por ejemplo en las referencias^[35,36].

2.3. Extensión del modelo NJL a tres sabores de quarks

Como comentario final de este capítulo debemos recordar que el modelo NJL no confina. Formalmente, esto se refleja en el hecho de que la integral de la ecuación (2.30), y por ende también las funciones de polarización $J_M(q^2)$, tiene una parte imaginaria por encima del umbral dado por $q^2 > (M_i + M_j)^2$, donde M_i y M_j son las masas constituyentes de los quarks que forman el mesón. Como consecuencia, aquellos mesones con masa mayor que dicho umbral tienen un ancho finito, lo cual indica que son inestables frente al decaimiento de par quark-antiquark. Por supuesto, el pión no resulta afectado por este problema, pero veremos más adelante que sí deberemos lidiar con este problema en el sector del mesón η' para cierto rango de temperaturas.

Por otro lado, al igual que en el modelo de dos sabores, en general las integrales de lazos resultan ser divergentes por lo que, como parte del modelo, es preciso especificar cómo regularizar estas divergencias. En la literatura específica del tema aparecen muchos diferentes esquemas de regularización, y cada uno de ellos tiene sus ventajas y sus desventajas^[6,7]. En el presente trabajo, este inconveniente se solucionará utilizando interacciones no locales y separables en el propagador de quarks, tal como explicaremos detalladamente en el próximo capítulo.

Capítulo 3

Modelo de quarks quirales con interacciones no locales y separables

“Lo conocido es finito, lo desconocido infinito; desde el punto de vista intelectual estamos en una pequeña isla en medio de un océano ilimitable de inexplicabilidad. Nuestra tarea en cada generación es recuperar algo más de tierra.”

Thomas H. Huxley (1825-1895), Médico y biólogo británico.

En este capítulo se extenderá el modelo NJL considerando interacciones no locales y se expondrá el formalismo utilizado en la obtención de las ecuaciones del “gap” y en la determinación de las masas de los mesones y sus constantes de decaimiento. Luego se incluirán términos de interacción que den cuenta de la renormalización de la función de onda en el propagador del quark y se expondrán los resultados numéricos obtenidos para las propiedades hadrónicas y de quarks. Finalmente se extenderá el modelo no local a tres sabores de quarks y se expondrán, a su vez, los resultados numéricos correspondientes.

3.1. Modelo de quarks quirales no local

En el capítulo anterior hemos descrito un sistema de quarks interactuando a través de interacciones que son invariantes quirales y locales. La naturaleza local de dichas interacciones permite simplificar notablemente los cálculos, pero también trae consecuencias no deseadas, tales como integrales divergentes y falta de confinamiento. En cuanto a la primera consecuencia, hay varios tipos de regularización usadas en la literatura (*cut-off* en 3 y 4 dimensiones, Pauli-Villars, etcétera), y todos ellos llevan a resultados cualitativamente parecidos, por lo cual no parece haber una razón física para decidirse por uno u otro esquema. En cuanto a la segunda consecuencia, el modelo usado lleva a la existencia de quarks no confinados, libres, hecho contrario a la experiencia.

Una posible solución a estos problemas es utilizar el modelo de intercambio de un gluón para generar la interacción efectiva entre quarks. Comenzaremos por tratar el caso de dos sabores degenerados. La acción efectiva de este tipo de modelo está dada por

$$S = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(p)(\not{p} - \hat{m})\psi(p) + S_{int}, \quad (3.1)$$

donde

$$S_{int} = -\frac{G^2}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_2}{(2\pi)^4} j_\mu^a(p_1, p'_1) D_{\mu\nu}^{ab}(p_1, p'_1, p_2, p'_2) j_\nu^b(p_2, p'_2) \quad (3.2)$$

donde G es la constante de acoplamiento quark-gluón y la matriz $D_{\mu\nu}^{ab}(p_1, p'_1, p_2, p'_2)$ representa un propagador efectivo del gluón, mientras que los factores

$$j_\mu^a(p, p') = g(p, p') \bar{\psi}(p) \gamma^\mu \lambda_a \psi(p'), \quad (3.3)$$

son las corrientes (no locales) de quarks del octete de color. Mediante las transformaciones de Fierz (ver^[7,34]), los productos de corrientes que aparecen en (3.2) pueden ser expresadas en productos de corrientes de la forma

$$j_\alpha(p, p') = g(p, p') \bar{\psi}(p) \Gamma_\alpha \psi(p'), \quad (3.4)$$

donde los operadores Γ_α incluyen, entre otras, las interacciones en los canales escalar ($\Gamma_\alpha \rightarrow \tau_a$) y pseudoescalar ($\Gamma_\alpha \rightarrow i\gamma_5\tau_a$).

Los modelos que producen interacciones de intercambio de un gluón suponen que los efectos fuertes no perturbativos pueden ser tenidos en cuenta modificando en forma fenomenológica el propagador del gluón^[37]. El propagador del gluón efectivo provee también una forma natural de introducir la no localidad en la interacción quark-quark. Esta no localidad puede ser usada para regularizar las divergencias ultravioletas del modelo^[38]. Una forma posible podría ser:

$$D_{\mu\nu}^{ab}(p_1, p'_1, p_2, p'_2) = g_{\mu\nu} \delta^{ab} D(p_1, p'_1, p_2, p'_2). \quad (3.5)$$

Se pueden reemplazar las dos funciones desconocidas $g(p, p')$ y $D(p_1, p'_1, p_2, p'_2)$ del sector gluónico de QCD, por un núcleo de interacción de cuatro puntos

$$K(p_1, p'_1, p_2, p'_2) = g(p_1, p'_1) D(p_1, p'_1, p_2, p'_2) g(p_2, p'_2). \quad (3.6)$$

Para dar una descripción adecuada de las correlaciones hadrónicas de dos partículas en un sistema de muchos quarks, introducimos los momentos total y relativo $P = p_1 - p_2$, $p = (p_1 + p_2)/2$, respectivamente.

Si elegimos la forma separable del núcleo de interacción de (3.6) de acuerdo a la figura 3.1 se obtiene que

$$K(p, P; p', P') = -K_0 g(p) g(p') \delta_{P, P'}. \quad (3.7)$$

donde K_0 es una constante que resulta ser proporcional a la constante de acoplamiento G y la delta de Kronecker nos asegura la conservación del cuadrimomento total. La función $g(p)$, con $g(0) = 1$, es una función decreciente (en el espacio euclídeo) que describe la no localidad de la interacción. Dicha función recibe usualmente el nombre de regulador o factor de forma.

Como sucede con la versión local del modelo NJL, la simetría quiral es espontáneamente rota en este esquema no local para valores suficientemente grandes de la constante de acoplamiento G . Trabajando en la aproximación de Hartree, con N_c colores

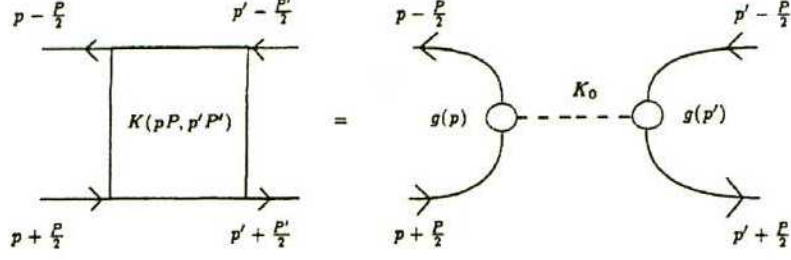


Figura 3.1: Núcleo de interacción de cuatro puntos en la aproximación separable

y N_f sabores en el sistema, la autoenergía $M(q)$ o masa dinámica del quark viene dada por

$$M(q) = m + (M(0) - m)g(q), \quad (3.8)$$

donde m es la masa desnuda del quark, y la masa dinámica a momento cero $M(0)$ es una solución de la ecuación del “gap”

$$M(0) = m + 4GN_c N_f \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g(q) \frac{m + (M(0) - m)g(q)}{q^2 + [m + (M(0) - m)g(q)]^2}, \quad (3.9)$$

Entonces, para conocer $M(q)$ sólo es necesario determinar la constante $M(0)$ dada una elección adecuada del regulador.

En espacio de Minkowski, para que un quark exista en forma aislada se debe cumplir que

$$M^2(q_p) = q_p^2, \quad (3.10)$$

para valores reales q_p del cuadrimomento. Si nos colocamos en el sistema de la partícula ($\vec{p} = 0$) y utilizamos la ecuación (3.8), nos queda

$$(m + [M(0) - m]g(q_0))^2 = q_0^2. \quad (3.11)$$

Se ve claramente que, según el factor de forma $g(q)$ que se use, habrá un valor crítico de $M(0)$ a partir del cual no existen soluciones reales de esta ecuación. O sea, el propagador del quark no tendrá polos reales, y es posible interpretar esto como una

3.1. Modelo de quarks quirales no local

situación de confinamiento, conocida como “*analytic confinement*”. Para determinar dicho valor crítico, basta pedir que se cumplan dos condiciones en ese punto: las dos curvas definidas por los miembros izquierdo y derecho de (3.10) se deben cruzar (esto es la ecuación (3.11)), y tener la misma pendiente, es decir

$$2[M(0) - m]g(q_0)\frac{dg}{dq_0} = 1. \quad (3.12)$$

Luego, las ecuaciones (3.11) y (3.12) definen el $M(0)$ crítico.

Podemos por ejemplo considerar como factor de forma una función gaussiana del cuadrimomento euclídeo

$$g(q) = \exp\left(\frac{-q^2}{\Lambda^2}\right) \quad (3.13)$$

donde Λ es un parámetro del modelo que describe el rango de no localidad. Esta función cumple con los requerimientos básicos de ser invariante de Lorentz y decaer suficientemente rápido para momentos altos, de manera de mantener las integrales acotadas. Pasando el regulador $g(q)$ al espacio de Minkowski ($q_4 \rightarrow iq_0$), la ecuación (3.11) queda

$$m + [M(0) - m] \exp\left(\frac{q_0^2}{\Lambda^2}\right) = q_0, \quad (3.14)$$

En ella vemos que, según el valor de $M(0)$, la exponencial interseca o no a la recta, como se muestra esquemáticamente en la figura 3.2. De esta forma, la ecuación (3.11) tendrá dos, una (caso crítico) o ninguna solución real. En este último caso, habrá dos soluciones complejas correspondientes al caso de un par de polos complejos en el propagador del quark ¹. Esto, a su vez, corresponde a quarks aislados con una vida media finita, similar a lo que ocurre en otros modelos de confinamiento^[10, 11].

Entonces, una adecuada elección del regulador no local y de los parámetros del modelo permite llevarnos a cierta forma de confinamiento de los quarks, haciendo que el propagador no tenga polos a energías reales. En el espacio euclídeo esto equivale a que el propagador no tenga polos imaginarios puros.

¹En realidad existen infinitos polos complejos, pero sólo tomamos los dos más cercanos al eje real. Para mayor detalle ver el apéndice en ref.^[89]

3.2. Modelo no local con Renormalización de la Función de Onda (WFR) en el propagador de quarks

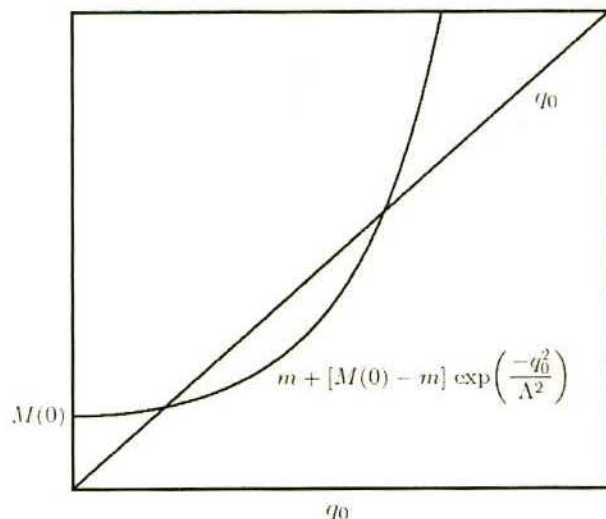


Figura 3.2: Solución gráfica de la ecuación (3.11). La intersección de las curvas representa la existencia de quarks aislados con masa.

La justificación final del factor de forma utilizado (y del modelo en general) viene dada por su poder explicativo y predictivo de la realidad. En los trabajos realizados en $SU(2)$ con reguladores gaussianos^[42], las propiedades obtenidas de los mesones muestran un buen acuerdo con lo observado empíricamente.

3.2. Modelo no local con Renormalización de la Función de Onda (WFR) en el propagador de quarks

Siguiendo las referencias^[43,44], podemos considerar modelos no locales adoptando como ingrediente básico una descripción confiable del propagador de quarks como la dada por estudios fundamentales, tales como QCD en la red. En este sentido, debería resaltarse que la mayoría de los trabajos realizados en el contexto de modelos quirales no locales utilizan sólo reguladores exponenciales y no tienen en cuenta la renormalización de la función de onda (WFR) en el propagador de los quarks.

3.2. Modelo no local con Renormalización de la Función de Onda (WFR) en el propagador de quarks

Sin embargo, algunos cálculos recientes en QCD en la red sugieren que la WFR puede ser del orden del 30 % (o aún mayor) a momento cero (ver por ejemplo^[15–17]). Además, estos cálculos también muestran que las masas de los quarks tienden a sus valores asintóticos de una forma bastante suave. Luego, resulta importante realizar un estudio detallado del impacto que la incorporación de estas mejoras en el modelo podría producir en las predicciones para las propiedades hadrónicas y de quarks. El lagrangiano que hemos considerado es la mínima expresión que permite incorporar la total dependencia del momento del propagador de quarks, a través de su masa y la renormalización de la función de onda.

Para este desarrollo consideramos un modelo quiral SU(2) no local, como el descrito en la sección anterior, pero incluyendo en su lagrangiano un término de interacción adicional. Esto es, además del término de interacción entre las corrientes de quarks $j_a(x)$, se agrega la interacción entre corrientes de “momento” $j_P(x)$, autoinvariantes ante transformaciones quirales, y que serán las responsables de la dependencia con el momento de la renormalización de la función de onda (ver ref.^[13] para mayor detalle). La acción efectiva euclídea correspondiente estará dada entonces por

$$S_E = \int d^4x \left\{ \bar{\psi}(x) (-i\rlap{\not{\partial}} + \hat{m}) \psi(x) - \frac{G}{2} [j_a(x)j_a(x) + j_P(x)j_P(x)] \right\} \quad (3.15)$$

donde ψ es el doblete de fermiones para $N_f = 2$, $\psi \equiv (u, d)^T$, y $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d)$ es la matriz de masas corrientes de los quarks. En lo que sigue consideraremos simetría de isospín, esto es $m = m_u = m_d$. El término cinético incluye el operador $\rlap{\not{\partial}} = \gamma_\mu \partial_\mu$, que en el espacio euclídeo se define como $\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + \gamma_4 \frac{\partial}{\partial \tau}$, con $\gamma_4 = i\gamma_0$. Las corrientes no locales $j_a(x)$, $j_P(x)$ están dadas por

$$\begin{aligned} j_a(x) &= \int d^4z \, g(z) \, \bar{\psi} \left(x + \frac{z}{2} \right) \Gamma_a \psi \left(x - \frac{z}{2} \right) , \\ j_P(x) &= \int d^4z \, f(z) \, \bar{\psi} \left(x + \frac{z}{2} \right) \frac{i \overleftrightarrow{\rlap{\not{\partial}}}}{2 \kappa_p} \psi \left(x - \frac{z}{2} \right) . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Aquí, $\Gamma_a = (\mathbb{1}, i\gamma_5 \vec{\tau})$ y $u(x') \overleftrightarrow{\partial} v(x) = u(x') \partial_x v(x) - \partial_{x'} u(x') v(x)$. Las funciones $g(z)$ y $f(z)$ en Eq.(3.16), son los factores de forma covariantes no locales, que caracterizan las interacciones correspondientes. Las cuatro corrientes de quarks estándar

3.2. Modelo no local con Renormalización de la Función de Onda (WFR) en el propagador de quarks

$j_a(x)$ requieren el mismo factor de forma $g(z)$ para garantizar la invarianza quiral. El término $\frac{G}{2}j_P(x)j_P(x)$ es autoinvariante ante transformaciones quirales. La componente escalar-isoescalar de la corriente $j_a(x)$ generará la masa de quarks dependiente del momento en el propagador, mientras que la corriente “de momentos” $j_P(x)$ será, como mencionamos anteriormente, la responsable de la renormalización de la función de onda, dependiente del momento, en el propagador. Por conveniencia, hemos tomado el mismo parámetro de acoplamiento, G , para ambos términos. Sin embargo, el peso relativo entre ambos términos de interacción está controlado por el parámetro κ_p incluido en la ecuación (3.16). En lo siguiente, es conveniente tomar la transformada de Fourier de $g(z)$ y $f(z)$ para llevarlos al espacio de momentos. Vale aclarar que la invarianza de Lorentz implica que las transformadas de Fourier $g(p)$ y $f(p)$ sólo pueden ser funciones de p^2 .

Dado que en lo que sigue se utilizará el método de las integrales de camino para obtener la ecuación del gap y las distintas propiedades hadrónicas, es conveniente en este punto realizar la bosonización de la teoría. Los detalles de este procedimiento se dan en el apéndice 3.A. Se obtiene así que la función de partición bosonizada es

$$\mathcal{Z}^{bos} = \int \mathcal{D}\sigma_1 \mathcal{D}\sigma_2 \mathcal{D}\vec{\pi} \exp[-S_E^{bos}], \quad (3.17)$$

donde S_E^{bos} , una vez pasada al espacio de momentos, está dada por

$$S_E^{bos} = -\ln \det A - \frac{1}{2G} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [\sigma_1(p)\sigma_1(-p) + \vec{\pi}(p) \cdot \vec{\pi}(-p) + \sigma_2(p)\sigma_2(-p)], \quad (3.18)$$

con el operador A , dado en la ecuación (3A.4).

3.2.1. Aproximación de Campo Medio

En lo que sigue, trabajaremos dentro de la aproximación de campo medio (ACM), en la cual asumiremos que los campos $\sigma_{1,2}$ tienen valores medios $\bar{\sigma}_{1,2}$ no nulos, mientras que los valores de campo medio de los campos pseudoescalares π_i son cero.

3.2. Modelo no local con Renormalización de la Función de Onda (WFR) en el propagador de quarks

Esto es,

$$\begin{aligned}\sigma_1(x) &= \bar{\sigma}_1 + \delta\sigma_1(x), \\ \sigma_2(x) &= \kappa_p \bar{\sigma}_2 + \delta\sigma_2(x), \\ \vec{\pi}(x) &= \delta\vec{\pi}(x).\end{aligned}\tag{3.19}$$

Reemplazando en la acción efectiva bosonizada, y expandiendo en potencias de las fluctuaciones de los mesones, se obtiene

$$S_E^{bos} = S_E^{ACM} + S_E^{cuad} + \dots\tag{3.20}$$

donde la acción de campo medio (ACM) por unidad de volumen es

$$\frac{S_E^{ACM}}{V^{(4)}} = -2N_c \int \frac{d^4p}{(4\pi)^4} \text{Tr}_D \ln[\mathcal{D}_0^{-1}(p)] + \frac{\bar{\sigma}_1^2}{2G_S} + \frac{\kappa_p^2 \bar{\sigma}_2^2}{2G_S},\tag{3.21}$$

y el propagador de quarks en la ACM está dado por

$$\mathcal{D}_0(p) = \frac{Z(p)}{-\not{p} + M(p)}\tag{3.22}$$

con

$$Z(p) = [1 - \bar{\sigma}_2 f(p)]^{-1} \quad ; \quad M(p) = Z(p)[m + \bar{\sigma}_1 g(p)].\tag{3.23}$$

Por otro lado, siguiendo la expansión de S_E^{bos} a segundo orden en las variaciones de los campos, se obtiene el término cuadrático de la acción euclídea bosonizada, el cual se puede escribir como

$$\begin{aligned}S_E^{cuad} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [G_\sigma(p^2) \delta\sigma(p) \delta\sigma(-p) \\ &\quad + G_{\sigma'}(p^2) \delta\sigma'(p) \delta\sigma'(-p) + G_\pi(p^2) \delta\vec{\pi}(p) \cdot \delta\vec{\pi}(-p)],\end{aligned}\tag{3.24}$$

donde los campos σ y σ' están relacionados a los campos σ_1 y σ_2 mediante las relaciones

$$\begin{aligned}\delta\sigma &= \cos\theta \delta\sigma_1 - \sin\theta \delta\sigma_2 \\ \delta\sigma' &= \sin\theta \delta\sigma_1 + \cos\theta \delta\sigma_2,\end{aligned}\tag{3.25}$$

3.2. Modelo no local con Renormalización de la Función de Onda (WFR) en el propagador de quarks

y los ángulos de mezcla θ se definen de forma tal que no haya mezcla $\sigma - \sigma'$ al nivel de la acción cuadrática. La función $G_\pi(p^2)$ introducida en la ecuación (3.24) está dada por

$$G_\pi(p^2) = \frac{1}{G_S} - 8N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2(q) \frac{Z(q^+)Z(q^-)}{D(q^+)D(q^-)} \times [q^+ \cdot q^- + M(q^+)M(q^-)], \quad (3.26)$$

con $q^\pm = q \pm p/2$ y $D(q) = q^2 + M^2(q)$. Mientas que para el sistema $\sigma - \sigma'$ tenemos que

$$G_{\left(\begin{smallmatrix} \sigma \\ \sigma' \end{smallmatrix}\right)}(p^2) = \frac{G_{\sigma_1\sigma_1}(p^2) + G_{\sigma_2\sigma_2}(p^2)}{2} \mp \sqrt{[G_{\sigma_1\sigma_2}(p^2)]^2 + \left[\frac{G_{\sigma_1\sigma_1}(p^2) - G_{\sigma_2\sigma_2}(p^2)}{2}\right]^2} \quad (3.27)$$

donde

$$\begin{aligned} G_{\sigma_1\sigma_1}(p^2) &= \frac{1}{G_S} - 8N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2(q) \frac{Z(q^+)Z(q^-)}{D(q^+)D(q^-)} \\ &\quad \times [q^+ \cdot q^- - M(q^+)M(q^-)], \\ G_{\sigma_2\sigma_2}(p^2) &= \frac{1}{G_S} + \frac{8N_c}{\kappa_p^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} q^2 f^2(q) \frac{Z(q^+)Z(q^-)}{D(q^+)D(q^-)} \\ &\quad \times [q^+ \cdot q^- - M(q^+)M(q^-) + \frac{(q^+)^2(q^-)^2 - (q^+ \cdot q^-)^2}{2q^2}], \\ G_{\sigma_1\sigma_2}(p^2) &= -\frac{8N_c}{\kappa_p} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g(q)f(q) \frac{Z(q^+)Z(q^-)}{D(q^+)D(q^-)} \\ &\quad \times q \cdot [q^- M(q^+) + q^+ M(q^-)]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.2.2. Cálculo de propiedades hadrónicas y de quarks

3.2.2.1. Valores de los campos medios y condensados quirales

Con el propósito de obtener los valores de los campos medios $\bar{\sigma}_{1,2}$ se debe minimizar la acción S_E^{ACM} , con lo cual se obtienen las ecuaciones de Dyson-Schwinger,

3.2. Modelo no local con Renormalización de la Función de Onda (WFR) en el propagador de quarks

también conocidas como las ecuaciones del “gap”,

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_1 - 8N_c G \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} g(p) \frac{Z(p)M(p)}{D(p)} &= 0 \\ \bar{\sigma}_2 + 8N_c G \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{\kappa_p^2} f(p) \frac{Z(p)}{D(p)} &= 0.\end{aligned}\quad (3.29)$$

Por otro lado, los condensados quirales están dados por los valores de expectación de vacío $\langle \bar{q}q \rangle = \langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$, los cuales se obtienen simplemente realizando la variación de $\mathcal{Z} = \exp[-S_E^{ACM}]$ con respecto a la masa corriente de quarks correspondiente. Haciendo esto, se obtiene

$$\langle \bar{q}q \rangle = -4N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{Z(p)M(p)}{D(p)} - \frac{m}{p^2 + m^2} \right). \quad (3.30)$$

Notar que aquí se ha sustraído el valor correspondiente al caso no interactuante con el fin de obtener valores finitos para el condensado.

3.2.2.2. Masas de mesones y constantes de acoplamiento

Las masas de los mesones se obtienen resolviendo la ecuación

$$G_M(-m_M^2) = 0, \quad (3.31)$$

donde M representa indistintamente σ o π .

En el caso del sistema $\sigma - \sigma'$, los ángulos de mezcla están dados por $\theta(-m_{\sigma, \sigma'}^2)$, donde

$$\tan 2\theta(p^2) = \frac{2G_{\sigma_1\sigma_2}(p^2)}{G_{\sigma_2\sigma_2}(p^2) - G_{\sigma_1\sigma_1}(p^2)}. \quad (3.32)$$

Las constantes de acoplamiento mesón-quark $g_{Mq\bar{q}}$ a calculan a partir de

$$g_{Mq\bar{q}}^{-2} \equiv G_{Mq\bar{q}}^{-2}(-m_M^2) = \left. \frac{dG_M(p)}{dp^2} \right|_{p^2=-m_M^2}. \quad (3.33)$$

3.2.2.3. Constante de decaimiento del pión

Por definición, la constante de decaimiento del pión f_π está dada, como vimos, por el elemento de matriz de la corriente axial $A_\mu^a(x)$ entre el vacío y el estado

3.2. Modelo no local con Renormalización de la Función de Onda (WFR) en el propagador de quarks

renormalizado de un pión, en la posición del polo del pión. Es decir,

$$\langle 0 | A_\mu^a(0) | \pi^b(p) \rangle = i \delta^{ab} p_\mu f_\pi. \quad (3.34)$$

Con el objeto de obtener una expresión explícita para la corriente axial, debemos aplicar una transformación de gauge a la acción efectiva S_E , introduciendo un conjunto de campos de gauge axiales $\mathcal{A}_\mu^a(x)$. Para una teoría local, usualmente esta transformación de gauge se realiza haciendo el siguiente reemplazo

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + \frac{i}{2} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\mathcal{A}}_\mu(x). \quad (3.35)$$

Pero en este caso, debido a la no localidad de los campos involucrados, se deben realizar reemplazos adicionales en los términos de interacción (ver ref.^[43])

$$\begin{aligned} \psi(x - z/2) &\rightarrow W_A(x, x - z/2) \psi(x - z/2) \\ \psi^\dagger(x + z/2) &\rightarrow \psi^\dagger(x + z/2) W_A(x + z/2, x). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Aquí, x y z son las variables que aparecen en las definiciones de las corrientes no locales (3.16), y la función $W_A(x, y)$ está definida por

$$W_A(x, y) = P \exp \left[\frac{i}{2} \int_x^y ds_\mu \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\mathcal{A}}_\mu(s) \right], \quad (3.37)$$

donde s corre a través de un camino arbitrario que conecta x con y .

Una vez construida esta acción efectiva “gaugeada”, resulta fácil obtener la corriente axial como la derivada de esta acción con respecto a $\mathcal{A}_\mu^a(x)$, evaluada en $\vec{\mathcal{A}}_\mu(x) = 0$. Realizando luego la derivada de las expresiones resultante con respecto a los campos de mesones renormalizados, se puede finalmente identificar las correspondientes constantes de decaimiento débil de los mesones. Luego de algunos cálculos se puede obtener

$$f_\pi = \frac{m}{m_\pi^2} g_{\pi q \bar{q}} F_0(-m_\pi^2), \quad (3.38)$$

con

$$\begin{aligned} F_0(p^2) &= 8N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g(q) \frac{Z(q^+) Z(q^-)}{D(q^+) D(q^-)} \\ &\quad \times [q^+ \cdot q^- + M(q^+) M(q^-)]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.2. Modelo no local con Renormalización de la Función de Onda (WFR) en el propagador de quarks

Es importante notar que la integral sobre la variable de camino s de la ecuación (3.37) se puede resolver en forma exacta, lo que implica que la misma es independiente del camino de integración. En el límite quiral, la expresión de la ecuación (3.38) tiene una forma relativamente simple, dada por

$$f_\pi = \frac{M(0)}{g_{\pi q\bar{q}} Z(0)}, \quad (3.40)$$

la cual conecta con la relación de Goldberger-Treiman.

3.2.3. Diferentes parametrizaciones utilizadas

Con el fin de especificar completamente este modelo, debemos fijar tanto sus parámetros como los factores de forma $g(p)$ y $f(p)$ que caracterizan las interacciones no locales. En este caso, siguiendo la ref. ^[14] consideraremos dos tipos diferentes de dependencias funcionales para estos factores de forma. La primera corresponde a las frecuentemente utilizadas formas exponenciales,

$$g(q) = \exp(-q^2/\Lambda_0^2) \quad ; \quad f(q) = \exp(-q^2/\Lambda_1^2). \quad (3.41)$$

Notar que el rango (en el espacio de momentos) de la no localidad en cada canal está determinado por los parámetros Λ_0 y Λ_1 , respectivamente. Fijando la masa de quarks corriente y el condensado de quarks quiral, a los valores razonables de $m = 5,7$ MeV y $\langle \bar{q}q \rangle^{1/3} = 240$ MeV, el resto de los parámetros se determinan de manera tal de reproducir los valores empíricos $f_\pi = 92,4$ MeV y $m_\pi = 139$ MeV, y $Z(0) = 0,7$ el cual está dentro del rango de valores sugerido por recientes cálculos de QCD en la red ^[16,17]. En lo que sigue, esta elección de parámetros y factor de forma será referido como Set B.

Como segundo tipo de factor de forma funcional a considerar se utilizaron funciones lorentzianas dadas por

$$\begin{aligned} g(q) &= \frac{1 + \alpha_z}{1 + \alpha_z f_z(q)} \frac{\alpha_m f_m(q) - m \alpha_z f_z(q)}{\alpha_m - m \alpha_z} \\ f(q) &= \frac{1 + \alpha_z}{1 + \alpha_z f_z(q)} f_z(q), \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.2. Modelo no local con Renormalización de la Función de Onda (WFR) en el propagador de quarks

donde

$$f_m(q) = \left[1 + (q^2/\Lambda_0^2)^{3/2}\right]^{-1}, \quad f_z(q) = \left[1 + (q^2/\Lambda_1^2)\right]^{-5/2}. \quad (3.43)$$

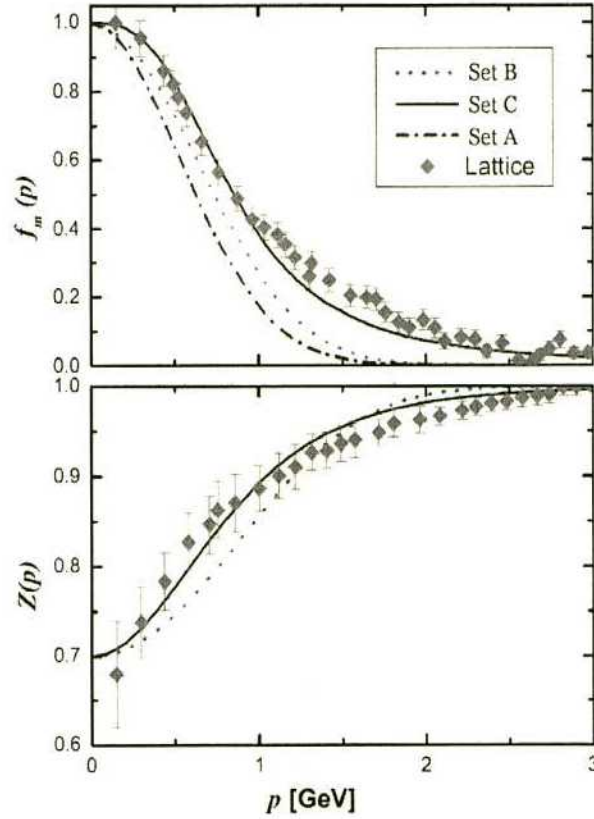


Figura 3.3: Representación gráfica de las funciones $f_m(p)$ (arriba) y $Z(p)$ (abajo) para las distintas parametrizaciones propuestas. Se compara además con los resultados obtenidos a partir de QCD en la red en la ref.^[41]

Como se muestra en la ref.^[41], tomando $m = 2,37$ MeV, $\alpha_m = 309$ MeV, $\alpha_z = -0,3$, $\Lambda_0 = 850$ MeV y $\Lambda_1 = 1400$ MeV, se puede reproducir muy bien la dependencia de las funciones de masa $f_m(p)$ y renormalización $Z(p)$ obtenidas en cálculos de QCD en la red (ver Fig.3.3), al igual que los valores físicos de m_π y f_π . En lo que sigue, esta elección de parámetros y factores de forma será referido como Set C.

Finalmente, con el objeto de comparar con estudios donde la renormalización de

3.2. Modelo no local con Renormalización de la Función de Onda (WFR) en el propagador de quarks

la función de onda del propagador de quarks no se ha tenido en cuenta, consideraremos una tercer parametrización (Set A). En este caso fijaremos $Z(p) = 1$ (esto es, $f(p) = 0$) y factor de forma exponencial para $g(p)$. Tal modelo se corresponde con el “esquema II” discutido en la ref.^[48], de donde se tomaron los parámetros correspondientes para $\langle \bar{q}q \rangle^{1/3} = 240$ MeV. La tabla 3.1 resume los valores de los parámetros del modelo para cada una de las parametrizaciones propuestas.

Tabla 3.1: Sets de parámetros utilizados para el modelo NJL no local a dos sabores y con WFR.

	Set A	Set B	Set C
m_c [MeV]	5.78	5.70	2.37
$G_s \Lambda_0^2$	20.650	32.030	20.818
Λ_0 [MeV]	752.20	814.42	850.00
κ_P [GeV]	—	4.180	6.034
Λ_1 [MeV]	—	1034.5	1400.0

3.2.4. Resultados numéricos

En la tabla 3.2, se presentan los resultados para las propiedades de campo medio, junto con las masas de los piones y mesones sigma y los parámetros de decaimiento. Como se puede observar en esta tabla, mientras que para las parametrizaciones exponenciales (Set A y Set B) los valores empíricos de f_π y m_π son consistentes con un condensado de quarks que cuyo valor está dentro de los valores fenomenológicos normalmente citados $-\langle \bar{q}q \rangle^{1/3} \simeq 200-260$ MeV, el Set C produce valores de condensado quiral por encima de tal rango. Por otro lado, la masa de quarks corriente obtenida con el Set C es un poco menor a la obtenida con los otros dos sets. Esto merece algún comentario. El condensado quiral, al igual que las masas corrientes de los quarks, son objetos dependientes de la escala. En particular, los valores fenomenológicos

3.2. Modelo no local con Renormalización de la Función de Onda (WFR) en el propagador de quarks

Tabla 3.2: Valores de las propiedades de materia de quarks y de materia hadrónica, obtenidos para $T = \mu = 0$ con el modelo NJL no local a dos sabores y considerando WFR.

	Set A	Set B	Set C
σ_1 [MeV]	424	529	442
σ_2	—	-0.43	-0.43
$M(0)$ [MeV]	430	375	311
$Z(0)$	1.0	0.7	0.7
$-\langle q\bar{q} \rangle^{1/3}$ [MeV]	240	240	326
m_π [MeV]	139	139	139
$g_{\pi q\bar{q}}$	4.62	5.74	4.74
f_π [MeV]	92.4	92.4	92.4
m_σ [MeV]	683	622	552
$g_{\sigma q\bar{q}}^{(0)}$	5.08	5.97	4.60
$g_{\sigma q\bar{q}}^{(1)}$	—	-0.77	-0.26

citados arriba para el condensado corresponden a una elección en la escala de renormalización $\mu = 1$ GeV. En el Set C, algunos parámetros han sido determinados para obtener una buena aproximación para los valores de la función de renormalización $Z(p)$ obtenidos en QCD en la red, los cuales también dependen del punto de renormalización. En particular, en este modelo se usó la función $Z(p)$ obtenida en la ref. [46], donde la escala de renormalización elegida fue de $\mu = 3$ GeV. Pero dado que el Lagrangiano de este modelo satisface^[43] la relación de Gell-Mann-Oakes-Renner (2.37), y que para todos los sets f_π y m_π se ajustan a sus valores empíricos, está claro que la calidad de la descripción del condensado de quarks y de las masas corrientes están muy relacionadas entre sí. Utilizando las relaciones estándar para pasar de la escala de 3 GeV a la de 1 GeV, se obtiene que $-\langle \bar{q}q \rangle^{1/3} \simeq 284$ MeV lo cual está alrededor del 10 % por encima del límite empírico superior. Una posible forma

de reducir el valor del condensado en este Set sería reducir el parámetro Λ_0 . Para $\Lambda_0 \sim 600$ MeV por ejemplo, se pueden obtener valores para las masas y condensados de quarks que estén dentro de los límites fenomenológicos. Sin embargo, este valor implica reducir en demasía el campo de aplicabilidad del modelo.

La masa del mesón σ muestra cierta dependencia a la parametrización. No obstante, tal dependencia es menor que la hallada en el modelo NJL local. Los valores obtenidos par las masas son algo mayores que los valores obtenidos experimentalmente $478_{-23}^{+24} \pm 17 \text{MeV}^{[49]}$ y $390_{-36}^{+60} \text{MeV}^{[50]}$.

3.3. Extensión del modelo no local a tres sabores

En esta sección se describe la extensión de este modelo NJL con corrientes de interacción no locales, para considerar un tercer sabor de quark, el quark *strange* (*s*). La importancia de la inclusión del quarks *s* en nuestro modelo radica en que la producción de partículas con extrañeza en medio calientes, como el producido en colisiones de iones pesados, es considerada una de las señales más importantes para la transición de fase de deconfinamiento (ver ref. ^[51]). Sin embargo, dada la dificultad que representa esta extensión del modelo, trabajaremos sólo con el factor de forma de tipo gaussiano y sin tener en cuenta la renormalización de la función de onda incluida (para el caso de dos sabores) en la sección anterior.

Partiremos de la función de partición gran canónica a temperatura y potencial químico nulos, dada por

$$\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(-S_E), \quad (3.44)$$

en la cual S_E es la acción efectiva euclídea. Generalizando las expresiones (2.50) y (2.52) al caso no local, la acción S_E queda definida por

$$S_E = \int d^4x \{ \bar{\psi}(x) [-i\not{D} + \hat{m}] \psi(x) - \frac{G}{2} [j_a^S(x) j_a^S(x) + j_a^P(x) j_a^P(x)] - \frac{H}{4} A_{abc} [j_a^S(x) j_b^S(x) j_c^S(x) - 3j_a^S(x) j_b^P(x) j_c^P(x)] \}, \quad (3.45)$$

3.3. Extensión del modelo no local a tres sabores

donde ψ es el vector de campos fermiónicos para los tres sabores más livianos, $\not{\partial}$ es el operador euclídeo

$$\not{\partial} = \gamma_4 \frac{\partial}{\partial \tau} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}, \quad (3.46)$$

con $\gamma_4 = i\gamma_0$, $\tau = it$, $\hat{m}$ es la matriz de masas desnudas de los quarks, dada por $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$, y las A_{abc} son las constantes de estructura de $SU(3)$ definidas en (2.53). De aquí en adelante trabajaremos con el límite de simetría de isoespín, en el cual $m_u = m_d$. Las corrientes $j_a^{S,P}(x)$ están dadas por

$$j_a^S(x) = \int d^4 z g(z) \bar{\psi} \left(x + \frac{z}{2} \right) \lambda_a \psi \left(x - \frac{z}{2} \right) \quad (3.47)$$

$$j_a^P(x) = \int d^4 z g(z) \bar{\psi} \left(x + \frac{z}{2} \right) i\gamma_5 \lambda_a \psi \left(x - \frac{z}{2} \right) \quad (3.48)$$

donde el regulador $g(z)$ está dado por

$$g(z) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp(-izp) g(p); \quad g(p) = \exp\left(-\frac{p^2}{\Lambda^2}\right) \quad (3.49)$$

Las matrices λ_a , con $a = 0, \dots, 8$, son las ocho matrices de Gell-Mann de 3×3 que generan $SU(3)$, más $\lambda^0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbb{1}_{3 \times 3}$, donde $\mathbb{1}_{3 \times 3}$ es la matriz unitaria de 3×3 .

La función de partición (3.44) puede ser bosonizada de la manera estándar (ver Apéndice 3.A), obteniendo la acción efectiva bosonizada

$$S_E^{bos} = -\ln \det A - \int d^4 x \left[\sigma_a \tilde{S}_a + \pi_a \tilde{P}_a + \frac{G}{2} (\tilde{S}_a \tilde{S}_a + \tilde{P}_a \tilde{P}_a) + \frac{H}{4} A_{abc} (\tilde{S}_a \tilde{S}_b \tilde{S}_c - 3 \tilde{S}_a \tilde{P}_b \tilde{P}_c) \right]. \quad (3.50)$$

En lo que sigue supondremos que los campos σ_a tienen valores de campo medio $\bar{\sigma}_a$ no nulos, que son invariantes traslacionales, mientras que los campos pseudoescalares π_a no los tienen. Es decir, podemos escribir

$$\begin{aligned} \sigma_a(x) &= \bar{\sigma}_a + \delta\sigma_a(x), \\ \pi_a(x) &= \delta\pi_a(x). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Podemos ahora expandir la acción efectiva hasta el segundo orden en $(\delta\sigma_a, \delta\pi_a)$ alrededor de estos valores de expectación. El orden cero corresponde a la aproxi-

3.3. Extensión del modelo no local a tres sabores

mación de campo medio (ACM), el término lineal desaparece debido a que $\bar{\sigma}_a$ minimiza la acción efectiva, y consideraremos el desarrollo hasta el término cuadrático. La acción efectiva tendrá entonces la forma

$$S_E \simeq S_E^{ACM} + S_E^{(2)}. \quad (3.52)$$

Analicemos primero el orden cero. En el espacio de momentos tenemos que

$$\sigma_a^{(0)}(p - p') = (2\pi)^4 \bar{\sigma}_a \delta^{(4)}(p - p'), \quad \pi_a^{(0)}(p - p') = 0, \quad (3.53)$$

por lo tanto

$$A(p - p') = (-\not{p} + m)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') + g\left(\frac{p+p'}{2}\right) \lambda_a [\sigma(p - p') + i\gamma_5 \pi(p - p')] \quad (3.54)$$

a orden cero queda

$$A^{(0)}(p - p') = [-\not{p} + m + \lambda_a g\left(\frac{p+p'}{2}\right) \bar{\sigma}_a](2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p'). \quad (3.55)$$

Utilizando la identidad $\ln \det A = \text{tr} \ln A$, donde la traza es sobre los índices de Dirac, color y sabor, se obtiene una acción efectiva en ACM de la forma

$$\begin{aligned} \frac{S_E^{ACM}}{V^{(4)}} = & -2N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}_f \ln[p^2 + M^2(p)] \\ & - \bar{\sigma}_a \bar{S}_a - \frac{G}{2} \bar{S}_a \bar{S}_a - \frac{H}{4} A_{abc} \bar{S}_a \bar{S}_b \bar{S}_c, \end{aligned} \quad (3.56)$$

donde ahora la traza Tr_f es sólo sobre sabor, $V^{(4)}$ es el volumen en el espacio cuadridimensional, $M(p) = m + \lambda_a \bar{\sigma}_a g(p)$ y los valores de campo medio $\bar{S}_a$ están dados por $\bar{S}_a = \tilde{S}_a(\bar{\sigma}_b, 0)$. Si minimizamos esta última expresión con respecto a $\bar{\sigma}_a$ obtenemos

$$\bar{S}_a = -2N_c \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}_a} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}_f \ln[p^2 + M^2(p)], \quad (3.57)$$

que junto con la ecuación (3A.11) en la ACM

$$\bar{\sigma}_a + G \bar{S}_a + \frac{3H}{4} A_{abc} \bar{S}_b \bar{S}_c = 0, \quad (3.58)$$

conforman las llamadas ecuaciones del “gap”.

Notemos que, debido a la conservación de la carga, solamente los $\bar{\sigma}_{a=0,3,8}$ pueden ser distintos de cero, por ser los únicos diagonales. Más aún, en el límite de isoespín también se anula $\bar{\sigma}_3$. De aquí en adelante nos conviene cambiar de la base $\{X_a\}$, con $a = 0, 3, 8$, a una nueva base $\{X_i\}$, donde los índices $i = 1, 2, 3$ o equivalentemente $i = u, d, s$, tal que $\lambda_0 X_0 + \lambda_3 X_3 + \lambda_8 X_8 = \text{diag}(X_u, X_d, X_s)$, es decir,

$$\begin{aligned} X_u &= \sqrt{\frac{2}{3}} X_0 + X_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} X_8 \\ X_d &= \sqrt{\frac{2}{3}} X_0 - X_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} X_8 \\ X_s &= \sqrt{\frac{2}{3}} X_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} X_8. \end{aligned} \quad (3.59)$$

En esta base, la acción efectiva de la ecuación (3.56) nos queda

$$\begin{aligned} \frac{S_E^{ACM}}{V^{(4)}} &= -2N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}_f \ln[p^2 + M^2(p)] \\ &\quad - \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_i \bar{S}_i - \frac{G}{2} \bar{S}_i \bar{S}_i - \frac{H}{2} \bar{S}_u \bar{S}_d \bar{S}_s), \end{aligned} \quad (3.60)$$

donde $M(p) = \text{diag}(M_u(p), M_d(p), M_s(p))$, con $M_i(p) = m_i + \bar{\sigma}_i g(p)$, $i = u, d, s$. Se observa que en el límite de isoespín, como $\bar{\sigma}_u = \bar{\sigma}_d$, entonces $M_u(p) = M_d(p)$.

Minimizando la ecuación (3.60) en esta nueva base, se obtiene

$$\bar{S}_i = -8N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} g(p) \frac{M_i(p)}{p^2 + M_i^2(p)}, \quad (3.61)$$

que integra el conjunto de ecuaciones autoconsistentes del “gap” (3.58), que en el sistema $\{u, d, s\}$ resultan^[39]:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_u + G \bar{S}_u + \frac{H}{2} \bar{S}_d \bar{S}_s &= 0, \\ \bar{\sigma}_d + G \bar{S}_d + \frac{H}{2} \bar{S}_s \bar{S}_u &= 0, \\ \bar{\sigma}_s + G \bar{S}_s + \frac{H}{2} \bar{S}_u \bar{S}_d &= 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

En el caso de isoespín simétrico, es decir $m_u = m_d$, estas ecuaciones se reducen a

dos

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_u + G\bar{S}_u + \frac{H}{2}\bar{S}_u\bar{S}_s &= 0, \\ \bar{\sigma}_s + G\bar{S}_s + \frac{H}{2}\bar{S}_u^2 &= 0.\end{aligned}\quad (3.63)$$

Los condensados quirales están dados por los valores de expectación de vacío $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$ y $\langle \bar{s}s \rangle$. Para hallarlos, derivamos la acción efectiva respecto de la masa desnuda del quark correspondientes, de donde se obtiene

$$\begin{aligned}\langle \bar{u}u \rangle &= -4N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\frac{M_u(p)}{p^2 + M_u^2(p)} - \frac{m_u}{p^2 + m_u^2} \right], \\ \langle \bar{s}s \rangle &= -4N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\frac{M_s(p)}{p^2 + M_s^2(p)} - \frac{m_s}{p^2 + m_s^2} \right].\end{aligned}\quad (3.64)$$

Ahora calcularemos el término cuadrático de la acción efectiva en (3.52). Para ello, primero desarrollaremos el determinante fermiónico de (3.50) a segundo orden en las fluctuaciones de los mesones, y tras un arduo cálculo se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned}- (\ln \det A)^{(2)} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \{ [K_{ij}(q) - M_{ij}(q)] \delta\sigma_{ij}(q) \delta\sigma_{ij}(-q) \\ &\quad + [K_{ij}(q) + M_{ij}(q)] \delta\pi_{ij}(q) \delta\pi_{ij}(-q) \}\end{aligned}\quad (3.65)$$

con

$$\begin{aligned}K_{ij}(q) &= -8N_c \int \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} g^2(q') q^+ q^- \frac{1}{(q^+)^2 + M_i^2(q^+)} \frac{1}{(q^-)^2 + M_j^2(q^-)}, \\ M_{ij}(q) &= -8N_c \int \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} g^2(q') q^+ q^- \frac{1}{(q^+)^2 + M_i^2(q^+)} \frac{1}{(q^-)^2 + M_j^2(q^-)} M_i(q^+) M_j(q^-),\end{aligned}\quad (3.66)$$

donde,

$$q^\pm = q' \pm \frac{q}{2}; \quad i, j = u, d, s, \quad (3.67)$$

La ecuación (3.65) puede llevarse a una forma más compacta:

$$\begin{aligned}S_{E,cin}^{(2)} &= -(\ln \det A)^{(2)} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [C_{ij}^+ \delta\sigma_{ij}(p) \delta\sigma_{ji}(-p) + C_{ij}^- \delta\pi_{ij}(p) \delta\pi_{ji}(-p)]\end{aligned}\quad (3.68)$$

con

$$C_{ij}^{\pm}(p^2) = -8N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2(q) \frac{[q^+q^- \mp M_i(q^+)M_j(q^-)]}{[(q^+)^2 + M_i^2(q^+)][(q^-)^2 + M_j^2(q^-)]}. \quad (3.69)$$

Por otro lado, el término del potencial en (3.50) resulta

$$\begin{aligned} S_{E,pot}^{(2)} &= \frac{1}{4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \{ [(r^+)^{-1}]_{ij,kl} \delta\sigma_{ij}(p) \delta\sigma_{kl}(-p) \\ &\quad + [(r^-)^{-1}]_{ij,kl} \delta\pi_{ij}(p) \delta\pi_{kl}(-p) \} \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde

$$(r^{\pm})_{ij,kl}^{-1} = G\delta_{ki}\delta_{lj} \pm \frac{H}{2}\epsilon_{jkn}\epsilon_{iln}\bar{S}_n. \quad (3.71)$$

Vemos entonces, que el término de segundo orden en las fluctuaciones de los campos de la acción efectiva tiene la forma

$$\begin{aligned} S_E^{(2)} &= S_{E,cin}^{(2)} + S_{E,pot}^{(2)} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [G_{ij,kl}^+(p^2) \delta\sigma_{ij}(p) \delta\sigma_{kl}(-p) + G_{ij,kl}^-(p^2) \delta\pi_{ij}(p) \delta\pi_{kl}(-p)], \end{aligned} \quad (3.72)$$

con

$$G_{ij,kl}^{\pm}(p^2) = C_{ij}^{\pm}(p^2) \delta_{il} \delta_{jk} + \frac{1}{2} (r^{\pm})_{ij,kl}^{-1}, \quad (3.73)$$

donde las integrales $C_{ij}^{\pm}(p^2)$ están dadas en (3.69), y $(r^{\pm})_{ij,kl}^{-1}$ en (3.71).

3.4. Propiedades hadrónicas

3.4.1. Masas y constantes de acoplamiento quark-mesón

De la acción cuadrática efectiva $S_E^{(2)}$ de la ecuación (3.72) es posible obtener las masas de los mesones escalares y pseudoescalares y las constantes de acoplamiento quark-mesón. De aquí en adelante consideraremos sólo el caso de mesones pseudoescalares. Las expresiones correspondientes al caso escalar son completamente equivalentes, sólo hay que reemplazar los índices “-” por “+”.

3.4. Propiedades hadrónicas

Introducimos la base de los mesones físicos definida por

$$\phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_a \phi_a)_{ij}, \quad (3.74)$$

donde $\phi = \sigma, \pi$, y los índices i, j corren de 1 a 3. De este modo, tenemos por ejemplo para el caso pseudoescalar

$$\frac{(\delta\pi_{ij})}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{\pi_0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_0}{\sqrt{3}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi_0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_0}{\sqrt{3}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_0}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

Luego del cambio de base, la parte pseudoescalar del término cuadrático de la acción efectiva resulta

$$\begin{aligned} S_E^{(2)} \Big|_{\text{pseudoescalar}} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \{ G_\pi(p^2) [\pi^0(p) \pi^0(-p) + 2\pi^+(p) \pi^-(p)] \\ &\quad + G_K(p^2) [2K^0(p) \bar{K}^0(-p) + 2K^+(p) K^-(p)] \\ &\quad + G_\eta(p^2) [\eta(p) \eta(-p)] + G_{\eta'}(p^2) [\eta'(p) \eta'(-p)] \}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

donde los campos η y η' están relacionados con los estados η_0 y η_8 mediante

$$\eta = \eta_8 \cos \theta - \eta_0 \sin \theta, \quad (3.77)$$

$$\eta' = \eta_8 \sin \theta + \eta_0 \cos \theta, \quad (3.78)$$

donde el ángulo de mezcla θ está definido de manera tal que no haya mezcla $\eta - \eta'$ a nivel de la acción cuadrática.

Las funciones $G_P(p^2)$ introducidas en (3.76) están dadas por

$$G_\pi(p^2) = (G + \frac{H}{2}\bar{S}_s)^{-1} + C_{uu}^2(p^2), \quad (3.79)$$

$$G_K(p^2) = (G + \frac{H}{2}\bar{S}_u)^{-1} + C_{us}^2(p^2), \quad (3.80)$$

$$G_\eta(p^2) = \frac{G_{88}^-(p^2) + G_{00}^-(p^2)}{2} - \sqrt{[G_{08}^-(p^2)]^2 + \left[\frac{G_{88}^-(p^2) - G_{00}^-(p^2)}{2}\right]^2}, \quad (3.81)$$

$$G_{\eta'}(p^2) = \frac{G_{88}^-(p^2) + G_{00}^-(p^2)}{2} + \sqrt{[G_{08}^-(p^2)]^2 + \left[\frac{G_{88}^-(p^2) - G_{00}^-(p^2)}{2}\right]^2}, \quad (3.82)$$

donde

$$G_{88}^-(p^2) = \frac{1}{3} \left[\frac{6G - 4H\bar{S}_u - 2H\bar{S}_s}{2G^2 - GH\bar{S}_s - H^2\bar{S}_u^2} + C_{uu}^-(p^2) + 2C_{ss}^-(p^2) \right], \quad (3.83)$$

$$G_{00}^-(p^2) = \frac{1}{3} \left[\frac{6G + 4H\bar{S}_u - 2H\bar{S}_s}{2G^2 - GH\bar{S}_s - H^2\bar{S}_u^2} + 2C_{uu}^-(p^2) + C_{ss}^-(p^2) \right], \quad (3.84)$$

$$G_{08}^-(p^2) = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[\frac{H(\bar{S}_s - \bar{S}_u)}{2G^2 - GH\bar{S}_s - H^2\bar{S}_u^2} + C_{uu}^-(p^2) - C_{ss}^-(p^2) \right]. \quad (3.85)$$

Las masas de los mesones se obtienen resolviendo las ecuaciones

$$G_P(-m_p^2) = 0, \quad (3.86)$$

con $P = \pi, \kappa, \eta, \eta'$, mientras que los ángulos de mezcla θ_η y $\theta_{\eta'}$, que en general son distintos entre sí, están dados por

$$\tan 2\theta_{\eta, \eta'} = \frac{2G_{08}^-(p^2)}{G_{00}^-(p^2) - G_{88}^-(p^2)} \Big|_{p^2 = -m_{\eta, \eta'}^2}. \quad (3.87)$$

Se puede definir campos de mesones normalizados $\tilde{\phi}(p) = Z_\phi^{-1/2} \phi(p)$ de tal forma que la acción cuadrática efectiva tenga la forma canónica

$$S_E^{(2)} \Big|_\phi = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (p^2 + m_\phi^2) \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(-p). \quad (3.88)$$

Entonces, comparando con (3.76), cerca de los polos del mesón tendremos

$$(p^2 + m_\phi^2) Z_\phi^{-1} = G_\phi(p^2), \quad (3.89)$$

y de esta forma, las constantes Z_P que renormalizan las funciones de onda están dadas por

$$Z_P^{-1} = \left. \frac{dG_P(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2 = -m_P^2}, \quad (3.90)$$

con $P = \pi, K, \eta$ y η' .

Finalmente, las constantes de acoplamiento quark-mesón G_{Pq} están dadas por los residuos de los propagadores en los polos correspondientes,

$$G_{Pq} = Z_P^{-1/2}. \quad (3.91)$$

3.4.2. Constantes de decaimiento débil

Por definición, las constantes de decaimiento débil de los mesones pseudoescalares están dadas por los elementos de matriz de las corrientes axiales $A_\mu^a(x)$ entre el vacío y los estados de cada mesón renormalizados, en los polos del propagador:

$$\langle 0 | A_\mu^a(0) | \phi_b(p) \rangle = i f_{ab} p_\mu. \quad (3.92)$$

Para $a, b = 1, \dots, 7$, las constantes f_{ab} pueden escribirse como $\delta_{ab} f_\phi$, con $\phi = \pi$ para $a = 1, 2, 3$ y $\phi = K$ para $a = 4, 5, 6, 7$. Por el contrario, como sucede con la matriz de masas, las constantes de decaimiento están mezcladas en el sector $a = 0, 8$.

Para obtener la expresión de la corriente axial, hay que realizar transformaciones de gauge en la acción efectiva S_E introduciendo un conjunto de campos de gauge axiales A_μ^a . Para una teoría local, este procedimiento puede hacerse simplemente reemplazando

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + i \Gamma_a A_\mu^a; \quad \Gamma_a = \frac{1}{2} \gamma_5 \lambda_a, \quad (3.93)$$

pero como en nuestro caso estamos trabajando con campos no locales, tendremos que realizar un reemplazo adicional, similar al caso de dos sabores de la ecuación (3.36), pero con la diferencia de que la función $W_a(x, y)$ ahora está dada por

$$W_a(x, y) = P \exp\left(\int_x^y \Gamma_a A_\mu^a(s) ds_\mu\right), \quad (3.94)$$

donde s representa un camino arbitrario que conecta x con y .

Una vez obtenida la acción efectiva de gauge con estos reemplazos, la corriente axial se calcula derivando esta acción con respecto a $A_\mu^a(x)$, y evaluando dicha derivada en $A_\mu^a(x) = 0$. Entonces, derivando las expresiones resultantes con respecto a los campos mesónicos renormalizados, uno puede finalmente identificar las correspondientes constantes de decaimiento débil de los mesones. Después de un extenso cálculo, encontramos que las constantes de decaimiento del pión y del kaón están dadas por

$$f_\pi = 4f_{uu}(-m_\pi^2)Z_\pi^{1/2} \quad (3.95)$$

$$f_K = 2[f_{us}(-m_K^2) + f_{su}(-m_K^2)]Z_K^{1/2} \quad (3.96)$$

donde

$$\begin{aligned} -f_{ij}(p^2) = & \frac{N_c}{p^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g(q) \frac{[q^- M_i(q^+) - q^+ M_j(q^-)] \cdot p}{[(q^+)^2 + M_i^2(q^+)][(q^-)^2 + M_j^2(q^-)]} \\ & - \frac{N_c}{p^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} [2g(q) - g(q^-) - g(q^+)] \frac{M_i(q)}{[q^2 + M_i^2(q)]} \\ & + \frac{N_c}{p^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g(q) [(\bar{\sigma}_i + \bar{\sigma}_j)g(q) - \bar{\sigma}_i g(q^-) - \bar{\sigma}_j g(q^+)] \\ & \times \frac{[q^+ \cdot q^- + M_i(q^-)M_j(q^+)]}{[(q^-)^2 + M_i^2(q^-)][(q^+)^2 + M_j^2(q^+)]} \end{aligned} \quad (3.97)$$

donde nuevamente,

$$q^\pm = q \pm \frac{p}{2}; \quad M_i(p) = m_i + \bar{\sigma}_i g(p), \quad i = u, d, s. \quad (3.98)$$

En el caso del sistema $\eta - \eta'$, pueden definirse dos constantes de decaimiento débil para cada componente $a = 0, 8$ de la corriente axial^[52], que pueden escribirse en función de constantes f_{ab} y de los ángulos de mezcla $\theta_{\eta, \eta'}$ definidos en (3.87) como

$$f_\eta^{a=0,8} = [f_{a8}(-m_\eta^2) \cos(\theta_\eta) - f_{a0}(-m_\eta^2) \sin(\theta_\eta)] Z_\eta^{1/2}, \quad (3.99)$$

$$f_{\eta'}^{a=0,8} = [f_{a8}(-m_{\eta'}^2) \sin(\theta_{\eta'}) - f_{a0}(-m_{\eta'}^2) \cos(\theta_{\eta'})] Z_{\eta'}^{1/2}. \quad (3.100)$$

3.4. Propiedades hadrónicas

Finalmente, las constantes de decaimiento f_{ab} para $a, b = 0, 8$ están relacionadas con las f_{ij} definidas en (3.97) por

$$f_{88}(p^2) = \frac{4}{3}[2f_{ss}(p^2) + f_{uu}(p^2)], \quad (3.101)$$

$$f_{00}(p^2) = \frac{4}{3}[2f_{uu}(p^2) + f_{ss}(p^2)], \quad (3.102)$$

$$f_{08}(p^2) = f_{80}(p^2) = \frac{4\sqrt{2}}{3}[f_{uu}(p^2) - f_{ss}(p^2)]. \quad (3.103)$$

En análisis fenomenológicos, las constantes de decaimiento para η y η' usualmente está parametrizadas^[54] según

$$\begin{aligned} f_{\eta}^8 &= f_8 \cos \theta_8; & f_{\eta}^0 &= -f_0 \sin \theta_8, \\ f_{\eta'}^8 &= f_8 \sin \theta_8; & f_{\eta'}^0 &= -f_0 \cos \theta_8. \end{aligned} \quad (3.104)$$

3.4.3. Decaimiento anómalo a dos fotones

Para ir más allá en el análisis de decaimientos de mesones livianos pseudoescalares, evaluaremos el decaimiento anómalo a dos fotones de π^0, η y η' . En general, las amplitudes correspondientes pueden ser escritas como

$$A(P \rightarrow \gamma\gamma) = e^2 g_{P\gamma\gamma} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_1^{*\mu} \epsilon_2^{*\nu} k_1^\alpha k_2^\beta, \quad (3.105)$$

donde $P = \pi^0, \eta, \eta'$, y k_i, ϵ_i son estados para el momento y la polarización respectivamente de los fotones salientes.

En el modelo NJL no local bajo consideración, los coeficientes $g_{P\gamma\gamma}$ están dados por las integrales de lazos de los quarks. Además el diagrama de “triángulo” usual, dado por un lazo de quark cerrado con vértice correspondiente al mesón y los dos respectivos a los fotones, en el presente esquema se tiene un segundo diagrama^[11] en el cual uno de los vértices quark-fotón surge de la contribución no local debida al reemplazo

$$g(y-z) \rightarrow W_a(y,x)g(y-z)W_a(x,z), \quad (3.106)$$

donde $W_a(x,z)$ está dada en la ecuación (3.94), pero en este caso $\Gamma^a = Q$, es decir el operador de carga eléctrica. La suma de ambos diagramas para los decaimientos

de π^0, η y η' produce

$$g_{\pi\gamma\gamma} = I_u(m_\pi^2) Z_\pi^{1/2}, \quad (3.107)$$

$$g_{\eta\gamma\gamma} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[[5I_u(m_\eta^2) - 2I_s(m_\eta^2)] \cos \theta_\eta - \sqrt{2}[5I_u(m_\eta^2) + I_s(m_\eta^2)] \sin \theta_\eta \right] Z_\eta^{1/2}, \quad (3.108)$$

$$g_{\eta'\gamma\gamma} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[[5I_u(m_{\eta'}^2) - 2I_s(m_{\eta'}^2)] \sin \theta_{\eta'} + \sqrt{2}[5I_u(m_{\eta'}^2) + I_s(m_{\eta'}^2)] \cos \theta_{\eta'} \right] Z_{\eta'}^{1/2}, \quad (3.109)$$

donde las integrales de lazo $I_f(m_P^2)$ están dadas por

$$I_f(m_P^2) = \frac{8}{3} N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{g(q + (k_1 - k_2)/2)}{[q^2 + M_f^2(q)][(q + k_1)^2 + M_f^2(q + k_1)][(q - k_2)^2 + M_f^2(q - k_2)]} \times \left\{ M_f(q) + \frac{q^2}{2} \left[\frac{M_f(q - k_2) - M_f(q)}{(k_2 \cdot q)} - \frac{M_f(q + k_1) - M_f(q)}{(k_1 \cdot q)} \right] \right\}. \quad (3.110)$$

En el sistema en reposo del mesón, los impulsos de los fotones k_1 y k_2 pueden ser escritos teniendo en cuenta las leyes de conservación como

$$k_1 = (i\frac{m_\pi}{2}, \frac{m_\pi}{2}); \quad k_1 = (i\frac{m_\pi}{2}, -\frac{m_\pi}{2}), \quad (3.111)$$

de donde se obtiene que

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{m_\pi^2}{2}. \quad (3.112)$$

3.4.4. Resultados numéricos

Mostraremos aquí los resultados obtenidos, luego de calcular numéricamente las ecuaciones desarrolladas en la subsección anterior, ajustando los parámetros del modelo (m_s, Λ, G y H), de manera tal que el cálculo reproduzca los siguientes valores empíricos: $m_\pi = 139,0$ MeV, $m_K = 495,0$ MeV, $m_{\eta'} = 958,0$ MeV y $f_\pi = 92,4$ MeV. La masa m_u se dejó como parámetro libre, pero siempre respetando que su valor

3.4. Propiedades hadrónicas

se hallara dentro del rango de valores empíricos. Los cálculos se llevaron a cabo utilizando un regulador de tipo gaussiano, dado por

$$g(p^2) = \exp\left(-\frac{p^2}{\Lambda^2}\right) \quad (3.113)$$

donde Λ es uno de los parámetros libres del modelo que hace las veces de *cut-off* covariante para el rango de momentos. De esta manera, se obtuvieron los resultados que se muestran en las tablas 3.3 - 3.5, donde también se incluyen, en los casos en que esté disponible, los valores empíricos de las magnitudes listadas.

El rango de valores utilizados para la masa del quark *up*, m_u fue elegido de manera tal que, además de estar dentro de los valores fenomenológicamente aceptables, nos asegurara un correcto funcionamiento de los programas de cálculo. Esto nos llevó a utilizar $5,0 \text{ MeV} \leq m_u \leq 5,75$. Fuera de este rango encontramos que resultaba muy difícil ajustar los parámetros del modelo simultáneamente a todos los valores requeridos debido a que los resultados fluctuaban en gran manera.

Examinando la tabla 3.3 puede verse que, para los valores elegidos de m_u , los resultados para los condensados $\langle \bar{u}u \rangle$ se encuentran dentro del rango de valores mencionados en la literatura (ver valores y referencias en ref. ^[48]). Los valores obtenidos para las masas dinámicas de los quarks $M_u(0)$ y $M_s(0)$, son similares a los valores obtenidos en la mayoría de los modelos efectivos ^[5,6,12,54]. Los valores obtenidos para las constantes de decaimiento débil del kaón y del mesón η son también fenomenológicamente aceptables. En particular, el valor obtenido para el cociente f_K/f_π es significativamente mejor que el obtenido en el modelo NJL local, donde las constantes de decaimiento del kaón y del pión son aproximadamente iguales ^[5,6,42], en contraste con la evidencia experimental.

El problema de definir y determinar fenomenológicamente los ángulos de mezcla y las constantes de decaimiento para el sistema $\eta - \eta'$ ha sido reexaminado varias veces en la literatura (ver ^[55], por ejemplo). En general, se tiene que lidiar con dos tipos diferentes de ángulos de mezcla $\theta_{\eta,\eta'}$ y cuatro constantes de decaimiento $f_{\eta,\eta'}^{0,8}$. No obstante, según se aclaró al final de la sección 3.4.2 es usual parametrizar la mezcla entre ambos estados de mesón y las constantes de decaimiento utilizando

3.4. Propiedades hadrónicas

Tabla 3.3: Lista de sets de parámetros (identificados por la masa del quark u), y valores obtenidos para las propiedades de materia de hadrones en el modelo NJL no local en $SU(3)$ de sabor a $T = 0$. Se tomó como parámetro libre (acorde con el rango de valores obtenidos empíricamente) la masa del quark u (m_u), mientras que los parámetros m_s, Λ, G y H se ajustaron de manera tal que reproduzcan los valores empíricos^[52] de las masas del pión, del kaón y del mesón η' y de la constante de decaimiento débil del pión (valores marcados con un $*$ en la tabla 3.4).

Magnitud	Sets de parámetros			
m_u [MeV]	5.0	5.36	5.5	5.75
m_s [MeV]	119.2	125.4	127.7	132.1
Λ [MeV]	842.9	797.2	780.6	752.4
$G\Lambda^2$	13.3	14.2	14.5	15.0
$-H\Lambda^5$	273.7	266.9	267.2	272.3
$-\langle \bar{u}u \rangle^{1/3}$ [MeV]	252.1	246.0	243.8	240.0
$-\langle \bar{s}s \rangle^{1/3}$ [MeV]	249.7	239.8	236.0	229.3
$M_u(p=0)$ [MeV]	371.5	397.7	408.7	429.8
$M_s(p=0)$ [MeV]	605.4	639.2	652.2	675.4

un sólo parámetro (un ángulo de mezcla llamado θ) e introduciendo dos constantes de decaimiento f_0 y f_8 . En los últimos años, el análisis ha sido mejorado y muchos autores han considerado la posible no ortogonalidad de $(f_\eta^8, f_{\eta'}^8)$ y $(f_\eta^0, f_{\eta'}^0)$ ^[53,56], así como la de los estados η y η' ^[57]. Mediante las ecuaciones (3.104) se obtuvieron los valores para θ_a y f_a mostrados en la tabla 3.5.

En nuestro modelo, las constantes de decaimiento f_P^a se calcularon mediante las ecuaciones (3.99)-(3.103). Como se muestra abajo, los ángulos de mezcla θ_8 y θ_0 son en general diferentes, al igual que lo que ocurre con los ángulos θ_η y $\theta_{\eta'}$ obtenidos a partir de (3.87). Notar que esto es consecuencia de la dependencia (algo marcada)

3.4. Propiedades hadrónicas

Tabla 3.4: Resultados numéricos obtenidos para las propiedades mesónicas estudiadas: las masas de los mesones pseudoescalares, los ángulos de mezcla, las constantes de acoplamiento quark-mesón, de decaimiento débil y de decaimiento anómalo mesón $\rightarrow \gamma\gamma$. Se tabula además la masa del quark u , m_u para tomar como referencia y poder relacionar con el conjunto de parámetros de la tabla 3.3.

Magnitud	Sets de parámetros				Valores empíricos
m_u [MeV]	5.0	5.36	5.5	5.75	(3.4-7.4)
m_π [MeV]	139.0*	139.0*	139.0*	139.0*	139
m_K [MeV]	495.0*	495.0*	495.0*	495.0*	495
m_η [MeV]	523.3	519.2	518.5	518.5	548
m'_η [MeV]	958.0*	958.0*	958.0*	958.0*	958
θ_η [grados]	-2.3	-3.2	-3.4	-3.3	-(10-20)
θ'_η [grados]	-40.3	-36.6	-35.7	-34.6	
$G_{\pi q}$	3.98	4.27	4.39	4.62	
G_{Kq}	4.30	4.68	4.83	5.12	
$G_{\eta q}$	3.93	4.28	4.42	4.69	
$G_{\eta' q}$	2.83	2.99	2.98	2.81	
f_π [MeV]	92.4*	92.4*	92.4*	92.4*	92.4
f_K/f_π [MeV]	1.17	1.16	1.16	1.15	1.22
$f_{\eta 8}/f_\pi$ [MeV]	1.14	1.13	1.13	1.12	(1.17-1.22)
$f_{\eta 0}/f_\pi$ [MeV]	0.16	0.17	0.18	0.18	(0.11-0.37)
$f_{\eta' 8}/f_\pi$ [MeV]	-0.5	-0.481	-0.47	-0.43	-(0.42-0.46)
$f_{\eta' 0}/f_\pi$ [MeV]	1.16	1.12	1.1	1.03	(0.98-1.16)
$g_{\pi \rightarrow \gamma\gamma}^2$ [GeV ⁻²]	0.076	0.076	0.075	0.075	0.075±0.005
$g_{\eta \rightarrow \gamma\gamma}^2$ [GeV ⁻²]	0.087	0.089	0.089	0.088	0.067±0.006
$g_{\eta' \rightarrow \gamma\gamma}^2$ [GeV ⁻²]	0.125	0.114	0.109	0.095	0.116±0.005

3.4. Propiedades hadrónicas

en p^2 de las funciones $C_{ij}(p^2)$ y $f_{ij}(p^2)$, definidas en (3.69) y (3.97) respectivamente.

Tabla 3.5: Resultados numéricos obtenidos para los ángulos de mezcla $\theta_{0,8}$ y las constantes de decaimiento débil $f_{0,8}$ obtenidos a partir de (3.104) para comparar nuestros resultados con los mencionados en la literatura. Se muestra además la masa del quark u , m_u para tomar como referencia y poder relacionar con el conjunto de parámetros de la tabla 3.3.

Magnitud	Sets de parámetros				Valores empíricos
m_u [MeV]	5.0	5.36	5.5	5.75	(3.4-7.4)
θ_8 [grados]	-23.6	-23.2	-22.6	-20.9	-(22-19)
θ_0 [grados]	-7.7	-8.8	-9.2	-9.7	
f_8/f_π [MeV]	1.24	1.23	1.22	1.20	(1.2-1.4)
f_0/f_π [MeV]	1.17	1.14	1.11	1.05	(1.0-1.3)

También es importante destacar que se obtuvo una muy buena predicción para la $g_{\pi\gamma\gamma}^2$. En este sentido, el modelo no local muestra un mayor grado de consistencia en comparación con el modelo NJL local estándar, donde los momentos de los quarks en el diagrama anómalo debería ir más allá del límite de corte para obtener un buen acuerdo con los valores experimentales.

Se compararon además los resultados obtenidos con los publicados^[39] para un modelo NJL no local y efectivo en $SU(3)$ que, en lugar de utilizar el modelo efectivo de intercambio de un gluón, se utilizó el modelo de instantones descrito en^[7]. Se encontró que los valores obtenidos mediante los dos métodos son relativamente cercanos. Esto nos lleva a suponer que ambos modelos resultan equivalentes, tal como se propone en^[7].

3.A. Apéndice: Bosonización

3.A.1. Bosonización del modelo a dos sabores

Para el caso del modelo no local a dos sabores de quarks y con WFR, consideramos la función de partición correspondiente $\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp[-S_E]$ (con S_E dado en la ecuación (3.15)), e introducimos los campos mesónicos $\sigma_{1,2}(x)$ y $\vec{\pi}(x)$ (escalares y pseudoescalares respectivamente), junto con los campos auxiliares $S_{1,2}(x)$ y $\vec{P}(x)$. Esto puede hacerse mediante el uso de las igualdades

$$F[j_1(x), \vec{j}(x)] = \int \mathcal{D}\sigma_1 \mathcal{D}\vec{\pi} \mathcal{D}S_1 \mathcal{D}\vec{P} F[S_1(x), \vec{P}(x)] \times \exp \left(\int d^4x \{ \sigma_1(x)[S_1(x) - j_1(x)] + \vec{\pi}(x) \cdot [\vec{P}(x) - \vec{j}(x)] \} \right), \quad (3A.1)$$

y

$$F[j_P(x)] = \int \mathcal{D}\sigma_2 \mathcal{D}S_2 F[S_2(x)] \times \exp \left(\int d^4x \{ \sigma_2(x)[S_2(x) - j_P(x)] + \} \right), \quad (3A.2)$$

donde $j_a(x)$ de la ecuación (3.16) ha sido separada en sus componentes escalar-isoescalar $j_1(x)$ y pseudoescalar-isopseudoescalar $\vec{j}(x)$.

Integrando sobre los campos fermiónicos obtenemos

$$Z^{bos} = \int \mathcal{D}\sigma_1 \mathcal{D}\sigma_2 \mathcal{D}\vec{\pi} \det A \int \mathcal{D}S_1 \mathcal{D}S_2 \mathcal{D}\vec{P} \exp \left(\int d^4x (\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 + \vec{\pi} \cdot \vec{P}) \right) \times \exp \left(\int d^4x \left[\frac{G}{2} (S_1 S_1 + S_2 S_2 + \vec{P} \cdot \vec{P}) \right] \right), \quad (3A.3)$$

donde el operador A , en el espacio de momentos, se lee

$$\begin{aligned} A(p, p') &= (-\not{p} + \hat{m})(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') \\ &+ g \left(\frac{p + p'}{2} \right) [\sigma_1(p' - p) + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(p' - p)] \\ &+ f \left(\frac{p + p'}{2} \right) \frac{\not{p} + \not{p'}}{2\kappa_p} \sigma_2(p' - p). \end{aligned} \quad (3A.4)$$

Finalmente, integrando en los campos auxiliares, y pasando todo a espacio de momentos se obtiene la acción euclídea bosonizada, dada en la ecuación (3.18).

3.A.2. Bosonización del modelo a tres sabores

Para el caso del modelo no local a tres sabores de quarks, la función de partición (3.44) puede ser bosonizada introduciendo los campos de mesones escalar $\sigma_a(x)$ y pseudoescalar $\pi_a(x)$, junto con los campos auxiliares $S_a(x)$ y $P_a(x)$, y utilizando

$$F[j_a^S(x), j_a^P(x)] = \int \mathcal{D}\sigma_a \mathcal{D}\pi_a \mathcal{D}S_a \mathcal{D}P_a F[S_a(x), P_a(x)] \times \exp \left(\int d^4x \{ \sigma_a(x)[S_a(x) - j_a^S(x)] + \pi_a(x)[P_a(x) - j_a^P(x)] \} \right). \quad (3A.5)$$

En este caso, integrando sobre los campos fermiónicos obtenemos

$$Z^{bos} = \int \mathcal{D}\sigma_a \mathcal{D}\pi_a \det A \int \mathcal{D}S_a \mathcal{D}P_a \exp \left(\int d^4x (\sigma_a S_a + \pi_a P_a) \right) \times \exp \left(\int d^4x \left[\frac{G}{2} (S_a S_a + P_a P_a) + \frac{H}{4} A_{abc} (S_a S_b S_c - 3 S_a P_b P_c) \right] \right), \quad (3A.6)$$

donde el operador A es, en el espacio de momentos,

$$A(p, p') = (-\not{p} + m)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') + g \left(\frac{v+p'}{2} \right) \lambda_a [\sigma(p - p') + i \gamma_5 \pi(p - p')]. \quad (3A.7)$$

Si $H = 0$, el exponente en la segunda línea de (3A.6) sería cuadrático y por lo tanto, dicha integral podría resolverse en forma exacta. Como este no es el caso, debemos utilizar la *aproximación de fase estacionaria* (AFE). En esta aproximación

$$\int \mathcal{D}S_a \mathcal{D}P_a e^{\left(\int d^4x [\sigma_a S_a + \pi_a P_a + \frac{G}{2} (S_a S_a + P_a P_a) + \frac{H}{4} A_{abc} (S_a S_b S_c - 3 S_a P_b P_c)] \right)} \simeq e^{\left(\int d^4x [\sigma_a \tilde{S}_a + \pi_a \tilde{P}_a + \frac{G}{2} (\tilde{S}_a \tilde{S}_a + \tilde{P}_a \tilde{P}_a) + \frac{H}{4} A_{abc} (\tilde{S}_a \tilde{S}_b \tilde{S}_c - 3 \tilde{S}_a \tilde{P}_b \tilde{P}_c)] \right)}, \quad (3A.8)$$

donde $\tilde{S}_a(\sigma_b, \pi_c)$ y $\tilde{P}_a(\sigma_b, \pi_c)$ minimizan el integrando, es decir, satisfacen

$$\left. \frac{\delta}{\delta S_a} \int d^4x \left[\sigma_a S_a + \pi_a P_a + \frac{G}{2} (S_a S_a + P_a P_a) + \frac{H}{4} A_{abc} (S_a S_b S_c - 3 S_a P_b P_c) \right] \right|_{S_a, P_a = \tilde{S}_a, \tilde{P}_a} = 0 \quad (3A.9)$$

$$\left. \frac{\delta}{\delta P_a} \int d^4x \left[\sigma_a S_a + \pi_a P_a + \frac{G}{2} (S_a S_a + P_a P_a) + \frac{H}{4} A_{abc} (S_a S_b S_c - 3 S_a P_b P_c) \right] \right|_{S_a, P_a = \tilde{S}_a, \tilde{P}_a} = 0 \quad (3A.10)$$

realizando estos cálculos se obtiene

$$\sigma_a + G\tilde{S}_a + \frac{3H}{4}A_{abc}(\tilde{S}_b\tilde{S}_c - \tilde{P}_b\tilde{P}_c) = 0, \quad (3A.11)$$

$$\pi_a + G\tilde{P}_a - \frac{3H}{2}A_{abc}\tilde{S}_b\tilde{P}_c = 0. \quad (3A.12)$$

Por lo tanto, luego de aplicar la AFE nos queda la acción efectiva bosonizada que se muestra en la ecuación (3.50).

Capítulo 4

Modelo no local a dos sabores con renormalización de la función de onda a temperatura y potencial químico finitos

“Investigar es ver lo que todo el mundo ha visto, y pensar lo que nadie más ha pensado.”

Albert Szent Gyorgi (1893-1986) médico húngaro.

En este capítulo extenderemos el modelo no local de dos sabores de quarks al régimen de temperatura T y potencial químico μ finitos, con lo cual podremos estudiar las predicciones del mismo para la transición de fases quiral y analizar los diagramas de fase correspondientes. En la incorporación de la temperatura se utilizó el formalismo de Matsubara o de tiempo imaginario, que será explicado en la sección 4.1. Además se tuvo en cuenta el acoplamiento al Loop de Polyakov, campo que tiene en cuenta las interacción de color, y cuyo formalismo será presentado en la sección 4.2. Finalmente, se incluyó en este estudio la renormalización de la función de

onda (WFR), de manera similar a lo hecho para temperatura y potencial químicos, en la sección 3.2. Pero antes de describir el modelo en sí, comentaremos brevemente las bases del formalismo utilizado.

4.1. Formalismo de Matsubara o de tiempo imaginario

El comportamiento estadístico de un sistema cuántico en equilibrio térmico se estudia generalmente a través de su función de partición, dada por

$$Z(\beta) = \text{Tr} \rho(\beta), \quad (4.1)$$

donde la traza es la suma sobre todos los valores de expectación en cualquier base completa, β es la inversa de la temperatura de equilibrio (asumimos que la constante de Boltzmann es $k = 1$, de lo contrario $\beta = 1/kT$), y ρ representa la matriz densidad del sistema, dada por

$$\rho(\beta) = \text{Tr} \exp(-\beta \mathcal{H}), \quad (4.2)$$

donde $\mathcal{H}$ corresponde al Hamiltoniano apropiado para el ensamble elegido. Así, por ejemplo, para el ensamble gran canónico tendremos que

$$\mathcal{H} = H - \mu N, \quad (4.3)$$

con H y N los operadores del Hamiltoniano dinámico y número de estados respectivamente para el sistema en estudio, y μ es el potencial químico.

Una vez obtenida la función de partición y la matriz densidad, el promedio en el ensamble de un observable cualquiera A , se define por

$$\langle A \rangle_\beta = Z^{-1}(\beta) \text{Tr} \rho(\beta) A = \frac{\text{Tr} \exp(-\beta \mathcal{H}) A}{\text{Tr} \exp(-\beta \mathcal{H})} \quad (4.4)$$

La idea básica del formalismo de Matsubara o de tiempo imaginario es que estos valores de expectación de operadores en un ensamble térmico, se pueden reescribir como valores de expectación en teoría cuántica de campos, donde la configuración

4.1. Formalismo de Matsubara o de tiempo imaginario

evoluciona en un tiempo imaginario $t = i\beta$. De esta forma, se puede cambiar a un espacio-tiempo con signatura euclídea, donde la traza de (4.4) lleva a requerir que todos los campos bosónicos y fermiónicos sean respectivamente periódicos o anti-periódicos con respecto a la dirección del tiempo euclídea, con periodicidad β . En el espacio de momentos, esto conduce al reemplazo de frecuencias continuas por frecuencias discretas, conocidas como frecuencias de Matsubara, dadas por

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{2n\pi}{\beta} & \text{para bosones} \\ \frac{(2n+1)\pi}{\beta} & \text{para fermiones} \end{cases} \quad (4.5)$$

Esto se puede comprender fácilmente dentro del contexto de integrales de camino. Para ello necesitamos recordar primero la amplitud de transición en teoría de campos a temperatura cero, cuya representación funcional está dada por

$$\langle \phi(\vec{x}_1, t_1) | \phi(\vec{x}_2, t_2) \rangle = \langle \phi_1 | e^{-i\mathcal{H}(t_1-t_2)} | \phi_2 \rangle = N' \int \mathcal{D}\phi e^{iS}, \quad (4.6)$$

donde ϕ es la variable de campo, N' una constante de normalización y S la acción, definida por

$$S[\phi] = \int_{t_2}^{t_1} dt \int d^3x \mathcal{L} \quad (4.7)$$

con $\mathcal{L}$ representando la densidad lagrangiana apropiada para el sistema.

La integral funcional o integral de camino, en este caso, está definida sobre caminos que satisfacen que

$$\phi(\vec{x}_1, t_1) = \phi_1 \quad \phi(\vec{x}_2, t_2) = \phi_2 \quad (4.8)$$

y los puntos finales se mantiene fijos (no se integran).

Dadas las tres últimas ecuaciones es fácil ver que identificando $t_1 - t_2 = -i\beta$, se puede escribir la función de partición para cualquier sistema cuántico como

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}} = \int d\phi_1 \langle \phi_1 | e^{-\beta\mathcal{H}} | \phi_1 \rangle \\ &= N' \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E} \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.1. Formalismo de Matsubara o de tiempo imaginario

donde $\mathcal{S}_E$ está relacionada a la acción euclídea (tiempo imaginario) según

$$\mathcal{S}_E = S_E + \beta\mu N = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E + \beta\mu N. \quad (4.10)$$

Además, se asume que los campos satisfacen las condiciones (anti)periódicas

$$\phi(\vec{x}, \beta) = \pm \phi(\vec{x}, 0), \quad (4.11)$$

dependiendo si las variables de campo son (fermiónicas) bosónicas.

Debemos resaltar que el contorno de integración en el plano de tiempo complejo, en este formalismo, es a lo largo del eje imaginario negativo, como se muestra en la figura 4.1. Sin embargo, también existe el formalismo a tiempo real que, si bien no será desarrollado aquí (ya que no fue utilizado en este trabajo), se puede seguir en detalle en las referencias^[78-81]. Además, las reglas de Feynman se pueden extraer

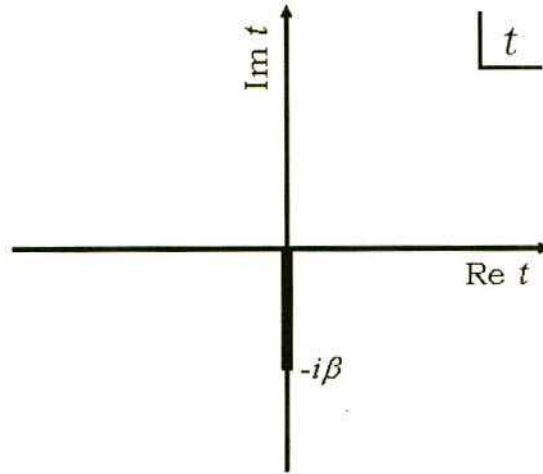


Figura 4.1: Contorno de integración en el plano tiempo complejo en el formalismo de tiempo imaginario.

de la integral de camino y los vértices son los mismos que en la teoría euclídea a temperatura cero. Sin embargo, los propagadores ahora corresponden a las inversas de los operadores de la parte cuadrática del lagrangiano, definido en un espacio de funciones (anti) periódicas. Esto da al propagador una dependencia no trivial con la

temperatura, esto es, en este formalismo el propagador no tiene una descomposición simple en una parte a temperatura cero y otra genuinamente dependiente de la temperatura, tal como ocurre en el formalismo a tiempo real.

En resumen, el formalismo de Matsubara propone la siguiente sustitución en las ecuaciones correspondientes los modelos descritos en el capítulo anterior:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} F(q) &= \int \frac{dq_0}{2\pi} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} F(q_0, \vec{q}) \\ &\rightarrow T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} F(\omega_n + i\mu, \vec{q}), \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde $F(q)$ representa cualquiera de los integrandos que aparecen en las expresiones asociadas a dichos modelos.

4.2. El Loop de Polyakov

El Loop de Polyakov fue propuesto por A.M. Polyakov^[61] como una aplicación del loop de Wilson^[62] al problema de propiedades térmicas de campos de gauge, en particular como un mecanismo que explicara el deconfinamiento de quarks a una cierta temperatura, conocida como temperatura de deconfinamiento. Para explicarlo mejor primero deberemos comentar brevemente las simetrías que son tenidas en cuenta.

4.2.1. Simetría global $Z(N)$ en $SU(N)$

Siguiendo el trabajo de t'Hooft^[63], en una teoría de gauge local en $SU(N)$ aparece una simetría global $Z(N)$. Para ver esto, partimos de una densidad lagrangiana, que incluya la interacción de los quarks con los campos gluónicos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{Tr} G_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi, \quad (4.13)$$

donde

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu, \quad G_{\mu\nu} = \frac{1}{-ig} [D_\mu, D_\nu]; \quad (4.14)$$

4.2. El Loop de Polyakov

$A_\mu = A_\mu^a t^a$, con los generadores de $SU(N)$ normalizados como $\text{Tr}(t^a, t^b) = \delta^{ab}/2$. Este lagrangiano es invariante ante transformaciones de gauge $SU(N)$, Ω , dadas por

$$D_\mu \rightarrow \Omega^\dagger D_\mu \Omega \quad , \quad \psi \rightarrow \Omega^\dagger \psi. \quad (4.15)$$

Al ser un elemento de $SU(N)$, Ω satisface que

$$\Omega^\dagger \Omega = \mathbb{1} \quad , \quad \det \Omega = 1. \quad (4.16)$$

Dado que Ω es una transformación de gauge local, es en general una función del espacio-tiempo.

Consideremos una transformación de gauge dada por una fase constante por la matriz unidad:

$$\Omega_c = e^{-i\varphi} \mathbb{1}. \quad (4.17)$$

Para que esta transformación sea un elemento de $SU(N)$, el determinante debe ser igual a uno, lo cual requiere que

$$\varphi = \frac{2\pi j}{N} \quad , \quad j = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (4.18)$$

dado que un número entero no puede cambiar en forma continua de un punto a otro, esto define una simetría global $Z(N)$.

4.2.2. $Z(N)$ a temperatura finita

Al ser un subgrupo de las transformaciones de gauge, las rotaciones del grupo $Z(N)$ son siempre una simetría del Lagrangiano, o con quarks¹ o sin ellos. Sin embargo, veremos luego que en presencia de quarks dinámicos, las rotaciones de $Z(N)$ no son una simetría de la teoría ya que estas violan las condiciones de borde requeridas.

Trabajando en espacio-tiempo euclídeo a una temperatura T , la coordenada de tiempo imaginario τ es de extensión finita, $\tau: 0 \rightarrow \beta = 1/T$. Las condiciones de

¹Con esto me refiero al segundo término de la densidad lagrangiana de la ecuación (4.13).

borde que deben satisfacer los campos están dadas por la estadística propia de cada uno de ellos. Esto es, los gluones (bosones) deben ser periódicos en τ , mientras que los quarks (fermiones) deben ser anti-periódicos:

$$A_\mu(\vec{x}, \beta) = +A_\mu(\vec{x}, 0) \quad , \quad \psi(\vec{x}, \beta) = -\psi(\vec{x}, 0). \quad (4.19)$$

Obviamente, cualquier transformación de gauge que sea periódica en τ respeta estas condiciones de borde. Sin embargo, t'Hooft encontró que se puede considerar transformaciones de gauge más generales, las cuales son periódicas a menos de Ω_c :

$$\Omega(\vec{x}, \beta) = \Omega_c \quad , \quad \Omega(\vec{x}, 0) = 1. \quad (4.20)$$

Los campos de color adjuntos son invariantes ante esta transformación, mientras que los que están en la representación fundamental no lo son:

$$A^\Omega(\vec{x}, \beta) = \Omega_c^\dagger A_\mu(\vec{x}, \beta) \Omega_c = A_\mu(\vec{x}, \beta) = +A_\mu(\vec{x}, 0), \quad (4.21)$$

$$\psi^\Omega(\vec{x}, \beta) = \Omega_c^\dagger \psi(\vec{x}, \beta) = e^{i\varphi} \psi(\vec{x}, \beta) \neq -\psi(\vec{x}, 0). \quad (4.22)$$

Aquí se ha utilizado el hecho de que Ω_c , al ser una fase constante por la matriz unitaria, conmuta con cualquier matriz de $SU(N)$. En consecuencia, las teorías de gauge $SU(N)$ puras tiene una simetría global $Z(N)$, la cual es destruida al incluir quarks dinámicos.

En la teoría de gluones pura, un parámetro de orden para la simetría $Z(N)$ se construye utilizando la línea de Wilson térmica:

$$L(\vec{x}) = \mathcal{P} \exp \left(ig \int_0^\beta A_0(\vec{x}, \tau) d\tau \right), \quad (4.23)$$

donde g es la constante de acoplamiento de gauge, y A_0 es el vector potencial en la dirección temporal. El símbolo $\mathcal{P}$ denota ordenamiento de camino, de manera que la línea de Wilson térmica transforma como un campo adjunto ante transformaciones de gauge $SU(N)$ locales:

$$L(\vec{x}) \rightarrow \Omega^\dagger(\vec{x}, \beta) L(\vec{x}) \Omega(\vec{x}, 0). \quad (4.24)$$

4.2. El Loop de Polyakov

El Loop de Polyakov^[61] se define como la traza de la línea de Wilson térmica, y es por lo tanto, invariante de gauge:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{N} \text{Tr} L = N^{-1} \text{Tr} \mathcal{P} \exp \left(ig \int_0^\beta A_0(\vec{x}, \tau) d\tau \right) \quad (4.25)$$

Ante transformaciones globales $Z(N)$, el loop de Polyakov ϕ trasforma como un campo con carga uno:

$$\phi \rightarrow e^{i\varphi} \phi. \quad (4.26)$$

A muy alta temperatura, la teoría es casi ideal ($g \approx 0$), por lo que se esperaría que $\langle \phi \rangle \sim 1$. Sin embargo, el vacío permitido exhibe una degeneración de N hojas. Esto es,

$$\langle \phi \rangle = \exp \left(\frac{i2\pi j}{N} \right) \phi_0, \quad j = 0, 1, \dots, (N-1), \quad (4.27)$$

donde ϕ_0 es una función real, que además cumple que $\phi_0 \rightarrow 1$ cuando $T \rightarrow \infty$. Cualquier valor de j es equivalente, por lo que la elección usual resulta en la ruptura espontánea de la simetría global $Z(N)$.

A temperatura cero, el confinamiento implica que ϕ_0 se cancela^[63]. Por lo tanto, debe existir cierto valor de temperatura T_c , a partir del cual ϕ_0 deja de ser nulo y se produce el deconfinamiento. Esto es

$$\begin{cases} \phi_0 = 0 & \text{si } T < T_c, \\ \phi_0 > 0 & \text{si } T > T_c. \end{cases} \quad (4.28)$$

Como es habitual, si ϕ_0 se vuelve distinto de cero en forma continua alrededor de T_c , la transición es de segundo orden; mientras que si salta de golpe en T_c , es de primer orden. Lo que resulta atípico es que la simetría $Z(N)$ esté espontáneamente rota a altas temperaturas en lugar de estarlo a bajos valores de T . No entraremos en la discusión de este asunto aquí, pero si se desea ver una explicación heurística, se puede consultar la ref.^[64].

Por otro lado, en presencia de quarks dinámicos la simetría $Z(N)$ está explícitamente rota. En este caso entonces, el loop de Polyakov deja de ser un parámetro de orden riguroso, pero sirve aún como indicador de un crossover rápido hacia el deconfinamiento.

Desde hace algunos años, se ha desarrollado una extensión del modelo NJL, incluyendo en el mismo la dinámica del loop de Polyakov^[63]. La idea principal es introducir tanto el condensado quiral $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ como el loop de Polyakov ϕ como campos clásicos y homogéneos que acoplen a los quarks siguiendo las reglas dictadas por las simetrías y patrones de ruptura de simetría de QCD, unificando así, los aspectos de confinamiento y ruptura de simetría quiral. Se suele referir a este esquema como modelo PNJL (NJL extendido con loop de Polyakov), el cual describiremos brevemente en la siguiente sección.

4.2.3. Introducción al modelo Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL)

A fin de facilitar la comprensión del modelo, trabajaremos primero con dos sabores de quarks. La extensión del mismo a tres sabores será luego desarrollada en el capítulo 5. El lagrangiano del modelo conocido como Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL), propuesto en la ref.^[63], tiene como ingredientes básicos el término de interacción de cuatro fermiones del modelo NJL, el acoplamiento a un campo de gauge de color de fondo, que representa la dinámica del loop de Polyakov:

$$\mathcal{L}_{PNJL} = \bar{\psi} (i\gamma_\mu D^\mu - \hat{m}) \psi + \frac{G}{2} \left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5 \vec{\tau}\psi)^2 \right] - \mathcal{U}(\phi[A], \phi^*[A]; T), \quad (4.29)$$

donde $\psi = (\psi_u, \psi_d)^T$ es el campo de quarks,

$$D^\mu = \partial^\mu - iA^\mu \quad \text{y} \quad A^\mu = \delta_0^\mu A^0, \quad (4.30)$$

con $A^0 = -iA_4$. El acoplamiento del gauge g está convenientemente absorbido en la definición de $A^\mu(x) = g\mathcal{A}_a^\mu(x)\frac{\lambda_a}{2}$ donde $\mathcal{A}_a^\mu$ es el campo de gauge de $SU(3)$, y λ_a son nuevamente las matrices de Gell-Mann. La matriz de masas de quark corrientes es $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d)$. Como se mencionara previamente, G es la constante de acoplamiento de la interacción quiralmente simétrica de cuatro fermiones.

Además, en el lagrangiano de (4.29) se ha agregado un término con un potencial efectivo $\mathcal{U}(\phi, \phi^*; T)$, expresado en términos de la traza del loop Polyakov (4.25).

4.2. El Loop de Polyakov

En el gauge de Polyakov, la matriz del loop de Polyakov se puede expresar en una representación diagonal^[66].

Dentro de las propiedades generales que debe tener el potencial efectivo $\mathcal{U}$, debe satisfacer la simetría global $Z(3)$ al igual que el lagrangiano puro QCD. Además, de acuerdo con resultados de QCD en la red para el comportamiento del loop de Polyakov como función de la temperatura T , el potencial $\mathcal{U}$ debe tener un mínimo en $\phi = 0$ a T pequeña, mientras que a T grande, este desarrolla un segundo mínimo, el cual pasa a ser el mínimo absoluto por encima de la temperatura crítica $T_0 = 270$ MeV. En el límite $T \rightarrow \infty$ tenemos que $\phi \rightarrow 1$. Para el potencial efectivo $\mathcal{U}$ se han propuesto varias alternativas, la más simple de ellas puede estudiarse en^[65], en la que se incluye un término ϕ^3 , que refleja la simetría $Z(3)$ subyacente:

$$\frac{\mathcal{U}(\phi, \phi^*; T)}{T^4} = -\frac{b_2(T)}{2} \phi^* \phi - \frac{b_3}{6} (\phi^3 + \phi^{*3}) + \frac{b_4}{4} (\phi^* \phi)^2 \quad (4.31)$$

con

$$b_2(T) = a_0 + a_1 \left(\frac{T_0}{T} \right) + a_2 \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 + a_3 \left(\frac{T_0}{T} \right)^3, \quad (4.32)$$

donde para obtener los coeficientes a_i , b_i se realiza un ajuste del modelo de manera tal que reproduzca los resultados de QCD en la red (ver ref.^[65]).

Hay una sutileza acerca del campo del loop de Polyakov, ϕ , y su conjugado, ϕ^* , en presencia de quarks. A potencial químico nulo, tenemos que $\phi = \phi^*$ (o sea que el campo ϕ es real), sirve como parámetro de confinamiento y un cálculo a nivel de campo medio es directo. Pero a potencial químico no nulo, la simetría $Z(3)$ está rota y ϕ difiere de ϕ^* , mientras que sus valores de expectación de vacío $\langle \phi \rangle$ y $\langle \phi^* \rangle$, siguen siendo reales^[67]. Por ello, es conveniente introducir (como en^[68]), $\Phi \equiv \langle \phi \rangle$ y $\bar{\Phi} \equiv \langle \phi^* \rangle$ como nuevas variables de campos, en reemplazo de ϕ y ϕ^* en la ecuación (4.31). Esta prescripción aproximada corresponde a un esquema de campo medio modificado, el cual es capaz de tener en cuenta la diferencia entre Φ y $\bar{\Phi}$ en presencia de quarks. A partir de esta propuesta, surge una nueva forma funcional para el potencial efectivo^[68], que preserva la simetría $Z(3)$ aún a valores de potencial

4.3. Modelo no local de quarks quirales a temperatura y potencial químico finitos

químico finito. La misma consiste en:

$$\mathcal{U}(\Phi, T) = \left[-\frac{1}{2}a(T)(\bar{\Phi}\Phi) + b(T) \ln(1 - 6(\bar{\Phi}\Phi) + 4(\bar{\Phi}^3 + \Phi^3) - 3(\bar{\Phi}\Phi)^2) \right] T^4, \quad (4.33)$$

cuyos coeficientes están parametrizados según

$$a(T) = a_0 + a_1 \left(\frac{T_0}{T}\right) + a_2 \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 \quad ; \quad b(T) = b_3 \left(\frac{T_0}{T}\right)^3, \quad (4.34)$$

y los valores de T_0 , a_i y b_3 se fijan a resultados del QCD en la red, resultando

$$a_0 = 3,51 \quad , \quad a_1 = -2,47 \quad , \quad a_2 = 15,2 \quad , \quad b_3 = -1,75. \quad (4.35)$$

Antes de continuar a la siguiente sección, debemos comentar algunas de las suposiciones contenidas en la ecuación (4.29) y comentar sobre las limitaciones a ser tenidas en cuenta. El modelo PNJL reduce la dinámica de gluones a:

1. acoplamientos quirales puntuales entre quarks, y
2. un campo de fondo estático que representa el loop de Polyakov.

Se espera entonces que este esquema pueda trabajar solo dentro de un rango limitado de temperaturas. A grandes valores de T , se sabe que los gluones transversos son grados de libertad termodinámicamente activos, siendo estos ignorados en el modelo PNJL. Podemos asumir que este rango de aplicabilidad es, en principio, $T \leq (2 - 3)T_c$, basados en la conclusión obtenida en la ref. ^[69] donde se estima que los gluones transversos comienzan a contribuir significativamente para $T > 2,5 T_c$.

4.3. Modelo no local de quarks quirales a temperatura y potencial químico finitos

Para este desarrollo consideramos el modelo quiral no local de dos sabores de quarks, incluyendo acoplamientos de los quarks a los campos de gauge de color. La acción efectiva euclídea correspondiente está dada por

$$S_E = \int d^4x \quad \left\{ \bar{\psi}(x) (-i\gamma_\mu D_\mu + \hat{m}) \psi(x) - \frac{G_S}{2} [j_a(x)j_a(x) + j_P(x)j_P(x)] + \mathcal{U}(\Phi[A(x)]) \right\}, \quad (4.36)$$

4.3. Modelo no local de quarks quirales a temperatura y potencial químico finitos

donde ψ es el doblete de fermiones para $N_f = 2$, $\psi \equiv (u, d)^T$, y $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d)$ es la matriz de masas corrientes de los quarks. En lo que sigue consideraremos simetría de isospín, esto es $m = m_u = m_d$. El término cinético incluye una derivada covariante $D_\mu \equiv \partial_\mu - iA_\mu$, donde A_μ son los campos de gauge de color, y el operador $\gamma_\mu \partial_\mu$ en el espacio euclídeo se define como $\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + \gamma_4 \frac{\partial}{\partial \tau}$, con $\gamma_4 = i\gamma_0$.

En lo que sigue asumiremos que solamente aquellas cantidades dependientes de q^2 varían con la temperatura y el potencial químico, es decir, consideraremos que los parámetros del modelo (G , las masas desnudas y los reguladores) son independientes de T y μ .

En lo que concierne a los campos gluónicos, asumiremos que ellos proveen un campo de color constante $A_4 = iA_0 = ig \delta_{\mu 0} G_a^\mu \lambda^a / 2$, donde G_a^μ son los campos de gauge de color. Entonces, la traza del loop de Polyakov, la cual es tomada como parámetro de confinamiento, está dada por $\Phi = \frac{1}{3} \text{Tr} \exp(i\phi/T)$, donde $\phi = iA_0$. Aquí también trabajaremos en el conocido gauge de Polyakov, en el cual la matriz ϕ está dada por una representación diagonal $\phi = \phi_3 \lambda_3 + \phi_8 \lambda_8$. Esto deja solamente dos variables independientes, ϕ_3 y ϕ_8 . A potencial químico nulo, debido a las propiedades de conjugación de carga del lagrangiano de QCD, se espera que el campo medio de la traza del loop de Polyakov sea una cantidad real. Dado que ϕ_3 y ϕ_8 tienen que ser reales^[70], esta condición implica que $\phi_8 = 0$. En general, esto no necesita ser el caso a μ finito^[67,71,72]. Al igual que en las referencias^[68,70,73,74], asumiremos que el potencial $\mathcal{U}$ es tal que la condición $\phi_8 = 0$ sea satisfecha, al menos para el rango de valores de μ y T a ser desarrollados en este capítulo. El campo medio del loop de Polyakov trazado está, por lo tanto, dado por $\Phi = \bar{\Phi} = [1 + 2 \cos(\phi_3/T)]/3$.

En este marco, el potencial termodinámico a nivel de campo medio Ω^{ACM} resulta

$$\Omega^{\text{ACM}} = -4 \sum_c \int_{p,n} \ln \left[\frac{(\rho_{n,\vec{p}}^c)^2 + M^2(\rho_{n,\vec{p}}^c)}{Z^2(\rho_{n,\vec{p}}^c)} \right] + \frac{\bar{\sigma}_1^2 + \kappa_p^2 \bar{\sigma}_2^2}{2G_S} + \mathcal{U}(\Phi, T). \quad (4.37)$$

Donde se ha usado la notación abreviada

$$\int_{p,n} = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3}, \quad (4.38)$$

4.3. Modelo no local de quarks quirales a temperatura y potencial químico finitos

y $M(p)$ y $Z(p)$ están dadas por

$$\begin{aligned} M(p) &= Z(p) [m + \bar{\sigma}_1 g(p)], \\ Z(p) &= [1 - \bar{\sigma}_2 f(p)]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Tenemos además que

$$\left(\rho_{n,\vec{p}}^c\right)^2 = \left[(2n+1)\pi T - i\mu + \phi_c\right]^2 + \vec{p}^2, \quad (4.40)$$

donde las cantidades ϕ_c están dadas por la relación $\phi = \text{diag}(\phi_r, \phi_g, \phi_b)$. Esto es, $\phi_c = c \phi_3$ con $c = 1, -1, 0$ para r, g, b , respectivamente.

Para este modelo se utilizó la forma explícita del potencial efectivo del loop de Polyakov dada en la ref. ^[68], dada en la ecuación (4.33)

Ω^{ACM} se vuelve divergente, por lo que necesita regularizarse. Para ello hemos usado la misma prescripción que en, por ejemplo ^[75]. Esto es,

$$\Omega_{reg}^{\text{ACM}} = \Omega^{\text{ACM}} - \Omega^{free} + \Omega_{reg}^{free} + \Omega_0, \quad (4.41)$$

donde Ω^{free} se obtiene de la Ec.(4.37) fijando $\bar{\sigma}_1 = \sigma_2 = 0$ y Ω_{reg}^{free} es la expresión regularizada para el potencial termodinámico de quarks, en ausencia de las interacciones fermiónicas,

$$\Omega_{reg}^{free} = -4 T \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sum_c \left[\ln \left(1 + \exp \left[-\frac{E_p - \mu + i\phi_c}{T} \right] \right) + \ln \left(1 + \exp \left[-\frac{E_p + \mu + i\phi_c}{T} \right] \right) \right], \quad (4.42)$$

con $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Finalmente, la constante Ω_0 notar incluida en la Ec.(4.41), se fija mediante la condición de que $\Omega_{reg}^{\text{ACM}}$ se anule para $T = \mu = 0$.

Los valores de los campos medios $\bar{\sigma}_{1,2}$ y Φ a una dada temperatura y potencial químico, se obtienen a partir de resolver el sistema de las tres ecuaciones del “gap” acopladas. Dicho sistema de ecuaciones se obtiene de la minimización del potencial termodinámico regularizado, esto es

$$\frac{\partial \Omega_{reg}^{\text{ACM}}}{\partial \bar{\sigma}_1} = \frac{\partial \Omega_{reg}^{\text{ACM}}}{\partial \bar{\sigma}_2} = \frac{\partial \Omega_{reg}^{\text{ACM}}}{\partial \Phi} = 0. \quad (4.43)$$

4.4. Transiciones de fase en el límite quiral

Una vez obtenidos los valores de los campos medios, se puede determinar el comportamiento de otras cantidades relevantes como función de la temperatura y el potencial químico. En esta caso, estaremos particularmente interesados en el condensado de quarks quiral $\langle \bar{q}q \rangle$ y la densidad de quarks ρ , definida por

$$\langle \bar{q}q \rangle = \frac{\partial \Omega_{reg}^{ACM}}{\partial m} \quad ; \quad \rho = -\frac{\partial \Omega_{reg}^{ACM}}{\partial \mu} , \quad (4.44)$$

al igual que sus susceptibilidades correspondientes, esto es, la susceptibilidad quiral χ_{ch} y la susceptibilidad de número de quarks χ_q , definidas por

$$\chi_{ch} = \frac{\partial \langle \bar{q}q \rangle}{\partial m} \quad ; \quad \chi_q = \frac{\partial \rho}{\partial \mu} . \quad (4.45)$$

Finalmente, el calor específico, se expresa como

$$C_V = -T \frac{\partial^2 \Omega_{reg}^{ACM}}{\partial^2 T} . \quad (4.46)$$

4.4. Transiciones de fase en el límite quiral

Para investigar los detalles del diagrama de fases de los modelos no locales en estudio, resulta conveniente considerar primero el límite quiral $m = 0$. En este límite, se observa que para valores del potencial químico μ suficientemente pequeños, la transición de restauración de la simetría quiral es de segundo orden (a diferencia del régimen de masa finita, donde esta transición es de tipo *crossover*), cuya temperatura crítica T_c decrece a medida que μ aumenta. A cierto valor de $\mu = \mu_{TCP}$ la transición se convierte en una de primer orden. El punto en el plano $T - \mu$ definido por (T_{TCP}, μ_{TCP}) corresponde al llamado “punto tricrítico” (TCP, por sus siglas en inglés). Para valores de $\mu > \mu_{TCP}$, los correspondientes de T_c continúan decreciendo a medida que μ aumenta, hasta llegar a $T_c \simeq 0$. Este punto marca el final de la línea crítica, siendo $\mu_c(0)$ el potencial químico correspondiente.

En lo que sigue nos concentraremos en la región de transición de segundo orden. En esta región, para un μ dado, el condensado $\langle \bar{q}q \rangle$ va a cero cuando la temperatura T se aproxima desde abajo al valor crítico $T_c(\mu)$, arriba del cual $\langle \bar{q}q \rangle = 0$ y la simetría

quiral está restaurada. Así, para $T \sim T_c(\mu)$ el potencial termodinámico admite una expansión en potencias del parámetro de orden (en este caso el condensado de quarks), como veremos en la siguiente sección.

4.4.1. Expansión de Landau y determinación del punto tri-crítico (TCP)

Para derivar la expansión de Landau comenzaremos por asumir que el potencial químico μ es tal que, en el límite quiral, el condensado quiral se anula a una temperatura crítica $T_c(\mu)$. Como puede apreciarse en la Figura 4.2, en esta situación el

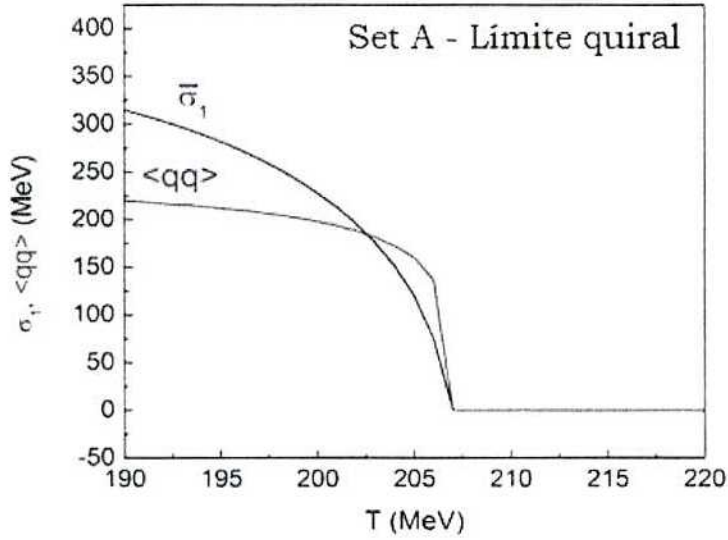


Figura 4.2: Ejemplo de transición de fase de segundo orden en el límite quiral y para el Set A. En la figura se ve representada dicha transición tanto para el condensado de quarks como para el campo $\bar{\sigma}_1$.

valor del campo medio $\bar{\sigma}_1$ también se anula. Luego, para $T \sim T_c(\mu)$ se puede realizar

4.4. Transiciones de fase en el límite quiral

una doble expansión de Ω_{reg}^{ACM} , ec.(4.41), en potencias de $\bar{\sigma}_1$ y m , obteniendo

$$\begin{aligned} \Omega_{reg}^{ACM}(\mu, T, \Phi, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_1) = & \hat{\Omega}(\mu, T, \Phi, \bar{\sigma}_2) + 4 \left[\frac{1}{8G} - S_{21}(\mu, T, \Phi, \bar{\sigma}_2) \right] \bar{\sigma}_1^2 \\ & + 2 S_{42}(\mu, T, \Phi, \bar{\sigma}_2) \bar{\sigma}_1^4 - 8 m \sigma_1 [S_{11}(\mu, T, \Phi, \bar{\sigma}_2) - \\ & S_{32}(\mu, T, \Phi, \bar{\sigma}_2) \sigma_1^2] + \mathcal{O}(\sigma_1^6, m \sigma_1^5, m^2 \bar{\sigma}_1^2), \end{aligned} \quad (4.47)$$

donde

$$S_{jk}(\mu, T, \Phi, \bar{\sigma}_2) = \sum_c \int_{p,n} g^j(\rho_{n,\vec{p}}^c) \left(\frac{Z(\rho_{n,\vec{p}}^c)^2}{(\rho_{n,\vec{p}}^c)^2} \right)^k, \quad (4.48)$$

y $\hat{\Omega}(\mu, T, \Phi, \bar{\sigma}_2)$ es el potencial termodinámico en ACM en el límite quiral, para $\bar{\sigma}_1$ cerca de cero. Esto es,

$$\hat{\Omega}(\mu, T, \Phi, \bar{\sigma}_2) = 8 \sum_c \int_{p,n} \ln Z(\rho_{n,\vec{p}}^c) + \frac{\kappa_p^2 \sigma_2^2}{2G_S} + \mathcal{U}(\Phi, T) + \Omega_{reg}^{free} + \Omega_0. \quad (4.49)$$

Usando la ec.(4.44) se puede obtener rápidamente la expresión para el condensado quiral. Para el límite quiral se obtiene

$$\langle \bar{q}q \rangle = 8 \bar{\sigma}_1 [S_{11}(\mu, T, \Phi, \bar{\sigma}_2) - S_{32}(\mu, T, \Phi, \bar{\sigma}_2) \bar{\sigma}_1^2] + \mathcal{O}(\bar{\sigma}_1^5). \quad (4.50)$$

Invirtiendo esta ecuación y reemplazando en (4.47), finalmente se llega a

$$\begin{aligned} \Omega_{reg}^{ACM}(\mu, T, \Phi, \bar{\sigma}_2, \langle \bar{q}q \rangle) = & \hat{\Omega}(\mu, T, \Phi, \bar{\sigma}_2) + A(\mu, T, \Phi, \bar{\sigma}_2) \langle \bar{q}q \rangle^2 \\ & + C(\mu, T, \Phi, \bar{\sigma}_2) \langle \bar{q}q \rangle^4 + \mathcal{O}(\langle \bar{q}q \rangle^6). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Aquí, los coeficientes A y C están dados por

$$\begin{aligned} A(\mu, T, \Phi, \bar{\sigma}_2) = & \frac{1}{4 S_{11}^2(T, \mu, \Phi, \bar{\sigma}_2)} \left[\frac{1}{8G} - S_{21}(T, \mu, \Phi, \bar{\sigma}_2) \right], \\ C(\mu, T, \Phi, \bar{\sigma}_2) = & \frac{S_{42}(T, \mu, \Phi, \bar{\sigma}_2)}{128 S_{11}^4(T, \mu, \Phi, \bar{\sigma}_2)} - \\ & \frac{S_{32}(T, \mu, \Phi, \bar{\sigma}_2)}{32 S_{11}^5(T, \mu, \Phi, \bar{\sigma}_2)} \left[\frac{1}{8G} - S_{21}(T, \mu, \Phi, \bar{\sigma}_2) \right]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

La expansión (4.51) luce bastante similar a la ec.(15) de la ref.^[7], donde se analizan modelos no locales en ausencia de renormalización de función de onda y de

acoplamiento al loop de Polyakov. En principio, siguiendo ideas similares, se podrían determinar ecuaciones explícitas tanto para la línea de transición de segundo orden como para la posición del TCP. Sin embargo, el hecho que en el presente caso los coeficientes A y C dependan de los valores de los campos medios $\bar{\sigma}_2$ y Φ introduce otras complicaciones. De hecho, infinitesimalmente cerca a T_c por debajo (para un valor dado de μ), el valor no nulo del condensado produce apartamientos de $(\Phi, \bar{\sigma}_2)$ respecto de sus valores críticos $(\Phi_c, \sigma_{2,c})$ obtenidos como soluciones del set de ecuaciones

$$\left. \frac{\partial \hat{\Omega}(\mu, T_c(\mu), \Phi, \bar{\sigma}_2)}{\partial \bar{\sigma}_2} \right|_{\Phi_c, \bar{\sigma}_{2,c}} = \left. \frac{\partial \hat{\Omega}(\mu, T_c(\mu), \Phi, \bar{\sigma}_2)}{\partial \Phi} \right|_{\Phi_c, \bar{\sigma}_{2,c}} = 0. \quad (4.53)$$

Esos apartamientos se pueden obtener usando las ecuaciones del gap que resultan de la ec.(4.51). A orden cuadrático en el condensado, se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_2 &= \bar{\sigma}_{2,c} - \frac{\left(\partial_{\Phi\Phi}^2 \hat{\Omega}_c \right) (\partial_{\bar{\sigma}_2} A_c) - \left(\partial_{\Phi\bar{\sigma}_2}^2 \hat{\Omega}_c \right) (\partial_{\Phi} A_c)}{\left(\partial_{\Phi\Phi}^2 \hat{\Omega}_c \right) \left(\partial_{\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_2}^2 \hat{\Omega}_c \right) - \left(\partial_{\Phi\bar{\sigma}_2}^2 \hat{\Omega}_c \right)^2} \langle \bar{q}q \rangle^2, \\ \Phi &= \Phi_c - \frac{\left(\partial_{\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_2}^2 \hat{\Omega}_c \right) (\partial_{\Phi} A_c) - \left(\partial_{\Phi\bar{\sigma}_2}^2 \hat{\Omega}_c \right) (\partial_{\bar{\sigma}_2} A_c)}{\left(\partial_{\Phi\Phi}^2 \hat{\Omega}_c \right) \left(\partial_{\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_2}^2 \hat{\Omega}_c \right) - \left(\partial_{\Phi\bar{\sigma}_2}^2 \hat{\Omega}_c \right)^2} \langle \bar{q}q \rangle^2, \end{aligned} \quad (4.54)$$

donde se ha utilizado una notación compacta para denotar las derivadas de $\hat{\Omega}$ y A evaluadas a temperatura T_c . En esta notación se tiene, por ejemplo, que

$$\left. \frac{\partial \hat{\Omega}(\mu, T_c(\mu), \Phi, \bar{\sigma}_2)}{\partial \Phi} \right|_{\Phi_c, \bar{\sigma}_{2,c}} = \partial_{\Phi} \hat{\Omega}_c ; \quad \left. \frac{\partial A(\mu, T_c(\mu), \Phi, \bar{\sigma}_2)}{\partial \bar{\sigma}_2} \right|_{\Phi_c, \bar{\sigma}_{2,c}} = \partial_{\bar{\sigma}_2} A_c. \quad (4.55)$$

Usando las ecs.(4.54) podemos ahora obtener las correcciones principales a A , C y $\hat{\Omega}$, inducidas por el valor no nulo del condensado. Reemplazando los resultados correspondientes en la ec.(4.51), y agrupando en potencias de $\langle \bar{q}q \rangle$ finalmente se obtiene

$$\Omega_{reg}^{ACM} = \hat{\Omega}(\mu, T, \Phi_c, \bar{\sigma}_{2,c}) + A_c \langle \bar{q}q \rangle^2 + C_c \langle \bar{q}q \rangle^4 + \mathcal{O}(\langle \bar{q}q \rangle^6), \quad (4.56)$$

donde

$$\begin{aligned}
 A_c &= A(\mu, T_c(\mu), \Phi_c, \bar{\sigma}_{2,c}), \\
 C_c &= C(\mu, T_c(\mu), \Phi_c, \bar{\sigma}_{2,c}) - \\
 &\quad \frac{\left(\partial_{\bar{\sigma}_2\sigma_2}^2 \hat{\Omega}_c\right) (\partial_{\Phi} A_c)^2 + \left(\partial_{\Phi\Phi}^2 \hat{\Omega}_c\right) (\partial_{\bar{\sigma}_2} A_c)^2 - 2 \left(\partial_{\Phi\bar{\sigma}_2}^2 \hat{\Omega}_c\right) (\partial_{\bar{\sigma}_2} A_c) (\partial_{\bar{\sigma}_2} A_c)}{\left[2 \left(\partial_{\Phi\Phi}^2 \hat{\Omega}_c\right) \left(\partial_{\bar{\sigma}_2\sigma_2}^2 \hat{\Omega}_c\right) - \left(\partial_{\Phi\bar{\sigma}_2}^2 \hat{\Omega}_c\right)^2\right]}.
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

4.4.2. Diagramas de fase en el límite quiral

Habiendo establecido la expansión de Landau en términos del condensado quiral como variable independiente única, podemos ahora analizar las características de la transición de fase siguiendo los métodos estándar de los libros. Para $C_c > 0$ el sistema sobreviene en una transición de fase de segundo orden a una temperatura crítica T_c . Para cada valor de μ , esta temperatura crítica se puede obtener resolviendo un sistema de ecuaciones acopladas dadas por la condición $A_c = 0$ complementada por las ecs. (4.53). Los valores de $T_c(\mu)$ así obtenidos definen una curva de transición de segundo orden en el plano (T, μ) . Como ya fue mencionado, tal curva es una función decreciente en μ que comienza a la temperatura crítica correspondiente al potencial químico cero $T_c(0)$ y termina en el punto tricrítico (TCP). La posición de este último se determina imponiendo la condición adicional $C_c = 0$. Luego, para obtenerlo debemos resolver el conjunto de ecuaciones acopladas dadas por $A_c = C_c = 0$ junto con las ecs. (4.53).

Para analizar la línea crítica más allá del TCP es conveniente tomar T como variable independiente y considerar $\mu_c(T)$. Para $T < T_{TCP}$, la transición se vuelve discontinua, es decir, de primer orden. En este caso, para cada valor de T , hay una región de valores de μ para los cuales existen tres soluciones diferentes de las ecuaciones del gaps completas (ecs. (4.43)). Dos de ellas corresponden a mínimos del granpotencial y la tercera a un máximo. En el límite quiral considerado en esta sección, uno de los mínimos tiene $\bar{\sigma}_1 = 0$, mientras que el otro $\bar{\sigma}_1$ toma un valor finito (en general, no despreciable). Luego, μ_c corresponde al potencial químico al

4.4. Transiciones de fase en el límite quiral

cual la presión asociada con esos dos mínimos coincide.

En la figura 4.3 se muestran los diagramas de fase correspondientes a nuestras tres parametrizaciones mientras que en la tabla 4.1 se muestran los puntos característicos de dichos diagramas.

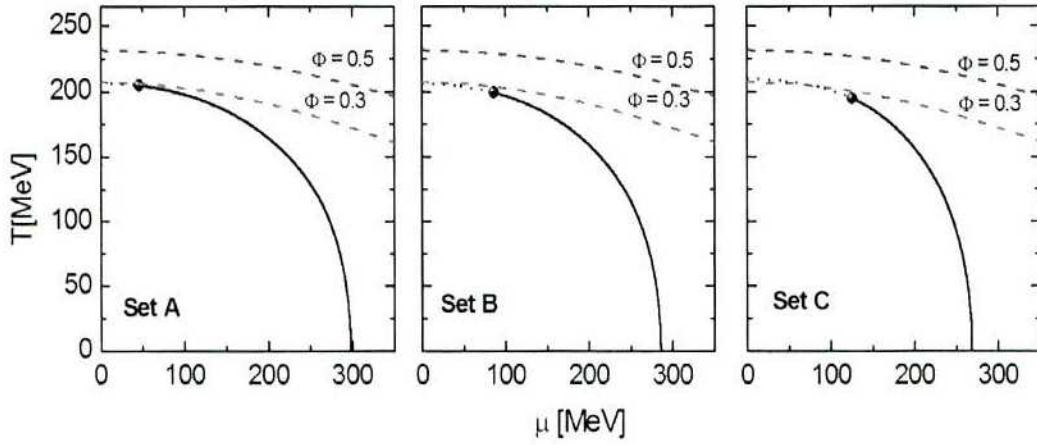


Figura 4.3: Diagramas de fase en el límite quiral para las tres parametrizaciones consideradas. Los Sets B y C incluyen renormalización de la función de onda, mientras que el Set A no. Los Sets A y B corresponden a factores de forma exponenciales, mientras que el Set C a factores de forma motivados por QCD en la red. La línea de puntos corresponde a la transición quiral de segundo orden y la línea llena a la de primer orden. Finalmente, las líneas de trazo representan la transición de deconfinamiento (siendo las líneas inferior y superior para $\Phi = 0,3$ y $\Phi = 0,5$, respectivamente).

En la Figura 4.3 la línea de puntos indica la transición de segundo orden, la línea de trazo continuo representa la transición de primer orden y la línea de trazos corresponde a la transición de deconfinamiento (las líneas inferior y superior corresponden a $\Phi = 0,3$ y $\Phi = 0,5$, respectivamente). Vemos en ella que a medida que μ aumenta, aparece una región donde el sistema permanece en su fase confinada (señalada por Φ menor que $\simeq 0,3$) a pesar que la simetría quiral ha sido reestablecida. Esto corresponde a la recientemente propuesta fase quarkiónica^[76]. Se observa en general que el perfil de los tres diagramas es muy similar, con valores de temperaturas

Tabla 4.1: Posición de algunos puntos característicos de los diagramas de fases en el límite quiral. Todos los valores están en MeV.

	Set A	Set B	Set C
$T_c(0)$	206.6	205.9	209.7
μ_{TCP}	46.2	86.1	125.7
T_{TCP}	204.8	199.2	194.6
$\mu_c(0)$	297.6	285.5	268.2

críticas a $\mu = 0$ que difieren por menos de 4 MeV. En el caso del potencial químico crítico a $T = 0$, la diferencia entre los tres sets es un poco mayor. Comparando resultados del Set A con los correspondientes del Set B vemos que la inclusión de la renormalización de la función de onda implica un decrecimiento de alrededor de 10 MeV en el valor de $\mu_c(0)$. El uso de factores de forma más suaves involucrados en la parametrización inspirada en los resultados de QCD en la red (Set C), lleva a un decrecimiento adicional de ~ 10 MeV. El punto del diagrama de fases que tiende a ser más sensitivo de la parametrización del modelo es la posición del TCP. De hecho, a pesar de que los tres valores de T_{TCP} se encuentran dentro de un rango de alrededor de 10 MeV, el valor de μ_{TCP} se incrementa en un factor 2 cuando se incluye la WFR (esto es, cuando pasamos del Set A al Set B) y por un factor extra de $\sim 3/2$ cuando se utiliza la parametrización inspirada en QCD en la red (o sea cuando pasamos del Set B al Set C).

4.4.3. Exponentes críticos

Como es sabido, en la región de transición de fase de segundo orden, el comportamiento de varias cantidades termodinámicas relevantes en la vecindad de la transición de fase se determina mediante los exponentes críticos. En el caso de las susceptibilidades quiral y de número de quarks, χ_{ch} y χ_q respectivamente, y del calor

4.4. Transiciones de fase en el límite quiral

específico C_V , los exponentes críticos están definidos por

$$\chi_{ch} = |h - h_c|^{-\gamma_{ch}} \quad ; \quad \chi_q = |h - h_c|^{-\gamma_q} \quad ; \quad C_V = |h - h_c|^{-\alpha}, \quad (4.58)$$

donde $|h - h_c|$ es la distancia al punto crítico en el plano (μ, T) . Notar que en el límite quiral solo son relevantes las trayectorias que se aproximen a la transición desde la fase de simetría quiral rota. En nuestro caso, dada la expansión de Landau obtenida previamente, se espera tener los exponentes usuales de la teoría de campo medio. Por lo tanto, para trayectorias que no sean asintóticamente tangenciales a la línea crítica, los valores de los exponentes críticos deberían ser

$$\gamma_{ch} = 1 \quad ; \quad \gamma_q = 0 \quad ; \quad \alpha = 0, \quad (4.59)$$

para todos los puntos excepto para el TCP, donde

$$\gamma_{ch} = 1 \quad ; \quad \gamma_q = 1/2 \quad ; \quad \alpha = 1/2. \quad (4.60)$$

Como test de consistencia, se determinaron numéricamente estos exponentes críticos mediante el estudio del comportamiento asintótico de las cantidades correspondientes para los tres sets de parámetros. Como ejemplo típico de los tres resultados de tales estudios se muestra en el panel de la izquierda de la Fig.4.4, el comportamiento de χ_{ch} para el Set C al acercarnos a μ constante a un punto arbitrario de la línea de transición de segundo orden, es decir, un punto *diferente* al TCP (en el ejemplo se muestra este resultado para $\mu = 10$ MeV). El panel de la derecha en la Fig.4.4 muestra los resultados del mismo estudio para $\mu = \mu_{TCP}$.

Los valores de los exponentes críticos extraídos de este tipo de análisis para los tres sets de parámetros se muestran en la Tabla 4.2. Vemos que en todos los casos los valores obtenidos numéricamente están en muy buen acuerdo con los valores para campo medio dados anteriormente.

Concluiremos esta sección aclarando un poco más en detalle el rol que juega el loop de Polyakov, produciendo un incremento notable en el valor de la temperatura crítica a un dado valor de μ . Esto resulta evidente si se comparan los valores de

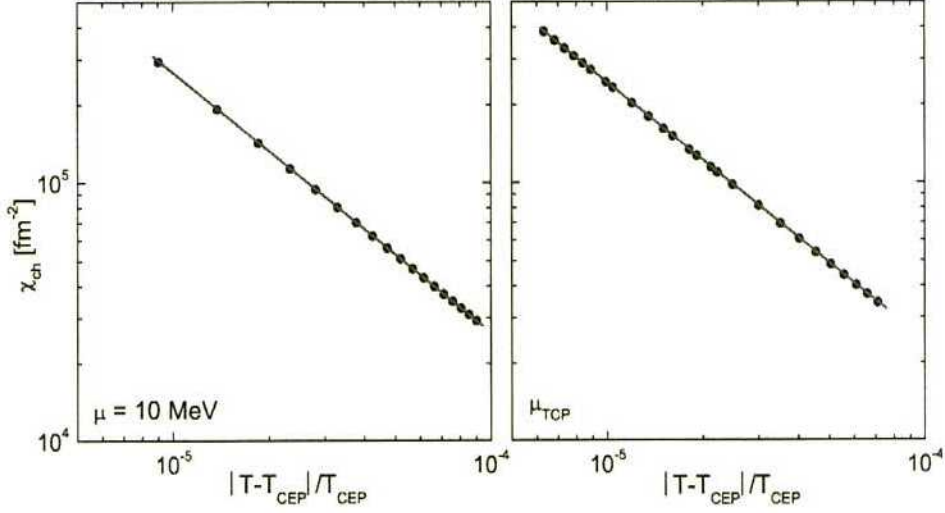


Figura 4.4: Dependencia de la susceptibilidad quiral χ_{ch} como función de T para μ constante, en la vecindad de un punto arbitrario (en este ejemplo para $\mu = 10$ MeV) de la línea de transición de 2do orden (panel izquierdo) y para el TCP (panel derecho) en el límite quiral y para el Set C.

$T_c(0)$ presentados en la tabla 4.1, con los que se obtienen en modelos no locales sin acoplamiento al PL (ver ref.^[12]) donde $T_c(0) \sim 130$ MeV. Dicho incremento en las temperaturas de transición de fase se observa para todo el rango de valores del potencial químico dentro del diagrama, pero la mayor diferencia se produce en la región de transiciones de segundo orden. Por ello, comenzaremos por analizar esta región, donde además consideraremos por simplicidad la parametrización A en la que no hay renormalización de la función de onda. La condición $A_c = 0$ implica que $1/8G = S_{21}$ (ver sección 4.4.1). Sin embargo, siguiendo pasos similares a los descritos en el apéndice B de la ref.^[75], es posible mostrar que para $T, \mu \ll \Lambda_0$ se tiene que

$$S_{21} \simeq S_{21}^{app} = \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\Lambda_0^2}{4} - \left[\frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{3} \left(\arccos \left[\frac{3\Phi - 1}{2} \right] \right)^2 \right] T^2 - \mu^2 \right). \quad (4.61)$$

De hecho, se verificó que en la región relevante $T \leq 210$ MeV y $\mu \leq 50$ MeV, la Ec.(4.61) se verifica con una precisión mayor al 15% para $\Phi \leq 0.3$. De esta forma,

4.4. Transiciones de fase en el límite quiral

Tabla 4.2: *Exponentes críticos en el límite quiral obtenidos para los tres sets, se compara con el valor esperado universalmente para cualquier teoría a nivel de campo medio (CM).*

			Set A	Set B	Set C	Exponente CM
Algún punto sobre la línea crítica de 2do orden	γ_{ch}	$\mu \rightarrow$	0.99663	0.99821	1.00160	1
		$T \uparrow$	0.99885	1.00045	0.99458	1
	γ_q	$\mu \rightarrow$	0.00661	0.00142	0.00242	0
		$T \uparrow$	0.00496	0.00487	0.00186	0
	α	$\mu \rightarrow$	0.00065	0.00032	0.00540	0
		$T \uparrow$	0.00134	0.00369	0.00411	0
TCP	γ_{ch}	$\mu \rightarrow$	1.00318	1.00105	0.99740	1
		$T \uparrow$	1.02235	1.00434	0.99863	1
	γ_q	$\mu \rightarrow$	0.52351	0.49796	0.50703	1/2
		$T \uparrow$	0.54445	0.50362	0.50561	1/2
	α	$\mu \rightarrow$	0.55607	0.50094	0.49966	1/2
		$T \uparrow$	0.51974	0.49487	0.50156	1/2

la condición $A_c = 0$ produce que

$$T_c(\mu) \simeq \frac{T_c^{(pq)}(\mu)}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi^2} \left(\arccos \left[\frac{3\Phi_c - 1}{2} \right] \right)^2}}, \quad (4.62)$$

donde

$$T_c^{(pq)}(\mu) = \frac{\sqrt{3}\Lambda_0}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{3G_S\Lambda_0^2} - \frac{4\mu^2}{\Lambda_0^2}}. \quad (4.63)$$

$T_c^{(pq)}(\mu)$ provee una buena aproximación para la temperatura crítica correspondiente al modelo no local de quarks puros, esto es, el modelo sin acoplamiento al loop de Polyakov (PL), para el regulador exponencial considerado en la parametrización A (ver ref. [75] para más detalles). Por supuesto, en presencia de la interacción PL-quark, el valor de Φ_c en la ec.(4.62) deber ser obtenido resolviendo simultáneamente

la ecuación del gap correspondiente, esto es, la segunda ecuación en (4.53) para este caso. Sin embargo, se observa claramente que para cualquier valor de $\Phi_c < 1$ tenemos $T_c(\mu) > T_c^{pq}(\mu)$. Por ejemplo, a $\mu = 0$ se obtiene típicamente $\Phi_c \simeq 0,2$ lo cual implica que $T_c(0)/T_c^{pq}(0) \approx 1,66$. Para la parametrización A se tiene que $T_c^{pq}(0) = 126$ MeV para el modelo no local de quarks puros en el límite quiral, pero se espera que el acoplamiento al PL incremente este valor hasta $T_c \sim 209$ MeV, el cual está en muy buen acuerdo con los valores numéricos listados en la tabla 4.1. Como se puede observar claramente a partir de las ecs.(4.62,4.63) se puede obtener un incremento similar de la temperatura crítica para valores finitos (pequeños) de μ . Por otro lado, debería notarse que para poder aplicar este tipo de análisis para relacionar los valores de $\mu_c(T)$ que predice el modelo con y sin PL, debemos tener un rango común de temperaturas para las cuales la transición sea de segundo orden. Sin embargo, para las parametrizaciones consideradas esto no es siempre posible, ya que ellas llevan en todos los casos a $T_{TCP} > T_c^{pq}(0)$. Por ejemplo, en la tabla 4.1 se observa que para el Set A $T_{TCP} = 204,8$ MeV, en comparación con el valor citado arriba $T_c^{pq}(0) = 126$ MeV.

4.5. Transición de fase quiral en el régimen de masa finita

Empecemos por analizar el comportamiento de algunas cantidades de campo medio como función de la temperatura T y del potencial químico μ . Dado que los resultados obtenidos para las tres parametrizaciones estudiadas son similares, sólo veremos explícitamente los correspondientes a la parametrización C. En la Fig. 4.5 se grafican los valores de $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ y Φ como función de T para algunos valores representativos del potencial químico.

El panel izquierdo de la Fig. 4.5 muestra que a $\mu = 0$ hay un cierto valor de T al cual $\bar{\sigma}_1$ cae rápidamente señalando la presencia de una transición de restauración de la simetría quiral tipo *crossover*. Básicamente a la misma temperatura el loop

4.5. Transición de fase quiral en el régimen de masa finita

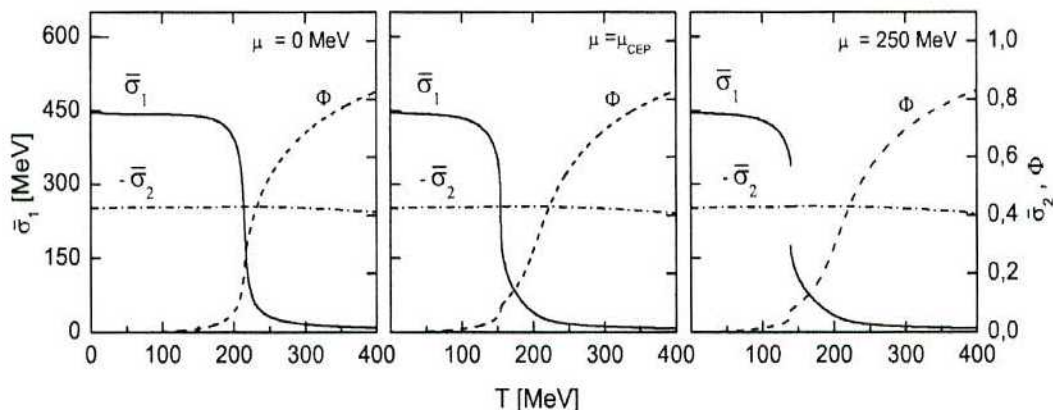


Figura 4.5: Campos medios $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ y Φ como funciones de T a tres valores representativos de potencial químico para la parametrización C. Notar que la escala a la izquierda corresponde a $\bar{\sigma}_1$, mientras que la de la derecha a $\bar{\sigma}_2$ y Φ . Dado que $\bar{\sigma}_2$ tiende a ser negativa se muestra el valor de $-\bar{\sigma}_2$.

de Polyakov Φ aumenta, lo cual puede ser interpretado como la ubicación de la transición de deconfinamiento. A medida que μ aumenta, hay un cierto valor de $\mu = \mu_{CEP}$ por encima del cual la transición comienza a ser discontinua. A este preciso potencial químico la transición es de 2do orden. Esta situación se ilustra en el panel central de la Fig. 4.5. Los valores correspondiente de (T_{CEP}, μ_{CEP}) definen la posición del conocido “critical end point” (CEP), el cual, como será explicado más adelante en el apéndice 4.A, puede ser determinado resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones del gap ecs.(4.43) complementadas por dos ecuaciones adicionales del tipo de las ecuaciones (4A.3,4A.4). Como se muestra en el panel de la derecha de la Fig. 4.5, para $\mu > \mu_{CEP}$ la transición se vuelve discontinua, es decir, de primer orden. Finalmente, para potenciales químicos superiores a $\mu_c(T = 0) \simeq 310$ MeV, el sistema está en la fase de quiralidad restaurada para todos los valores de temperatura. Es importante notar que, a pesar que $\bar{\sigma}_2$ parece ser casi constante en la Fig. 4.5, tiende a cero (como era de esperarse) para valores de T mayores a los mostrados.

4.5. Transición de fase quiral en el régimen de masa finita

La naturaleza diferente de la transición quiral en cada una de las tres regiones de la Fig. 4.5 se observa aún más claramente en el comportamiento de las funciones respuesta correspondientes. En la Fig. 4.6 se muestra el calor específico C_V al igual que las susceptibilidades quiral y de número de quarks χ_{ch} y χ_q , como función de la temperatura para la parametrización C y los tres diferentes valores de μ utilizados en la Fig. 4.5. La línea punteada corresponde a $\mu = 0$. Se observa que las funciones respuesta para C_V y χ_{ch} muestran un pico pronunciado de altura finita a básicamente el mismo valor de T , el cual corresponde a la temperatura donde ocurre la transición tipo *crossover*. En el caso de χ_q no se observa un pico, pero sí un aumento marcado alrededor de dicha temperatura. Para el caso de I. La línea de trazo y punto corresponde a $\mu = \mu_{CEP}$ e indica que todas las funciones respuesta muestran un pico agudo y divergente. Tal comportamiento señala la naturaleza de segundo orden de la transición quiral en el CEP. Finalmente, la línea llena corresponde a $\mu > \mu_{CEP}$. En todos los casos se observa una discontinuidad en las funciones respuesta, lo cual indica que la transición asociada es de primer orden.

En la Fig. 4.7 se muestran los tres diagramas de fase correspondientes a las tres parametrizaciones dadas. Aquí la línea de puntos representa la línea de transición quiral tipo *crossover*, mientras que la línea llena a la de transición de primer orden. Las líneas de trazo están asociadas a la transición de deconfinamiento (la inferior y superior corresponden a $\Phi = 0,3$ y $\Phi = 0,5$, respectivamente). La posición de los puntos más relevantes de los diagramas de fase están tabuladas en el Cuadro 4.3.

Como en el caso quiral, observamos que la principal diferencia aparece en la posición del punto en el cual termina la línea de transición de primer orden (CEP). Comparando los resultados del Set A y del Set B, vemos que el principal efecto de la renormalización de la función de onda es el de llevar la ubicación del CEP hacia valores menores en T y mayores en μ . En lo que respecta a la parametrización motivada en QCD en la red (Set C), se observa que la misma produce valores aún menores de T_{CEP} y mayores de μ_{CEP} . Comparando con los resultados obtenidos en el límite quiral se nota que la variación de T_{CEP} entre los diferentes sets es mayor

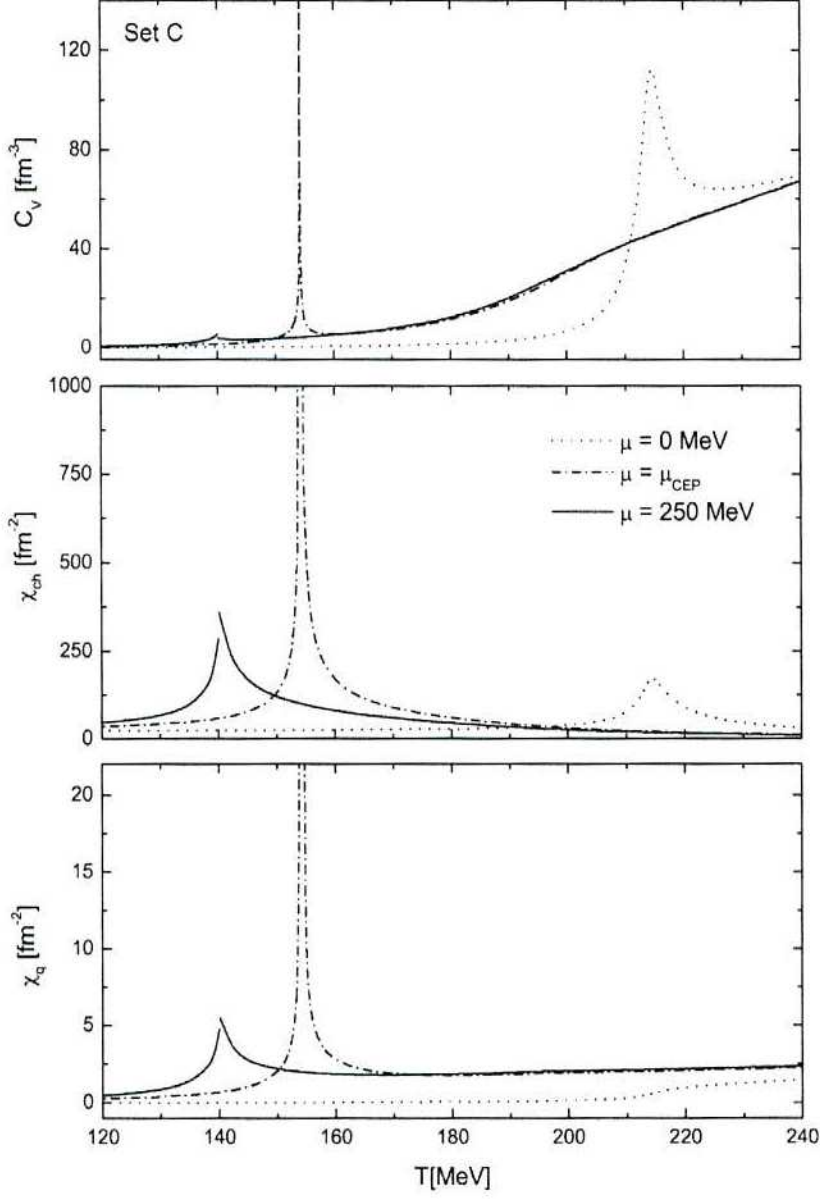


Figura 4.6: Comportamiento del calor específico C_V , la susceptibilidad quiral χ_{ch} y la susceptibilidad de número de quarks χ_q como función de T a tres valores de potencial químico representativos para la parametrización C .

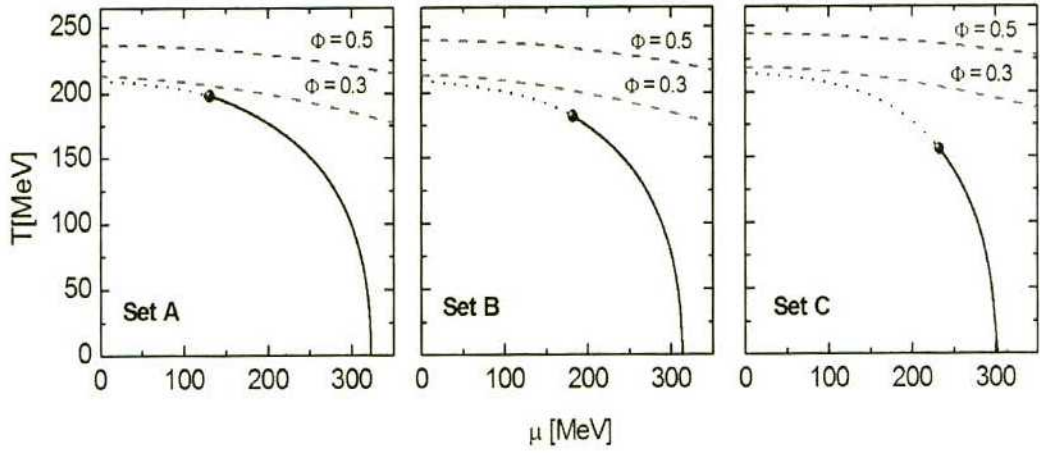


Figura 4.7: Diagramas de fase para las tres parametrizaciones consideradas. Los sets B y C incluyen renormalización de la función de onda de los quarks, mientras que el set A no. Los sets A y B corresponden a factores de forma exponenciales, mientras que el set C corresponde a factores de forma lorentzianos ajustados al resultados del QCD en la red. La línea de puntos corresponde a la línea de transición quiral tipo crossover y la línea llena a la transición quiral de primer orden. Las líneas de trazo corresponden a la transiciones de deconfinamiento (siendo las líneas inferiores y superiores para $\Phi = 0,3$ y $\Phi = 0,5$, respectivamente).

en este caso. Además, considerando cada parametrización por separado se observa que el efecto en los valores de $T_c(0)$ y $\mu_c(0)$ al introducir masa de quarks finita es relativamente pequeño (aprox. +5 MeV y +30 MeV, respectivamente), mientras que la posición del CEP es mucho más sensible al valor de la masa corriente de quarks m , especialmente en el caso de la parametrización C. Esto puede verse claramente en la Fig. 4.8, donde se representan los valores de T_{CEP} y μ_{CEP} como función de m .

En todos los casos se nota una disminución (aumento) pronunciado de T_{CEP} (μ_{CEP}) para valores pequeños de m . En los casos de parametrización exponencial (Set A y Set B), a $m \sim 4$ MeV, esta variación tiende a desaparecer y la posición del CEP permanece relativamente estable por encima del valor máximo de m considerado. Por otro lado, para la parametrización motivada en QCD en la red (Set C) la

Tabla 4.3: Posición de algunos puntos característicos de los diagramas de fases para masa de quarks finita. Todos los valores están en MeV.

	Set A	Set B	Set C
$T_c(0)$	210.0	209.8	214.5
μ_{CEP}	132.5	182.3	234.8
T_{CEP}	197.8	181.6	154.2
$\mu_c(0)$	321.5	311.6	298.1

situación es algo diferente. De hecho, la variación es relativamente más grande para básicamente todos los valores de m considerados. En particular vemos que, luego de la disminución pronunciada inicial, a m cercana a 4 MeV, el valor de T_{CEP} comienza a incrementarse de manera bastante pronunciada. Es interesante notar que el comportamiento de la posición del CEP como función de m cerca de $m = 0$ (esto es, cerca del TCP) se puede investigar analíticamente. Argumentos generales implican que^[77]

$$\begin{aligned}
 \Delta T_{CEP} &= T_{CEP}(m) - T_{TCP} = -c m^{2/5} + \mathcal{O}(m^{4/5}) \\
 \Delta \mu_{CEP} &= \mu_{CEP}(m) - \mu_{TCP} = +d m^{2/5} + \mathcal{O}(m^{4/5}),
 \end{aligned}
 \tag{4.64}$$

donde c y d son constantes definidas positivas. Para verificar que nuestro resultado satisface estas relaciones, estudiamos numéricamente en detalle la variación de T_{CEP} y μ_{CEP} como función de m cerca del límite quiral. En la Fig. 4.9 se muestran los resultados para la parametrización C, donde se ve claramente un comportamiento de ley de potencias tanto para ΔT_{CEP} como para $\Delta \mu_{CEP}$, observándose una línea recta en el gráfico log-log. Realizando un ajuste lineal obtenemos que la pendiente de ambas rectas resulta $0,40 \pm 0,01$, en muy buen acuerdo con los exponentes en la ecuación (4.64).

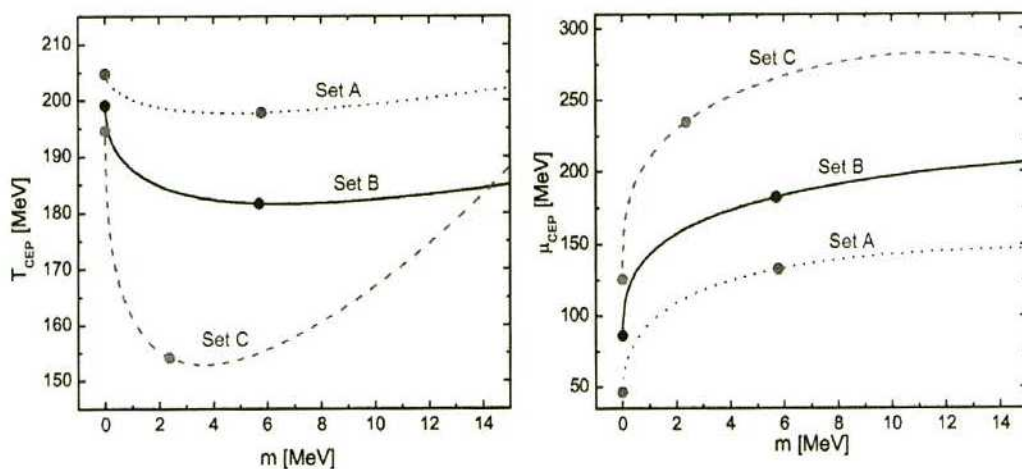


Figura 4.8: Posición del CEP en el plano (T, μ) como función de la masa de quarks corriente m para las tres parametrizaciones del modelo utilizadas. El panel de la izquierda muestra la dependencia de T_{CEP} , mientras que el de la derecha la de μ_{CEP} . Con los puntos rellenos están señalados los valores correspondientes al límite quiral $m = 0$ y a las masas de quarks corriente “físicas” que se muestran en la tabla I

4.5.1. Exponentes críticos en el punto crítico final (CEP)

Finalmente, consideraremos el comportamiento de las funciones respuesta cerca del CEP. Como ya se mencionó, la transición de fase quiral en este punto es de segundo orden. Luego, se espera un comportamiento crítico con exponentes críticos definidos como en la Ec. (4.58). Dentro de las aproximaciones usadas en este trabajo estos exponentes deberían tomar los valores de campo medio $\gamma_{ch} = \gamma_q = \alpha = 2/3$ cuando uno se aproxima al CEP usando trayectorias que no sean asintóticamente paralelas a la línea de transición de primer orden. Como ya fue mencionado en la sección 4.4, estos exponentes pueden ser determinados numéricamente, mediante el análisis del comportamiento asintótico de las funciones respuesta cerca del punto crítico. En la tabla 4.4 se muestran los resultados obtenidos numéricamente para los tres sets de parámetros. Se puede observar en la misma que los valores obtenidos en todos los casos están muy cercanos al valor que la teoría de campos a nivel de

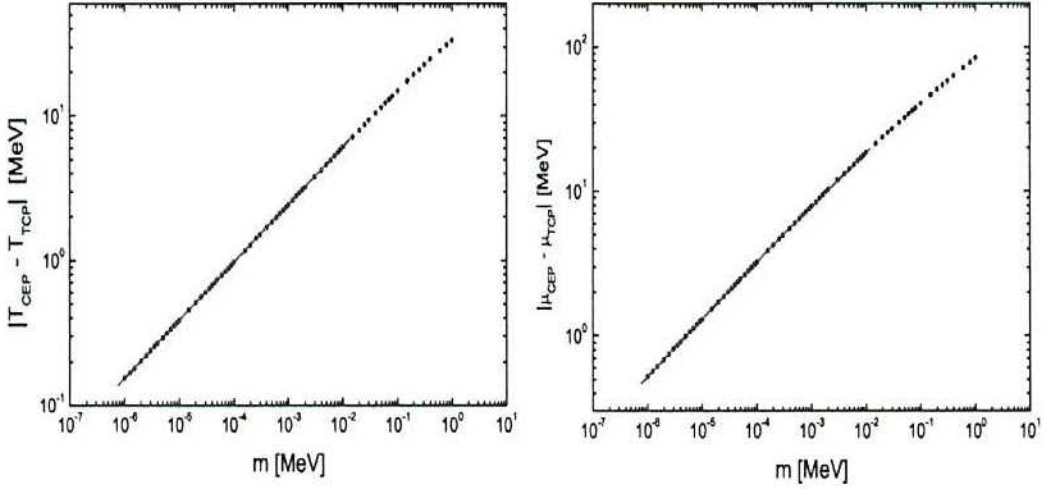


Figura 4.9: Posiciones del CEP en el plano (T, μ) como función de la masa de quarks corriente m cerca del límite quiral, para la parametrización C

campo medio sugiere. En la Fig. 4.10 se muestra un resultado típico de este tipo de estudio numérico, mediante una representación log-log del calor específico C_V correspondiente a la parametrización C, como función del apartamiento relativo de la temperatura $|T - T_{CEP}|/T_{CEP}$ para trayectorias que se acercan al CEP a $\mu = \mu_{CEP}$ constante tanto desde abajo ($T < T_{CEP}$), como desde arriba ($T > T_{CEP}$). Cabe aclarar además que se observan resultados similares a aquellos presentados en esta figura tanto para la susceptibilidad quiral como para la susceptibilidad de número de quarks.

Observamos en la Fig. 4.10 que se obtiene una línea recta hasta un apartamiento de 10^{-3} , luego del cual comienzan a mostrarse los efectos no lineales. Este resultado es particularmente interesante, ya que en la literatura^[77,78] se ha sugerido que en algunos casos podría haber un comportamiento de “dos líneas rectas”, esto es, que se necesitan dos exponentes críticos diferentes para describir el comportamiento de C_V cerca del CEP. De hecho, esta situación ha sido interpretada como una influencia de las propiedades del TCP sobre las del CEP. Sin embargo, como se puede observar en la Fig. 4.10 no hay señales de este tipo de efecto en nuestro caso. Uno de los factores que pueden llevar a esta diferencia puede deberse a la precisión en la determinación

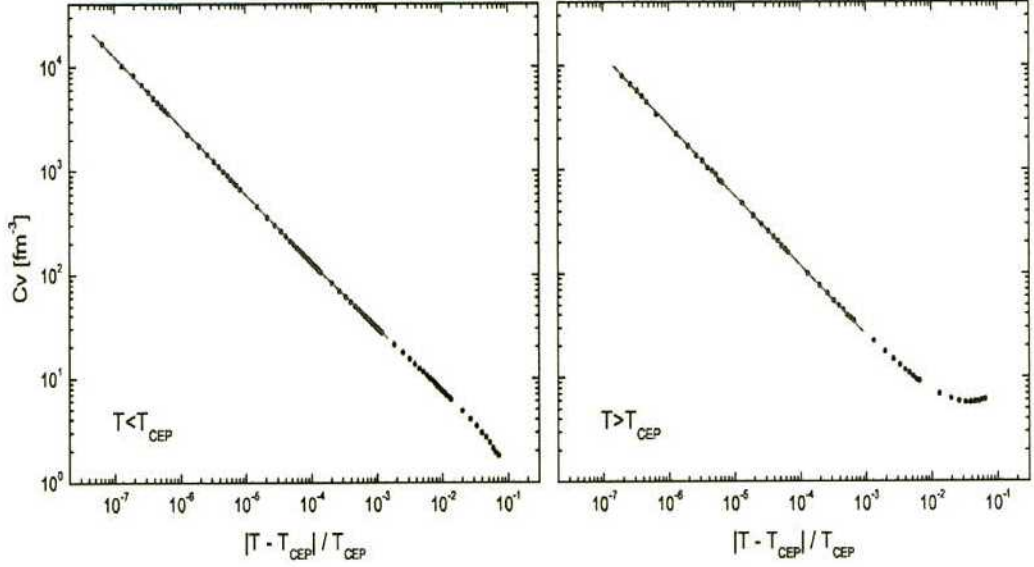


Figura 4.10: Dependencia del calor específico C_V como función de T para μ constante en la vecindad del CEP para la parametrización C. El panel de la izquierda muestra la dependencia al aproximarse al CEP desde abajo mientras que el panel de la derecha la dependencia cuando la aproximación se hace desde arriba.

del CEP, ya que en nuestro caso el mismo se ha podido determinar numéricamente mediante la solución del sistema de ecuaciones descritas en el apéndice 4.A, mientras que el procedimiento usual consiste en buscar la transición de segundo orden, esto es, el punto de divergencia de las funciones respuesta, y esto conlleva a la existencia de importantes incertezas. Notar que en todos los casos el acuerdo de los valores obtenidos para los exponentes críticos con los valores de campo medio es muy bueno. El mismo tipo de resultados fue encontrado para las otras parametrizaciones (Sets A y B). Debería enfatizarse nuevamente que para obtener numéricamente los exponentes críticos con buena precisión es fundamental conocer la posición del CEP con la mejor precisión posible. En este sentido, se corroboró que aún un error de 0.5 MeV en T_{CEP} y/o μ_{CEP} se traduce en una importante incerteza en los exponentes críticos. En este sentido, el método para la determinación del CEP, discutido en el

Tabla 4.4: Exponentes críticos en el CEP obtenidos para los tres sets, se compara con el valor esperado universalmente para cualquier teoría a nivel de campo medio (CM).

		Set A	Set B	Set C	Exponente CM
γ_{ch}	$\mu \rightarrow$	0.67058	0.67127	0.67078	2/3
	$\mu \leftarrow$	0.66394	0.66042	0.66203	2/3
	$T \uparrow$	0.67070	0.67336	0.66948	2/3
	$T \downarrow$	0.66068	0.65986	0.66310	2/3
γ_q	$\mu \rightarrow$	0.66830	0.66584	0.66807	2/3
	$\mu \leftarrow$	0.66335	0.66429	0.66497	2/3
	$T \uparrow$	0.67002	0.66575	0.67186	2/3
	$T \downarrow$	0.66696	0.66353	0.66013	2/3
α	$\mu \rightarrow$	0.65524	0.65519	0.66273	2/3
	$\mu \leftarrow$	0.67585	0.67498	0.66658	2/3
	$T \uparrow$	0.65954	0.65718	0.66260	2/3
	$T \downarrow$	0.66615	0.67318	0.66662	2/3

apéndice 4.A resulta de gran ayuda.

4.5.2. Líneas espinodales

Como corolario del presente capítulo, resulta interesante analizar en detalle el sector de las transiciones de fase de primer orden. Como se explicara anteriormente, este sector comienza cuando, a temperaturas suficientemente bajas, al aumentar el potencial químico desde un punto de la fase hadrónica comienza a aparecer una segunda solución de las ecuaciones del gap. Esta segunda solución corresponde a un mínimo relativo del granpotencial respecto de los campos $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ y Φ , y se caracteriza por tener valores cercanos a cero para el campo $\bar{\sigma}_1$. Al haber dos mínimos del granpotencial, debe haber también un máximo relativo, el cual se corresponde

4.5. Transición de fase quiral en el régimen de masa finita

con una tercera solución de las ecuaciones del gap, la cual es inestable y muy difícil de hallar numéricamente. A medida que se continúa avanzando en la dirección de la fase deconfinada, el segundo mínimo del granpotencial decrece, mientras que el que corresponde a grandes valores de $\bar{\sigma}_1$ aumenta. Esto se continúa hasta llegar a un punto donde los dos mínimos tienen el mismo valor para el granpotencial. Es precisamente este punto en el plano (T, μ) el que consideramos como la transición de primer orden propiamente dicha. Es decir que la línea de transición de primer orden (línea llena en las Figs. 4.7 y 4.3), esta compuesta por los puntos en el plano (T, μ) , donde los dos mínimos del granpotencial se igualan.

Posteriormente, si se continúa aumentando el potencial químico, el mínimo del granpotencial que corresponde a pequeños valores de $\bar{\sigma}_1$ es cada vez menor, y por lo tanto resulta ser una solución más estable de las ecuaciones del gap, en detrimento de la solución para grandes valores de $\bar{\sigma}_1$. Hasta que se llega a un punto donde vuelve a existir un solo mínimo del granpotencial, que es el que corresponde a $\bar{\sigma}_1 \sim 0$. El comportamiento típico de las soluciones para el Set C, se muestra en el panel derecho de la Fig. 4.11. Vemos que para temperaturas suficientemente altas, $T = 180$ MeV en este caso, existe una sola solución para todo valor de μ . Por el contrario, para T suficientemente bajas, $T = 30$ MeV en este caso, existe una región de valores de μ (delimitada por las dos líneas verticales de puntos) donde existen tres soluciones.

Resumiendo, vemos que este tipo de transición de fase, presenta una zona donde la ecuaciones del gap tienen dos soluciones estables y una inestable correspondientes a dos mínimos y un máximo relativos del granpotencial. Esta zona se halla delimitada por las líneas espinodales, siendo la inferior la correspondiente a los puntos donde aparece el mínimo relacionado con $\bar{\sigma}_1$ pequeños, mientras que la espinodal superior corresponde a los puntos donde desaparece el mínimo relacionado con grandes valores de $\bar{\sigma}_1$.

En general la separación entre las líneas espinodales aumenta a medida que T decrece. Esto se puede observar claramente en el panel izquierdo de la Fig. 4.11, donde estas curvas se representan en el diagrama de fases correspondiente al Set C.

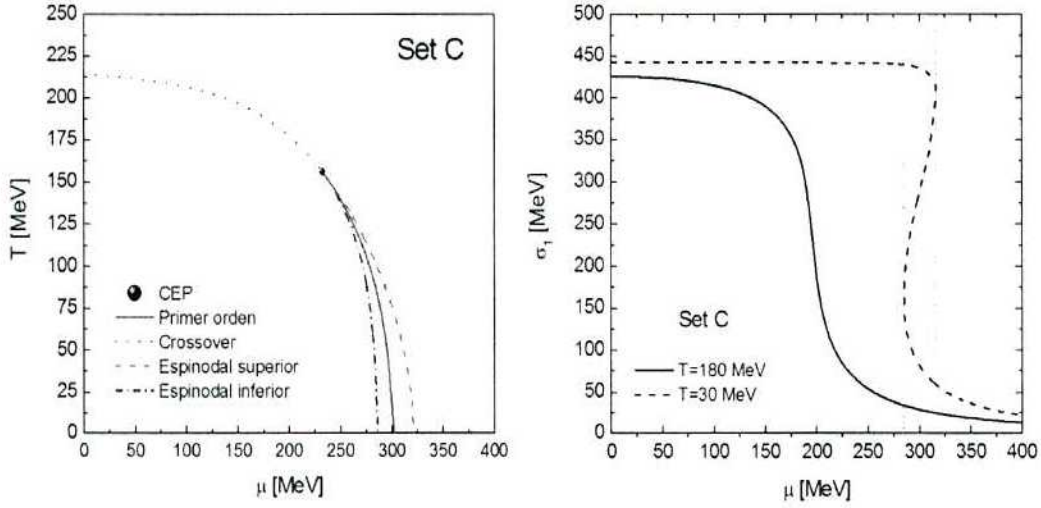


Figura 4.11: En la figura de la izquierda se representa el diagrama de fases correspondiente al Set C, con las líneas espinodales. La figura de la derecha muestra un ejemplo de transición de tipo crossover, en comparación con una de primer orden. Se observa que en la zona delimitada por las líneas de puntos hay tres valores de $\bar{\sigma}_1$ por cada valor de μ .

Debe destacarse que, mientras que la forma de la espinodal inferior no difiere demasiado al pasar de un set a otro, la espinodal superior lo hace en forma notable. Se observa que para el caso del Set C, dicha línea corta el eje horizontal en aproximadamente $\mu = 325$ MeV, mientras que para el Set B lo hace cerca de $\mu = 500$ MeV. Más aún, en el caso del Set A se observó que la línea espinodal se extiende hacia valores todavía mayores. Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que debido a que el modelo utilizado en esta sección no tiene en cuenta ni el grado de libertad de extrañeza, ni interacciones que den lugar a fases superconductoras de color, la aplicabilidad del mismo más allá de $\mu = 400$ MeV no resulta confiable.

4.A. Apéndice: Determinación precisa del punto crítico final (CEP)

Como fuera discutido en ref.^[77], cuando el granpotencial Ω depende sólo de un parámetro variacional simple, se puede obtener un set de ecuaciones que permite determinar la posición del CEP. Este set de ecuaciones está formado por la ecuación del gap correspondiente complementada con dos ecuaciones que resultan de pedir que también se cancele la segunda y tercera derivada del granpotencial con respecto al parámetro. Físicamente, esto corresponde a determinar los valores de (T, μ) para los cuales el granpotencial alrededor de su mínimo resulte tan plano como sea posible. El propósito de esta sección es dar algunos detalles del formalismo necesario para generalizar esta idea al caso en el que el granpotencial depende de más de un parámetro variacional. Para mantener el formalismo tan general como sea posible, asumiremos que el granpotencial depende de N parámetros variacionales $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$. Y por conveniencia, en lo que sigue, distinguiremos ξ_1 del resto (notar que no se pierde generalidad en esta elección, ya que el orden de los parámetros es completamente arbitrario), introduciendo los índices latinos $j = 2, \dots, N$ para el resto de las variables. Luego, en una notación compacta, el conjunto de ecuaciones del gap se pueden escribir como

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_1} = 0, \quad (4A.1)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_j} = 0. \quad (4A.2)$$

La idea básica es ahora considerar los parámetros variacionales ξ_j como funciones de ξ_1 con la correspondiente dependencia funcional determinada por las soluciones de las $N - 1$ ecuaciones del gap (4A.2). El conjunto total de $N + 2$ ecuaciones necesarias para determinar el CEP se obtiene entonces complementando estas $N - 1$ ecuaciones con aquellas resultantes de demandar que la primera, segunda y tercer derivadas *totales* del granpotencial con respecto a ξ_1 se cancelen simultáneamente. La primera de estas derivadas resulta ser, obviamente, la ecuación del gap (4A.1).

Las otras dos resultan

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi_1 \partial \xi_j} \xi'_j + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \xi'_j \xi'_k = 0, \quad (4A.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 \Omega}{\partial \xi_1^3} + 3 \frac{\partial^3 \Omega}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_j} \xi'_j + 3 \frac{\partial^3 \Omega}{\partial \xi_1 \partial \xi_j \partial \xi_k} \xi'_j \xi'_k + \\ & 3 \frac{\partial^3 \Omega}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \xi'_j \xi'_k \xi'_l + 3 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \xi'_j \xi''_k + 3 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi_1 \partial \xi_j} \xi''_j = 0. \end{aligned} \quad (4A.4)$$

Aquí, y en lo que sigue, se sobreentiende la suma sobre índices latinos $k, j, l = 2, \dots, N$. Notar que en la obtención de esta ecuación se han suprimido términos asumiendo que las ecuaciones del gap (4A.1, 4A.2) se satisfacen simultáneamente. En las Ecs. (4A.3, 4A.4), ξ'_j , ξ''_j , etc., denotan las derivadas de los parámetros correspondientes, respecto a ξ_1 . Estas se pueden expresar convenientemente en términos de derivadas parciales del granpotencial, resolviendo los dos conjuntos de ecuaciones lineales que resultan de tomar la primera y segunda derivadas totales a ambos lados de las ecuaciones del gap (4A.2). Haciendo esto se obtiene

$$\xi'_j = -(C^{-1})_{jk} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi_1 \partial \xi_k}, \quad (4A.5)$$

$$\xi''_j = -(C^{-1})_{jk} \left[\frac{\partial^3 \Omega}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_k} + 2 \frac{\partial^3 \Omega}{\partial \xi_1 \partial \xi_j \partial \xi_k} \xi'_k + \frac{\partial^3 \Omega}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \xi'_k \xi'_l \right], \quad (4A.6)$$

donde

$$C_{jk} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi_j \partial \xi_k}. \quad (4A.7)$$

De esta manera, una vez que se conoce la forma explícita del granpotencial Ω en términos de los parámetros variacionales, todas las derivadas que aparecen en el conjunto de ecuaciones (4A.1–4A.4) pueden ser determinadas analíticamente. Luego, la solución numérica de este set de ecuaciones permite determinar los valores de (T, μ) correspondientes al CEP, junto con los valores correspondientes de los parámetros variacionales $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$.

Volviendo al modelo en discusión en el presente capítulo, debemos notar que para las parametrizaciones B y C tenemos tres parámetros variacionales ($N=3$). Podemos

4.A. Apéndice: Determinación precisa del punto crítico final (CEP)

entonces elegir identificarlos como $\xi_1 = \bar{\sigma}_1$, $\xi_2 = \bar{\sigma}_2$ and $\xi_3 = \Phi$. Luego, el conjunto de cinco $(N+2)$ ecuaciones necesarias para determinar el CEP está formado por las Ecs. (4.43) complementadas las dos ecuaciones que resultan de hacer las identificaciones correspondientes en las Ecs. (4A.3–4A.7). En el caso de la parametrización A, la situación es de algún modo más simple, ya que hay sólo dos parámetros variationales ($\xi_1 = \bar{\sigma}_1$ y $\xi_2 = \Phi$) y, por lo tanto, se requieren solo cuatro ecuaciones para determinar el CEP.

Capítulo 5

Modelo no local de tres sabores a temperatura finita

“La naturaleza es grande en las cosas grandes, mas es grandísima en las cosas diminutas.”

Jacques-Henri B. de Saint Pierre (1737-1814) escritor francés.

5.1. Modelo no local con extrañeza a temperatura finita

El objetivo de esta parte de la investigación es ir un paso más allá de los análisis previos, estudiando el comportamiento de modelos quirales no locales que incluyan grados de libertad de extrañeza y además tengan en cuenta el efecto del acoplamiento de los quarks con el loop de Polyakov.

Trabajaremos aquí con el modelo de quarks no local de tres sabores de quarks, descrito en la sección 3.3, pero incluyendo ahora el acoplamiento al loop de Polyakov. La acción efectiva correspondiente surge de reemplazar la derivada que aparece en el primer término de la ecuación (3.45) por una derivada covariante, y agregar un

término de potencial para el campo gluónico.

Tal como en el caso de dos sabores, asumimos que los quarks se mueven dentro de un campo de gauge de color $\phi = iA_0 = ig \delta_{\mu 0} G_a^\mu \lambda^a / 2$, donde G_a^μ son los campos de gauge de color SU(3). Luego, la traza del loop de Polyakov, la cual, como hemos mencionado en el capítulo anterior, se puede tomar como un parámetro de orden del confinamiento, está dada por $\Phi = \frac{1}{3} \text{Tr} \exp(i\phi)$. En lo siguiente además trabajaremos en el conocido gauge de Polyakov, en el cual la matriz ϕ está dada en una representación diagonal $\phi = \phi^3 \lambda^3 + \phi^8 \lambda^8$, que deja solo dos variables independientes, ϕ^3 y ϕ^8 .

A continuación consideraremos el potencial termodinámico gran canónico del modelo dentro de la aproximación de campo medio. Usando el formalismo de Matsubara estándar para incluir la temperatura finita en el modelo, se obtiene

$$\begin{aligned} \Omega^{\text{ACM}}(T) = & -2 \sum_{f,c} \int_{p,n} \ln [\omega_{nc}^2 + M_f^2(\omega_{nc}^2)] \\ & - \frac{1}{2} \left[\sum_f (\bar{\sigma}_f \bar{S}_f + \frac{G}{2} \bar{S}_f^2) + \frac{H}{2} \bar{S}_u \bar{S}_d \bar{S}_s \right] + \mathcal{U}(\Phi, T), \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde $f = (u, d, s)$, $c = (r, g, b)$, y se ha utilizado la definición $\omega_{nc}^2 = (\omega_n - \phi_c)^2 + \vec{p}^2$, siendo $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ las frecuencias de Matsubara usuales. Recordamos que

$$\int_{p,n} = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3}. \quad (5.2)$$

Las cantidades ϕ_c están definidas por la relación $\phi = \text{diag}(\phi_r, \phi_g, \phi_b)$. Las masas constituyentes de los quarks M_f son aquí momento-dependientes, y están dadas por

$$M_f(\omega_{nc}^2) = m_f + \bar{\sigma}_f g(\omega_{nc}^2). \quad (5.3)$$

Dentro de la aproximación de fase estacionaria, los valores de campo medio de los campos auxiliares $\bar{S}_f$ están relacionados con los valores de campo medio de los campos escalares $\bar{\sigma}_f$ por las ecuaciones del gap, idénticas a las obtenidas en la sección 3.3

$$\bar{\sigma}_u + G \bar{S}_u + \frac{H}{2} \bar{S}_u \bar{S}_s = 0, \quad \bar{\sigma}_s + G \bar{S}_s + \frac{H}{2} \bar{S}_u^2 = 0, \quad (5.4)$$

solo que para el caso de temperatura finita, los campos auxiliares $\bar{S}_f$, están dados por

$$\bar{S}_f = -8 \sum_c \int_{p,n} g(\omega_{nc}^2) \frac{M_f(\omega_{nc}^2)}{\omega_{nc}^2 + M_f^2(\omega_{nc}^2)} \quad (5.5)$$

El potencial efectivo $\mathcal{U}(\Phi, T)$, el cual tiene en cuenta la dinámica para el loop de Polyakov, se puede ajustar teniendo en cuenta las restricciones que impone la teoría de grupos junto con los resultados de la QCD en la red, a partir de la cual se puede estimar la dependencia con la temperatura. Siguiendo como en los casos anteriores la ref. ^[68] tomamos

$$\mathcal{U}(\Phi, T) = \left[-\frac{1}{2} a(T) \Phi^2 + b(T) \ln(1 - 6\Phi^2 + 8\Phi^3 - 3\Phi^4) \right] T^4, \quad (5.6)$$

con las definiciones correspondientes para $a(T)$ y $b(T)$. Debido a las propiedades de conjugación de carga del lagrangiano de QCD ^[67], se espera que el valor de campo medio del loop de Polyakov Φ sea una cantidad real. Asumiendo que ϕ^3 y ϕ^8 son campos reales ^[68], esto implica que $\phi^8 = 0$, $\bar{\Phi} = [2 \cos(\phi^3/T) + 1]/3$.

Para masas de quarks corrientes la contribución de quarks a $\Omega_{\text{MFA}}(T)$ resulta ser divergente. Para regularizarla seguiremos la misma prescripción que en el capítulo anterior, dada en la ref. ^[75]. Esta consiste en sustraer de $\Omega_{\text{MFA}}(T)$ la contribución de quarks en ausencia de interacciones fermiónicas, y luego sumarla en forma regularizada, esto es, luego de la sustracción de una contribución infinita T -independiente. De la minimización de este potencial termodinámico regularizado, es posible ahora obtener un conjunto de tres ecuaciones del “gap” acopladas, que determinan los valores de campo medio $\bar{\sigma}_u$, $\bar{\sigma}_s$ y ϕ^3 a una temperatura dada.

5.1.1. Condensado de quarks

Una vez que tenemos el potencial termodinámico, podemos fácilmente derivar las expresiones de otras cantidades de interés para estudiar las características de la transición de fases quiral. Una de ellas es el condensado de quarks $\langle \bar{q}_f q_f \rangle$, que es el valor de expectación del vacío para cada sabor de quark $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$ o $\langle \bar{s}s \rangle$.

Vimos que a temperatura y potencial químico nulos, el condensado está definido por

$$\langle \bar{q}_f q_f \rangle = \frac{\partial \Omega^{ACM}}{\partial m_f}. \quad (5.7)$$

Luego, la expresión explícita regularizada para un condensado de quarks $\langle \bar{q}_f q_f \rangle$ resulta

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}_f q_f \rangle = & -\frac{2T}{\pi^2} \sum_c \int dp p^2 \left\{ -T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{M_f(\omega_{nc}^2)}{\omega_{nc}^2 + M_f^2(\omega_{nc}^2)} - \frac{m_f}{\omega_{nc}^2 + m_f^2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{m_f}{E_f} (n_{fc}^+ + n_{fc}^-) \right\}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde $n_{fc}^{\pm} = \{1 + \exp[(E_f \pm i\phi_c)/T]\}^{-1}$, con $E_f = \sqrt{\vec{p}^2 + m_f^2}$.

5.1.2. Análisis de las transiciones de fase

En lo que sigue analizaremos la transición de fase quiral para un factor de forma gaussiano, teniendo en cuenta la dependencia con la temperatura de las masas efectivas, los condensados quirales y las susceptibilidades. Este factor de forma Gaussiano es el propuesto anteriormente

$$g(q^2) = \exp(-q^2/\Lambda^2), \quad (5.9)$$

donde Λ es un parámetro libre del modelo que juega el papel de cut-off ultravioleta en el espacio de momentos. Este parámetro, al igual que las masas corrientes de quarks y los acoplamientos en Ec. (3.45), pueden ser elegidos de tal manera que reproduzcan los valores empíricos de las propiedades de mesones a $T = 0$. En lo que sigue utilizaremos uno de los sets de parámetros listados en la tabla 3.3, es decir

$$\bar{m} = 5,0 \text{ MeV}, \quad m_s = 119,2 \text{ MeV}, \quad \Lambda = 842,9 \text{ MeV}, \quad (5.10)$$

$$G\Lambda^2 = 13,3, \quad H\Lambda^5 = -273,7.$$

Los resultados numéricos correspondientes son los dados en la Figura 5.1, donde se muestra el comportamiento de varias magnitudes físicas como función de la temperatura, dentro del modelo SU(3) no local descrito. Los paneles de la izquierda

(derecha) corresponden al modelo en ausencia (presencia) del acoplamiento al loop de Polyakov. En los paneles superiores se muestran el comportamiento de los valores de campo medio $\bar{\sigma}_u$ y $\bar{\sigma}_s$ (líneas sólidas y de puntos respectivamente).

Para realizar la comparación, las curvas están normalizadas a sus valores respectivos a $T = 0$, los cuales son $\bar{\sigma}_u^0 = 366,5$ MeV y $\bar{\sigma}_s^0 = 486,2$ MeV (notar que a $T = 0$ no hay efecto del loop de Polyakov). Se nota claramente que en ambos casos la restauración quiral SU(2) se produce mediante un *crossover* suave, mientras que hay un aumento del orden de 70 MeV en el valor correspondiente de la temperatura crítica cuando se tienen en cuenta los efectos del loop de Polyakov. Con la intención de definir correctamente los valores de estas temperaturas críticas, hemos considerado la susceptibilidad quiral χ_q , definida como

$$\chi_q = \left(\frac{\partial \langle \bar{q}_f q_f \rangle}{\partial m_f} \right)_{T=cte} \quad (5.11)$$

La temperatura de transición de fase puede ser definida como el punto donde la susceptibilidad muestra un pico, cuyo ancho sirve como medida de lo abrupta que es la transición ^[75]. Las curvas que muestran el comportamiento de las susceptibilidades para este modelo SU(3) no local están dibujadas en los paneles centrales de la Figura 5.1. Como mencionamos anteriormente, se observa que la inclusión del loop de Polyakov produce a un aumento en la temperatura crítica, lo cual los lleva a un mejor acuerdo con la mayoría de los valores obtenidos con QCD en la red recientemente $T_{cr}^{0(Lat)} = 160 - 200$ MeV ^[79]. Nuestros resultados son (ver líneas sólidas en los paneles centrales de la Figura 5.1)

$$\text{modelo no local SU(3) sin loop de Polyakov : } T_{cr}^0 = 131 \text{ MeV}$$

$$\text{modelo no local SU(3) incluyendo el loop de Polyakov : } T_{cr}^0 = 202 \text{ MeV}$$

Además, se ve que luego de la inclusión del loop de Polyakov el pico se hace más pronunciado. La restauración de la simetría quiral SU(2) también puede ser observada al mirar el comportamiento de los condensados quirales con la temperatura, los cuales se muestran en los paneles inferiores de la Figura 5.1. A $T = 0$ encontramos que $\langle \bar{u}u \rangle^{1/3} = -252,1$ MeV y $\langle \bar{s}s \rangle^{1/3} = -249,7$ MeV.

5.1. Modelo no local con extrañeza a temperatura finita

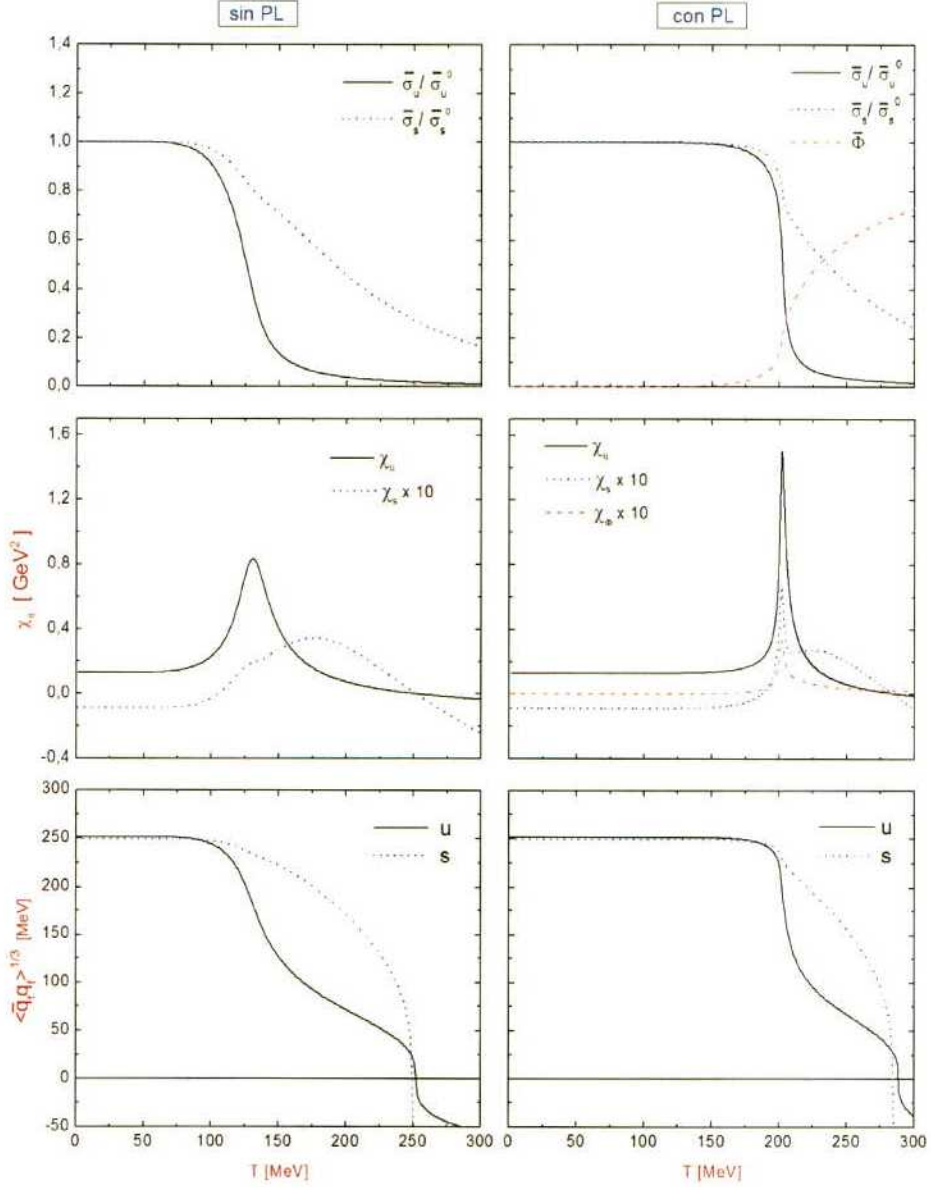


Figura 5.1: Comportamiento de varias magnitudes físicas respecto de la temperatura. Los paneles de la izquierda (derecha) corresponden al modelo en ausencia (presencia) del acoplamiento al loop de Polyakov. Los paneles superiores muestran el comportamiento de los valores de campo medio $\bar{\sigma}_q$ (normalizados a sus valores a $T = 0$) y el loop de Polyakov, los paneles centrales muestran el comportamiento de las susceptibilidades χ_q y χ_Φ , mientras que los inferiores hacen lo propio con condensados quirales.

Como es de esperar, la restauración de la simetría quiral $SU(3)$ es mucho menos pronunciada, debido a la mayor masa del quark s . De hecho, tanto en la ausencia como en la presencia del loop de Polyakov se observa un pico suave en la correspondiente susceptibilidad quiral χ_s . Esto se muestra en la curva de línea de puntos en el panel central de la Figura 5.1, donde los valores de χ_s han sido normalizados por un factor de 10, para ser comparables con los valores correspondientes de χ_u . Los picos correspondientes a χ_s se hallan ubicados alrededor de 176 MeV para el modelo sin PL y 225 MeV para el caso con el PL. Es interesante notar que debido a los efectos de la mezcla de sabores se puede observar en los condensados quirales livianos $\langle \bar{u}u \rangle$, una segunda protuberancia a esas temperaturas. Además, debido a la mezcla de sabores, se puede observar alguna señal de la restauración quiral $SU(2)$ en el comportamiento de χ_s : para el modelo sin PL se aprecia un hombro alrededor de $T = 130$ MeV (apenas perceptible por el tamaño de la figura), mientras que para el modelo con PL se observa un pico pronunciado alrededor de $T = 200$ MeV. Finalmente, también es importante analizar el comportamiento de los valores de campo medio del campo del loop de Polyakov $\bar{\Phi}$. Como dijimos, el último puede ser interpretado con un parámetro de orden de la transición de deconfinamiento, siendo $\bar{\Phi} = 0$ y $\bar{\Phi} = 1$ los valores respectivos para la fase de quarks confinados y deconfinados respectivamente. Asimismo, una susceptibilidad asociada al PL se puede definir como $\chi_\Phi = d\bar{\Phi}/dT$. En la teoría no local $SU(3)$ bajo consideración, el comportamiento de $\bar{\Phi}$ y χ_Φ con la temperatura, está dado por la curva de trazos en los paneles superior y central derecho de la Figura 5.1 respectivamente. Comparando con el comportamiento del valor de campo medio $\bar{\sigma}_u$, se puede ver que, aún cuando la transición de deconfinamiento es más suave que la restauración quiral $SU(2)$, se encuentra que ambas transiciones ocurren en la misma región de temperatura, ubicada alrededor de $T = 200$ MeV.

El análisis presentado arriba corresponde al caso específico de un modelo no local $SU(3)$ covariante, en el cual hemos considerado una interacción separable de cuatro fermiones. Tal interpretación está motivada en el modelo de intercambio de un gluón,

tal como discutió en el capítulo 3. Con el fin de determinar el rango de validez de las conclusiones del anterior análisis, se consideraron también los diferentes sets de parámetros mostrados en la tabla 3.3. Además se compararon los resultados obtenidos usando los parámetros propuestos en la ref.^[39], basado en el modelo de líquido de instantones^[7,80], con la correspondiente extensión a temperatura finita^[81]. Se observó que en todos los casos, los resultados son cualitativamente similares a lo expuesto en el anterior análisis.

5.2. Propiedades de mesones a T finita

Siguiendo con el desarrollo del modelo anteriormente descrito, resulta de gran interés estudiar cómo las propiedades de los mesones (masas, ángulos de mezcla, constantes de acoplamiento y de decaimiento, etcétera) se modifican cuando los mismos se propagan en un medio caliente. En particular, dado que el origen de los mesones escalares y pseudo-escalares livianos está relacionado al fenómeno de la ruptura de la simetría quiral, el comportamiento respecto de la temperatura de sus propiedades se espera que provean información relevante acerca de una posible restauración de la simetría quiral. Dada la complicación que representa la inclusión de la extrañeza en el modelo, en este estudio abordaremos solo el problema de la dependencia con la temperatura. Es decir que analizaremos las transiciones de fase con potencial químico nulo y, por lo tanto, todas las transiciones que estudiaremos en esta sección serán de tipo *crossover*.

5.2.1. Masas de mesones escalares y pseudoescalares

Para obtener el espectro de masas y otras propiedades, se deben considerar, al igual que en el caso de $T = 0$, las fluctuaciones mesónicas alrededor de los campos medios. Luego, siguiendo un procedimiento similar al detallado en la sección 3.4.1.

Se obtiene que, a temperatura finita la contribución de los mesones pseudoesca-

lares a S_E^{quad} se escriben como

$$\begin{aligned}
 S_E^{\text{quad}} \Big|_P = & \frac{1}{2} \int_{q,n} \left\{ G_\pi(\vec{q}^2, \nu_n^2) [\pi^0(q_n) \pi^0(-q_n) + 2 \pi^+(q_n) \pi^-(-q_n)] \right. \\
 & + G_K(\vec{q}^2, \nu_n^2) [2 K^0(q_n) \bar{K}^0(-q_n) + 2 K^+(q_n) K^-(-q_n)] \\
 & \left. + G_\eta(\vec{q}^2, \nu_n^2) \eta(q_n) \eta(-q_n) + G_{\eta'}(\vec{q}^2, \nu_n^2) \eta'(q_n) \eta'(-q_n) \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

con $q_n = (\vec{q}, \nu_n)$, siendo $\nu_n = 2n\pi T$ las frecuencias (bosónicas) de Matsubara correspondientes. Las funciones $G_P(\vec{q}^2, \nu_n^2)$ introducidas en Eq. (5.12) están dados por

$$G_\pi(\vec{q}^2, \nu_n^2) = \left[\left(G + \frac{H}{2} \bar{S}_s \right)^{-1} + C_{uu}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2) \right] \tag{5.13}$$

$$G_K(\vec{q}^2, \nu_n^2) = \left[\left(G + \frac{H}{2} \bar{S}_u \right)^{-1} + C_{us}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2) \right] \tag{5.14}$$

$$G_\eta(\vec{q}^2, \nu_n^2) = \frac{G_{88}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2) + G_{00}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2)}{2} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sqrt{[G_{08}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2)]^2 + \left[\frac{G_{88}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2) - G_{00}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2)}{2} \right]^2} \\
 G_{\eta'}(\vec{q}^2, \nu_n^2) = & \frac{G_{88}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2) + G_{00}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2)}{2} \\
 & + \sqrt{[G_{08}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2)]^2 + \left[\frac{G_{88}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2) - G_{00}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2)}{2} \right]^2},
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

donde,

$$\begin{aligned}
 G_{88}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2) &= \frac{1}{3} \left[\frac{6G - 4H\bar{S}_u - 2H\bar{S}_s}{2G^2 - GH\bar{S}_s - H^2\bar{S}_u^2} + C_{uu}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2) + 2 C_{ss}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2) \right] \\
 G_{08}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2) &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[\frac{H(\bar{S}_s - \bar{S}_u)}{2G^2 - GH\bar{S}_s - H^2\bar{S}_u^2} + C_{uu}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2) - C_{ss}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2) \right] \\
 G_{00}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2) &= \frac{1}{3} \left[\frac{6G + 4H\bar{S}_u - H\bar{S}_s}{2G^2 - GH\bar{S}_s - H^2\bar{S}_u^2} + 2 C_{uu}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2) + C_{ss}^-(\vec{q}^2, \nu_n^2) \right].
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

y

$$C_{ij}^{\pm}(\vec{q}^2, \nu_n^2) = -8 \sum_c \int_{p,n} g(p_{nc} + q_n/2) \quad (5.18)$$

$$\frac{p_{nc}^2 + p_{nc} \cdot q_n \mp M_i(p_{nc} + q_n)M_j(p_{nc})}{D_i(p_{nc} + q_n)D_j(p_{nc})},$$

$$r_{ij,kl}^{\pm} = G \delta_{il} \delta_{jk} \pm \frac{H}{2} \epsilon_{ikh} \epsilon_{jlh} \bar{S}_h. \quad (5.19)$$

En Eq. (5.19) hemos definido $D_j(s) \equiv s^2 + M_j^2(s)$, donde $j = 1, 2, 3$ corresponde a $f = u, d, s$ en la notación de la Eq. (5.3).

Luego, las masas de los mesones se obtienen al igual que en el caso $T = 0$, mediante la resolución de las ecuaciones

$$G_P(-m_P^2, 0) = 0, \quad (5.20)$$

con $P = \pi, K, \eta$ y η' . Los valores de las masas determinados por estas ecuaciones corresponden a las masas “espaciales” (también conocidas como *screening masses*) de los modos de Matsubara de orden cero, y sus inversas describen las longitudes de persistencia de dichos modos en el equilibrio con el medio caliente. El propagador obtenido de esta manera es definido sólo sobre un conjunto discreto de puntos a lo largo de lo que podría llamarse el eje imaginario de energías. Por otro lado, las masas “polares”, esto es, las masas que producen los polos de energía de estados ligados para $\vec{q} \sim 0$, se obtienen solo luego de una continuación analítica del propagador sobre el eje real de la energía. El hecho que para $T > 0$ la invarianza de Lorentz esté rota significa que, en general, las masas polares y las masas espaciales no son iguales (ver por ejemplo ref. [82]). A pesar que la continuación analítica involucrada en este proceso no es única, se obtiene un resultado no ambiguo al requerir que éste produzca una función que sea acotada en el infinito complejo y analítica fuera del eje real^[64]. A partir de esta descripción resulta que las masas espaciales proveen información relevante de las propiedades de los estados ligados a $T > 0$. Las masas asociadas a los modos cero de Matsubara estudiadas aquí son las masas espaciales correspondientes al comportamiento $e^{-m_P r}$ en la coordenada r del 3-espacio conjugado del estado

más bajo en cada canal mesónico. De hecho, estas son las cantidades usualmente estudiadas en los cálculos de QCD en la red ^[83].

En lo que sigue, al igual que en la sección anterior, usaremos el set de parámetros para $m_u = 5$ MeV de la tabla 3.3. Debe puntualizarse, sin embargo, que para el resto de los sets allí listados se obtienen resultados similares a los discutidos a continuación.

Como dijimos anteriormente, las masas de los mesones pseudoescalares pueden ser determinadas resolviendo las ecuaciones (5.20), mientras que para las masas del sector escalar se aplica el mismo procedimiento pero reemplazando los índices superiores “−” por “+” y cambiando $(\pi \rightarrow a_0)$, $(\eta \rightarrow \sigma)$, $(K \rightarrow \kappa)$ y $(\eta' \rightarrow f_0)$ en las ecuaciones (5.13-5.17). Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 5.2, donde se representan los valores de las masas mesónicas como función de la temperatura. En la Figura 5.2 (a) se muestra el comportamiento de los mesones pseudoescalares π y η , junto con las curvas para los mesones escalares σ y a_0 que son pares quirales de los primeros. Se observa que los mesones pseudoescalares permanecen aproximadamente constantes hasta la temperatura crítica (lo cual es razonable, ya que están protegidos de la simetría quiral), mientras que las masas de los mesones escalares comienzan a caer alrededor de $T = 150$ MeV.

Por encima de $T = T_c$ las masas pseudoescalares se incrementan de tal manera que se vuelven degeneradas con las masas de sus compañeros quirales. En particular, el hecho que esto ocurra justo después de la transición en el caso del par (η, a_0) indica que el contenido de extrañeza de los mesones η y a_0 ha sido suprimido. Cuando la temperatura se incrementa aún más, todas las masas crecen continuamente, mostrando que las masas son ahora basicamente dominadas por la energía térmica. A temperaturas muy altas, las curvas deberían aproximarse asintóticamente al valor correspondiente al par $q\bar{q}$ de quarks sin masa no correlacionados $m_M^{\text{nc}} = 2\pi T$ ^[84]. A $T \approx 300$ MeV sin embargo, el loop de Polyakov aún no ha alcanzado su valor asintótico $\phi_3/T|_{T \rightarrow \infty} = 0$, y aún provee una corrección no despreciable a las masas espaciales de los quarks. De hecho, encontramos que $\phi_3/T|_{T=300} \simeq 0,93$. Así, alrede-

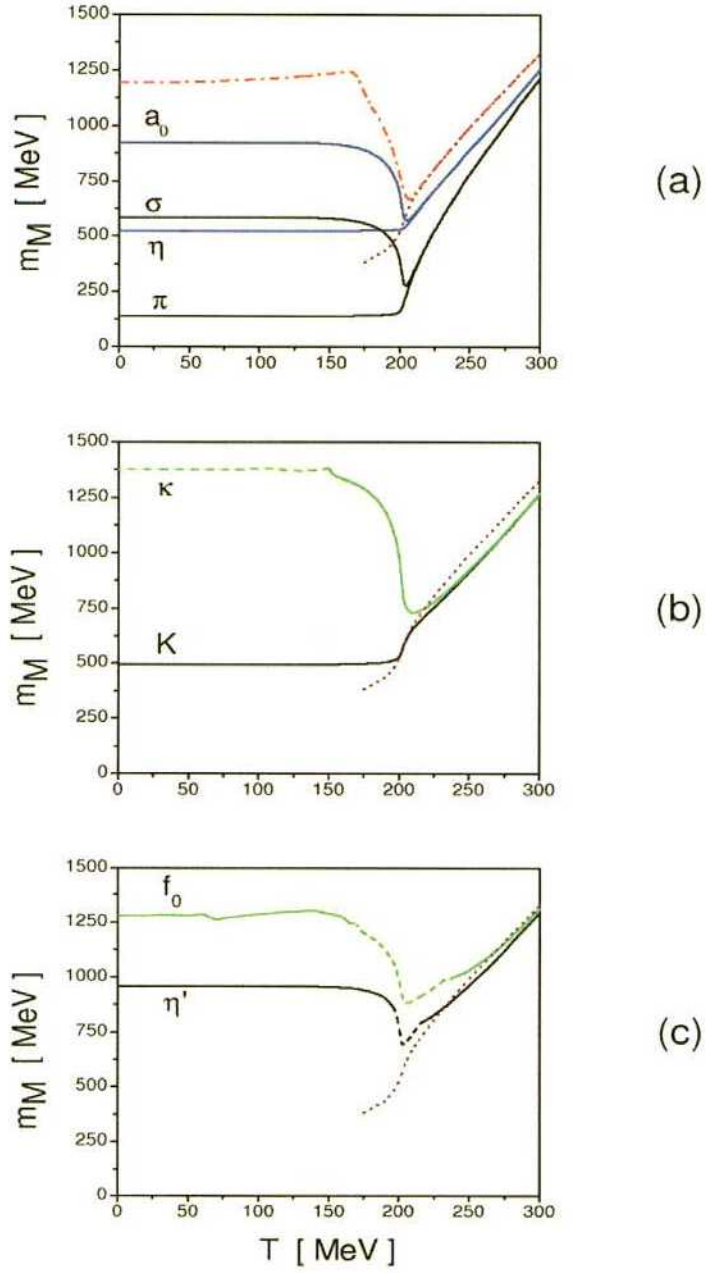


Figura 5.2: Las líneas sólidas representan las masas de mesones escalares y pseudoescalares como función de la temperatura. Las líneas punteadas y de trazo-punto muestran los valores asintóticos $m_M^{uq} = 2(\pi T - \phi_3)$ y las cotas para la producción $\bar{q}q$, respectivamente (ver texto).

5.2. Propiedades de mesones a T finita

dor de esta temperatura, se espera que $m_M^{\text{nc}} = 2(\pi T - \phi_3)$, lo cual es mostrado por las líneas punteadas en las Figura 5.2 (a), (b) y (c). Para masas de quarks dinámicas nulas, este valor de m_M corresponde a un polo en el modo $n = 0$ para las integrales en las funciones $C_{ii}^\pm(-k^2, 0)$, cuya expresión está dada por la ecuación (5.19). De hecho, tal como fuera discutido en la ref. [87], las ecuaciones (5.20) sólo pueden ser satisfechas en la vecindad de esos polos. Por otro lado, en general se observa que las funciones $C_{ij}^\pm(-k^2, 0)$ (y por ende también las funciones $G_M(-k^2, 0)$) están bien definidas para valores bajos de k . Si k se incrementa hasta algún valor crítico k_{crit} , usualmente llamado “punto de pinchadura”, las integrales deben ser tratadas convenientemente para evitar divergencias. En este trabajo, hemos seguido la prescripción descrita en el Apéndice 5.A, donde se explica el formalismo para tratar los polos del propagador para el caso de temperatura finita. El punto de pinchadura ocurre cuando, ambos quarks efectivos están simultáneamente sobre la capa de masas. Por lo tanto, esto puede ser interpretado como una cota, por encima de la cual los mesones podrían decaer en dos quarks masivos. En la Figura 5.2 (a) esta cota está representada con la curva de trazos y puntos (por encima de T_c , esta aproximadamente coincide con el valor de m_M^{nc} mencionado previamente). Se puede observar que todas las masas graficadas en la Figura 5.2 (a) permanecen por debajo de la cota, para el rango de temperatura considerado.

En la Figura 5.2 (b) se representan las curvas para a las masas del mesón pseudoescalar K y su compañero escalar κ . Se observa que para cierto rango de temperatura, la ecuación $G_\kappa(-k^2, 0) = 0$ no tiene solución para k real, de forma que la masa está definida (dentro de este rango) como el mínimo de la función $G_\kappa(-k^2, 0)$. Estos valores de masas corresponden a los parte de trazos de la curva correspondiente. Es importante notar que las masas de los mesones K y κ coinciden sólo a partir de $T \simeq 225$ MeV, esto es, a una temperatura algo mayor que T_c . Esto es claramente una consecuencia de la mayor masa corriente del quark s , la cual se espera que mueva la restauración quiral de $\text{SU}(3)$ a temperaturas más altas.

Finalmente, en la Figura 5.2 (c), se muestra la dependencia con la temperatura de

las masas de los mesones f_0 y η' . Al igual que antes, las líneas de trazos en las curvas indican las regiones en las cuales la correspondiente función $G_M(-k^2, 0)$ no tiene ceros para k real y, de manera que, las masas m_M están definidas por la posición de sus mínimos. Enfoquémonos primero en el comportamiento de la masa del mesón η' . En contraste con los resultados obtenidos en la ref.^[86], donde la correspondiente dependencia con la temperatura ha sido estudiada en el marco de una aproximación de Dyson-Schwinger, nosotros no hemos observado ningún tipo de incremento de $m_{\eta'}$ alrededor de T_c . Debería notarse que en el marco de la ref.^[87] el efecto de la anomalía $U(1)_A$ se ha modelado de una forma más simple. En ese sentido, nuestro resultado es consistente con el análisis de las masas polares de η' , obtenidas dentro del modelo PNJL local, donde tampoco se encontró incremento alguno de $m_{\eta'}$ alrededor de T_c ^[87]. Con respecto a la degeneración de η' con su compañero quiral f_0 , esta es alcanzada sólo a $T \simeq 300$ MeV. Esta es una consecuencia del contenido de extrañeza de estos mesones, la cual, como veremos luego, se incrementa al aumentar la temperatura.

5.2.2. Ángulos de mezcla, constantes de acoplamiento y de decaimiento, y susceptibilidad topológica

En el sistema $\eta - \eta'$, una vez que las masas de los mesones han sido determinadas, se pueden encontrar los ángulos de mezcla θ_η y $\theta_{\eta'}$, los cuales en general son diferentes entre sí. Están dados por

$$\tan 2\theta_P = \frac{2G_{08}^-(m_P^2, 0)}{G_{00}^-(m_P^2, 0) - G_{88}^-(m_P^2, 0)} \quad , \quad P = \eta, \eta' \quad . \quad (5.21)$$

Los campos mesónicos han sido renormalizados, tal que los residuos de los propagadores correspondientes en los polos de los mesones están fijados iguales a uno. La correspondiente funciones de renormalización de la función de onda Z_P están dadas por

$$Z_P^{-1} = \left. \frac{dG_P(\vec{q}^2, 0)}{d\vec{q}^2} \right|_{\vec{q}^2 = -m_P^2} \quad , \quad (5.22)$$

con $P = \pi, K, \eta$ y η' .

5.2. Propiedades de mesones a T finita

Finalmente, las constantes de acoplamiento meson-quark G_{Pq} están dadas por los residuos originales de los propagadores de los mesones en los polos correspondientes,

$$G_{Pq} = Z_P^{1/2} . \quad (5.23)$$

En el caso de los mesones pseudoescalares, otras cantidades que resultan de interés son las correspondientes constantes de decaimiento débil f_{ab} , definidas por

$$\langle 0 | A_\mu^a(0) | \pi_b(q) \rangle = i f_{ab} q_\mu . \quad (5.24)$$

donde A_μ^a es la componente a de la corriente axial. Para $a, b = 1 \dots 7$, las constantes f_{ab} pueden ser escritas como $\delta_{ab} f_P$, con $P = \pi$ para $a = 1, 2, 3$ y $P = K$ para $a = 4$ a 7. Siguiendo el mismo procedimiento que en la sección 3.4.2 se encuentra que, a temperatura finita, las constantes de decaimiento del pión y el kaón están dadas por

$$f_\pi = 4 f_{uu}(-m_\pi^2, 0) Z_\pi^{1/2} , \quad (5.25)$$

$$f_K = 2 [f_{us}(-m_K^2, 0) + f_{su}(-m_K^2, 0)] Z_K^{1/2} , \quad (5.26)$$

donde

$$\begin{aligned} f_{ij}(\vec{q}^2, \nu_n) = & \sum_c \int_{p,n} \left\{ g \left(p_{nc} + \frac{q_n}{2} \right) \frac{p_{nc} \cdot q_n M_i(p_{nc} + q_n) - (p_{nc} \cdot q_n + p_{nc}^2) M_j(p_{nc})}{D_i(p_{nc} + q_n) D_j(p_{nc})} \right. \\ & - \left[2 g \left(p_{nc} + \frac{q_n}{2} \right) - g(p_{nc}) - g(p_{nc} + q_n) \right] \frac{M_i(p_{nc} + \frac{q_n}{2})}{D_i(p_{nc} + \frac{q_n}{2})} \\ & + g \left(p_{nc} + \frac{q_n}{2} \right) \left[M_i \left(p_{nc} + \frac{q_n}{2} \right) + M_j \left(p_{nc} + \frac{q_n}{2} \right) - M_i(p_{nc}) \right. \\ & \left. \left. - M_j(p_{nc} + q_n) \right] \frac{p_{nc}^2 + p_{nc} \cdot q_n + M_i(p_{nc} + q_n) M_j(p_{nc})}{D_i(p_{nc} + q_n) D_j(p_{nc})} \right\} . \end{aligned} \quad (5.27)$$

Al igual que a $T = 0$, en el caso del sistema $\eta - \eta'$ se pueden definir dos constantes de decaimiento para cada componente ($a = 0$ o 8) de la corriente axial. Estas pueden ser definidas en términos de las constantes de decaimiento f_{ab} y los ángulos de mezcla $\theta_{\eta, \eta'}$, como

$$\begin{aligned} f_\eta^a &= [f_{a8}(-m_\eta^2, 0) \cos \theta_\eta - f_{a0}(-m_\eta^2, 0) \sin \theta_\eta] Z_\eta^{1/2} \\ f_{\eta'}^a &= [f_{a8}(-m_{\eta'}^2, 0) \sin \theta_{\eta'} + f_{a0}(-m_{\eta'}^2, 0) \cos \theta_{\eta'}] Z_{\eta'}^{1/2} . \end{aligned} \quad (5.28)$$

5.2. Propiedades de mesones a T finita

Dentro de nuestro modelo, las constantes de decaimiento f_{ab} para $a, b = 0, 8$ están relacionadas a las f_{ij} definidas en la ecuación (5.27) por

$$f_{88}(\vec{q}^2, \nu_n) = \frac{4}{3} [2f_{ss}(\vec{q}^2, \nu_n) + f_{uu}(\vec{q}^2, \nu_n)] \quad (5.29)$$

$$f_{00}(\vec{q}^2, \nu_n) = \frac{4}{3} [2f_{uu}(\vec{q}^2, \nu_n) + f_{ss}(\vec{q}^2, \nu_n)] \quad (5.30)$$

$$f_{08}(\vec{q}^2, \nu_n) = f_{80}(\vec{q}^2, \nu_n) = \frac{4\sqrt{2}}{3} [f_{uu}(\vec{q}^2, \nu_n) - f_{ss}(\vec{q}^2, \nu_n)] . \quad (5.31)$$

Como es de esperar, tanto las constantes de decaimiento no diagonales f_{08}, f_{80} , como los ángulos de mezcla $\theta_\eta, \theta_{\eta'}$, se cancelan en el límite de la simetría SU(3).

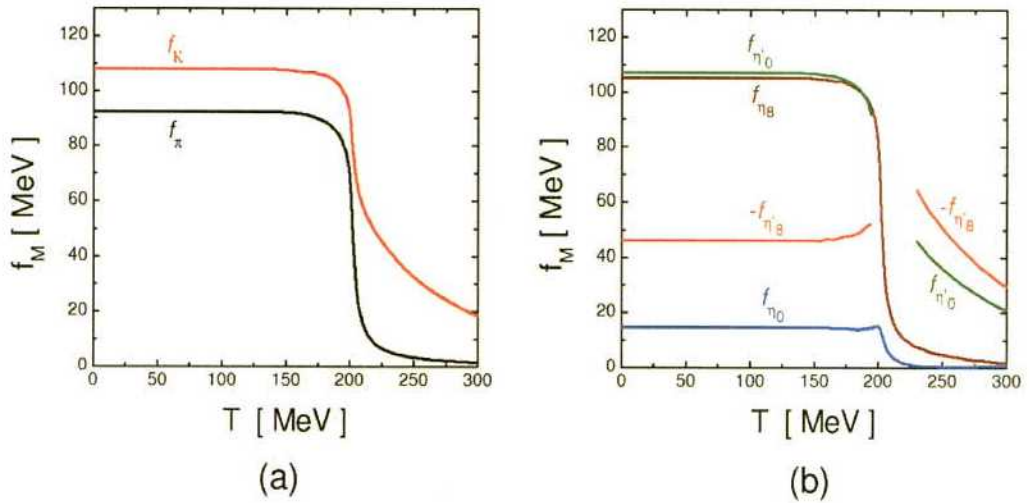


Figura 5.3: Comportamiento de las constantes de decaimiento de los mesones pseudoscalares como función de la temperatura.

En la Figura 5.3 se puede observar el comportamiento de las constantes de decaimiento de los mesones pseudoscalares, calculadas a partir de las ecuaciones (5.25), (5.26) y (5.28). La Figura 5.3 (a) muestra las curvas correspondientes a las constantes de decaimiento f_π y f_K . Se observa que ambas constantes caen en la temperatura de transición de fase. Vemos sin embargo que, debido al contenido de extrañeza del kaón, la constante de decaimiento correspondiente muestra un decrecimiento más lento luego de la transición. El comportamiento de las constantes de decaimiento

5.2. Propiedades de mesones a T finita

asociadas con el complejo $\eta - \eta'$ se muestra en la Figura 5.3 (b). En el caso de f_{η_0} y f_{η_8} , tal comportamiento es similar al de f_π , mientras que el decrecimiento luego de la transición es menos pronunciado para $f_{\eta'_{0,8}}$. De nuevo, este comportamiento de las constantes de decaimiento de η' puede ser entendido en términos de su mayor contenido de extrañeza. Aquí, se ha dejado en blanco el rango en el cual la masa del η' no está bien definida.

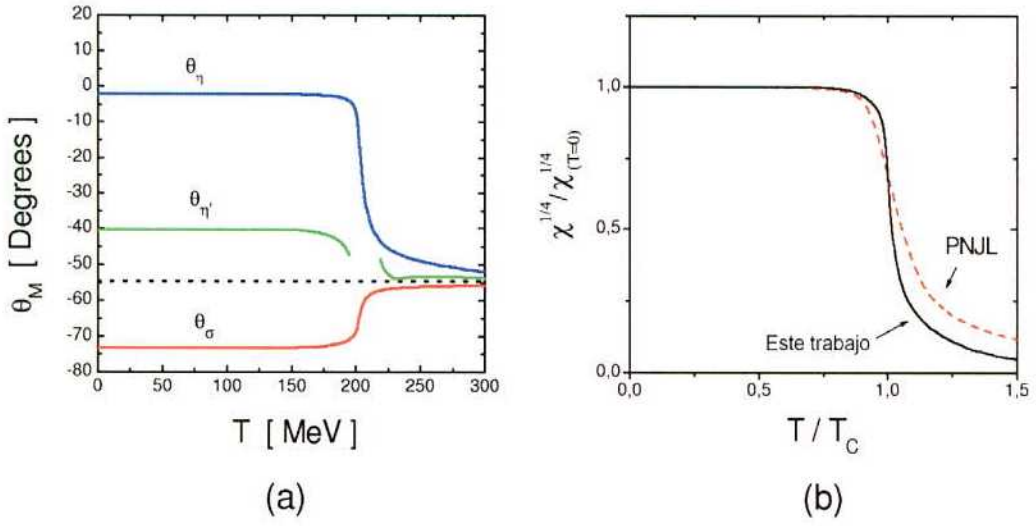


Figura 5.4: (a) Comportamiento de los ángulos de mezcla como función de la temperatura. La línea de trazo muestra el ángulo de mezcla “ideal” $\theta_{\text{ideal}} = \tan^{-1} \sqrt{2}$. (b) Comportamiento de la susceptibilidad topológica como función de la temperatura en el modelo no local (línea trazo-sólida) y en el modelo PNJL $SU(3)$ local (línea de trazos). La discontinuidad corresponde a la región en la cual $G_{\eta'}(-k^2, 0) = 0$ no tiene solución para k real.

En la Figura 5.4 (a) se muestra el comportamiento de los ángulos de mezcla θ_η y $\theta_{\eta'}$, los cuales pueden ser calculados a partir de la ecuación (5.21). Se observa que por encima de la transición de fase ambos ángulos tienden a un valor en común, lo cual es natural, dado que las masas de los mesones también tienden a unificarse. Más interesantemente, los ángulos de mezcla convergen al conocido ángulo de mezcla “ideal” $\theta_{\text{ideal}} = \tan^{-1} \sqrt{2} \simeq 54,7^\circ$ (en línea de puntos en la figura). Esto significa

5.2. Propiedades de mesones a T finita

que, como fue sugerido arriba, el mesón η se vuelve aproximadamente no extraño, mientras que η' se aproxima a un par $\bar{s}s$. Lo mismo sucede con el par $\sigma - f_0$ (en la figura se ha citado solamente θ_σ , ya que la masa del mesón f_0 yace por encima de la cota $\bar{q}q$). El hecho que los ángulos de mezcla vayan hacia el valor “ideal” para altas temperaturas implica que la anomalía $U(1)_A$ tiende a cancelarse en ese límite. Otra señal de este hecho es que los compañeros quirales axiales (π, η) y (σ, a_0) se vuelven casi degenerados a $T \simeq 300$ MeV. Sin embargo, quizás la mejor indicación de la cancelación de la anomalía $U(1)_A$ la provee la susceptibilidad topológica χ , la cual, en una teoría de color $SU(3)$ pura, está relacionada con las masas de η' , η y K a través de la fórmula de Witten-Veneziano

$$\frac{6}{f_\pi^2} \chi = m_{\eta'}^2 + m_\eta^2 - 2m_K^2. \quad (5.32)$$

Varios cálculos de QCD en la red^[88] muestran un decrecimiento abrupto de χ en la temperatura crítica. En nuestro marco, la susceptibilidad topológica puede ser calculada a partir de

$$\begin{aligned} \chi = -\frac{H^2}{8} & \left\{ 2 C_{uu}^- \bar{S}_u^2 \bar{S}_s^2 + C_{ss}^- \bar{S}_u^4 \right. \\ & - \frac{2}{3} \left[\frac{\bar{S}_u(\bar{S}_u + 2\bar{S}_s)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} C_{08}^- \\ C_{00}^- \end{pmatrix}^\dagger + \bar{S}_u(\bar{S}_s - \bar{S}_u) \begin{pmatrix} C_{88}^- \\ C_{80}^- \end{pmatrix}^\dagger \right] \\ & \cdot \mathcal{G}^{-1} \cdot \left. \left[\frac{\bar{S}_u(\bar{S}_u + 2\bar{S}_s)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} C_{08}^- \\ C_{00}^- \end{pmatrix} + \bar{S}_u(\bar{S}_s - \bar{S}_u) \begin{pmatrix} C_{88}^- \\ C_{80}^- \end{pmatrix} \right] \right\}, \quad (5.33) \end{aligned}$$

donde $\mathcal{G}$ es una matriz de 2×2 cuyos elementos de matriz están dados en la Ec. (5.17), y todas las funciones están evaluadas en $(\vec{q}^2, \nu_n^2) = (0, 0)$. Esta expresión ha sido obtenida siguiendo pasos similares a los descritos en la ref.^[89] para el caso del modelo NJL local. Los resultados numéricos se muestran en la Fig. 5.4(b). Para poder comparar con el resultado obtenido en el modelo PNJL en $SU(3)$ local^[87] (donde T_c resulta algo elevada), mostramos el valor normalizado de $\chi^{1/4}$ en función de T/T_c . Para ambos modelos se encuentra un decrecimiento abrupto en la susceptibilidad

5.2. Propiedades de mesones a T finita

topológica a la temperatura crítica, el cual es más pronunciado en el modelo no local. De hecho, a $T/T_c = 1,5$ la relación $\chi^{1/4}/\chi_{(T=0)}^{1/4}$ es de alrededor del 11 % para el modelo PNJL local, mientras que para el caso no local es casi de la mitad de dicho porcentaje. El valor de $\chi_{(T=0)}^{1/4}$ se encuentra cerca de 162 MeV en el modelo no local, mientras que en caso local se obtiene $\simeq 180$ MeV. Resultados recientes de QCD en la red (ver ref.^[90] y sus respectivas referencias) indican que $\chi_{(T=0)}^{1/4} \simeq 190$ MeV en teorías de gauge puras. Sin embargo, se espera que la presencia de los quarks dinámicos livianos tienda a disminuir este valor^[91]. Por ejemplo, el cálculos de QCD en la red llevados a cabo en la ref.^[92] los autores encuentran que $\chi_{(T=0)}^{1/4} \simeq 163$ MeV para un caso de dos sabores en la región donde las masas corrientes de los quarks están alrededor de 20 MeV.

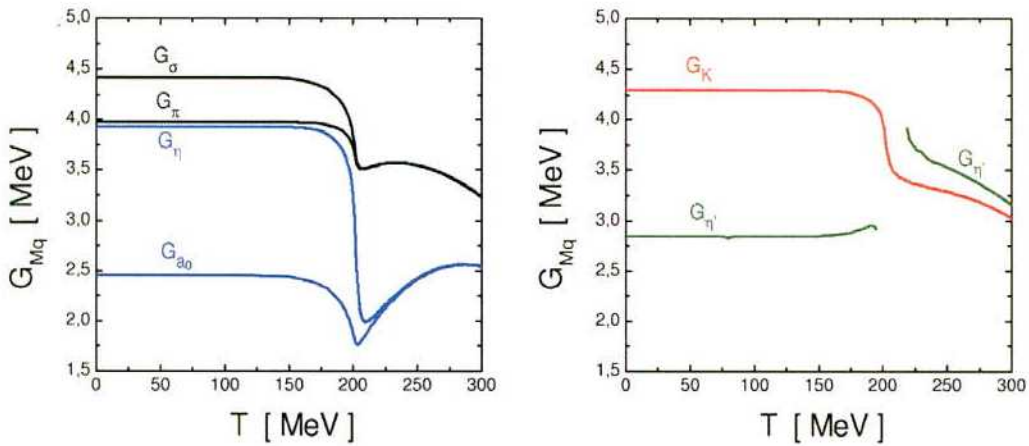


Figura 5.5: Comportamiento de las constantes de acoplamiento quark-mesón como función de la temperatura.

Por completitud, terminamos nuestra descripción mostrando en la Figura 5.5 el comportamiento de las constantes de acoplamiento quark-mesón G_{Mq} . Estas pueden ser calculadas a partir de las ecuaciones (5.22) y (5.23) para los mesones pseudoescalares, y relaciones similares se mantienen para el sector de mesones escalares con los cambios apropiados en las funciones $C_{ij}(\vec{q}^2, 0)$.

5.A. Apéndice: Tratamiento de los polos en los integrandos de las integrales con dos propagadores a $T \neq 0$

En el cálculo de diversas propiedades mesónicas aparecen integrales cuyo integrando contiene dos propagadores de quarks. La forma genérica de dichas integrales a $T \neq 0$ es

$$F(-\vec{p}^2) = T \sum_n F_n(-\vec{p}^2) \quad (5A.1)$$

con

$$F_n(-\vec{p}^2) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{t(\omega_n, \vec{p}^2, \vec{q}^2, \vec{p} \cdot \vec{q})}{(q_{n+}^2 + M_{n+}^2)(q_{n-}^2 + M_{n-}^2)} \quad (5A.2)$$

donde

$$M_{n\pm}^2 = M^2(p_{n\pm}^2) \quad ; \quad \omega_n = (2n+1)\pi T, \quad (5A.3)$$

y

$$q_{n\pm}^2 = (\omega_n - \phi)^2 + \vec{q}^2 - \frac{\vec{p}^2}{4} \pm i \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{2} \quad (5A.4)$$

Los problemas surgen cuando nos encontramos con alguno de los ceros del denominador. En los casos de interés del presente trabajo solamente tendremos esa situación cuando $n = 0$. Por lo tanto, en lo que sigue sólo consideraremos ese caso y dejaremos de lado el índice n . Luego tenemos

$$F_0(-\vec{p}^2) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{t(\omega_0, \vec{p}^2, \vec{q}^2, \vec{p} \cdot \vec{q})}{(q_+^2 + M_+^2)(q_-^2 + M_-^2)} \quad (5A.5)$$

con

$$q_{\pm}^2 = (\omega_0 - \phi)^2 + \vec{q}^2 - \frac{\vec{p}^2}{4} \pm i \vec{p} \cdot \vec{q}. \quad (5A.6)$$

Si fijamos la dirección de $\vec{p}$ en la dirección del eje z , y elegimos coordenadas cilíndricas, entonces

$$\vec{p} = p\hat{z} \quad ; \quad d^3\vec{q} = dq_\rho q_\rho dq_z dq_\varphi, \quad (5A.7)$$

con lo cual, la ecuación (5A.5) resulta

$$F_0(-\vec{p}^2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq_\rho q_\rho \int_{-\infty}^\infty dq_z \frac{t(\omega_0, p^2, q_\rho^2 + q_z^2, pq_z)}{D_+ D_-} \quad (5A.8)$$

5.A. Apéndice: Tratamiento de los polos en los integrandos de las integrales con dos propagadores a $T \neq 0$

donde $D_{\pm} = q_{\pm}^2 + M^2(q_{\pm}^2)$ y

$$q_{\pm}^2 = \gamma^2 + q_{\rho}^2 + q_z^2 - \frac{p^2}{4} \pm ipq_z \quad ; \quad \gamma = \omega_0 - \phi \quad (5A.9)$$

Finalmente, F_0 se puede escribir en la forma

$$F_0(-\vec{p}^2) = \int_0^{\infty} dq_{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{\mathcal{F}(p^2, q_{\rho}^2 + q_z^2, pq_z)}{D_+ D_-} \quad (5A.10)$$

con

$$\mathcal{F}(p^2, q_{\rho}^2 + q_z^2, pq_z) = \frac{q_{\rho}}{(2\pi)^2} t(\omega_0, p^2, q_{\rho}^2 + q_z^2, pq_z) \quad (5A.11)$$

Supongamos ahora que conocemos los zeros de $D(q^2) = q^2 + M^2(q^2)$. Por simplicidad, en lo que sigue consideraremos el caso de un solo par de polos imaginarios puros¹: $q_c = \pm iS_i$. Luego, el denominador de F_0 se anulará si

$$q_+ = q_+^c = \pm iS_i \quad \text{o} \quad q_- = q_-^c = \pm iS_j. \quad (5A.12)$$

donde $S_i = S_j$ sólo en el caso donde $m_i = m_j$.

Definiendo ahora

$$(q_{\pm}^c)^2 = \gamma^2 + (q_{\rho}^c)^2 + (q_z^c)^2 - \frac{p^2}{4} \pm ipq_z = -S_i^2, \quad (5A.13)$$

lo que implica que

$$(q_z^c)^2 \pm ipq_z^c + [\gamma^2 + (q_{\rho}^c)^2 + S_i^2 - \frac{p^2}{4}] = 0, \quad (5A.14)$$

cuyas soluciones resultan

$$\text{Ceros de } D_+ \begin{cases} q_z^c = -i[\sqrt{\gamma^2 + (q_{\rho}^c)^2 + S_i^2} + p/2] = (q_z^c)_1 \\ q_z^c = +i[\sqrt{\gamma^2 + (q_{\rho}^c)^2 + S_i^2} - p/2] = (q_z^c)_3 \end{cases} \quad (5A.15)$$

y

$$\text{Ceros de } D_- \begin{cases} q_z^c = +i[\sqrt{\gamma^2 + (q_{\rho}^c)^2 + S_j^2} + p/2] = (q_z^c)_4 \\ q_z^c = -i[\sqrt{\gamma^2 + (q_{\rho}^c)^2 + S_j^2} - p/2] = (q_z^c)_2 \end{cases} \quad (5A.16)$$

5.A. Apéndice: Tratamiento de los polos en los integrandos de las integrales con dos propagadores a $T \neq 0$

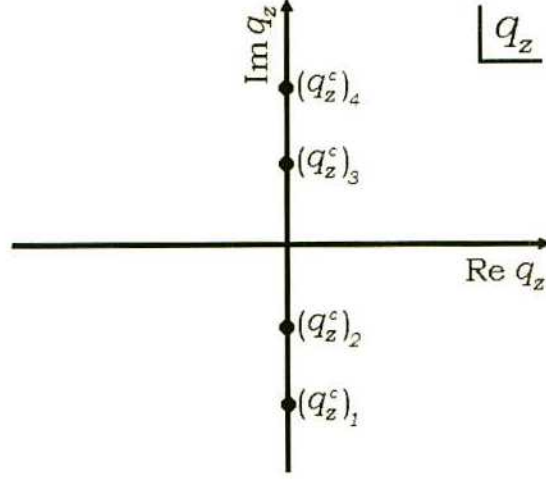


Figura 5.6: Ubicación esquemática de los polos de las funciones mesónicas en el plano complejo q_z .

Así, en el plano complejo q_z los ceros del denominador de F_0 se ubican según lo que se muestra esquemáticamente en la Fig.5.6.

Es claro que para $p < p^c = 2\sqrt{\gamma^2 + S_i^2 + (q_\rho^c)^2}$, los ceros de las D 's no cruzan el eje de integración $\text{Re } q_z$, por lo que no habrá divergencias en las integrales. Pero para $p > p^c = 2\sqrt{\gamma^2 + S_i^2 + (q_\rho^c)^2}$, habrá un valor de q_ρ (esto es, $q_\rho^p = \sqrt{p^2/4 - \gamma^2 - S_i^2}$) para el cual los ceros $(q_z^c)_3$ y $(q_z^c)_2$ se encontrarán en $q_z^p = 0$. Estos pares de valores, dados por

$$(q_\rho^p, q_z^p) = (\sqrt{p^2/4 - \gamma^2 - S_i^2}, 0), \quad (5A.17)$$

definen la posición de los “puntos de pinchadura” en el plano (q_ρ, q_z) .

Una vez determinados los “puntos de pinchadura”, podremos realizar la integral en forma habitual en la zona libre de divergencias y mediante la aplicación del teorema de Residuos alrededor del “punto de pinchadura”. Las distintas áreas de integración se esquematizan en la Fig.5.7.

¹Si bien es más engorrosa, la extensión a la situación en que existen muchos polos que no son necesariamente imaginarios puros es casi directa.

²Recordar que $M_{i,j}(q^2) = m_{i,j} + \sigma_{i,j} \exp(-q^2/\Lambda^2)$.

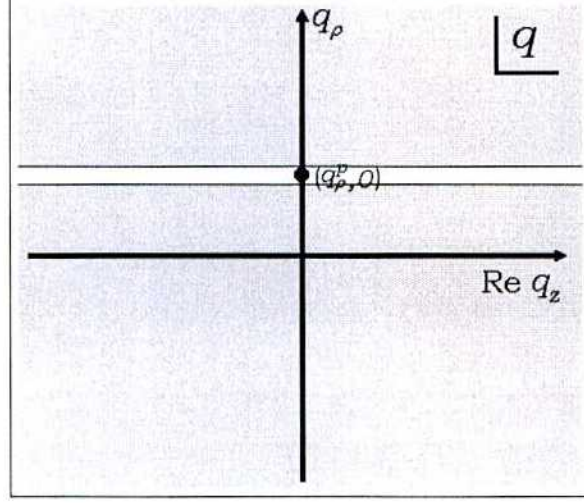


Figura 5.7: Esquema de las áreas de integración para una integral con divergencias en el plano del momento interno q .

Por lo tanto, para valores superiores a p^c la parte real de F_0 resulta

$$\begin{aligned} \text{Re}[F_0(-p^2)] = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} & \left[R(-p^2, \delta) + \int_0^{q_\rho^p - \delta} dq_\rho \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{\mathcal{F}(p^2, q_\rho^2, q_z^2, pq_z)}{D_+ D_-} + \right. \\ & \left. \int_{q_\rho^p + \delta}^{\infty} dq_\rho \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{\mathcal{F}(p^2, q_\rho^2, q_z^2, pq_z)}{D_+ D_-} \right], \end{aligned} \quad (5A.18)$$

con

$$R(-p^2, \delta) = 2\pi \int_0^{q_\rho^p - \delta} \frac{dq_\rho}{\sqrt{q_\rho^2 + S_i^2 + \gamma^2}} \text{Re} \left[\frac{\mathcal{F}(p^2, q_\rho^2, q_z^2, pq_z)}{\left[1 + \frac{\partial M^2(q_-)}{\partial (q_-)^2} \right] D^+} \right]_{q_z = (q_z^c)_2}, \quad (5A.19)$$

donde $(q_z^c)_2$ y q_ρ^p han sido definidas en las ecuaciones (5A.16) y (5A.17), respectivamente.

Capítulo 6

Conclusiones

“No nos preguntamos qué propósito útil hay en el canto de los pájaros, cantar es su deseo desde que fueron creados para cantar. Del mismo modo no debemos preguntarnos por qué la mente humana se preocupa por penetrar los secretos de los cielos... La diversidad de los fenómenos de la Naturaleza es tan grande y los tesoros que encierran los cielos tan ricos, precisamente para que la mente del hombre nunca se encuentre carente de su alimento básico.”

Johannes Kepler (1571-1630) Astrónomo, matemático y físico alemán.

En el primer capítulo de esta Tesis de doctorado se dio una breve introducción al tema, detallando asimismo los objetivos a desarrollar en la misma. En el segundo capítulo se expusieron las bases teóricas tanto de la QCD como del modelo Nambu-Jona-Lasinio (NJL), a dos y tres sabores de quarks. En el capítulo 3 se explicaron las bases de los modelos no locales a ser utilizados en esta investigación. En ese sentido, primero vimos cómo incorporar interacciones no locales en el modelo de dos sabores, extendiendo el modelo NJL de manera tal que este, además de seguir preservando las simetrías de QCD, presente una descripción más realista de la interacción entre quarks a bajo momento transferido. En particular se mostró cómo

incorporar al modelo la renormalización de la función de onda (WFR) y se presentaron las diferentes parametrizaciones utilizadas (ver tabla 3.1). Se consideraron en este caso dos tipos de dependencia de momentos para las interacciones. Una de ellas (Set B) basada en el frecuentemente utilizado, factor de forma exponencial. La segunda (Set C) correspondiente al ajuste de las funciones de masa $M(p)$ y renormalización $Z(p)$, a resultados obtenidos en cálculos de QCD en la red^[16], dando lugar a una dependencia en momento más suave (esto es, a grandes momentos, la masa de quark decrece como $(p^2)^{-3/2}$, en lugar de hacerlo exponencialmente). Para poder testear la influencia de la WFR, también se consideró un tercer escenario (Set A), con una interacción exponencial al igual que el Set B, pero donde la WFR estaba ausente. Los resultados que se pueden obtener con estas tres parametrizaciones se muestran en la tabla 3.2. En las siguientes secciones de este capítulo, se mostró como extender el modelo no local al caso de tres sabores de quarks. Al incluir la extrañeza en el modelo se debió incorporar la interacción de seis quarks, responsable de la ruptura de simetría $U(1)_A$, conocida como anomalía axial. Trabajando en la la aproximación de campo medio, se pueden obtener las masas dinámicas de los quarks y los condensados quirales, mientras que a segundo orden en la acción efectiva, se pueden determinar las masas de los mesones, los ángulos de mezcla para η y η' , las constantes acoplamiento mesón-quark, las constantes de decaimiento débil de los mesones pseudoscalares y las constantes de decaimiento anómalo mesón $\rightarrow \gamma\gamma$. Los correspondientes resultados numéricos se muestran en la tabla 3.4 donde se observa que en general los mismos se encuentran cerca o dentro del rango de valores obtenidos experimental o fenomenológicamente. En particular, el resultado obtenido para el cociente f_K/f_π resulta significativamente mejor que el obtenido por el modelo NJL estándar, donde las constantes de decaimiento del pión y del kaón resultan ser aproximadamente iguales, en contraste con la evidencia experimental.

A partir del cuarto capítulo se desarrollaron los temas principales de la presente tesis. Es decir, la aplicación de los modelos no locales al estudio del diagrama de fases de la materia fuertemente interactuante y de las propiedades mesónicas y de quarks

en función de la temperatura. En particular, en el capítulo 4 se estudió el comportamiento de materia fuertemente interactuante a temperatura y potencial químico finitos, usando un modelo de quarks quiral no local, el cual incluye renormalización de la función de onda y acoplamiento al loop de Polyakov. Esto es, a lo largo de dicho capítulo se realizó la extensión de los modelos descritos en el tercer capítulo al rango de temperaturas y potencial químico no nulos. Para ello previamente debió incluirse una descripción de los formalismos utilizados, tanto para añadir la temperatura como para realizar el acoplamiento al loop de Polyakov. En este marco, se estudiaron los diagramas de fase correspondientes y las cantidades asociadas, ambos en el límite quiral y a valores finitos de la masa corriente de quarks, prestando especial atención a la determinación precisa de los puntos críticos. De hecho, se ha podido obtener un conjunto de ecuaciones para encontrar la posición de los puntos críticos correspondientes, esto es, el punto tricrítico (TCP) en el caso del límite quiral y el “Critical End Point” (CEP) para masa de quarks finita. Por otro lado, se observó que la presencia del PL provee un incremento sustancial de la temperatura crítica predicha. Por ejemplo, a $m = 0$ se obtienen valores cercanos a $T = 200$ MeV, lo cual está, respecto del modelo sin PL, en un mejor acuerdo con la mayoría de los resultados recientes de los cálculos del QCD en la red $160 - 200$ MeV^[12]. Se debe notar que correcciones debidas a efectos que van más allá de la aproximación de campo medio no tenidas en cuenta en este trabajo, tienden a disminuir el valor de T_c predicho por el tipo de modelos aquí estudiados^[94,95]. Además se encontró que la transición de fase de deconfinamiento para μ pequeños ocurre cerca de la misma temperatura crítica. Los resultados numéricos obtenidos indican que algunos de los puntos importantes de los diagramas de fase no son muy dependientes de las diferentes parametrizaciones utilizadas. Por ejemplo, para masas de quarks finitas, las temperaturas críticas están dentro del rango $210 - 215$ MeV, mientras que los potenciales químicos a $T = 0$ están en el rango de $298 - 322$ MeV. Por otro lado, la posición del punto crítico tiende a ser muy sensible tanto a la parametrización utilizada como a la masa de quarks corrientes m . Comparando los resultados co-

rrespondientes a la parametrización exponencial con y sin renormalización de la función de onda, se encontró que el efecto principal de la presencia de este término es trasladar la ubicación del CEP hacia valores menores de T y valores mayores de μ . Respecto a la parametrización motivada en QCD en la red, esta conduce a valores aún menores de T_{CEP} y mayores valores de μ_{CEP} . Al estudiar la dependencia en la masa de los quarks m , se ha verificado que para valores pequeños de m (esto es, cerca al TCP), la posición del CEP posee en todos los casos un comportamiento del tipo $m^{-2/5}$, como se esperaba. Para las parametrizaciones exponenciales, a $m \sim 4$ MeV esta variación inicial tiende a desaparecer y la posición del CEP permanece relativamente estable por encima del valor máximo de m que hemos considerado. Por otro lado, para la parametrización motivada en QCD en la red la situación es algo diferente. De hecho, la dependencia en m es más fuerte para básicamente todos los valores considerados. En particular, luego del decrecimiento inicial, a $m \sim 4$ MeV el valor de T_{CEP} comienza a crecer de forma pronunciada. Finalmente, hemos analizado numéricamente el comportamiento crítico alrededor del TCP y del CEP determinando los exponentes críticos asociados con las susceptibilidades quiral y de número de quarks, y con el calor específico. En todos los casos, se encontró que los exponentes obtenidos están en muy buen acuerdo con los valores predichos para teorías de campo medio con un razonablemente buen grado de precisión. En particular, no se encontró ninguna influencia de las propiedades del TCP en los exponentes críticos del CEP.

Posteriormente, en el capítulo 5 se analizó el rol que juega la extrañeza en la descripción de la transición de fase quiral dentro del marco de modelos quirales no locales en $SU(3)$, con mezcla de sabores. Al igual que en el caso de dos sabores, la presencia del PL tiende a aumentar la T_c y hace que la transición de fase se vuelve más abrupta, mostrando un pico más pronunciado en la susceptibilidad quiral. Asimismo, los efectos de la mezcla de sabores hacen que aparezcan efectos de la restauración de la simetría $SU(2)$ aún en la susceptibilidad asociada al quark *strange*. En lo concerniente al comportamiento de las masas mesónicas con la

temperatura, se observó que las masas de los mesones pseudoescalares permanecen aproximadamente constantes hasta T_c , mientras que las masas de los mesones escalares comienzan a caer alrededor de $T = 150$ MeV. Más allá de T_c las masas pseudoescalares se incrementan, de manera tal que se vuelven degeneradas con las masas de sus compañeros quirales, como se espera a partir de la restauración quiral. La temperatura a la cual los compañeros quirales se encuentran depende de la composición de extrañeza de los mesones correspondientes, esto es, las masas de los mesones que no contienen quarks s coinciden casi inmediatamente después de T_c , mientras que las masas de los mesones f_0 y η' se encuentran recién cerca de $1.5 T_c$, mientras que para los mesones K y κ la situación es intermedia. Respecto a las propiedades del sector $\eta - \eta'$, se observa que los ángulos de mezcla correspondientes tienden a converger al conocido ángulo de mezcla “ideal”, el cual indica que la anomalía $U(1)_A$ tiende a desaparecer a medida que la temperatura aumenta. Esto también se observó en el comportamiento de la susceptibilidad topológica la cual, como se esperaba a partir de cálculos realizados mediante QCD en la red, muestra un decrecimiento pronunciado luego de la transición de fase quiral. Debería notarse, sin embargo, que en el presente modelo no local, tal decrecimiento es más rápido que el obtenido en el modelo PNJL local en $SU(3)$ ^[87]. Finalmente notamos que, de acuerdo con el modelo local (y en contraste con los resultados obtenidos en el marco de una aproximación de Dyson-Schwinger^[86]) nosotros no hemos observado ningún tipo de incremento en la masa del mesón η' alrededor de la temperatura crítica.

En síntesis, como conclusión general podemos decir que los tipos de modelos aquí utilizados representan un avance hacia el desarrollo de modelos más realistas, que tengan en cuenta información acerca del propagador de quarks obtenida a partir de QCD en la red, y que además presenten un buen ajuste a los valores obtenidos tanto experimental como fenomenológicamente. Queda como tarea pendiente a realizar en futuras investigaciones, completar el modelo de tres sabores, incluyendo la renormalización de la función de onda y potencial químico finito, para poder estudiar los diagramas de fase a tres sabores. Además, se podría añadir a los

modelos utilizados, neutralidad de color y neutralidad de carga, con la finalidad de poder estudiar las fases 2SC y CFL, superconductoras de color. Esto último es de interés astrofísico, ya que existe la posibilidad de que dichas fases puedan existir en el interior de estrellas compactas.

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
CENTRO DE INFORMACION CAC

Bibliografía

- [1] F. Close, *Introduction to Quarks and Partons* (Academic Press, London, 1979); F. Halzen y A. Martin, *Quarks and leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics* (John Wiley & Sons, New York, 1979); D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, 2nd ed. (Wiley-VCH, Weinheim, Germany, 2008).
- [2] F. J. Ynduráin, *The theory of quarks and gluon interactions* (Springer-Verlag, Heilderberg, 1999).
- [3] F. Karsch, Springer Lect. Notes Phys. **583**, 209 (2002).
- [4] Y. Nambu y G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961); Phys. Rev. **124**, 246 (1961).
- [5] U. Vogl y W. Weise, Prog. Part. Nucl. Phys. **27**, 195 (1991).
- [6] S. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64**, 649 (1992).
- [7] G. Ripka, *Quarks bound by chiral fields* (Oxford University Press, Oxford, 1997).
- [8] D. Blaschke, S. Schmidt y Y. Kalinovsky. Phys. Rev. C **50**, 435 (1994).
- [9] E. Ruiz Arriola y L.L. Salcedo, Phys. Lett. B **450**, 225 (1999).
- [10] G. Ripka, Nucl. Phys. A **683**, 463 (2001); R.S.Plant y M.C. Birse, Nucl.Phys. A **703**, 717 (2002).
- [11] R.D. Bowler y M.C.Birse, Nucl. Phys. A **582**, 655 (1995); R.S.Plant y M.C. Birse, Nucl.Phys. A **628**, 607 (1998).

BIBLIOGRAFÍA

- [12] A. Bazavov *et al.*, Phys. Rev. D **80**, 014504 (2009).
- [13] T.D.Lee, *Particle physics and introduction to field theory* (Harwood Ac. Press, Switzerland, 1981).
- [14] J.C. Collins, M.J. Perry, Phys. Rev. Lett. **34**, 1353 (1975).
- [15] N. K. Glendenning, “*Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity*”, 2nd Edition, (Springer, NY, 2000).
- [16] S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky, “*Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*”, (Wiley-Interscience, NY, 1983).
- [17] J. Cleymans, R.V. Gavai, E. Suhonen, Phys. Rep. **130**, 217 (1986).
- [18] J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, Phys. Rev. **106**, 162 (1957).
- [19] K. Rajagopal, Nucl. Phys. A **661**, 150c (1999).
- [20] T. Hatsuda y T. Kunihiro, Progr. Theor. Phys. **74**, 765 (1985).
- [21] V. Bernard, Phys. Rev. D **34**, 1601 (1986).
- [22] T. Hatsuda y T. Kunihiro, Phys. Rep. **247**, 221 (1994); T. Kunihiro y T. Hatsuda, Phys Lett. B **206**, 385 (1988); **210**, 278(E) (1988); T. Hatsuda y T. Kunihiro, Z. Phys. C **51**, 49 (1991).
- [23] V. Bernard, R.L.Jaffe y U.G.Meissner, Phys. Lett. B **198**, 92 (1987); Nucl. Phys. B **308**, 753 (1988).
- [24] H. Reinhardt y R. Alkofer, Phys. Lett. B **207**, 482 (1988).
- [25] M. Takizawa, K. Tsushima, Y. Kohyama y K. Kubodera, Nucl. Phys. A **507**, 611 (1990).
- [26] S. Klimt, M. Lutz, U. Vogl y W. Weise, Nucl. Phys. A **516**, 429 (1990).

- [27] E.V. Shuryak, *The QCD vacuum, hadrons and superdense matter* (World Scientific, Singapore, 1988).
- [28] B.W. Lee, *Chiral dynamics* (Gordon and Breach, New York, 1972).
- [29] S. Gottlieb *et al.*, Nucl. Phys. A **498**, 435c (1989).
- [30] J.B. Kogut, F.K. Sinclair y K.C. Wang, Phys. Lett. **263**,101 (1991).
- [31] S. B. Treiman, R. Jackiw, B. Zumino y E. Witten, *Current algebra and anomalies* (Princeton University Press, Princeton, 1985).
- [32] A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz y Y. Tyupkin, Phys. Lett. B **59**, 85 (1975).
- [33] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976); Phys. Rev. D **14**, 3432 (1976).
- [34] M. Buballa, Phys. Rept. **407**, 205 (2005).
- [35] P. Rehberg, S.P. Klevansky y J. Hüfner, Phys. Rev. C **53**, 410 (1996).
- [36] S. Klimt, M. Lutz, U. Vogl y W.Weise, Nucl. Phys. A **516**, 429 (1990); U. Vogl, M. Lutz, S. Klimt y W.Weise, Nucl. Phys. A **516**, 469 (1990).
- [37] D.I. Dyakonov y V.Y.Petrov, Sov. Phys. JETP **62**, 204 (1985); Sov. Phys. JETP **62**, 431 (1985); Nucl. Phys. B **245**, 259 (1985); Nucl. Phys. B **272**, 457 (1986); D.I. Dyakonov, V.Y.Petrov y P.V.Pobylitsa, Nucl. Phys. B **306**, 809 (1988);
- [38] R.D. Ball, Int. Journ. Mod. Phys. A **5**, 4391 (1990).
- [39] A. Scarpettini, D.Gomez Dumm y N.N.Scoccola, Phys.Rev. D **69**, 114018 (2004).
- [40] F. T. Hawes, C. D. Roberts y A. G. Williams, Phys. Rev. D **49**, 4683 (1994).
- [41] M. Stingl, Phys. Rev. D **34**, 3863 (1986); **36**, 651(E) (1987).
- [42] I. General, D.Gomez Dumm y N.N.Scoccola, Phys. Lett.B **506**,267 (2001); D.Gomez Dumm y N.N.Scoccola, Phys. Rev. D **65**, 074021 (2002).

BIBLIOGRAFÍA

- [43] S. Noguera, Int. J. Mod. Phys. E **16**, 97 (2007); S. Noguera y V. Vento, Eur. Phys. J. A **28**, 227 (2006).
- [44] S. Noguera y N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **78**, 114002 (2008).
- [45] S. Furui y H. Nakajima, Phys. Rev. D **73**, 074503 (2006).
- [46] M. B. Parappilly, P. O. Bowman, U. M. Heller, D. B. Leinweber, A. G. Williams y J. B. Zhang, Phys. Rev. D **73**, 054504 (2006).
- [47] P. O. Bowman, U. M. Heller y A. G. Williams, Phys. Rev. D **66**, 014505 (2002); P. O. Bowman, U. M. Heller, D. B. Leinweber y A. G. Williams, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **119**, 323 (2003).
- [48] D. Gomez Dumm, A. G. Grunfeld y N.N.Scoccola, Phys. Rev. D **74**, 054026 (2006).
- [49] E. M. Aitala et al. (E791 Collaboration), Phys. Rev. Lett. **86**, 770 (2001).
- [50] N. Wu, en Proceedings de “XXXVIth Rencontres De Moriond, QCD High Energy Hadronic Interactions”, Les Arcs, Savoie, France, March 17-24, 2001, ArXiv:hep-ex/0104050v1.
- [51] J. Schaffner-Bielich, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **30**, R245 (2004).
- [52] *Review of Particle Physics*, Particle Data Group, K. Nakamura *et al.*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **37**, 075021 (2010).
- [53] H. Leutwyter, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **64**, 223 (1998).
- [54] C.D. Roberts y A.G. Williams, Prog. Part. Nucl. Phys. **33**, 477 (1994); C.D. Roberts y S.M. Schmidt, Prog. Part. Nucl. Phys. **45**, S1 (2000).
- [55] T. Feldmann, Int.J.Mod.Phys. A **15**, 159 (2000).
- [56] T. Feldmann, P.Kroll y B.Stech, Phys.Rev. D **58**, 114006 (1998); Phys.Lett. B **449**, 339 (1999).

BIBLIOGRAFÍA

- [57] R. Escribano y J.M.Frère, Phys.Lett. B **459**, 288 (1999).
- [58] J. I. Kapusta, *Finite-temperature field theory* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993).
- [59] Ashok Das, *Finite temperature field theory* (World Scientific, Singapore, 1997).
- [60] N.P. Landsman y Ch.G. van Weert, Phys. Rep. **145**, 141 (1987).
- [61] A.M. Polyakov, Nucl. Phys. B **120**, 429 (1977); A.M. Polyakov, Phys. Lett. **72B**, 477 (1978).
- [62] K. Wilson, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974).
- [63] G. t'Hooft, Nucl. Phys. B **138**, 1 (1978).
- [64] R. D. Pisarski, en Proceedings de “*QCD Perspectives on Hot and Dense Matter*”, a NATO Advanced Study Institute, Cargese, France, August, 2001, arXiv:hep-ph/0203271.
- [65] C. Ratti, M. A. Thaler y W. Weise, Phys. Rev. D **73**, 014019 (2006).
- [66] K. Fukushima, Phys. Lett. B **591**, 277 (2004).
- [67] A. Dumitru, R. D. Pisarski y D. Zschiesche, Phys. Rev. D **72**, 065008 (2005).
- [68] S. Roessner, C. Ratti y W. Weise, Phys. Rev. D **75**, 034007 (2007).
- [69] P. N. Meisinger, M.C.Ogilvie y T.R.Miller, Phys. Lett. B **585**, 149 (2004).
- [70] S. Roessner, T. Hell, C. Ratti y W. Weise, Nucl. Phys. A **814**, 118 (2008).
- [71] H.-T. Elze, D. E. Miller y K. Redlich, Phys. Rev. D **35**, 748 (1987).
- [72] K. Fukushima y Y. Hidaka, Phys. Rev. D **75**, 036002 (2007).
- [73] H. Abuki, M. Ciminale, R. Gatto, G. Nardulli y M. Ruggieri, Phys. Rev. D **77**, 074018 (2008); H. Abuki, R. Anglani, R. Gatto, G. Nardulli y M. Ruggieri, Phys. Rev. D **78**, 034034 (2008).

BIBLIOGRAFÍA

- [74] D. Gomez Dumm, D. B. Blaschke, A. G. Grunfeld y N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **78**, 114021 (2008).
- [75] D. Gomez Dumm y N.N.Scoccola, Phys. Rev. C **72**, 014909 (2005).
- [76] L. McLerran y R.D. Pisarski, Nucl. Phys. A **796**, 83 (2007); L. McLerran, K. Redlich y C. Sasaki, Nucl. Phys. A **824**, 86 (2009).
- [77] Y. Hatta y T. Ikeda, Phys. Rev. D **67**, 014028 (2003).
- [78] P. Costa, C. A. de Sousa, M. C. Ruivo y Yu. L. Kalinovsky Phys. Lett. B **647**, 431 (2007); P. Costa, C. A. de Sousa, M. C. Ruivo y H. Hansen, Europhys. Lett. **86**, 31001 (2009).
- [79] C. Bernard *et al.* [MILC Collaboration], Phys. Rev. D **71**, 034504 (2005); M. Cheng *et al.*, Phys. Rev. D **74**, 054507 (2006); Y. Aoki, Z. Fodor, S. D. Katz y K. K. Szabo, Phys. Lett. B **643**, 46 (2006).
- [80] T. Schafer y E. V. Shuryak, Rev. Mod. Phys. **70**, 323 (1998).
- [81] G. A. Contrera, D. Gomez Dumm y N. N. Scoccola, Phys. Lett. B **661**, 113 (2008).
- [82] W. Florkowski y B. L. Friman, Acta Phys. Polon. B **25**, 49 (1994).
- [83] F. Karsch y E. Laermann, en *Quark Gluon Plasma 3*, edited by R.C. Hwa y X. N. Wang (World Scientific, Singapore, 2004), arXiv:hep-lat/0305025.
- [84] V. L. Eletsky y B. L. Ioffe, Sov. J. Nucl. Phys. **48**, 384 (1988) [Yad. Fiz. **48**, 661 (1988)];
W. Florkowski y B. L. Friman, Z. Phys. A **347**, 271 (1994).
- [85] D. Blaschke, G. Burau, Yu. L. Kalinovsky, P. Maris y P. C. Tandy, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 2267 (2001).
- [86] D. Horvatic, D. Klabucar y A. E. Radzhabov, Phys. Rev. D **76**, 096009 (2007).

BIBLIOGRAFÍA

- [87] P. Costa, M. C. Ruivo, C. A. de Sousa, H. Hansen y W. M. Alberico, *Phys. Rev. D* **79**, 116003 (2009).
- [88] B. Alles, M. D'Elia y A. Di Giacomo, *Nucl. Phys. B* **494**, 281 (1997) [Erratum-
ibid. B **679**, 397 (2004)]; C. Gatttringer, R. Hoffmann y S. Schaefer, *Phys. Lett. B* **535**, 358 (2002).
- [89] K. Fukushima, K. Ohnishi y K. Ohta, *Phys. Rev. C* **63**, 045203 (2001).
- [90] S. Durr, Z. Fodor, C. Hoelbling y T. Kurth, *JHEP* **0704**, 055 (2007).
- [91] A. Ali Khan *et al.* [CP-PACS Collaboration], *Phys. Rev. D* **64**, 114501 (2001).
C. Bernard *et al.*, *Phys. Rev. D* **68**, 114501 (2003). S. Aoki *et al.* [JLQCD and
TWQCD Collaborations], *Phys. Lett. B* **665**, 294 (2008).
- [92] B. Alles, M. D'Elia y A. Di Giacomo, *Phys. Lett. B* **483**, 139 (2000).
- [93] K. Nakayama y S. Krewald, *Phys. Lett. B* **273**, 199 (1991).
- [94] D. Müller, M. Buballa y J. Wambach, *Phys. Rev. D* **81**, 094022 (2010).
- [95] A.E. Radzhabov, D. Blaschke, M. Buballa y M.K. Volkov, *arXiv:hep-ph/1012.0664v2*.

Lista de publicaciones

Artículos en revistas periódicas

G. A. Contrera, D. Gomez Dumm y N. N. Scoccola, “*Nonlocal $SU(3)$ chiral quark models at finite temperature: the role of the Polyakov loop*”, Phys. Lett. B **661**, 113 (2008). arXiv:hep-ph/0711.0139.

G. A. Contrera, D. Gomez Dumm y N. N. Scoccola, “*Meson properties at finite temperature in a three flavor nonlocal chiral quark model with Polyakov loop*”, Phys. Rev. D **81**, 054005 (2010). arXiv:hep-ph/0911.3848v2.

G. A. Contrera, M. Orsaria y N. N. Scoccola, “*Nonlocal Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model with wavefunction renormalization at finite temperature and chemical potential*”, Phys. Rev. D **82**, 054026 (2010). arXiv:hep-ph/1006.4639v2.

Publicaciones en actas de conferencias

G. A. Contrera, M. G. Orsaria y N. N. Scoccola, “*Nonlocal chiral quark models with Polyakov loop at finite temperature and chemical potential*”, Int. Journal of Modern Physics D **19**, Issue 8-10, 1703 (2010), arXiv:hep-ph/0912.4555.

BIBLIOGRAFÍA

G. A. Contrera, D. Gomez Dumm y N. N. Scoccola, “*Meson masses at finite temperature in a Nonlocal $SU(3)$ chiral quark model*”, Int. Journal of Modern Physics D **19**, Issue 8-10, 1635 (2010),

G. A. Contrera, M. G. Orsaria y N. N. Scoccola, “*Phase diagram and critical end point in nonlocal PNJL models with wavefunction renormalization*”, AIP Conference Proceedings **1296**, 390 (2010).

G. A. Contrera, D. Gomez Dumm y N. N. Scoccola, “*Meson properties in a non-local $SU(3)$ chiral quark model at finite temperature*”, AIP Conference Proceedings **1296**, 326 (2010).