Bol. Acad. Nac. Cienc. (Córdoba), v. 42, no 2-4, 1961, p. 7-20.

Bol. Acad. Nac. Cienc., Córdoba, Argent.
ISSN 0328-2051

EL MODELO NUCLEAR 1959

POR
DANIEL R. BÈS
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de Buenos Aires,
Facultad de Ciencias Físico-matemáticas de La Plata *
Comisión Nacional de Energía Atómica

El "modelo nuclear 1959" 1), llamado así pues fue "lanzado a la venta" durante ese año, intenta explicar cualitativa y cuantitativamente el espectro nuclear de bajas energías en base al modelo de partícula independiente y a 2 fuerzas residuales: la fuerza cuadripolar y la fuerza de apareamiento, que representan las componentes de largo y corto alcance, respectivamente, de las fuerzas nucleares.

1. El modelo de capas

El núcleo es un sistema con A partículas. Resolver las ecuaciones de movimiento de este sistema implica resolver cuánticamente el problema de muchos cuerpos. Con este objeto se han desarrollado en los últimos años métodos aproximados 2), pero el problema está lejos de hallarse solucionado. Para poder calcular resultados verificables experimentalmente, debe hacerse uso de modelos relativamente simples. Entre éstos, el modelo de capas 3) constituye, hoy en día, la base para toda discusión sobre el espectro nuclear de bajas energías.

La hipótesis fundamental es, pues, que los nucleones se mueven independientemente en un potencial común esférico, determinado por la distribución de la densidad de masa en el núcleo. El potencial central, $V(r_i)$ incluye un término del tipo "acoplamiento spin-órbita".

$$H = \sum_{i=1}^{i=A} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^{i=A} V(r_i) \qquad (1)$$

---

* Con el auspicio de la Fuerza Aérea de Estados Unidos de Norteamérica.

Una consecuencia de esta hipótesis es que existen niveles de partícula independiente caracterizados, entre otros números cuánticos, por el momento angular j. Estos niveles se agrupan formando capas. Si las distancias entre 2 capas sucesivas son suficientemente grandes, las partículas pertenecientes a las capas cerradas no intervienen directamente en el espectro nuclear de bajas energías, sino que lo hacen solamente a través de renormalizaciones en las constantes que determinan las interacciones de las partículas de las capas exteriores 4), 5), 6). Es posible, entonces, explicar fácilmente las propiedades de los núcleos doblemente mágicos y de los núcleos con una sola partícula o agujero moviéndose fuera de las capas cerradas.

II. El espectro de varios nucleones.

Podemos calcular, también en base a nuestro modelo de capas, el espectro de los núcleos con 2 o más nucleones fuera de las capas cerradas. Encontramos en seguida que aparecen muchos estados muy próximos entre sí debido a la degeneración $(2j + 1)$ de cada nivel de partícula independiente. Por ejemplo, sabemos 7), gracias al espectro del Pb^{207}, el orden y la distancia entre los niveles de la capa que se satura con 126 neutrones. En base a estos datos, el modelo de partícula independiente predice 5 niveles con energía menor que 1.2 Mev. para al Pb^{206}, 30 niveles para el Pb^{204}, etc. Dada la proximidad de estos niveles, toda fuerza residual, por pequeña que fuere, ejerce un efecto importante. Por otra parte, es evidente que el potencial central del modelo de capas no puede reemplazar completamente la interacción entre los nucleones. *Para describir el espectro nuclear de bajas energías es esencial tratar correctamente la fuerza residual entre todas las configuraciones cuyos niveles pertenecen a la misma capa. El problema central de la espectroscopía nuclear consiste en determinar qué combinación lineal de estos niveles casi degenerados corresponde al estado de energía más baja.*

Nos encontramos en seguida con un primer inconveniente grande, debido a que: a) no conocemos exactamente la fuerza entre 2 nucleones libres, y lo que sabemos de ella indica que es aterradoramente complicada; b) aun en el caso de conocerla, no es evidente que la fuerza entre 2 nucleones libres sea la misma que entre dos nucleones ligados; c) parte de esa fuerza ya ha sido usada al construir el potencial central. En general se ha soslayado este primer inconveniente, usando como interacción residual una fuerza de rango variable, con parámetros fijados por diferentes propiedades nucleares (fuerzas de Rosenfeld, Serber, etc.). Sin embargo, debido a que la complejidad del problema crece enormemente con el número de nucleones, estos cálculos están limitados prácticamente a casos con menos de 4 partículas en las capas exteriores 3), 8).

También puede procederse a la inversa 9): conociendo el espectro de un núcleo "informante" es posible determinar empíricamente los elementos de matriz de la fuerza residual. Suponiendo que dichos elementos de matriz no varíen al pasar de un núcleo a otro, es factible predecir el espectro de núcleos vecinos. En la práctica estos cálculos están limitados a una configuración del tipo $(j)^n$ pues en casos más complicados el número de elementos de matriz, o sea el número de niveles que debemos conocer del núcleo "informante" se hace demasiado grande (única excepción hasta ahora: Z_r^{90}). Desgraciadamente, son relativamente pocos los casos en que es aceptable la hipótesis de una configuración $(j)^n$ pura.

Una tercer manera de atacar al problema consiste en tratar de encontrar una interacción cuyas propiedades matemáticas sean tales que pueda ser usada en situaciones complejas y que, al mismo tiempo, permita reproducir el espectro nuclear. El modelo nuclear 1959 consiste en el modelo de capas más dos interacciones que satisfacen dichas condiciones.

III. La fuerza cuadripolar.

Mottelson 5), fundamenta el uso de esta fuerza de la siguiente manera:

Debemos ser consistentes con la hipótesis de que una parte importante de las fuerzas internucleónicas puede ser incorporada a un potencial central de forma semejante a la de la distribución de masa. En consecuencia, si agregamos un nucleón fuera de las capas cerradas, el potencial nuclear no será en general esférico. Luego, la degeneración $(2j + 1)$ característica de la simetría esférica desaparece.

Construímos la función de onda correspondiente a una configuración $(j)^n$ de la siguiente manera: supongamos que el primer nucleón se mueve aproximadamente en el plano (xy) de modo que su función de onda es $u(1; j; m = j)$. Un segundo nucleón preferirá el estado con máxima superposición posible con el anterior: $u(2; j; -j)$. La función de onda resultante para n nucleones es

$$\Phi = A \{ u(1;j,j)\, u(2;j,-j)\, u(3;j,j-1) \ldots \} \qquad (2)$$

donde el operador A indica que Φ debe estar antisimetrizada. La característica más importante de la función de onda "alineada" (2) es la distribución no esférica de los nucleones, que genera a su vez un potencial deformado.

Es importante discutir los siguientes puntos en conexión con esta función de onda:

a) *¿Qué parte de la fuerza residual ha sido incluída en la función de onda alineada?* Podemos intuir desde ya que es la componente de largo alcance de la fuerza residual, pues sólo si cada nucleón siente simultáneamente el efecto de varios otros, la interacción puede ser tratada en primera aproximación como un potencial común. En efecto, podemos desarrollar una fuerza que depende de la distancia entre 2 partículas en una serie de Slater:

$$V(r_{12}) = \frac{4\pi}{5} \sum_{\lambda} f_\lambda (r_1, r_2) \sum_{\mu} Y^{x}_{\lambda\mu}(\theta_1)\, Y_{\lambda\mu}(\theta_2) \qquad (3)$$

y sabemos que los órdenes multipolares más bajos representan la componente de largo alcance. Bayman 10) demostró que la función de onda alineada es una aproximación muy buena para la función de onda del estado fundamental cuando la fuerza residual está representada por un multipolo de orden λ tal que $\lambda << j$. El menor orden multipolar que podemos considerar en una capa es $\lambda = 2$. Si hacemos, además

$$f_2 (r_1, r_2) = -k\, r^2_1\, r^2_2 \qquad (4)$$

la interacción (3) puede describirse como una interacción entre los momentos cuadripolares de las partículas.

$$\sum_{i<j} V(r_{ij}) = -k \frac{2\pi}{5} \sum_{i<j} r^2_i \cdot Y^{x}_{2\mu}(\theta_i)\, r^2_j\, Y_{2\mu}(\theta_j)$$

$$\simeq -\frac{k}{4} \sum_{\mu} Q^{x}_{\mu} Q_{\mu} \qquad (5)$$

donde $Q_\mu = \sum_{i=1}^{i=A} (q_\mu)_i$; $(q_\mu)_i = 4\frac{\pi}{5}\, r^2_i\, Y_{2\mu}(\theta_i)$.

(Q_μ es el operador correspondiente al momento cuadripolar total y, $(q_\mu)_i$ el correspondiente a la partícula i).

b) *Generalización de la función de onda* (2).

Uno de los operadores correspondientes al momento cuadripolar total Q_μ, puede ser reemplazado por su valor de expectación $\bar{Q}_\mu$, siempre que las fluctuaciones alrededor del valor medio sean pequeñas. La fuerza residual (5) se reduce así a un potencial deformado de partícula independiente

$$V'(r_i) = \sum_j V(r_{ij}) = -\frac{k}{4} \sum_\mu \bar{Q}^*_\mu (q_\mu)_i \qquad (6)$$

Si el sistema tiene una deformación axialmente simétrica (*) $\bar{Q}_\mu = 0$ para $\mu \neq 0$

$$V'(r_i) = -\frac{k}{4} \bar{Q}_0 (2z^2 - x^2 - y^2)_i \qquad (7)$$

En el caso de que haya varios niveles correspondientes a momentos angulares distintos, la función de onda se encuentra resolviendo el movimiento independiente de lo nucleones en el hamiltoniano deformado dado por (1) y (7), 11). Es importante tener en cuenta la condición de autoconsistencia; la deformación del potencial de partícula independiente debe ser igual a la deformación de la función de onda (medida por $\bar{Q}$).

c) *Existencia de estados rotacionales.*

En la función de onda así obtenida los nucleones están alineados respecto de un sistema de ejes fijos en el espacio. Es igualmente posible alinear los nucleones respecto de un sistema de ejes rotado, cuya posición está caracterizada por tres ángulos de Euler θ_i. Llamemos $\Phi_K(\theta_i, x')$ a la función de onda correspondiente. Acá K mide la proyección sobre el eje de simetría de la suma de los momentos angulares de cada partícula. $\Phi_K(\theta_i, x')$ no es un autoestado del momento angular total I ni de su proyección M sobre el eje fijo de las z; pero podemos construir una función que sí lo sea por medio de las integrales de Hill-Wheeler:

$$\psi^{IM} = \int D^I_{KM} \, (\theta_i) \, \Phi_k \, (\theta_i, x') \, d\theta_i \qquad (8)$$

donde las $D(\theta)$ constituyen la representación del grupo de rotación.

Es evidente que para distintos valores de I obtenemos estados pertenecientes a una misma banda de rotación pues todos los estados se obtienen a partir de la misma función de onda referida a un sistema de ejes intrínsecos.

Varios autores 12), 13) han estudiado la equivalencia entre la función de onda (8) y la del modelo unificado (14)

$$\psi^{IM} = D^I_{MK} \, (\theta_i) \;\; \Phi_k \;\; (y') \qquad (9)$$

En este aspecto ha sido particularmente útil el estudio del oscilador armónico 13), por los múltiples simetrías que posee este potencial central. Por ejemplo, Elliot clasificó las funciones de onda de n partículas moviéndose independientemente en un potencial central del tipo del oscilador armónico en base a sus propiedades respecto de las transformaciones unitarias (grupo U_3). Los estados quedaron agrupados en "bandas de rotación" en las cuales los elementos de matriz de los distintos operadores siguen las mismas reglas que en el modelo unificado. Elliot encontró además que la única interacción diagonalizada por dichas autofunciones es la interacción cuadripolar que produce una sucesión de los niveles cuyas energías son proporcionales a $I(I+1)$.

d) *Resultados 15) del modelo unificado.*

Es más sencillo trabajar con la función de onda (9) que con la (8), a pesar de que ambas son equivalentes. Recordaremos ahora los resultados obtenidos a partir de (8), de los cuales es responsable, por lo que hemos dicho, la fuerza cuadripolar.

(*) Si la deformación no fuera axialmente simétrica podemos construir también una función de onda análoga a (2) que la represente, y generalizarla con un procedimiento semejante (ver (5)

A) Existen bandas rotacionales, la energía de cuyos niveles está dada por

$$E_I = \frac{h^2}{27} \left[I(I+1) + a\,(-)^{I+1/2}\,(I+1/2)\,\delta_{K,1/2} \right] \qquad (10)$$

En los núcleos con $A \sim 25$; $150 < A < 190$, y $A > 222$, la relación (10) entre las energías de los niveles pertenecientes a una misma banda se cumple con extraordinaria exactitud.

B) Los estados de partícula independiente obtenidos a partir de (1) y (7) se corresponden biunívocadamente con los niveles fundamentales de las distintas bandas de rotación en los núcleos deformados de masa impar. Ejemplo: Dy^{161}. Nilsson 11) predice 4 estados posibles. Se encuentran sólo 3 de ellos, pero debemos observar que el cuarto no puede ser alimentado por las reglas de selección y que no se encuentra ningún estado "intrínseco" distinto de los previstos.

C) Las relaciones entre los distintos elementos de matriz están bien dadas cuando se trata de transiciones entre los distintos estados pertenecientes a una misma banda. También están razonablemente reproducidos el valor absoluto de los elementos de matriz y las relaciones de las intensidades de las transiciones entre niveles pertenecientes a distintas bandas.

Enumeraremos ahora las dificultades del modelo anterior:

D) El espectro de los núcleos deformados par-par no presenta niveles intrínsecos de excitación hasta una energía de $\sim$ 1,2 Mev (aproximadamente 6 veces mayor que la esperada).

E) Con excepción de los núcleos doblemente mágicos el modelo unificado predice que todos los demás deberían estar deformados.

F) Los momentos de inercia, calculados por medio del "crancking model" 16) resultan ser 2 ó 3 veces mayores que los valores experimentales.

IV. La fuerza de apareamiento.

En los núcleos esféricos se encuentran también dificultades, semejantes a las recién mencionadas para núcleos deformados. Por ejemplo, existe un "gap" en el espectro de los núcleos par-par. Hay un sólo estado excitado con energía menor que 1,2 Mev 7) en el

Pb^{204}, cuando dijimos al principio que en base al modelo de partícula independiente cabría esperar unos 30 niveles.

Estas discrepancias indican que existe una parte de la fuerza nuclear que produce efectos sistemáticos importantes y que no ha sido incluida en el modelo. Recordemos que a) los multipolos de orden $\lambda > j$ no pueden ser tratados en términos de un campo deformado, b) estos multipolos son los más importantes para el caso de una fuerza de corto alcance; y c) Bohr y Mottelson (16) demostraron (cualitativamente) que una fuerza delta produce los efectos mencionados en E) y F) de la página anterior.

Racah 17) diagonalizó una fuerza delta en una configuración $(j)^n$. Aparece un "gap" en el espectro, debido a que en el estado $I = 0$ la distancia relativa entre las partículas es menor que en los otros estados, y, en consecuencia, se hace un uso más eficaz de la fuerza de corto alcance. Desgraciadamente es prácticamente imposible tratar la simple fuerza delta en situacines complejas.

En otro campo de la física, en la teoría de la superconductibilidad, también es necesario explicar teóricamente la existencia de un "gap". Les corresponde a Bardeen, Cooper y Schrieffer 18) el mérito de haberlo hecho. Para resolver este "problema de muchos cuerpos", es cómodo usar el formalismo de la segunda cuantificación. Sean $\nu+$ y $\nu-$ los números cuánticos que denotan los estados de partícula independiente correspondientes al autovalor ε_ν. Estos dos estados (degenerados) están relacionados entre sí por la operación de reversión temporal. (Por ejemplo los estados $u(j;m)$ y $u(j;-m)$; $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ y $e^{-i\vec{r}\vec{k}}$, etc.). Sean además c^+_ν y c_ν los operadores de creación y aniquilación para el estado ν; dichos operadores obedecen las reglas usuales de anticonmutación.

La fuerza usada por Bardeen et all, que llamaremos "fuerza de apareamiento", solamente permite saltar partículas de a dos, de un par de estados $(\omega+, \omega-)$ a otro par $(\nu+, \nu-)$.

$$H_{par} = -G \sum_{\nu,\omega} c^+_{\nu+} c^+_{\nu-} c_{\omega-} c_{\omega+} \tag{11}$$

En el caso de la configuración $(j)^n$ el espectro resultante es muy parecido al de la fuerza delta y las autofunciones son las mismas. En realidad, H_{par} es una generalización de la fuerza en términos de la cual Racah 17) definió el concepto de "seniority" y coincide con ella para una configuración $(j)^n$

Para el caso de niveles no degenerados debemos añadir a (11) el hamiltoniano de partícula independiente

$$H_{sp} = \sum_{\nu} (\varepsilon_\nu - \lambda) \; (c^+_{\nu+}c_{\nu+} + c^+_{\nu-}c_{\nu-}) \qquad (12)$$

donde λ es una energía efectiva de Fermi que luego determinaremos.

Usaremos un método debido a Bogolubov y Valatin 18), que es más elegante pero completamente equivalente al procedimiento variacional de Bardeen et all. Fue aplicado al caso nuclear por Belyaev 19). Introducimos 2 nuevos operadores $(\alpha^+_\nu, \beta^+_\nu)$ que crean "cuasi-partículas", definidas por la transformación canónica siguiente

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^+_\nu = U_\nu c^+_{\nu+} - V_\nu c_{\nu-} \\ \beta^+_\nu = U_\nu c^+_{\nu-} + V_\nu c_{\nu+}\end{array}\right\} U^2_\nu + V^2_\nu = 1 \qquad (13)$$

Por medio de la transformación inversa a (13) podemos expresar $H = H_{sp} + H_{par}$ en función de $\alpha^+_\nu, \beta^+_\nu, \beta_\nu$ y α_ν. El hamiltoniano total H tiene entonces la estructura

$$H = U + H_{11} + H_{20} + H_{int} \qquad (14)$$

siendo

$$U = \sum_\nu (\varepsilon_\nu - \lambda) 2V^2_\nu - \frac{\Delta^2}{G}$$

$$H_{11} = \sum_\nu E_\nu \, (\alpha^+_\nu \alpha_\nu + \beta^+_\nu \beta_\nu) \qquad (15)$$

donde $E_\nu = [(\varepsilon_\nu - \lambda)^2 + \Delta^2]^{1/2}$; $\quad \Delta = G \sum_\nu U_\nu V_\nu$

Si anulamos H_{20} (que es proporcional a $(\alpha^+_\nu \beta^+_\nu + \beta_\nu \alpha_\nu)$) y despreciamos H_{int}, el hamiltoniano resultante $H + H_{11}$ describe un sistema de cuasi-partículas independientes. La energía de cada cuasi-partícula está dada por E_ν. Podemos caracterizar las funciones de onda por el número de cuasi-partículas presentes. En particular, el estado fundamentol $|0>$ no tiene cuasi-partículas $(\alpha_\nu |0> = 0)$.

Expresado en términos de operadores de creación de las partículas originales, está dado por

$$|0> = \underset{\nu}{\pi} (U_\nu + V_\nu c^+_{\nu+} c^+_{\nu-}) \, | \text{vacío}> \tag{16}$$

Vemos inmediatamente que V^2_ν es la probabilidad de que los estados $\nu +$ y $\nu -$ estén ocupados.

Los primeros estados exitados tienen 2 cuasi-partículas

$$| \nu\omega> = \alpha^+_\nu \beta^+_\omega \, | 0> \tag{17}$$

y, en consecuencia, existe un "gap" en el espectro mayor que 2Δ.

La exigencia de que $H_{20} = 0$ conduce a la ecuación

$$2 = G \sum_\nu \frac{1}{E_\nu} \tag{18}$$

La función de onda (16) tiene el inconveniente de que no es autoestado del número de partículas. Fijamos λ de modo que el valor medio del número de partículas n, sea el correcto.

$$n = <0 \, | \, n_{op} \, | \, 0> = 2 \sum_\nu V^2_\nu \tag{19}$$

En consecuencia, el problema de muchos cuerpos, generalmente complicado, se reduce a resolver simultáneamente (18) y (19), en el caso de la fuerza de apareamiento.

La validez de la aproximación hecha al despreciar H_{int} puede ser puesta a prueba en dos casos extremos. El primero es aquél en que $G \to 0$, para el cual la solución converge correctamente a la de partículas independientes (20). El segundo caso es el correspondiente a $\varepsilon_\nu = 0$ (capa degenerada) que puede ser resuelto exactamente 17), 4). Resulta de la comparación con la solución exacta que la aproximación de las cuasi-partículas implica un error del orden de $\frac{s}{\Omega}$, donde Ω es el número total de estados apareados en la capa. El error es independiente del número de partículas n pero crece con el número de cuasi-partículas s.

La gran ventaja de esta solución aproximada es que las cuasi-partículas pueden ser tratadas en muchos aspectos como partículas independientes (tienen un momento angular correspondiente al de las partículas independientes; la energía de excitación es la suma de las energías de las cuasi-partículas, etc.).

V. Efectos debidos a la competencia entre ambas fuerzas.

a) *Resultados cualitativos.* Hemos estudiado por separado los efectos de dos fuerzas distintas. La fuerza cuadripolar produce una deformación del campo común y, en consecuencia, niveles rotacionales de baja energía. Como representa una fuerza de rango grande, cada partícula de la capa abierta experimenta la interacción de todas las otras, de modo que la energía de unión resultante es proporcional a $\frac{1}{2}n(n-1)$. Por el contrario, la fuerza de apareamiento favorece estados con simetría esférica (con $I=0$). Los efectos de la fuerza de apareamiento son proporcionales al número de pares de partículas, es decir, proporcionales a n. Es posible explicar entonces la existencia de núcleos esféricos y de núcleos deformados. Para pequeños valores de n la fuerza de apareamiento predomina y el esquema de acoplamiento tipo "seniority" es una buena aproximación. A medida que crece n, aumenta la importancia de la fuerza cuadripolar, hasta que llega un momento en que los núcleos hacen una transición al esquema de acoplamiento "alineado".

Sin embargo, aunque uno u otra fuerza predomine, ambas se encuentran presentes en todo momento (*). En el caso de núcleos esféricos, si tratamos la fuerza cuadripolar en términos de una deformación no estable, aparecen niveles vibracionales colectivos cuya energía es menor que la del gap. El coeficiente de restitución C de estas vibraciones se calcula haciendo un desarrollo alrededor de la posición esférica de equilibrio.

$$E = E(Q=0) + \frac{1}{2} C\, Q^2 + \ldots \qquad (20)$$

El parámetro de masa B se calcula por medio del "crancking model". Las fórmulas para C y B son muy sencillas en el caso simple en que los niveles de partícula independiente estén degene-

(*) Desgraciadamente no ha sido posible obtener hasta el presente una solución exacta del problema con ambas fuerzas presentes.

rados. En este caso, la energía del nivel vibracional 5), 19), 21), 22) está dada

$$\sqrt{\frac{C}{B}} = G\Omega \left(1 - \frac{k}{2} \frac{\theta n}{G\Omega} \sum_{\nu,\omega} q^2_{\nu\omega}\right)^{1/2}$$

$$\theta n = \frac{n}{\Omega}\left(2 - \frac{n}{\Omega}\right) \qquad (21)$$

donde el gap es igual a $G\Omega$. La fórmula (21) nos dice que para $n < \Omega$ la energía del nivel vibracional disminuye al crecer *n*. La transición de núcleos esféricos a deformados se efectúa para un valor de *n* tal que $\sqrt{\frac{C}{B}} = 0$.

En el caso de núcleos deformados, la fuerza de apareamiento 19) explica muy satisfactoriamente las discrepancias mencionadas en la sección III. Es posible también estudiar las vibraciones alrededor de la posición de equilibrio axialmente simétrica, con métodos análogos a los aplicables a núcleos esféricos 22).

VI. Resultados cuantitativos.

Kisslinger y Sorensen 20) estudiaron cuantitativamente el caso de núcleos con una sola clase de partículas fuera de las capas cerradas, y obtuvieron resultados muy satisfactorios para las energías de los distintos niveles.

Bro-Jorgensen y Haatuft 23) estudiaron los niveles vibracionales en núcleos esféricos.

En el caso de núcleos deformados, Nilsson y Prior y Griffin y Rich calcularon los efectos de la fuerza de apareamiento en los momentos de inercia 24). Soloviev 25) estudió el espectro de pectro de excitaciones intrínsecas en núcleos deformados. Szymans- excitaciones intrínsecas en núcleos deformados. Szymanski y el autor 26) de esta nota, trataron las deformaciones del estado fundamental. Asimismo fueron calculadas las propiedades de las vibraciones que no conservan la simetría axial en núcleos deformados 22).

Debe notarse que para obtener los resultados anteriores fue necesario usar en todos los casos valores muy concordantes de G y k.

$$G \simeq \frac{27}{A} M_{ev} \qquad (22)$$

$$k \sim 2.0 + \; x\, 10^{-40}/A^{/73}\, \mathrm{Mev}$$

Todos estos resultados son altamente promisorios. Sin embargo, es necesario realizar más cálculos cuantitativos para poder acotar con más precisión la validez del modelo.

REFERENCIAS

1) A. Bohr. Introducción a la "Discusión sobre Estructura Nuclear"; Copenhague, junio de 1960.

2) K. A. Brueckner, N. M. Hugenholtz, V. F. Weisskopf, "The Many Body Problem"; Dunod, París (1959).
J. Goldstone, Curso dado en la Escuela de Verano Enrico Fermi, Varenna, 1960 (a aparecer en Nuovo Cimento).

3) M. Goeppert-Mayer y J. H. D. Jensen, "Elementary Theory of Nuclear Shell Structure"; Wiley, New York, 1955.
J. P. Elliot y A. M. Lane; Handbuch der Physik, pag. 241; Springer-Verlang, Berlín, 1957.

4) B. Mottelson, "The Many Body Problem"; Dunod, París, (1959).

5) B. Mottelson, Curso dado en la Escuela de Verano Enrico Fermi, Varenna, 1960 (a aparecer en Nuovo Cimento).

6) Z. Szymanski, Nuclear Physics 11 (1959) 454.
A. de Shalit, Phys. Rev., 113 (1959) 373.

7) D. Strominger, J. M. Hollander and G. T. Seaborg, Revs. Mod. Phys 30, (1958) 585.

8) S. Moskowski, Phys. Rev. 110 (1958) 403.
J. P. Elliot y B. H. Flowers, Proc. Roy. Soc. Lond. Ser A 229 (1955) 536.

9) I. Talmi, Curso dado en la Escuela de Verano Enrico Fermi, Varenna, 1960 (a aparecer en Nuovo Cimento).

10) B. F. Bayman, Comtes Rendus du Congrès International de Physique Nucléaire, Paris, jouillet 1958, pag. 740. Dunod, París (1959).

11) S. G. Nilsson, Dan. Mat-Fys. Medd. 29 (1955) 16.
K. Gottfried, Phys. Rev. 103 (1956) 1017.

12) R. E. Peierls y J. Joccoz, Proc. Phys. Soc. A. 70 (1957) 81.
F. Villars, Ann. Rev. Nucl. Sci. 7 (1957) 185.
J. J. Grriffin y J. A. Wheeler, Phys. Rev.

13) J. P. Elliot, Proc. Royal Society A 245 (1958) 128; 245 (1958) 562.
B. H. Flowers (y discusión subsiguiente), Proc. of the Rehovoth Conference on Nuclear Structure, Rehovoth, Israel, pag. 161; North Holland Publishing Co, Amsterdam (1958).
S. Moskowski, Phys. Rev. 110 (1958) 403.
M. Moshinnsky, a aparecer en Nuclear Physics.

14) A. Bohr, Dan. Mat. Fys. Medd. 26 (1952) 14.
A. Bohr y B. Mottelson, Dan. Mat. Fys. Medd. 27 (1957) 16.
S. Moszkowsky, Handbuch de Physik XXXIX, pag. 476, Springer-Verlag. Berlín, 1957.
J. P. Elliot, publicaciones de la Universidad de Rochester. NYO - 2271 (1958).

15) K. Alder, A. Bohr, T. Huns, B. Mottelson y A. Winther, Rev. Med. Phys. 23 (1956) 432.
B. Motteison y S. G. Nilsson, Mat. Fys. Skr. 1 (1959) 8.

16) D. R. Inglis, Phys. Rev. 96 (1954) 1059.
A. Bohr y B. Mottelson, Dan. Mat. Fys. Medd. 30 (1955) 1.

17) G. Racah, Proc. of the Rehovoth Conference on Nuclear Structure, Rehovoth, Israel, pág. 155; North Holland Publisming Co, Amsterdam (1958).

18) J. Bardeen, L. N. Cooper y J. A. Schrieffer, Phys. Rev., 108 (1957) 1175.
N. N. Bogolubov, JETP, URSS 34 (1958) 58 y 73; Nuovo Cimento, 7 (1958) 794.
J. G. Valatin, Nuovo Cimento, 7 (1958) 843.

19) S. T. Belyaev, Dan. Mat. Fys. Medd., 31 (1959) 11.

20) L. Kisslinger y R. Sorensen, a aparecer en Dans. Mat. Fys. Medd.

21) A. Kerman, a aparecer en Phys. Rev.

22) D. R. Bès, a aparecer en Dans. Mat. Fys. Medd.

23) J. Bro-Jorgensen y Haatuff, a aparecer en Dans. Mat. Fys. Medd.

24) S. G. Nilsson y O. Prior, a aparecer en Dans. Mat. Fys. Medd.
J. J. Griffin y M. Rich, Phys. Rev., Letters 3 (1959) 342.

25) V. G. Soloviev, publicaciones del Instituto Unido de Investigaciones Nucleares, Dubna, Rusia, D-545, 1318 (1960).

26) D. R. Bès y Z. Szymanki, a aparecer en Dans. Mat. Fys. Medd.