

* Centro Atómico Bariloche, Comisión Nacional de Energía Atómica.

FORMULACION DEL PROBLEMA Y METODO DE RESOLUCION

La ecuación diferencial gobernante de las vibraciones transversales libres de una placa es:

$$D\nabla^4 w(x,y,t) = -\rho h \partial^2 w(x,y,t) / \partial t^2 \quad (1)$$

y para el problema presente las correspondientes condiciones de contorno son:

$$\left. \begin{aligned} w(0,y,t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} w(0,y,t) &= \phi_1 D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} 0 \leq y \leq b$$

$$\left. \begin{aligned} w(a,y,t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} w(a,y,t) &= \phi_2 D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} 0 \leq y \leq c-r; \quad c+r \leq y \leq b$$

$$\left. \begin{aligned} w(x,0,t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} w(x,0,t) &= \phi_3 D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq a$$

$$\left. \begin{aligned} w(x,b,t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} w(x,b,t) &= \phi_4 D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq a \quad (2)$$

donde:

$w(x,y,t)$ es el desplazamiento transversal de la placa;

D es el coeficiente de rigidez a la flexión del material;

ρ es la densidad del material;

h es el espesor de la placa;

μ es el factor de Poisson;

$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ son los coeficientes de flexibilidad rotacional de cada lado.

Una solución exacta del sistema es al parecer imposible. Se propone para $w(x,y,t)$ una expresión de la forma:

$$w(x,y,t) = W(x,y) e^{i\omega t} \approx e^{i\omega t} \sum_{i,j=0}^{N,M} A_{ij} X_i(x) Y_j(y) \quad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} X_i(x) &= (\alpha_{1i} x + \alpha_{2i} x^2 + \alpha_{3i} x^3 + \alpha_{4i} x^4) x^i \\ Y_j(y) &= (\beta_{1j} y + \beta_{2j} y^2 + \beta_{3j} y^3 + \beta_{4j} y^4) y^j \end{aligned} \quad (4)$$

Nos limitaremos a la aproximación $M=1, N=1$. Tomando el primer término ($i=0, j=0$) de esa aproximación polinómica y reemplazando en las condiciones de contorno (2), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{10} &= 2\alpha_{20} \cdot a/k_1 & \alpha_{20} &= \text{arbitrario} \\
 \alpha_{30} &= \frac{-2\alpha_{20}}{a} \cdot \frac{3k_2+5k_1+k_1k_2+12}{k_1(k_2+6)} \\
 \alpha_{40} &= \frac{\alpha_{20}}{a^2} \cdot \frac{4k_2+4k_1+k_1k_2+12}{k_1(k_2+6)}
 \end{aligned}
 \quad \text{donde} \begin{cases} k_1 = a/\phi_1 D \\ k_2 = a/\phi_2 D \end{cases} \quad (5)$$

y también:

$$\begin{aligned}
 \beta_{10} &= 2\beta_{20} \cdot b/k_3 & \beta_{20} &= \text{arbitrario} \\
 \beta_{30} &= \frac{-2\beta_{20}}{b} \cdot \frac{3k_4+5k_3+k_3k_4+12}{k_3(k_4+6)} \\
 \beta_{40} &= \frac{\beta_{20}}{b^2} \cdot \frac{4k_4+4k_3+k_3k_4+12}{k_3(k_4+6)}
 \end{aligned}
 \quad \text{donde} \begin{cases} k_3 = b/\phi_3 D \\ k_4 = b/\phi_4 D \end{cases} \quad (6)$$

Análogamente, tomando el siguiente término ($i=1, j=1$) de la aproximación y reemplazando en las condiciones (2), se tiene:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= 0 & \alpha_{21} &= \text{arbitrario} \\
 \alpha_{31} &= -\frac{2\alpha_{21}}{a} \cdot \frac{(k_2+7)}{(k_2+8)} & \alpha_{41} &= \frac{\alpha_{21}}{a^2} \cdot \frac{(k_2+6)}{(k_2+8)}
 \end{aligned} \quad (7)$$

y también:

$$\begin{aligned}
 \beta_{11} &= 0 & \beta_{21} &= \text{arbitrario} \\
 \beta_{31} &= \frac{-2\beta_{21}}{b} \cdot \frac{(k_4+7)}{(k_4+8)} & \beta_{41} &= \frac{\beta_{21}}{b^2} \cdot \frac{(k_4+6)}{(k_4+8)}
 \end{aligned} \quad (8)$$

Con estos coeficientes nuestra aproximación satisface las condiciones de borde de la placa en ausencia de la perforación circular ($r=0$). La energía máxima de deformación de la placa es:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{D}{2} \int_{\text{sup}} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy + \\
 &+ \frac{D}{2} \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} \right) dy + \\
 &+ \frac{D}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b} \right) dx
 \end{aligned} \quad (9)$$

y la energía cinética máxima de la placa es:

$$T = \frac{\rho h}{2} w^2 \int_{\text{sup}} w^2 dx dy \quad (10)$$

Reemplazando en (9) y en (10) la expresión propuesta para w y aplicando la condición de minimización para la energía total de la placa $W=E-T$:

$$\frac{\partial}{\partial A_{ij}} (E-T) = 0 \quad (i, j = 0, 1) \quad (11)$$

(método de Ritz), se obtiene un sistema de ecuaciones lineales homogéneas en los coeficientes A_{ij} . La condición de no trivialidad de las soluciones (determinante del sistema lineal nulo), conduce a una ecuación no lineal en w cuyas soluciones son los valores de las frecuencias normales de vibración.

RESULTADOS

Se han implementado dos programas en FORTRAN IV para obtener las frecuencias normales de vibración con la formulación presente. Uno de ellos resuelve el problema tomando una sola función en (3), es decir, $M=N=0$, y el segundo emplea cuatro funciones ($M=N=1$). Del primero se obtiene entonces la frecuencia fundamental Ω_{00} , y del segundo, las frecuencias Ω_{00} , Ω_{01} , Ω_{10} y Ω_{11} , donde

$$\Omega_{ij} = \sqrt{\frac{\rho h}{D}} b^2 w_{ij}$$

En las TABLAS 1 y 2 se muestran los resultados obtenidos con $M=N=0$ para placas empotradas y simplemente apoyadas en los cuatro bordes rectilíneos ($\phi_i=0$ y $\phi_i=\infty$ respectivamente), y con la perforación circular centrada en el lado $x=a$ ($c/b=0.5$). Los valores límites correspondientes a ausencia de dicha perforación ($r/b=0$), se comparan con resultados conocidos en la literatura, observándose un excelente acuerdo.

La figura 2 corresponde al caso de una placa cuadrada ($a/b=1$) con la perforación circular también centrada en uno de los lados ($c/b=0.5$) de coeficiente ϕ_2 variable y con empotramiento rígido en el resto de los lados ($\phi_1=\phi_3=\phi_4=0$). Se ha representado en la misma la variación de Ω_{00} con r/b y con $k_2=a/\phi_2 D$, calculada con un solo término ($M=N=0$). La curva superior corresponde a empotramiento rígido de dicho borde ($\phi_2=0$), y la inferior al caso en que el mismo está simplemente apoyado ($\phi_2=\infty$). Se observa en el gráfico la manifestación de dos efectos opuestos en la variación de Ω_{00} con r/b . El hecho de quitarle impedimentos a la placa para su movimiento transversal, a medida que r/b aumenta, produce una disminución de Ω_{00} . Este efecto se evidencia en mayor medida cuando el borde en cuestión está rígidamente empotrado, es decir, con el mayor impedimento posible. Por otra parte, como al aumentar r/b disminuye la masa total de la placa, ello debe producir un incremento de la frecuencia de vibración. La simultaneidad de estos dos efectos da lugar a la existencia de un valor mínimo de Ω_{00} , el que es más pronunciado cuanto mayor es el empotramiento (menor ϕ_2). Se observa también que para el caso límite $r/b=0.5$, en que la perforación circular ocupa la totalidad del borde en cuestión, Ω_{00} no resulta totalmente independiente de ϕ_2 , como físicamente debería ocurrir. De todos modos, la dispersión máxima de sus valores para $r/b=0.5$ es menor que el 1.5%, lo cual es muy aceptable desde un punto de vista ingenieril.

En la TABLA 3, finalmente, se indican los valores de las cuatro frecuencias mencionadas para el caso de una placa cuadrada, estando simplemente apoyado el borde correspondiente a la perforación y los otros tres rígidamente empotrados. La perforación semicircular también en este caso está centrada en dicho lado ($c/b=0.5$). Se emplearon una y cuatro funciones en la ex

presión (3). Para $r/b=0$ se comparan en dicha tabla los valores obtenidos en Ω_{00} , Ω_{01} y Ω_{10} con resultados exactos y obtenidos por otros autores, verificándose un excelente acuerdo para Ω_{00} y satisfactorias coincidencias para las otras dos.

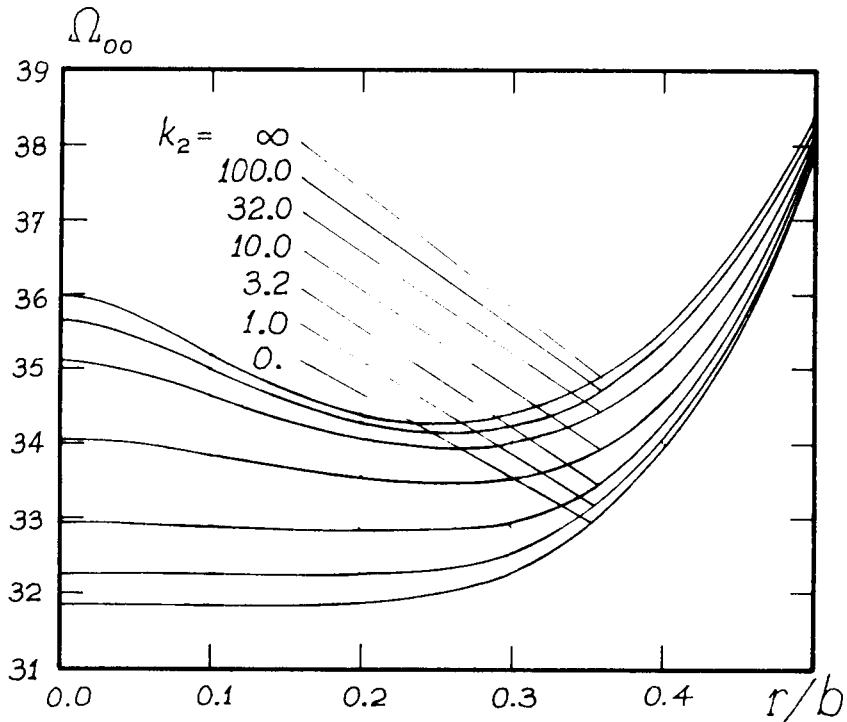


Figura 1

DISCUSION

La mayor fuente de error en la metodología presente debe radicar en el hecho que, a fin de obtener expresiones matemáticas sencillas de los coeficientes α_{ni} y β_{nj} , se aplican las condiciones de borde sin tener en cuenta la perforación circular, la que es considerada únicamente al integrar la función energía sobre la superficie de la placa. Esto agrega en el sistema impedimento a su vibración transversal, sobre todo en el caso de empotramiento del borde contiguo a la perforación, donde se obliga a la función a cumplir las condiciones $w=0$ y $\partial w/\partial n=0$ en todo ese borde como si dicha perforación no estuviese. Es de esperar entonces que los resultados obtenidos para placas simplemente apoyadas sean más confiables que los correspondientes a empotramiento rígido, como así también los obtenidos para agujeros pequeños. Como consecuencia de que el impedimento impuesto al movimiento es mayor que en la realidad, los resultados obtenidos con el método expuesto para las frecuencias de vibración son cotas superiores. Como se observa en la TABLA 3, con 4 términos esas cotas son menores que con 1 término, como era de esperar.

REFERENCIAS

1. P.A.A.Laura, L.Luisoni y C.Filipich: "A note on the determination of the fundamental frequency of vibration of thin, rectangular plates with edges possessing different rotational flexibility coefficients", Journal of Sound and Vibration 55 (1973) pp.327-333.

2. A.W.Leissa: "Vibration of Plates". NASA SP160 (1969).
3. P.A.A.Laura and R.Grossi: "Transverse vibrations of rectangular plates with edges elastically restrained against translation and rotation". Instituto de Mecánica Aplicada (1980).
4. P.A.A.Laura, L.Luisoni y R.Ficcadenti: "On the effect of different edge flexibility coefficient on transverse vibration of thin, rectangular plates". Journal of Sound and Vibration 57 (1978) pp.333-340.
5. A.W.Leissa: "The free vibration of rectangular plates", Journal of Sound and Vibration 31 (1973) pp.257-293.

a/b	r/b	Este trabajo Ω_{00}	Ref. [1] Ω_{00}	Ref. [5] Ω_{00}
3/2	0	27.046	27.0447	27.0098
	0.2	26.658		
	0.5	27.016		
1	0	35.999	36.	35.99
	0.2	34.420		
	0.5	38.317		
2/5	0	148.29	148.2813	147.8
	0.2	142.94		
	0.4	416.12		

TABLA 1. Frecuencia fundamental Ω_{00} para placas rígidamente empujadas.

a/b	r/b	Este trabajo Ω_{00}	Ref. [1] Ω_{00}	Ref. [5] Ω_{00}
3/2	0	14.263	14.2628	14.2561
	0.2	14.245		
	0.5	13.765		
1	0	19.748	19.7476	19.7392
	0.2	19.741		
	0.5	19.757		
2/5	0	71.596	71.596	71.5544
	0.2	73.028		
	0.4	111.54		

TABLA 2. Frecuencia fundamental Ω_{00} para placas simplemente apoyadas.

r/b	Frecuencia	Este trabajo	Ref. [4]	Ref. [5]
0	Ω_{00} (1x1)	31.867	31.8681	31.829
	Ω_{00} (4x4)	31.835		
	Ω_{01}	71.927	72.1051	71.084
	Ω_{10}	63.916		
	Ω_{11}	101.20		
0.2	Ω_{00} (1x1)	31.900		
	Ω_{00} (4x4)	31.895		
	Ω_{10}	63.978		
	Ω_{11}	99.602		
0.5	Ω_{00} (1x1)	37.934		
	Ω_{00} (4x4)	37.644		
	Ω_{01}	109.31		
	Ω_{10}	80.920		
	Ω_{11}	154.07		

TABLA 3.