

C. N. E. A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº 1	AÑO 1969

01.69.07

CNEA - 230

REPUBLICA ARGENTINA

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA

=

EFFECTO DE LOS PROCESOS NORMALES EN LA
CONDUCTIVIDAD TERMICA DE MUESTRAS
FINITAS DE AISLANTES

por

Hugo Nazareno, Gabriela Carabelli y Blas Alascio

=

BUENOS AIRES

1969

REPUBLICA ARGENTINA

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA



EFFECTO DE LOS PROCESOS NORMALES EN LA
CONDUCTIVIDAD TERMICA DE MUESTRAS
FINITAS DE AISLANTES

por

Hugo Nazareno, Gabriela Carabelli y Blas Alascio



BUENOS AIRES

1969

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION

EFFECTO DE LOS PROCESOS NORMALES EN LA CONDUCTIVIDAD TERMICA DE MUESTRAS FINITAS DE AISLANTES

Hugo Nazareno*, Gabriela Carabelli* y Blas Alascio**

RESUMEN

Se propone un modelo para el cálculo de la conductividad térmica de muestras finitas de aislantes. Se efectúan cálculos explícitos para dos geometrías diferentes y en los dos casos límites donde el camino libre medio por colisiones normales es mucho mayor y mucho menor, respectivamente, que las dimensiones características de la muestra.

* Instituto de Matemáticas, Astronomía y Física (Universidad Nacional de Córdoba).

** C.N.E.A. Centro Atómico Bariloche.

INTRODUCCION

El objeto del presente trabajo es estudiar la influencia de los procesos normales en la conductividad térmica de aislantes perfectos a bajas temperaturas.

Básicamente, se sigue el método cinético propuesto por Chambers (1); pero, a los efectos de tener en cuenta que los procesos normales no cambian el momento total de las partículas intervinientes, se supone que las colisiones relajan el sistema hacia una distribución de equilibrio desplazada. Se supone, también que la densidad de partículas que salen desde los bordes de la muestra, está dada por la distribución de equilibrio a la temperatura local (dispersión por contornos difusa). Se considera el cristal libre de imperfecciones y se desprecia el efecto de los procesos Umklapp en la región de temperaturas de interés.

Los experimentos llevados a cabo por Whitworth (2) en helio líquido, muestran que, similarmente a los fenómenos observados en experimentos de flujo de gases enrarecidos, por debajo de un cierto valor crítico del camino libre medio l , se establece un flujo tipo Poiseuille y el flujo aumenta cuando l decrece. En los experimentos de Whitworth se muestra que la conductividad térmica presenta un mínimo para l del orden d , siendo d alguna dimensión característica de la muestra (mínimo de Knudsen).

Estos experimentos indican que en cilindros, cuando l es mucho mayor que d (el diámetro), las colisiones normales no afectan sensiblemente el flujo de calor. Para valores menores de l pero siempre mayores que d , las colisiones normales modifican las direcciones de propagación de los fonones, en consecuencia un número mayor de ellos puede llegar a las paredes y el flujo de calor disminuye con l . En el límite opuesto, cuando l se torna suficientemente pequeño, resulta más difícil para los fonones que se propagan dentro de la muestra, llegar a los bordes. La situación resultante se asemeja a la del flujo de un fluido viscoso, en el hecho de que se establece un movimiento ordenado de las partículas. Este movimiento ordenado se describe por medio de un campo de velocidad $\vec{\lambda}(\vec{r})$ que depende de la posición dentro de la muestra.

Gurzhi (3) ha obtenido una ecuación diferencial válida para $l \ll d$. La forma de $\lambda(r)$ derivada de esta ecuación concuerda con la obtenida en este trabajo y puede ser usada para interpretar los resultados obtenidos por Whitworth.

Karchava y Sanikidze (4) han resuelto la ecuación de Boltzmann correspondiente al problema en el caso $l \gg d$, usando la aproximación de tiempo de relajación. Para $l \rightarrow \infty$ sus resultados coinciden con los de Casimir (5). Estos autores suponen que los procesos normales hacen tender la función de distribución hacia la distribución de equilibrio de Bose-Einstein $f^0(\epsilon_q)$ en lugar de hacia una distribución de equilibrio desplazada $f_\lambda = f_0(\epsilon_q - \hbar \vec{\lambda} \cdot \vec{q})$, como se supone en este trabajo. Ambas suposiciones resultan ser equivalentes para $l \gg d$.

En la sección II se describe el modelo usado para estudiar la influencia de los procesos normales en la conductividad térmica de muestras finitas de cristales aislantes perfectos. Se obtiene una ecuación integral para $\vec{\lambda}(\vec{r})$ que una vez resuelta permite calcular la conductividad térmica K para geometría y relación l/d arbitrarias.

En la sección III, se resuelve la ecuación integral para una lámina y para un cilindro en los casos límites $l \gg d$ y $l \ll d$, siendo d el espesor de la lámina y el diámetro del cilindro, respectivamente. En ambos límites estos resultados coinciden con los obtenidos en (3) y (4).

Formulación del Modelo

En esta sección se propone un modelo para el cálculo del flujo de calor en muestras aislantes finitas. Se supone que se ha establecido un gradiente térmico y que solamente procesos normales pueden ocurrir en el interior de la muestra.

El método cinético sugerido por Chambers, ha sido aplicado con éxito en la solución de problemas de transporte en metales, cuando los efectos de tamaño tienen que ser tenidos en cuenta (5). En el presente trabajo se aplica el mismo método para el problema de la conductividad térmica de aislantes. Se construye entonces la siguiente función de distribución:

$$f(\vec{r}, \vec{q}) = g(\vec{r}_B, \vec{q}) e^{-\frac{\vec{r} - \vec{r}_B}{l}} + \int_0^{S_0} f_\lambda(\vec{r}, \vec{q}) e^{-\frac{S_0 - s}{l}} \frac{ds}{l} \quad (\text{II.1})$$

El número de partículas con vector de onda $\vec{q}$, emitidas desde el borde en el punto $\vec{r}_B$, está dado por $g(\vec{r}_B, \vec{q})$ consecuentemente el primer término de (II.1) da el número de portadores emitidos desde $\vec{r}_B$ que llegan a $\vec{r}$ en la dirección dada por $\vec{q}$. El segundo término de (II.1) representa la suma de las

contribuciones de las partículas que, debido a las colisiones entran en la trayectoria definida por $\vec{r}$ y $\vec{q}$ (Ver figura 1).

Al escribir (II.1) se supone que la probabilidad de que una partícula viaje una distancia s sin chocar, es $\exp(-s/l)$, donde l es el camino libre medio.

Se supone también que el número de partículas que entran en un elemento de trayectoria ds en $\vec{r}$ con dirección $\vec{q}$, es $t_\lambda(\vec{r}, \vec{q}) ds/l$. La forma explícita de $f_\lambda(\vec{r}, \vec{q})$ se dió en la sección I.

Se puede mostrar por derivación que, para $g(\vec{r}_B, \vec{q})$ y $f_\lambda(\vec{r}, \vec{q})$ conocidas, la función de distribución dada por (II.1) satisface la siguiente ecuación de Boltzmann:

$$\vec{c} \cdot \nabla_{\vec{r}} f(\vec{r}, \vec{q}) = \frac{f_\lambda(\vec{r}, \vec{q}) - f(\vec{r}, \vec{q})}{\tau}$$

(II.2)

donde $\tau = l/c$

La velocidad de desplazamiento $\vec{\lambda}(\vec{r})$ se determina en forma similar a la seguida por Callaway (7), es decir, se impone conservación local de momento:

$$\int \frac{f_\lambda(\vec{r}, \vec{q}) - f(\vec{r}, \vec{q})}{\tau} \vec{q} d^3 q \quad (II.3)$$

Si la reflexión de los fonones en los bordes es totalmente difusa, $g(\vec{r}_B, \vec{q})$, puede tomarse igual a $f^0(\vec{r}_B, \vec{q})$, la distribución local de equilibrio.

Por integración parcial en (II.1) se obtiene:

$$f(\vec{r}, \vec{q}) = f^0(\vec{r}_B, \vec{q}) e^{-S_0/l} + f_\lambda(\vec{r}, \vec{q}) - f_\lambda(\vec{r}_B, \vec{q}) e^{-S_0/l} \int_0^{S_0} e^{S/l} \frac{df_\lambda}{ds} ds \quad (II.4)$$

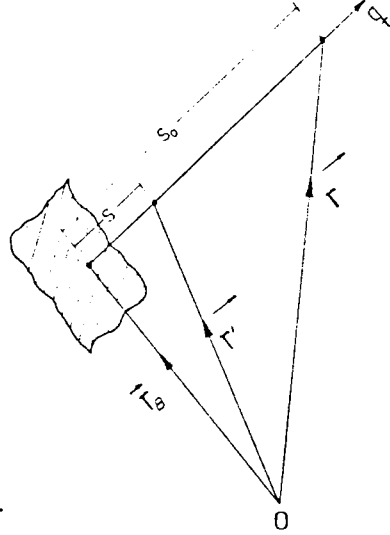


Fig. 1.- Se muestran los vectores $\vec{r}$, $\vec{r}_B$ y $\vec{q}$ usados en el texto.

para $\frac{\lambda}{c} \ll 1$ se puede aproximar:

$$f_{\lambda} = f^0 + \frac{\hbar}{kT} f^0 (f^0 + 1) \vec{\lambda} \cdot \vec{q} \quad (II.5)$$

por consiguiente (II.4) se reduce a:

$$f(\vec{r}, \vec{q}) - f_{\lambda}(\vec{r}, \vec{q}) = -\frac{\hbar}{kT} \vec{\lambda}(\vec{r}_B) \cdot \vec{q} f^0(f^0+1) e^{-S_0/1} \int_0^{S_0} e^{-\frac{S_0-S}{1}} \frac{df_{\lambda}}{dS} dS \quad (II.6)$$

por otra parte

$$\frac{df_{\lambda}}{dS} = \frac{df_{\lambda}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dS} + \frac{df_{\lambda}}{dT} \frac{\vec{\nabla}_T \cdot \vec{C}}{C} \quad (II.7)$$

usando (II.7) se obtiene para (II.6)

$$f(\vec{r}, \vec{q}) - f_{\lambda}(\vec{r}, \vec{q}) = \left[-\frac{\hbar}{kT} \lambda(\vec{r}_B) q_Z e^{-S_0/1} - 1(1 - e^{-S_0/1}) \frac{\hbar q_Z}{kT} \frac{dT}{dZ} \frac{C}{T} \right] f^0(f^0+1) - \frac{\hbar q_Z}{kT} f^0(f^0+1) \int_0^{S_0} e^{-\frac{S_0-S}{1}} \frac{d\lambda}{dS} dS \quad (II.8)$$

finalmente integrando por partes el último término de (II.8) se obtiene:

$$f(\vec{r}, \vec{q}) - f_{\lambda}(\vec{r}, \vec{q}) = -\frac{\hbar q_Z}{k_B T} \lambda(\vec{r}) - 1(1 - e^{-S_0/1}) \frac{\hbar q_Z}{kT} \frac{C}{T} \frac{dT}{dZ} f^0(f^0+1) + \frac{\hbar}{kT} q_Z f^0(f^0+1) \frac{1}{1} \int_0^{S_0} \lambda e^{-\frac{S_0-S}{1}} dS \quad (II.9)$$

entonces, la condición de conservación local de momento tiene la forma:

$$\lambda(\vec{r}) \int d^3q q_Z^2 f^0(f^0+1) - \frac{1}{1} \int d^3q \left[\int_0^{S_0} e^{-\frac{S_0-S}{1}} \lambda dS \right] q_Z^2 f^0(f^0+1) = -\frac{C}{T} \frac{dT}{dZ} \left[\int d^3q q_Z^3 f^0(f^0+1) - \int d^3q q_Z^2 f^0(f^0+1) e^{-S_p/1} \right] \quad (II.10)$$

esta ecuación determina $\vec{\lambda}(\vec{r})$ completamente

Nótese también de (II.3) que, en el caso en el cual τ es independiente del vector de onda, la corriente de calor puede ser calculada directamente de f_λ :

$$\vec{U} = \frac{1}{S_c} \iint dS_c d^3q f_\lambda(\vec{r}, \vec{q}) E_q \vec{C} \quad (\text{II.11})$$

Aplicación del Modelo a dos Geometrias Particulares

En esta sección se encuentran soluciones de (II.10) para una lámina de espesor d y para un cilindro de diámetro d en los casos límite: $1 \gg d$ y $1 \ll d$. Se supone que 1 no depende del número de onda q .

1) El caso de la lámina:

Se desea particularizar la ecuación (II.10) para el caso de una lámina de espesor d . Se supone que se aplica un gradiente de temperatura pequeña en la dirección z paralela a las caras. El eje y se toma perpendicular a las cara que están definidas por los planos $y=0$ e $y=d$. (Ver figura 2).

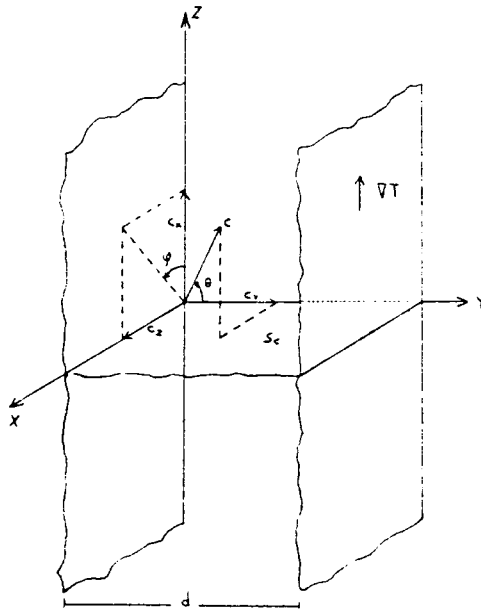


Fig. 2.- Geometría de la lámina. Se muestran las coordenadas usadas en el texto.

Para esta geometría (II.10) debe ser escrita en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{3} \lambda(y) - \frac{1}{l} \int_0^{2\pi} d\psi \left[\int_0^{\pi/2} d\theta \sin^3 \theta \cos^2 \theta \int_0^y e^{\frac{y-y'}{l \cos \theta}} \frac{\lambda(y')}{\cos \theta} dy' + \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \sin^3 \theta \cos^2 \theta \int_d^y e^{\frac{y-y'}{l \cos \theta}} \frac{\lambda(y')}{\cos \theta} dy' \right] \\ = -\frac{C}{T} \frac{dT}{dZ} \frac{4\pi}{3} + \frac{C}{T} \frac{dT}{dZ} \frac{1}{l} \int_0^{2\pi} d\psi \left[\int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos^2 \theta e^{-y/l \cos \theta} d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3 \theta \cos^2 \theta e^{-\frac{d-y}{l \cos \theta}} d\theta \right] \quad (\text{III.1}) \end{aligned}$$

Para $l \gg d$ se puede despreciar el segundo término de lado izquierdo; se obtiene entonces:

$$\lambda(y) \Big|_{l \gg d} \cong \frac{3}{4} \frac{C}{T} \frac{dT}{dZ} \left[y \ln \frac{y}{l} + (d-y) \ln \frac{d-y}{l} \right] \quad (\text{III.2})$$

Se puede ver fácilmente que el término despreciado es del orden $\frac{d}{l} (\ln \frac{d}{l})^2$

Para $l \ll d$ se puede despreciar el segundo término del lado izquierdo. Tendremos entonces, la siguiente ecuación integral a resolver:

$$\lambda(y) - \frac{3}{4l} \left[\int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \int_0^y e^{\frac{y-y'}{l \cos \theta}} \frac{\lambda(y')}{\cos \theta} dy' + \int_d^y e^{\frac{y-y'}{l \cos \theta}} \frac{\lambda(y')}{\cos \theta} dy' \right] = -\frac{C}{T} \frac{dT}{dZ} \quad (\text{III.3})$$

La solución de (III.3), válida para todos los puntos que se encuentran a distancias mayores que l del contorno, es:

$$\lambda(y) \Big|_{l \ll d} \cong -\frac{5}{2} \frac{C}{T} \frac{dT}{dZ} \frac{1}{l} y (d-y) \quad (\text{III.4})$$

Como se esperaba, en este límite $\lambda(y)$ aumenta cuando l decrece. Esto corresponde a flujo de fonones tipo Poiseuille.

11) El caso del cilindro

Se considera aquí un cilindro circular de diámetro d con un gradiente de temperatura paralelo al eje (Ver figura 3).

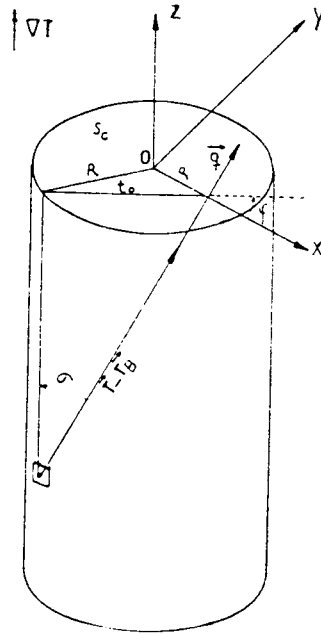


Fig. 3.- Geometría del cilindro. Se muestran las coordenadas usadas en el texto.

La ecuación (II.10) toma la forma:

$$\lambda(\rho) - \frac{3}{4\pi} \frac{1}{l} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos^2\theta \int_0^{t_0} \lambda e^{-\frac{t_0-t}{l \sin\theta}} \frac{dt}{\sin\theta} = \quad (\text{III.5})$$

$$= -l \frac{C}{T} \frac{dT}{dZ} + l \frac{C}{T} \frac{dT}{dZ} \frac{3}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta \cos^2\theta e^{-t_0/l \sin\theta} d\theta$$

donde

$$t_0 = \rho \cos\varphi + \sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2\varphi}$$

y R es el radio del cilindro.

Para $l \gg R$ se puede despreciar, como en el caso de la lámina, el segundo término del lado izquierdo en la ecuación (III.5). Entonces se obtiene la siguiente expresión para la velocidad de desplazamiento

$$\lambda(\rho) \Big|_{l \gg R} = \frac{3}{2} \frac{C}{U} \frac{dT}{dZ} R \left\{ E(\rho/R; \pi/2) + \theta \left(\frac{R}{l} \ln \frac{R}{l} \right) \right\} \quad (\text{III.6})$$

donde $E(\rho/R, \frac{\pi}{2})$ es la integral elíptica de segunda clase (8).

Las fórmulas (III.2) y (III.6) concuerdan con aquellas obtenidas en la ref. (4). Nótese también que cuando l tiende a infinito, de (III.6) se obtiene la bien conocida fórmula de Casimir (5) para la conductividad térmica de un cilindro.

$$K = \frac{1}{3} C_v c d$$

Para $l \ll d$ la solución de (III.5) es similar a la obtenida para la lámina en el mismo límite.

$$\lambda(\rho) \int_{l \ll d} \approx -\frac{5}{4} \frac{C}{T} \frac{dT}{dz} \frac{1}{l} (R^2 - \rho^2) \quad (\text{III.7})$$

nuevamente esta solución corresponde a flujo tipo Poiseuille.

Los resultados obtenidos en esta sección concuerdan cualitativamente con los resultados experimentales de conductividad térmica de cilindros conteniendo He II, obtenidos por Whitworth.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- CHAMBERS, R. G.; Proc. Phys. Soc., A65, 458, (1952).
- 2.- WHITWORTH, R. W., Proc. Roy. Soc., A246, 390 (1958).
- 3.- GURZHI, R. N., Sov. Phys. JETP, 19, 490, (1964).
- 4.- KARCHAVA, T. A. and SANIKIDZE, D. G., Sov. Phys. JETP, 23, 1122, (1966)
- 5.- CASIMIR, H. D. G., Physica 5, 495, (1938).
- 6.- CHAMBERS, R. G., Proc. Roy. Soc., 202, 378, (1950).
- 7.- CALLAWAY, J., Phys. Rev., 113, 1046, (1959).
- 8.- JAHNKE and EMDE, Tables of functions with formulee and curves, Dover Publications N. Y., 4th. Edition, pag. 54.

