

09.53 01

C.N.E.A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº 1	AÑO 1953

REPUBLICA ARGENTINA

PUBLICACIONES

de la

Comisión Nacional de la Energía Atómica

SERIE FISICA

VOL. 1 - Nº 1

CARLOS ALBERTO MALLMANN

METODO DE LAS COINCIDENCIAS
SU APLICACION AL ESTUDIO DE ESQUEMAS DE
DESINTEGRACION BETA

ESPECTROMETRO BETA DOBLE DE COINCIDENCIAS
TEORIA

BUENOS AIRES
1953

**METODO DE LAS COINCIDENCIAS
SU APLICACION AL ESTUDIO DE ESQUEMAS DE
DESINTEGRACION BETA**

**ESPECTROMETRO BETA DOBLE DE COINCIDENCIAS
TEORIA**

**SERIE FISICA
VOL. 1 - Nº 1**

REPUBLICA ARGENTINA

PUBLICACIONES

de la

Comisión Nacional de la Energía Atómica

SERIE FISICA

VOL. 1 — Nº 1

CARLOS ALBERTO MALLMANN

METODO DE LAS COINCIDENCIAS
SU APLICACION AL ESTUDIO DE ESQUEMAS DE
DESINTEGRACION BETA

ESPECTROMETRO BETA DOBLE DE COINCIDENCIAS
TEORIA

BUENOS AIRES
1953

BIBLIOGRAFIA

- (1) W. BOTHE y H. v. BAYER, Göttinger Nachr. 1, 195, 1935.
- (2) N. FEATHER, Proc. Camb. Phil. Soc. 36, 224 (1940).
- (3) N. FEATHER, J. KYLES y R. W. PRINGLE, Proc. Phys. Soc. 61, 466 (1948).
- (4) C. FOWLER y R. SHREFFLER, Rev. Sc. Instr. 21, 740 (1950).
- (5) R. KATZ, R. D. HILL y M. GOLDBABER, Phys. Rev. 78, 9 (1950).
- (6) L. V. GROSEEV y L. YA SHAFTVALOV, Dokl. Akad. N. SSSR. 68, 2, 257 (1949).
- (7) R. E. BELL y R. L. GRAHAM, Phys. Rev. 86, 212 (1952).
- (8) K. SIEGBAEN, Ark. f. Fysik, 4, 10 (1952).

ESPECTROMETRO BETA DOBLE DE COINCIDENCIAS

TEORIA

por CARLOS ALBERTO MALLMANN

De la Comisión Nacional de la Energía Atómica
(Recibido el 6 de mayo de 1953)

SUMMARY

The theory of a double magnetic beta coincidence spectrometer which fulfills the fundamental conditions for coincidence beta spectrometers is developed.

The magnetic field $\vec{H}$ referred to cylindrical coordinates (z, r, Φ) is $H_z = H_r = 0$; $H_\Phi = A/r$ where A is a constant.

Each of the beta spectrometers components of the double beta coincidence spectrometer, has in theory a gathering power of 8 % of 4π and a base resolving power 100 if the diameter of the radioactive specimen is 0.6 cm. and the distance between source and focus is 54 cm.

§ 1. Introducción.

El análisis de las posibilidades del método de las coincidencias utilizando un espectrómetro beta de coincidencias⁽¹⁾, muestra que este instrumento debe cumplir las siguientes condiciones:

- 1) Independencia en la observación de las energías en los sistemas espectrómetro-detector.
- 2) Sistemas espectrómetro-detector con gran poder colector, buen poder resolutor y flexibilidad en el ajuste de estos.
- 3) Posibilidad de intercalar suficiente material absorbente entre la fuente radioactiva y los detectores para reducir a un

valor despreciable los impulsos producidos por los rayos gamma.

4) Colocación óptima de los detectores para hacer despreciable el número de coincidencias cósmicas.

5) Detector fuera del campo magnético.

6) Posibilidad de observar correlaciones angulares.

Fheather et. al. (5) fueron los primeros en construir un espectrómetro beta doble de coincidencias. Posteriormente se construyeron simples (2) (3) y dobles (4) (6) (7) (8) (9). Del estudio de estos distintos tipos de espectrómetros beta de coincidencias y de los espectrómetros beta aún no adaptados para su uso como de coincidencias resulta que el que mejor cumple las condiciones anteriores es el desarrollo por O. Kofoed-Hansen, J. Lindhard y O. B. Nielsen (10) adaptado a su uso como espectrómetro beta doble de coincidencias (11).

En lo que sigue se desarrolla la teoría de un instrumento de este tipo.

§ 2. Campo Magnético

En el tipo de espectrómetro beta considerado, las componentes del campo magnético $\vec{H}$ referido a un sistema de coordenadas cilíndricas (z, r, ϕ) son

$$H_z = 0; H_r = 0; H_\phi = A/r. \quad (1)$$

Se logra un campo tal, con un electroimán de varias piezas polares como el de la figura (1).

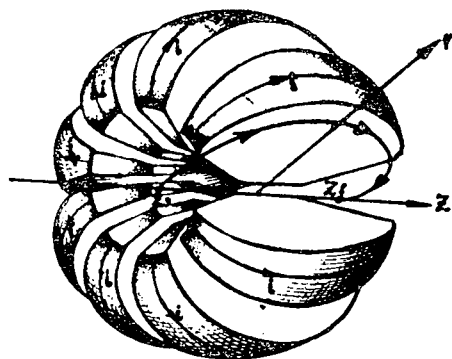


FIG. 1
Electroimán que permite producir el campo magnético (1)

El conjunto de las piezas polares constituye un toro seccionado cuyo eje de simetría cilíndrica es z . Cada pieza polar lleva un arrollamiento que resultaría, en el mismo símil, un segmento del arrollamiento de un toro.

El campo magnético es nulo fuera del toro y varía según A/r en el interior del toro cuya sección, según un plano $\Phi = \text{cte.}$, puede elegirse arbitrariamente.

Se supone para lo que sigue que en la superficie límite del toro el campo magnético pasa en forma discontinua del valor A/r a cero. Esto equivale a despreciar las líneas de fuerza dispersas cuya influencia analizaremos en el § 12.

§ 3. Vector potencial magnético.

El vector potencial magnético $\vec{A}$ cumple la relación

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{H}. \quad (2)$$

Expresando esta condición en coordenadas cilíndricas y suponiendo $A_z = A_z(r)$; $A_r = 0$ y $A_\Phi = 0$ resulta

$$A_z(r) = A \ln r/b \quad (3)$$

donde b es una constante arbitraria.

El vector potencial magnético así deducido se puede utilizar sólo en el interior del toro y no en la superficie límite del mismo.

§ 4. Ecuaciones tridimensionales de las trayectorias de partículas cargadas.

H. O. W. Richardson⁽¹²⁾ estudió detenidamente las ecuaciones tridimensionales de las trayectorias de partículas cargadas en este campo magnético. Se dan a continuación los resultados obtenidos en dicho trabajo necesarios para el estudio de nuestro caso particular.

El Lagrangiano relativista para una partícula de masa en reposo m_0 y carga e , en unidades electromagnéticas, moviéndose con velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético de vector potencial magnético $\vec{A}$, es

$$L = m_0 c^2 (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) + e \left(\vec{v} \cdot \vec{A} \right) \quad (4)$$

donde c = velocidad de la luz y $\beta = \frac{v}{c}$.

$v^2 = \dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2$ es una constante del movimiento por que la fuerza de Lorentz es perpendicular a la velocidad (energía constante).

Reemplazando (3) en (4) resulta

$$L = m_0 c^2 (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) + e A z \ln r/b. \quad (5)$$

De las ecuaciones de Lagrange se deduce

$$\dot{z} = \frac{Ae}{m} \ln r/a \quad (6)$$

si $r=a$ cuando $\dot{z}=0$ y $m = m_0/\sqrt{1 - \beta^2}$

$$\ddot{r} = -\frac{Ae}{m} \frac{\dot{z}}{r} + p\Phi^2/m^2 r^3 \quad (7)$$

y

$$p\Phi = \text{cte.} \quad (8)$$

Introduciendo (6) en (7) e integrando se obtiene

$$\dot{r} = v \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{r}\right)^2 - \left(\frac{\ln r/a}{K}\right)^2} \quad (9)$$

donde

$$K = -\frac{mv}{Ae} = -\frac{p}{Ae} = -\frac{(B\rho)}{A} \quad (10)$$

y

$$a_0 = \frac{p\Phi}{p}. \quad (11)$$

Se define ahora el ángulo ψ por

$$\dot{z}/v = \cos \psi \quad (12)$$

que es el ángulo que forma el vector velocidad $\vec{v}$, con el eje de las z positivas. Se obtiene entonces

$$z = a K \int \frac{\cos \psi e^{-K \cos \psi}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \frac{e^{2K \cos \psi}}{\sin^2 \psi}}} d\psi + z_0 \quad (13)$$

$$r = a e^{-K \cos \psi} \quad (14)$$

$$\phi = \frac{a_0 K}{a} \int \frac{e^{K \cos \psi} d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \frac{e^{2K \cos \psi}}{\sin^2 \psi}}} + \phi_0. \quad (15)$$

Estas son las ecuaciones buscadas.

§ 5. Trayectorias para partículas con $p_\phi = 0$.

Para partículas con $p_\phi = 0$ de (11) se deduce que $a_0 = 0$. Introduciendo ésta en (15) se obtiene

$$\phi = \phi_0 \quad (16)$$

que dice que la trayectoria es plana.

Reemplazando $a_0 = 0$ en (13) se obtiene una ecuación que junto con la (14) son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria plana

$$r = a e^{-K \cos \psi} \quad (14)$$

$$z = a K \int \cos \psi e^{-K \cos \psi} d\psi + z_0. \quad (17)$$

Estas se transforman en ⁽¹⁰⁾

$$z = a K U(K; \psi) + z_0 \quad (18a)$$

$$r = a e^{-K \cos \psi} \quad (18b)$$

si se supone que $z = z_0$ para $\psi = \pi$ y se designa por $U(K; \psi)$ a

$$U(K; \psi) = \int_{\pi}^{\psi} \cos \psi e^{-K \cos \psi} d\psi. \quad (19)$$

La función $U(K; \psi)$ se puede obtener mediante un desarrollo en serie de funciones de Bessel ⁽¹⁰⁾

$$U(K; \psi) = iJ_1(iK) (\pi - \psi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (i)^{n-1} [J_{n-1}(iK) - J_{n+1}(iK)] \sin n\psi. \quad (20)$$

A partir de este desarrollo es fácil deducir que el movimiento es periódico en la dirección del eje z . Efectivamente

$$z(\psi + 2\pi) - z(\psi) = 2\pi a K i J_1(iK) \quad (21)$$

es el período puesto que para puntos sobre el eje z distantes en este valor, se repiten los mismos valores de r

$$r(\psi + 2\pi) - r(\psi) = 0. \quad (22)$$

Considerando sólo $0 \leq \psi \leq 2\pi$ se puede hacer un estudio completo de las trayectorias, puesto que para otros valores de ψ las propiedades se repetirán de acuerdo al período mencionado.

Los puntos característicos de éstas se dan en la Tabla (1) y se pueden observar en la Figura (2) que representa

ψ	(z ; r)
0	($-i J_1(iK) a K \pi + z_0$; $r_{\text{mínimo}} = a e^{-k}$)
$\pi/2$	($a K U(K; \pi/2) + z_0$; a)
π	(z_0 ; $r_{\text{máximo}} = a e^k$)
$3/2 \pi$	($a K U(K; 3/2 \pi) + z_0$; a)
2π	($i J_1(iK) a K \pi + z_0$; $r_{\text{mínimo}} = a e^{-k}$).

TABLA 1
Puntos característicos de las trayectorias planas

una trayectoria cuyas constantes características son $K=0.6$; $z_0=\Delta z_0$; $a=1$.

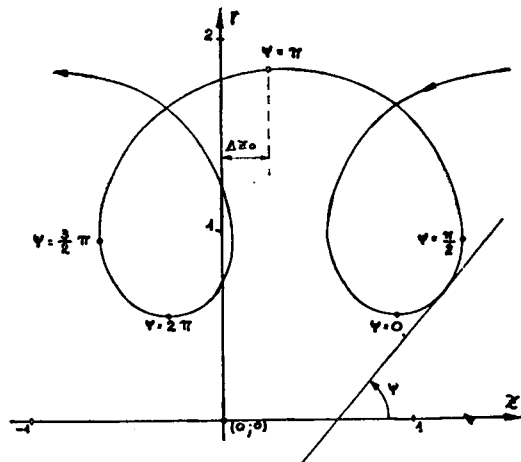


FIG. 2
Trayectoria con $K = 0.6$; $z_0 = \Delta z_0$ y $a = 1$.

De las (18) se deduce que:

I) para distintos valores de a , dejando K y z_0 constantes se obtiene una familia monoparamétrica de trayectorias homeomorfas respecto del punto $(z_0; 0)$. En efecto

$$\frac{\sqrt{r_1^2(\psi) + [z_1(\psi) - z_0]^2}}{\sqrt{r_2^2(\psi) + [z_2(\psi) - z_0]^2}} = \frac{a_1}{a_2} \quad (23)$$

donde $(z_1(\psi); r_1(\psi))$ es un punto de la trayectoria definida por los parámetros K ; $a=a_1$; z_0 y $(z_2(\psi); r_2(\psi))$ es un punto de la trayectoria definida por los parámetros K ; $a=a_2$; z_0 .

A esta familia la llamaremos simétrica por que sus trayectorias tienen como eje de simetría a la recta $z=z_0$.

II) variando z_0 en Δz_0 y dejando K y a constantes toda la trayectoria se desplaza paralelamente al eje z en Δz_0 .

III) al variar K y dejar a y z_0 constantes varía la forma de la trayectoria.

La familia menoparamétrica más general de trayectorias de igual forma ($K=\text{cte.}$) está dada por

$$z = a K U(K; \psi) + z_0(a) \quad (24)$$

$$r = a e^{-K \cos \psi} \quad (25)$$

donde z_0 varía en función de a . A ésta la llamaremos asimétrica por no gozar de las propiedades de simetría de la familia con K , z_0 constantes y a variable.

Las familias con K constante son las más importantes puesto que corresponden al caso de un cierto campo magnético, actuando sobre partículas de igual impulso pero distintas condiciones iniciales. Son estas las que interesa enfocar.

Por esta razón, en lo que sigue se considera K constante.

§ 6. Familia de trayectorias para partículas monoenergéticas emitidas por una fuente puntual ubicada en $(z_s; 0)$.

La sección arbitraria del toro cuyos segmentos forman las piezas polares del electroimán, con planos $\Phi = \text{cte.}$ determina en ellos la zona en que el campo magnético varía según A/r y la zona en que es nulo.

Toda partícula emitida por la fuente puntual ubicada en $(z_s; 0)$ describirá una trayectoria rectilínea hasta entrar al campo magnético.

Si la *curva límite* de la sección del toro (ver Fig. (3)) se da en función del parámetro ψ_s por

$$z_{ls} = z_s + r_{ls}(\psi_s) \operatorname{ctg} \psi_s \quad (26a)$$

$$r_{ls} = r_{ls}(\psi_s) \quad (26b)$$

el punto de *entrada* al campo magnético de una partícula cuyo ángulo de emisión es ψ_s , será $(z_{ls}(\psi_s); r_{ls}(\psi_s))$. Como además estas partículas tienen $p_\Phi = 0$ la trayectoria dentro del campo magnético continuará siendo plana y estará dada por las (18), siempre que se considere el punto y el ángulo bajo el cual entran al campo magnético. Estas dos condiciones determinan las trayectorias de las partículas en el campo magnético. En efecto, para ellas se debe de cumplir

$$z_{ls}(\psi_s) = a K U(K; \psi_s) + z_0 \quad (27a)$$

$$r_{ls}(\psi_s) = a e^{-K \cos \psi_s} \quad (27b)$$

De (27b) se deduce que

$$a = a(\psi_s) = r_{ls}(\psi_s) e^{K \cos \psi_s} \quad (28)$$

y de (27a) que

$$z_0 = z_s(\psi_s) - a K U(K; \psi_s)$$

que tomando en cuenta las (26) y la (28) da

$$z_0 = z_0(\psi_s) = z_s + r_{ls}(\psi_s) \operatorname{ctg} \psi_s - r_{ls}(\psi_s) K e^{K \cos \psi_s} U(K; \psi_s). \quad (29)$$

Reemplazando (28) y (29) en las (18) se obtienen las ecuaciones de las trayectorias

$$z = z_{ls}(\psi_s) + r_{ls}(\psi_s) K e^{K \cos \psi_s} F_1(K; \psi; \psi_s) \quad (30a)$$

$$r = r_{ls}(\psi_s) e^{-K(\cos \psi - \cos \psi_s)} \quad (30b)$$

donde

$$F_1(K; \psi; \psi_s) = U(K; \psi) - U(K; \psi_s). \quad (31)$$

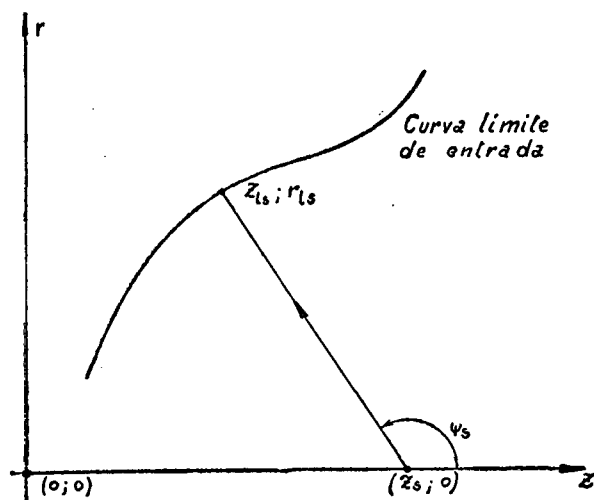


FIG. 3
Curva límite de entrada (arbitraria)

Las (30) dan, para K constante (energía de las partículas y campo magnético constantes) y distintos valores de ψ_s (diferentes ángulos de emisión) una familia de trayectoria que en general es asimétrica. Solo en el caso particular en que $z_0(\psi_s) = b_1 = \text{cte.}$ y por lo tanto que

$$r_{ls}(\psi_s) = \frac{z_s - b_1}{eK \cos \psi_s KU(K; \psi_s) - \text{ctg } \psi_s} \quad (32)$$

la familia de trayectorias resulta simétrica.

§ 7. Enfoque.

Las partículas describirán las trayectorias dadas por las (30) hasta que salgan del campo magnético. Fuera de él, las trayectorias son rectilíneas y tangentes a las trayectorias (30) en los puntos de salida.

Para que haya enfoque todos los rayos emergentes deben de pasar por el foco $(z_f; 0)$, es decir, que la curva límite del campo magnético debe ser el lugar geométrico de los puntos de tangencia de las tangentes a las (30) trazadas desde $(z_f; 0)$. Nótese que la curva límite del campo magnético en los planos $\phi = \text{cte.}$ no queda definida solo por $(z_{ls}; r_{ls})$.

Si se llama ψ_f al ángulo entre la partícula emergente y el eje de las z positivas (ver Fig. 4) la condición anterior per-

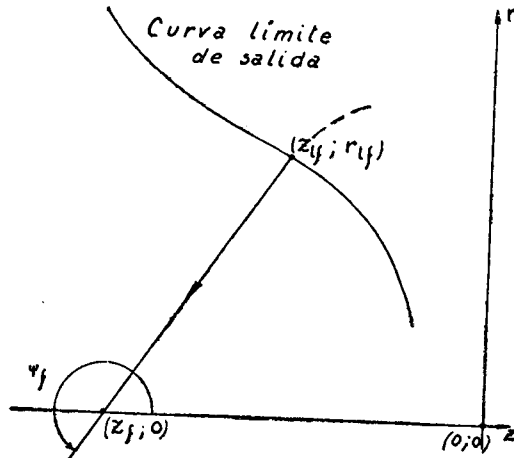


FIG. 4
Curva límite de salida (arbitraria)

mite representar a la *curva límite de salida* en función del parámetro ψ_f por

$$z_{lf} = z_{lf}(\psi_f) = z_f + r_{lf}(\psi_f) \operatorname{ctg} \psi_f \quad (33a)$$

$$r_{lf} = r_{lf}(\psi_f) \quad (33b)$$

y exige que

$$z_{lf}(\psi_f) = z_{ls}(\psi_s) + r_{ls}(\psi_s) K e^{K \cos \psi_s} F_1(K; \psi_f; \psi_s) \quad (34a)$$

$$r_{lf}(\psi_f) = r_{ls}(\psi_s) e^{-K(\cos \psi_f - \cos \psi_s)} \quad (34b)$$

De las (33a) y (34) se deduce la siguiente relación implícita entre ψ_s y ψ_f .

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \psi_f e^{-K \cos \psi_f} - K U(K; \psi_f) &= \operatorname{ctg} \psi_s e^{-K \cos \psi_s} - \\ &- K U(K; \psi_s) + e^{-K \cos \psi_s} \frac{z_s - z_f}{r_{ls}(\psi_s)} \end{aligned} \quad (35)$$

que según como sea la expresión de $r_{ls}(\psi_s)$ permite dar en forma explícita

$$\psi_f = \psi_f(\psi_s) \quad (36)$$

o calcularla en forma numérica.

En ambos casos se logra entonces obtener la curva límite de salida $(z_{lf}; r_{lf})$ mediante las (34).

La curva límite de la sección del toro queda completada con:

I) la trayectoria dentro del campo magnético de las partículas cuyo ángulo de emisión, ψ_s , es el mínimo de los considerados.

II) la trayectoria dentro del campo magnético de las partículas cuyo ángulo de emisión, ψ_s , es el máximo de los considerados.

Evidentemente es importante que la curva límite de la sección del toro siga a la teórica en la parte de las curvas límites de entrada y salida, no lo es en sus dos otras partes, I) y II), siempre que la curva límite real deje a estas partes en su interior.

En la Figura (5) se da la curva límite de salida para el caso en que: $z_s = -z_f = 1$; $r_{ls}(\psi_s) = z_s \sin \psi_s$; $K=1$ y $90^\circ \leq \psi_s \leq 180^\circ$.

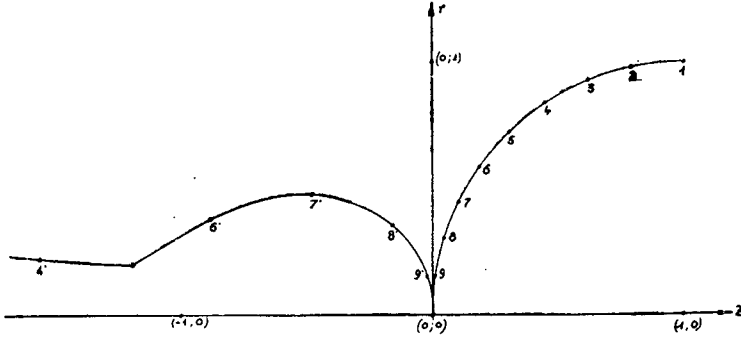


FIG. 5

Curva límite de salida para:
 $z_s = -z_f = 1$; $r_{ls} = z_s \sin \psi_s$; $K=1$
 y $90^\circ \leq \psi_s \leq 180^\circ$

§ 8. Formación de imagen

Se ha visto que la imagen de una fuente puntual $(z_s; 0)$ es el punto $(z_f; 0)$.

Falta ahora averiguar cual es la imagen de una fuente de dimensiones finitas. Para ello se dividen en dos grupos los rayos emitidos por ella:

- a) los que tienen $p_\Phi = 0$
- b) los que tienen $p_\Phi \neq 0$.

Los del grupo a), son los emitidos en un plano $\Phi = \text{cte}$. En éste consideramos como puntos de emisión a los:

- I) $(z_s + \delta z_s; 0)$ y
- II) $(z_s; \delta r)$

puesto que conocida la imagen de éstos, es fácil hallar la de un punto genérico $(z_s + \delta z_s; \delta r)$ como veremos más adelante.

a) I) La partícula emitida en $(z_s + \delta z_s; 0)$ que entra al campo magnético en $(z_{ls}; r_{ls})$ forma un ángulo $\psi_s + \delta \psi_{sz}$ con el eje de las z positivas, siendo

$$\delta \psi_{sz} = \frac{\sin^2 \psi_s}{r_{lf}(\psi_f)} \cdot e^{-K(\cos \psi_f - \cos \psi_s)} \delta z_s \quad (37)$$

(ver Figura (6)).

Estas condiciones determinan la trayectoria posterior de la partícula. Se debe de cumplir:

$$z_{ls}(\psi_s) = (a + \delta a) K U(K; \psi_s + \delta \psi_{sz}) + z_0(a + \delta a) \quad (38a)$$

$$r_{ls}(\psi_s) = (a + \delta a) e^{-K \cos(\psi_s + \delta \psi_{sz})} \quad (38b)$$

que tomando en cuenta la (26a), permite deducir que

$$(a + \delta a) = r_{ls}(\psi_s) e^{K \cos(\psi_s + \delta \psi_{sz})}$$

y que

$$z_0(a + \delta a) = z_{ls}(\psi_s) - r_{ls}(\psi_s) e^{K \cos(\psi_s + \delta \psi_{sz})} K U(K; \psi_s + \delta \psi_{sz}).$$

Desarrollando en serie las expresiones en $(\psi_s + \delta \psi_{sz})$ y despreciando los términos de segundo y mayor grado en $\delta \psi_{sz}$, se obtienen las siguientes ecuaciones de las trayectorias

$$z_{\delta \psi_{sz}} = z_{ls}(\psi_s) + K r_{ls}(\psi_s) e^{K \cos \psi_s} [F_1(K; \psi; \psi_s) - K \sin \psi_s F_1(K; \psi; \psi_s) \delta \psi_{sz} - \cos \psi_s e^{-K \cos \psi_s} \delta \psi_{sz}] \quad (39a)$$

$$r_{\delta \psi_{sz}} = r_{ls}(\psi_s) e^{-K(\cos \psi - \cos \psi_s)} (1 - K \sin \psi_s \delta \psi_{sz}). \quad (39b)$$

Se trata ahora de encontrar el punto $(z_{lf} + \Delta z_{lf}; r_{lf} + \Delta r_{lf})$ en que esta trayectoria corta a la curva límite de salida y el ángulo de salida $\psi_f + \delta \psi_{fz}$ que forma con el eje de las z positivas (ver Figura (6)).

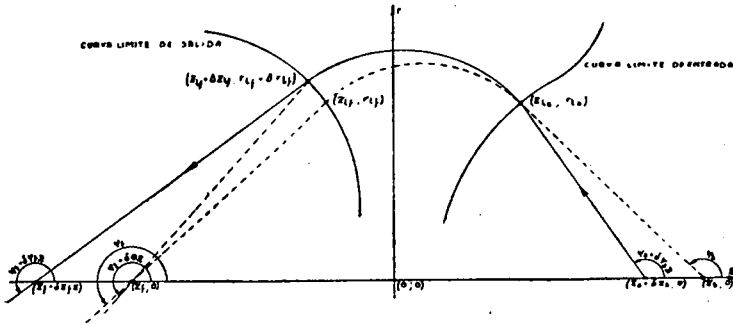


FIG. 6

Trayectoria de una partícula emitida en el plano r, z por el punto $(z_s + \delta z_s; 0)$. Las curvas límites y trayectorias son arbitrarias, no corresponden a un caso real

Δz_{lf} y Δr_{lf} se pueden expresar como incrementos tomados sobre la curva límite de salida

$$\Delta z_{lf} = z_{lf}(\psi_f) - z_{lf}(\psi_f + \delta \vartheta_z) \quad (40a)$$

$$\Delta r_{lf} = r_{lf}(\psi_f) - r_{lf}(\psi_f + \delta \vartheta_z) \quad (40b)$$

y como incrementos sobre las trayectorias (39)

$$\Delta z_{\delta \psi_{sz}} = z_{\delta \psi_{sz}}(K; \psi_s; \psi_f) - z_{\delta \psi_{sz}}(K; \psi_s; \psi_f + \delta \psi_{fz}) \quad (41a)$$

$$\Delta r_{\delta \psi_{sz}} = r_{\delta \psi_{sz}}(K; \psi_s; \psi_f) - r_{\delta \psi_{sz}}(K; \psi_s; \psi_f + \delta \psi_{fz}) \quad (41b)$$

Igualando (40a) con (41a) y (40b) con (41b) se pueden deducir

$$\delta \psi_{fz} = \delta \psi_{fz}(\delta \psi_{sz})$$

$$\delta \vartheta_z = \delta \vartheta_z(\delta \psi_{sz})$$

que despreciando los términos de segundo y mayor orden de los incrementos en los desarrollos en serie, son

$$\delta \psi_{fz} = \left[\frac{r_{lf}'(\psi_f)}{r_{lf}(\psi_f)} F_2 + \frac{\sin \psi_s}{\sin \psi_f} \right] \delta \psi_{sz} \quad (42)$$

$$\delta \vartheta_z = K \sin \psi_f F_2 \delta \psi_{sz} \quad (43)$$

donde

$$r_{lf}'(\psi_f) = \frac{dr_{lf}(\psi_f)}{d\psi_f}$$

y

$$F_2 = \sin \psi_f \cos \psi_s e^{-K(\cos \psi_s - \cos \psi_f)} - \cos \psi_f \sin \psi_s + \\ + K e^{K \cos \psi_f} \sin \psi_f \sin \psi_s F_1(K; \psi_f; \psi_s). \quad (44)$$

Además se puede demostrar que

$$\delta z_{fz} = \frac{r_{lf}(\psi_f)}{\sin^2 \psi_f} (\delta \psi_{fz} - \delta \vartheta_z) \quad (45)$$

y por lo tanto que teniendo en cuenta las (37), (42) y (43), es

$$\delta z_{fz} = F_3 \delta z_s \quad (46)$$

donde

$$F_3 = \frac{\sin^2 \psi_s}{\sin^2 \psi_f} e^{-K(\cos \psi_f - \cos \psi_s)} \left\{ F_2 \left[\frac{r_{lf}'(\psi_f)}{r_{lf}(\psi_f)} - K \sin \psi_f \right] - \frac{\sin \psi_s}{\sin \psi_f} \right\} \quad (47)$$

a) II) La partícula emitida en $(z_s; \delta r)$ que entra al campo magnético en $(z_{ls}; r_{ls})$ forma un ángulo $\psi_s + \delta \psi_s$ con el eje de las z positivas, siendo

$$\delta \psi_s = - \frac{\sin \psi_s \cos \psi_s}{r_{lf}(\psi_f)} e^{-K(\cos \psi_f - \cos \psi_s)} \delta r. \quad (48)$$

Esto indica que se puede suponer que ha sido emitida por $(z_s + \delta z_s; 0)$ donde

$$\delta z_s = - \operatorname{ctg} \psi_s \delta r. \quad (49)$$

Por lo tanto esta partícula cortará al eje de las z del lado del foco en $(z_f + \delta z_{fr}; 0)$ donde

$$\delta z_{fr} = - F_3 \operatorname{ctg} \psi_s \delta r. \quad (50)$$

Faltaría ahora conocer la imagen de un punto genérico $(z_s + \delta z_s; \delta r)$. Con las suposiciones hechas, es fácil comprender, que si la partícula entra al campo magnético en $(z_{ls}; r_{ls})$ cortará al eje de las z del lado del foco en $(z_f + \delta z_f; 0)$ donde

$$\delta z_f = \delta z_{fz} + \delta z_{fr} = F_3 (\delta z_s - \delta r \operatorname{ctg} \psi_s). \quad (51)$$

Los del grupo b) son los que no han sido emitidos en un plano $\phi = \text{cte}$. Entrarán al campo magnético en un punto $(z_{ls}; r_{ls})$ perteneciente a la curva límite de entrada de un cierto plano $\phi = \text{cte}$. (Plano r_1, z en la Figura (7)).

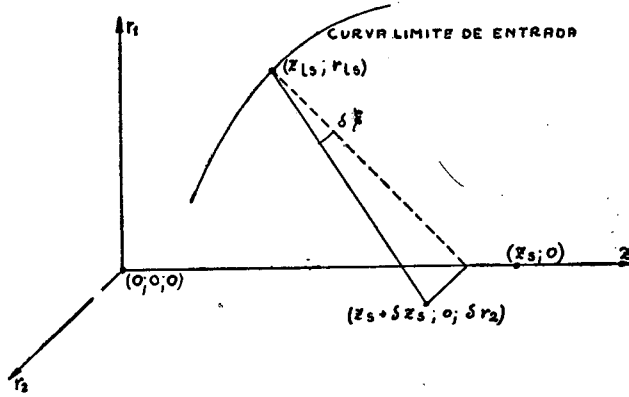


FIG. 7
Caso de partícula con $p_\phi \neq 0$.

El punto emisor podrá considerarse en general como el $(z_s + \delta z_s; 0; \delta r_2)$ y por lo tanto la trayectoria forma un ángulo $\delta \xi$ con el plano $\phi = \text{cte}$.

$$\delta \xi = \frac{\sin \psi_s}{r_{ls}(\psi_s)} \delta r_2 \quad (52)$$

y su proyección sobre el plano $\phi = \text{cte}$. un ángulo $\psi_s + \delta \psi_s$ con el eje de las z positivas.

De lo anterior se deduce que para resolver este caso hay que integrar las (13) y (15). Sin hacerlo, se puede resolver en una primera aproximación, suponiendo que la trayectoria de la partícula sobre un plano que contiene al eje z y que gira con ella, es igual a la de una partícula con $p_\phi = 0$ sobre un plano $\phi = \text{cte}$. En este caso, tomando en cuenta la (8), se puede afirmar que

$$\delta r_{2f} = \frac{\sin \psi_s}{\sin \psi_f} \delta r_2 \quad (53)$$

donde δr_{2f} es la distancia entre el punto de intersección de la trayectoria con el plano z, r_2 y el eje z .

§ 9. Dispersión.

Se han considerado hasta ahora partículas cargadas monoenergéticas de una cierta energía E . Interesa ahora conocer la

imagen de partículas emitidas en $(z_s; 0)$ cuya energía es la anterior incrementada en δE . Para éstas la constante K tiene el valor $K + \delta K$.

Las trayectorias de estas partículas recién al entrar al campo magnético se diferencian de las consideradas en los § 6 y 7. Cortarán a la curva límite de salida en un punto $(z_{lf} + \Delta z_{lf}; r_{lf} + \Delta r_{lf})$ formando un ángulo $\psi_f + \delta \psi_{fK}$ con el eje de las z positivas (ver Figura (8)).

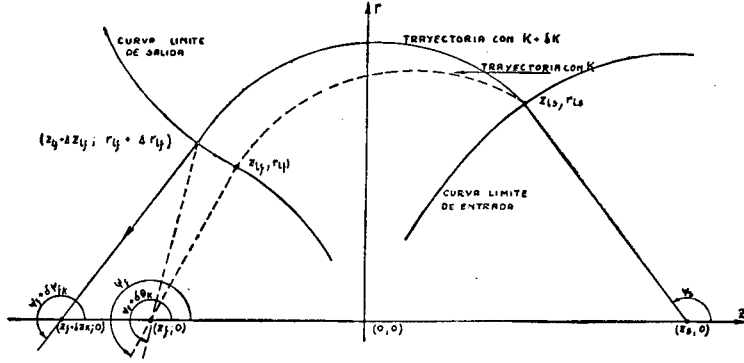


FIG. 8

Trayectoria de una partícula emitida en el plano z, r por el punto $(z_s; 0)$ y cuyo valor de K es $K + \delta K$. Las trayectorias y curvas límites son arbitrarias, no corresponden a un caso real

Δz_{lf} y Δr_{lf} se pueden expresar como incrementos tomados sobre la curva límite de salida (40) y como incrementos sobre la trayectoria variada $(K + \delta K)$

$$\Delta z_{lf} = \left(\frac{\partial z}{\partial K} \right) \delta K + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi_f} \right) \delta \psi_{fK} \quad (54a)$$

$$\Delta r_{lf} = \left(\frac{\partial r}{\partial K} \right) \delta K + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi_f} \right) \delta \psi_{fK}. \quad (54b)$$

Igualando (40a) con (54a) y (40b) con (54b) se pueden obtener

$$\delta \psi_{fK} = \delta \psi_{fK}(\delta K)$$

$$\delta \vartheta_K = \delta \vartheta_K(\delta K)$$

que despreciando en los desarrollos en serie los términos de se-

segundo y mayor grado en los incrementos, son

$$\delta \psi_{fK} = \left\{ \frac{r_{lf}'(\psi_f)}{r_{lf}(\psi_f)} [\cos \psi_f (\cos \psi_s - \cos \psi_f) - F_4] - \frac{\cos \psi_s - \cos \psi_f}{\sin \psi_f} \right\} \frac{\delta K}{K} \quad (55)$$

$$\delta \vartheta_K = \sin \psi_f [\cos \psi_f (\cos \psi_s - \cos \psi_f) - F_4] \delta K \quad (56)$$

donde

$$F_4 = \sin \psi_f e^{K \cos \psi_f} [F_1(K; \psi_f; \psi_s) (1 + K \cos \psi_s) + K \frac{\partial}{\partial K} F_1(K; \psi_f; \psi_s)]. \quad (57)$$

Teniendo en cuenta la (45), resulta

$$\delta z_{fK} = F_5 z_f \frac{\delta K}{K} \quad (58)$$

donde

$$F_5 = \frac{r_{lf}(\psi_f)}{z_f \sin^2 \psi_f} \left\{ [\cos \psi_f (\cos \psi_s - \cos \psi_f) - F_2] \left[\frac{r_{lf}''(\psi_f)}{r_{lf}'(\psi_f)} - K \sin \psi_f \right] - \frac{\cos \psi_s - \cos \psi_f}{\sin \psi_f} \right\}. \quad (59)$$

Se puede afirmar por lo tanto que la dispersión γ es:

$$\gamma = \frac{\delta z_{fK}}{\delta p} = \frac{F_5}{p} z_f = \frac{F_5 \cdot z_f}{e(B\rho)}. \quad (60)$$

§ 10. Poder resolutor de base.

En lo que sigue se supone que la ventana del detector es igual a la imagen de la sustancia radiactiva (*), es decir, que, según el eje z tiene una longitud

(*) Este no es el tamaño óptimo de la ventana.

$$2 \delta z_f = 2 \delta z_{fz} + 2 \delta z_{fr} \quad (51)$$

(donde δr se toma sobre el plano bisector del entrehierro considerado) y según el eje r_2 (perpendicular al plano bisector del entrehierro considerado)

$$2 \delta r_{2f} = 2 \frac{\sin \psi_s}{\sin \psi_f} \delta r_2 \quad (52)$$

y que está ubicada de tal manera que coincida con ella. El ancho de la base del perfil de línea resulta ser entonces

$$\Delta p = \frac{4 \delta z_f}{\gamma} \quad (61)$$

y por lo tanto el poder resolutor de base es

$$P = \frac{P}{\Delta p} = \frac{F_s z_f}{4 F_s [\delta z_s - \text{ctg } \psi_s \cdot \delta r]} \quad (62)$$

Observemos que P es una función de ψ_s y que, salvo para fuentes de simetría cilíndrica, es también función del entrehierro considerado.

§ 11. Poder colector.

Con las suposiciones hechas en el § 10 sobre el detector y su posición el poder colector, ω_{ψ_s} , para ángulos de emisión comprendidos entre $\psi_s - \frac{\Delta \psi_s}{2}$ y $\psi_s + \frac{\Delta \psi_s}{2}$ está dado por

$$\omega_{\psi_s} = \frac{\Omega_{\psi_s}}{4\pi} = \frac{n\varphi}{4\pi} \sin \psi_s \Delta \psi_s \quad (63)$$

donde

n es el número de entrehierros

φ es la abertura angular de los mismos.

En primera aproximación se puede decir entonces que el

poder colector total es

$$\omega = \frac{\Omega}{4\pi} = \frac{n\varphi}{4\pi} [\cos(\psi_{s \min.}) - \cos(\psi_{s \max.})] \quad (64)$$

donde

$\psi_{s \min.}$ es el menor de los ángulos de emisión considerados.

$\psi_{s \max.}$ es el mayor de los ángulos de emisión considerados.

Decimos que es una primera aproximación por que la ventana del detector no puede cumplir con la condición de ser igual a las distintas imágenes de la sustancia radioactiva (distintos ψ_s), condición para la cual es válida la fórmula.

§ 12. *Influencia de las líneas de fuerza dispersas.*

Se han considerado hasta ahora las propiedades de un espectrómetro ideal. En realidad, el campo magnético en la superficie límite del toro no pasa en forma discontinua del valor A/r a cero, sino que lo hace en forma continua. Esta parte del campo magnético, aun no considerada, actúa sobre las partículas produciéndoles desviaciones adicionales que perturban el enfoque. Es por esta causa que se debe procurar de reducir al mínimo las líneas de fuerza dispersas y el recorrido de las partículas en ellas. Esto se logra construyendo espectrómetros con

- I) entrehierros de poca abertura angular
- II) trayectorias perpendiculares a las curvas límites de entrada y salida.

§ 13. *Determinación de $r_{ts}(\psi_s)$; $r_{tf}'(\psi_f)$ y K para los espectrómetros beta componentes del espectrómetro beta doble de coincidencias.*

Para que las trayectorias sean perpendiculares a las curvas límites de entrada y salida, éstas debieran ser circunferencias con centros $(z_s; 0)$ y $(z_f; 0)$ y radio $R=z_s$ y $R=-z_f$ respectivamente.

Es obvio decir que, como una de las curvas límites se puede dar en forma arbitraria a ésta la elegimos circunferencia. Por lo tanto

$$z_{ls}(\psi_s) = z_s(1 + \cos \psi_s) \quad (65a)$$

$$r_{ls}(\psi_s) = z_s \operatorname{sen} \psi_s. \quad (65b)$$

Se ha visto en el § 7, que a partir de $r_{ls}(\psi_s)$ como dato y para cada valor de K se puede mediante las (35) y (34) calcular la curva límite $z_{lf}(\psi_f)$; $r_{lf}(\psi_f)$. En nuestro caso la fórmula (35) se transforma en

$$\operatorname{ctg} \psi_f e^{-K \cos \psi_f} - K U(K; \psi_f) = \operatorname{ctg} \psi_s e^{-K \cos \psi_s} - K U(K, \psi_s) + \frac{2 e^{-K \cos \psi_s}}{\operatorname{sen} \psi_s} \quad (66)$$

suponiendo que $z_f = -z_s$ que, como veremos más adelante, no restringe la generalidad.

Numéricamente se puede obtener a partir de la (66)

$$\psi_f = \psi_f(\psi_s) \quad (67)$$

que reemplazada en las (34) nos da la curva límite de salida. Se pide que ésta sea una circunferencia y para ello se debe de cumplir

$$r_{lf}(\psi_f) = r_{ls}(\psi_s).$$

Esto se cumple (34b) cuando la relación entre ψ_f y ψ_s está dada por

$$\cos \psi_f = \cos \psi_s$$

es decir que $\psi_f = \psi_s$, caso sin sentido, o que

$$\psi_f = -\psi_s. \quad (68)$$

Pero, el hecho es, que la relación entre ψ_f y ψ_s ya está determinada por la (66) y lo único que se puede hacer es determinar

el óptimo valor de K para el cual la (67) se aproxime lo más posible a la (68).

Para ello, dejando ψ_s constante se determina el valor de K para el cual se cumpla (68). Haciendo esto mismo para distintos valores de ψ_s se obtiene el siguiente resultado (ver la Tabla (2)).

$\psi_s = -\psi_f$	K	(a)	(b)	$\frac{(b)}{(a)}$	$\frac{K \cdot (b)}{(a)}$
90°	0.610	1.00	0.24	0.240	0.146
100°	0.585	1.13	0.22	0.194	0.113
110°	0.565	1.29	0.20	0.115	0.088
120°	0.545	1.52	0.17	0.112	0.061
130°	0.535	1.84	0.14	0.076	0.041
140°	0.515	2.31	0.10	0.043	0.022
150°	0.510	3.12	0.09	0.027	0.014
160°	0.505	4.70	0.08	0.014	0.008

$$\Sigma_1 = 0,861 \quad \Sigma_2 = 0,493$$

TABLA 2

donde (a) es el valor numérico del primer miembro de (66) y por lo tanto también del segundo miembro, para los valores de K ; ψ_s y ψ_f indicado en las dos primeras columnas.

(b) es un número proporcional a la tangente del ángulo que forman las curvas que representan al primero y segundo miembro de la (66) para el valor de ψ_s ; ψ_f respectivamente, indicado en la primera columna y distintos valores de K , en el punto para el que K adquiere el valor indicado en la segunda columna.

Evidentemente es entonces $\frac{(b)}{(a)}$ un número que indica en primera aproximación, cuál es la magnitud de la desviación de la (67) respecto de la (68) en el punto $\psi_s = -\psi_f$ y para variaciones de K . Asignándole ahora a cada K el peso $\frac{(b)}{(a)}$ se puede determinar el óptimo de K , buscado, para un cierto intervalo de ψ_s .

En nuestro caso y para $90^\circ \leq \psi_s \leq 170^\circ$ el K óptimo es

$$K_0 = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} \cong 0,57.$$

Se eligen estos ángulos por que I) se quiere que los rayos beta emitidos con un $\psi_s < 90^\circ$ entren en un segundo espectrómetro beta coaxial con éste, que junto con el primero forman el espectrómetro beta doble de coincidencias, II) para $\psi_s > 170^\circ$ la

contribución de estos ángulos al poder colector es muy pequeña y la construcción del espectrómetro se complica.

Todavía se podría pensar que haciendo $z_f = -k \cdot z_s$ ($k > 0$) en vez de $z_f = -z_s$, se puede obtener una mejor aproximación de la (67) a la (68). Se puede ver que esto no es posible.

Determinados r_{ls} y K se puede hallar $\psi_f = \psi_f(\psi_s)$ cuya representación gráfica junto con la de la (68) se da en la Figura (9).

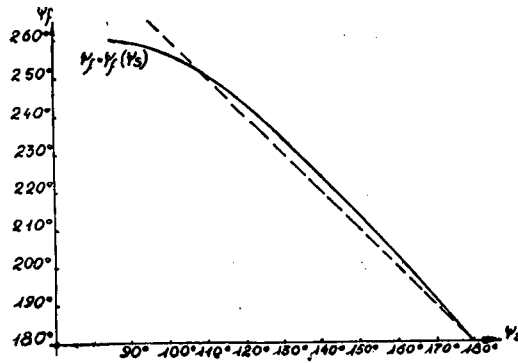


FIG. 9
Representación de $\psi_f(\psi_s)$.

Teniendo la función $\psi_s = \psi_s(\psi_f)$ se calcula la curva límite de salida cuya representación gráfica es la de la Figura 10.

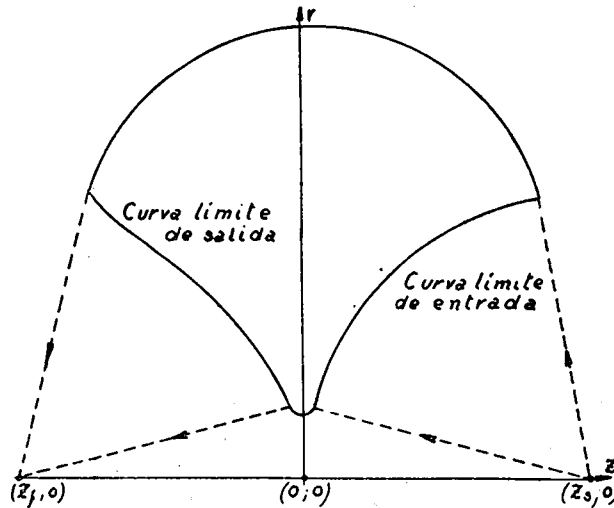


FIG. 10
Curvas límites de los espectrómetros beta componentes del espectrómetro beta doble de coincidencias

§ 14. *Fórmulas definitivas para los espectrómetros beta componentes.*

Introduciendo las (86) en las fórmulas finales de los incisos 8; 9 y 10 se obtiene:

Formación de imagen:

a) I)

$$\delta z_{fz} = F_3^* \cdot \delta z_s \quad (46')$$

con

$$F_3^* = \frac{\sin^2 \psi_s}{\sin^2 \psi_f} e^{-K(\cos \psi_f - \cos \psi_s)} \left\{ F_2 \left[\frac{r_{lf}^{*'}(\psi_f)}{r_{lf}^*(\psi_f)} - K \sin \psi_f \right] - \frac{\sin \psi_s}{\sin \psi_f} \right\} \quad (47')$$

a) II)

$$\delta z_{fr} = -F_3^* \operatorname{ctg} \psi_s \delta r \quad (50')$$

$$\delta z_f = F_3^* (\delta z_s - \delta r \operatorname{ctg} \psi_s) \quad (51')$$

b)

$$\delta r_{2f} = \frac{\sin \psi_s}{\sin \psi_f} \cdot \delta r_2 \quad (53')$$

Dispersión:

$$\gamma = \frac{F_5^* \cdot z_f}{e(B\rho)} \quad (60')$$

con

$$F_5^* = \frac{1}{\sin \psi_f} \left\{ [\cos \psi_f (\cos \psi_s - \cos \psi_f) - F_2] \left[\frac{r_{lf}^{*'}(\psi_f)}{r_{lf}^*(\psi_f)} - K \sin \psi_f \right] - \frac{\cos \psi_s - \cos \psi_f}{\sin \psi_f} \right\} \quad (59')$$

Poder resolutor de base:

$$P = \frac{F_5^* \cdot z_f}{4F_3^* [\delta z_s - \delta r \operatorname{ctg} \psi_s]} \quad (62')$$

§ 15. Conclusiones.

Puede tenerse una idea de las propiedades de este espectrómetro mediante la observación de la Tabla (3).

ψ_s	(c)	$(P \cdot d)_1$	$(P \cdot d)_2$
100°	0.98	31	182
110°	0.94	28	80
120°	0.86	25	44
130°	0.76	22	25
140°	0.64	21	18
150°	0.50	19	11

TABLA 3

Poderes colector y resolutor en función del ángulo de emisión ψ_s .

en que:

(c) es un número proporcional a $\omega \psi_s$.

$(P \cdot d)_1$ es el producto del poder resolutor de base P por el diámetro d en cm. del disco plano de la muestra radioactiva para el caso en que ésta se coloca perpendicularmente al plano bisector del entrehierro considerado y con centro en z_s .

$(P \cdot d)_2$ es el producto del poder resolutor de base P , por el diámetro d en cm. del disco plano de la muestra radioactiva para el caso en que ésta se coloca perpendicularmente al eje y con centro en z_f . Estos valores han sido tabulador para $z_s = -z_f = 27$ cm.

De ellos se deduce que los espectrómetros componentes presentan muchas posibilidades distintas, según cual es la posición y forma de la muestra radioactiva, cuales los ángulos de emisión que se emplean y finalmente cual es el número de entrehierros que se utiliza.

En el caso particular en que el diámetro d del disco plano de la muestra radioactiva es de 0.6 cm y que se coloca perpendicular al eje z con centro en z_s en un instrumento de ocho entrehierros cuyo ángulo diedro es de 10°, los cálculos dan un poder colector de aproximadamente 8 % de 4π y poder resolutor de base del orden de 100.

Dos espectrómetros como el descrito, con eje z y muestra radioactiva comunes, constituyen un espectrómetro beta doble de coincidencias que cumple con las cinco condiciones fundamentales del § 1.

BIBLIOGRAFIA

- (1) C. A. MALLMANN. *Rev. Unión Mat. Argentina*, 16, 3 (1953).
- (2) C. FOWLER y R. SHREFFLER. *Rev. Sc. Instr.* 21, 740 (1950).
- (3) R. KATZ, R. D. HILL y M. GOLDHABER. *Phys. Rev.* 78, 9, 1950.
- (4) N. FEATHER, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 36, 224 (1940).
- (5) N. FEATHER, J. KYLES y R. W. PRINGLE. *Proc. Phys. Soc.* 61, 466 (1948).
- (6) L. V. GROSHOV y L. YA SHAVTVALOV. *Dokl. Akad. N. SSSR. Moscow & Leningrad.* 68, (Nº 2) 257 (1949).
- (7) R. E. BELL y R. L. GRAHAM. *Phys. Rev.* 86, 212 (1952).
- (8) K. SIEGBAHN, *Ark. f. Fysik*, 4, Nr. 10, 1952.
- (9) C. A. MALLMANN. Espectrómetro beta selenoidal doble con campo magnético fijo. Inédito.
- (10) O. KOFOED-HANSEN, J. LINDHARD y O. B. NIELSEN. *Kgl. Danske Vid. Sel. Mat. Fys. Medd.*, 25, Nº 16 (1950).
- (11) C. A. MALLMANN, *Physica. Proceedings of the International Conference on Beta and Gamma Radioactivity. Amsterdam, 1-6 September 1952.*
- (12) H. O. W. RICHARDSON. *Proc. Phys. Soc.* 59, 792 (1947).