

C. E. A. Publicaciones	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº 12	AÑO 1968

01.68.09

CORRECCIONES POR TIEMPO MUERTO EN
ESTADISTICAS DE CONTAJE

C. Castro Madero
R. Corcuera
H. Schilman

1968

CNEA-Re-26

Corrección por tiempo muerto en mediciones de α -Feynmann:

Las mediciones tipo Feynmann se realizan en un reactor subcrítico y tienen por objeto obtener distintos parámetros del mismo, en particular la constante de decaimiento del flujo pronto (α), a partir de la distribución estadística de las cuentas de un detector de neutrones, situado cerca del núcleo. (1)

El modelo más simple de esta estadística es la distribución binomial negativa (NBD), que es un caso límite de la de Polya (2). Una forma sencilla de verificar el equipo de medición consiste en tomar la estadística de una fuente radiactiva cualquiera, que sigue la distribución de Poisson (PD) (3).

A pesar de todo esto, se observa experimentalmente que la distribución obtenida no es una PD, cosa que es fácilmente verificable por medio del test de los χ^2 (4). Esto se debe a la existencia de un "tiempo muerto" del sistema de contaje, que impide contar un pulso separado del anterior por un tiempo menor que δt .

Es de interés entonces una estimación de como afecta este TM a las medidas en el reactor, y si la desviación es importante, como hacer la corrección para reproducir la distribución original.

Al respecto, existe un trabajo (5) donde este problema se trata con un formalismo muy conveniente, por lo que lo adoptamos: Supongamos la existencia de una serie de registros j ($0 \leq j < \infty$), y llamamos N_j al contenido del registro j . Podemos escribir la siguiente ecuación:

$$N_k^e = N_k + \sum_{i>k} N_i \pi(i \rightarrow k) - \sum_{j<k} N_k \pi(k \rightarrow j)$$

siendo N_k^e el contenido experimental del registro k (modificado por la presencia del TM), y los $\pi(i \rightarrow j)$ las probabilidades de transición del registro i al j .

El problema se reduce ahora a encontrar una expresión para estas probabilidades. En el trabajo citado (5) se da sin demostración la expresión siguiente:

$$\pi(k \rightarrow k-1) = k\Delta \quad ; \quad \pi(k \rightarrow k-m) = 0 \text{ para } m > 1$$

Existen varias objeciones a esta expresión:

a) Según ella, la probabilidad de transición del registro i al 0 no es nula, y si en un intervalo de tiempo arriba al equipo una sola cuenta, cómo puede perderse por tiempo muerto?, (exceptuando un despreciable efecto de "borde", es decir que haya habido otra cuenta en el momento justo en que se abrió la compuerta y llegó la que debía ser contada en el intervalo δt). Esto último tiene una probabilidad muy pequeña por que exige no sólo la coincidencia de dos cuentas, sino que ambas coincidan además con la apertura de la compuerta, por lo que si la probabilidad de superposición es proporcional a Δ , esta última debe ser proporcional a Δ^2 .

b) Tal como se define la magnitud Δ como pérdida relativa de contaje,

debiera depender sólo de la tasa de conteaje verdadera, y experimentalmente se ve que no es así, sino que depende además del intervalo de tiempo de muestreo del equipo.

Estas dificultades nos han conducido a la búsqueda de una expresión diferente para las probabilidades de transición, resultando:

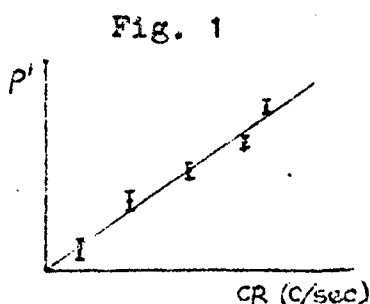
$$(\text{ver ApI}) \pi(k \rightarrow k-1) = k(k-1)p'/\bar{n} \quad ; \quad \pi(k \rightarrow k-m) = 0 \quad \text{para } m > 1$$

de aquí, como puede verse en el Ap II, se calcula p' sobre la base de mediciones de un proceso Poisson, con la fórmula:

$$p' = \frac{V^e - 2 + \sqrt{1 + \bar{n}^e(1-V^e)}}{n^e + V^e - 3} \approx 1/2 (1-V^e) \quad \text{para } n^e \gg 2$$

la expresión aproximada de p' coincide con el valor hallado por D. Babala (6). En las tablas I y II se observan datos experimentales de una PD (N_k^e), los mismos corregidos con las fórmulas (8) y (9') del Ap. II (N_k^c), los correspondientes a una PD con $\bar{n}$ obtenido con la (9') (N_k^p) y el test del χ^2 entre estos últimos. Por otro lado, en las tablas I(a) y II(a) se observan los mismos datos corregidos con las fórmulas de N. Pacilio (5), donde es fácil apreciar la mayor exactitud del ajuste hecho con nuestras fórmulas.

Recapitulando, la manera de aplicar estas correcciones es la siguiente; se hacen mediciones con una fuente de neutrones y se grafica p' en función de la tasa de conteaje verdadera (CR) (fig.1)



Es conveniente ajustar la gráfica a una recta que pasa por el origen. Al hacer mediciones de una NBD se corrigen los ψ experimentales con las expresiones del Ap. III.

El cálculo de los errores "a priori" se realiza en base al número N de muestreos que se han tomado para la medida, sabiendo que las variancias de $\bar{n}^e$ y de V^e son:

$$\frac{\bar{n}}{N} \quad \text{y} \quad \frac{2}{N} \left(1 + \frac{1}{2\bar{n}}\right) \quad \text{respectivamente}$$

Es interesante notar que en el caso de nuestras experiencias, donde el uso de un preamplificador de carga nos da un tiempo muerto sobremediano elevado, las correcciones de los ψ llegan hasta un 10% en ciertos casos, lo que exige muy buenas medidas de p' . (7). De todos modos, aún contando con un equipo muy superior, el problema del tiempo muerto se manifiesta en mediciones cercanas a crítico con detectores de mucha eficiencia.

Evaluación de las probabilidades de transición $\pi(k \rightarrow k-1)$

Definimos un intervalo δt mayor que el tiempo muerto, de manera que podamos despreciar la influencia de los sucesos ocurridos en un intervalo sobre los demás, pero lo suficientemente pequeño como para que, si ocurren dos sucesos en un intervalo su separación temporal sea inferior al tiempo muerto en casi todos los casos. En la práctica estos supuestos se cumplen lo suficientemente bien para δt del orden de tres veces el TM.

Sea p la probabilidad de ocurrencia de un suceso en δt , por lo que, si dada la supuesta independencia de los intervalos, definimos un proceso multinomial con los estados: E_1 (ninguna cuenta), E_2 (una cuenta contada) y E_3 (dos cuentas no resueltas, o sea una contada y otra perdida), sus probabilidades respectivas serán:

$$p_1 = P(E_1) = 1-p$$

$$p_2 = P(E_2) = p(1-p)$$

$$p_3 = P(E_3) = p^2$$

Tal como se ha definido a $\pi(k \rightarrow k-1)$, es decir: probabilidad de contar $k-1$ cuentas habiendo llegado k (en forma puramente binomial con probabilidades $1-p$ y p), será igual a la relación entre la distribución trinomial de $N-k+1$ estados E_1 , $k-2$ estados E_2 y 1 estado E_3 y la binomial con $N-k$ y k respectivamente:

$$\pi(k \rightarrow k-1) = \frac{\frac{N!}{(N-k+1)!(k-2)!1!} p_1^{N-k+1} p_2^{k-2} p_3}{\frac{N!}{(N-k)!k!} p_1^{N-k} p_2^k}$$

Ya que p es muy aproximadamente igual a $3 \times CR \times TM$ (siendo CR el conteo medio por segundo) es imposible proceder como suele hacerse, es decir buscar el límite de la expresión anterior para $p \rightarrow 0$ pero como aún en los casos más desfavorables p es pequeño, pueden hacerse algunas aproximaciones, despreciando términos de orden superior al segundo en p y resulta:

$$\pi(k \rightarrow k-1) = \frac{k(k-1)}{\bar{n}} p \quad \text{ya que } pN \rightarrow \bar{n}$$

Una expresión más exacta es:

$$\pi(k \rightarrow k-1) = \frac{k(k-1)}{\bar{n}} p \left(1 - \frac{(\bar{n}-1)(k-1)}{\bar{n}} p\right)$$

pero no es de mucha utilidad ya que complica enormemente el cálculo sin mejorar mucho la corrección.

- APENDICE II -

Corrección por tiempo muerto de una distribución de Poisson (PD):

La función generatriz de una PD es

$$G(s) = \exp[\bar{n}(s-1)] \quad (1)$$

la que tiene las siguientes propiedades

$$p_k = \left| \frac{d^k G(s)}{ds^k} \right|_{s=0} \quad (2)$$

$$\frac{p_k}{k(k-1)\dots(k-m-1)} = \left| \frac{d^m G(s)}{ds^m} \right|_{s=1} = (\bar{n})^m \quad (3)$$

de (2) se deduce que

$$p_{k+1} = p_k \bar{n} / (k+1) \quad (4)$$

y de (3)

$$\overline{n^2} = (\bar{n})^2 + \bar{n} \quad (5)$$

$$\overline{n^3} = (\bar{n})^3 + 3(\bar{n})^2 + \bar{n} \quad (6)$$

$$\overline{n^4} = (\bar{n})^4 + 6(\bar{n})^3 + 7(\bar{n})^2 + \bar{n} \quad (7)$$

como vimos, la expresión del número de veces que aparece el registro k , o sea N_k^e en función de su valor teórico N_k (sin tiempo muerto) es, despreciando transiciones de orden superior al primero:

$$N_k^e = N_k + p(1+1/\bar{n})kN_k - (p/\bar{n})k^2N_k \quad (8)$$

multiplicando ambos miembros por k , sumando sobre k de 0 a ∞ y dividiendo por $\sum N_k = \sum N_k^e$

$$\bar{n}^e = \bar{n} + p(1+1/\bar{n})\overline{n^2} - (p/\bar{n})\overline{n^3} \quad (9)$$

y reemplazando de (5) y (6) en la expresión anterior se obtiene

$$\bar{n}^e = \bar{n}(1-p) \quad (9')$$

ahora multiplicando (8) por k^2 , sumando y dividiendo como antes

$$\overline{n^2}^e = \overline{n^2} + p(1+1/\bar{n})\overline{n^3} - (p/\bar{n})\overline{n^4}$$

y reemplazando de (5), (6) y (7):

$$\bar{n}^2 = (\bar{n})^2(1-2p) + \bar{n}(1-3p) \quad (10)$$

y teniendo en cuenta que $\bar{n}v^e = \bar{n}^2 - (\bar{n})^2$ obtenemos la resolvente de p (ecuación de segundo grado en p)

$$F(p) \equiv A_2 p^2 + A_1 p + A_0 = 0$$

con los siguientes valores para los A_j

$$A_2 = -(1-v^e)$$

$$A_1 = 2(2-v^e)$$

$$A_0 = v^e - \bar{n}^e - 3$$

y las raíces son por consiguiente:

$$p = \frac{v^e - 2 \pm \sqrt{1 + \bar{n}^e(1-v^e)}}{v^e + \bar{n}^e - 3}$$

elegimos el signo + ya que si $v^e \rightarrow 1$ $p \rightarrow 0$

- APENDICE III -

Corrección por tiempo muerto de una binomial negativa (NBD):

La función generatriz de la NBD es

$$G(s) = [1 + \psi(1-s)]^{-\bar{n}/\psi} \quad (1)$$

de la que resultan

$$P_{k+1} = P_k \frac{n+k\psi}{k+1} \frac{1}{1+\psi} \quad (2)$$

y la expresión de los momentos es

$$\overline{n^2} = (\bar{n})^2 + (1+\psi)\bar{n} \quad (3)$$

$$\overline{n^3} = (\bar{n})^3 + (1+\psi)[3(\bar{n})^2 + (1+2\psi)\bar{n}] \quad (4)$$

$$\overline{n^4} = (\bar{n})^4 + (1+\psi)[6(\bar{n})^3 + (7+11\psi)(\bar{n})^2 + (1+6\psi+6\psi^2)\bar{n}] \quad (5)$$

teniendo en cuenta (2), la expresión de N_k^e es la siguiente:

$$N_k^e = N_k + p\left(\frac{1}{\bar{n}} + \frac{1}{1+\psi}\right)kN_k - p\frac{1}{\bar{n}(1+\psi)}k^2N_k \quad (6)$$

de la que se deducen por el mismo procedimiento del Ap.I

$$\bar{n}^e = \bar{n}(1-p) - p\psi \quad (7)$$

$$\overline{n^2}^e = (\bar{n})^2(1-2p) + \bar{n}(1-3p+\psi-6p\psi) - 3p\psi - 4p\psi^2 \quad (8)$$

reemplazando (7) en (8) nos queda la resolvente de ψ

$$F(\psi) = B_2\psi^2 + B_1\psi + B_0 = 0$$

con los valores para los B_j

$$B_2 = -p(3-2p)$$

$$B_1 = \bar{n}^e(1-5p+2p^2) - 2p(1-p)$$

$$B_0 = (\bar{n}^e)^2(1-2p) - \overline{n^2}^e(1-p)^2 + \bar{n}^e(1-4p+3p^2)$$

- TABLAS -

Tabla II - Ajuste por p de una PD (exp.2)

k	N_K^e	N_K^c	N_K^p	ΔN_K	ΔN_K^2	χ_K^2
0	6775	6775	6766	- 9	81	0.01
1	21534	20887	20975	+ 88	7744	0.37
2	33894	32528	32511	- 17	289	0.01
3	34867	33753	33595	-158	24964	0.74
4	26111	26007	26036	+ 29	841	0.03
5	15527	16259	16142	-117	13689	0.85
6	7396	8348	8340	- 8	64	0.01
7	2824	3543	3694	+151	22801	6.17
8	961	1397	1431	+ 34	1156	0.81
9	389	696	703	+ 7	49	0.07

$$p = 0.03095 \pm 0.00006$$

$$\bar{n} = 3.10 \pm 0.01$$

$$\chi^2 = 9.07$$

$$L = 10 - 2 = 8$$

$$P = 0.33$$

Tabla II(a) - Ajuste por Δ de una PD (exp.2)

k	N_K^e	N_K^c	N_K^p	ΔN_K	ΔN_K^2	χ_K^2
0	6775	4676	4749	+ 73	5329	1.12
1	21534	16327	16397	+ 70	4900	0.30
2	33894	28509	28309	-200	40000	1.41
3	34867	32928	32583	-345	119025	3.65
4	26111	28110	28128	+ 18	324	0.01
5	15527	19436	19425	- 11	121	0.01
6	7396	11057	11179	+122	14884	1.33
7	2824	5240	5514	+274	75076	13.62
8	961	2350	2380	+ 30	900	0.38
9	389	1395	1365	- 30	900	0.66

$$\Delta = 0.130 \pm 0.003$$

$$\bar{n} = 3.45 \pm 0.08$$

$$\chi^2 = 22.49$$

$$L = 10 - 2 = 8$$

$$P < 0.02$$

- TABLAS -

Tabla I - Ajuste por p de una PD (exp.1)

k	N_k^e	N_k^c	N_k^p	ΔN_k	ΔN_k^2	χ_k^2
0	6733	6733	6700	- 33	1089	0.16
1	21418	20780	20837	+ 57	3249	0.16
2	33925	32567	32402	-165	27225	0.84
3	34696	33591	33590	- 1	1	0.00
4	26248	26133	26116	- 17	289	0.01
5	15435	16144	16244	+100	10000	0.62
6	7424	8359	8420	+ 61	3721	0.44
7	2998	3746	3741	- 5	25	0.01
8	977	1410	1454	+ 44	1936	1.33
9	276	488	503	+ 15	225	0.45
10	90	215	212	- 3	9	0.04

$$p = 0.03072 \pm 0.00006$$

$$\bar{n} = 3.11 \pm 0.01$$

$$\chi^2 = 4.06$$

$$L = 11 - 2 = 9$$

$$P = 0.90$$

Tabla I(a) - Ajuste por Δ de una PD (exp.1)

k	N_k^e	N_k^c	N_k^p	ΔN_k	ΔN_k^2	χ_k^2
0	6733	4644	4722	+ 78	6084	1.29
1	21418	16228	16338	+110	12100	0.74
2	33925	28513	28265	-248	61504	2.18
3	34696	32738	32599	-139	19321	0.59
4	26248	28230	28198	- 32	1024	0.03
5	15435	19299	19513	+214	45796	2.35
6	7424	11084	11253	+169	28561	2.54
7	2998	5554	5562	+ 8	64	0.01
8	977	2384	2406	+ 22	484	0.20
9	366	1308	1385	+ 77	5929	4.84

$$\Delta = 0.130 \pm 0.003$$

$$\bar{n} = 3.46 \pm 0.08$$

$$\chi^2 = 14.21$$

$$L = 10 - 2 = 8$$

$$P = 0.09$$

- REFERENCIAS -

- 1) P.R.Pluta - "An Analysis of Nuclear Reactor Fluctuations by Methods of Stochastic Processes" - Doc. Dissert. University of Michigan 1962.-
- 2) W.Feller - "An Introduction to Probability Theory and its Applications" - J.W.& Sons, Vol. I (1950).-
- 3) R.D.Evans - "The Atomic Nucleus" Ch. 26
- 4) Idem. Ch. 27
- 5) N.Pacilio - "Bernoulli Trials and Counting Correlations in Nuclear Particles Detection" - Nuc.Inst.& Methods 42(1966)
- 6) D.Babala - "Neutron Counting Statistics in Nuclear Reactors" Kjeller Report KR-114 Nov. 1966.-
- 7) C.Castro Madero, R.Corcuera, H.Schilman - Informe preliminar sobre mediciones de α -Feynman" - CNEA (inf. int.) 1968.-
